ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966

Seria: AUTOMATYKA z. 7 Nr kol. 167

BOGDAN SKALMIERSKI
Zakład Dynamiki
Układów Mechanicznych

DYNAMIKA PROCESU WALCOWANIA CIAŁ LEPKOSPRĘŻYSTYCH

Streszczenie. W pracy omówiono problem dynamiki walcowania ciał lekosprężystych. Założono, że włókna materiału prostopadle do osi walcowania mogą odkształcać się niezależnie. Skorzystano z reologicznego modelu Jeffreysa.

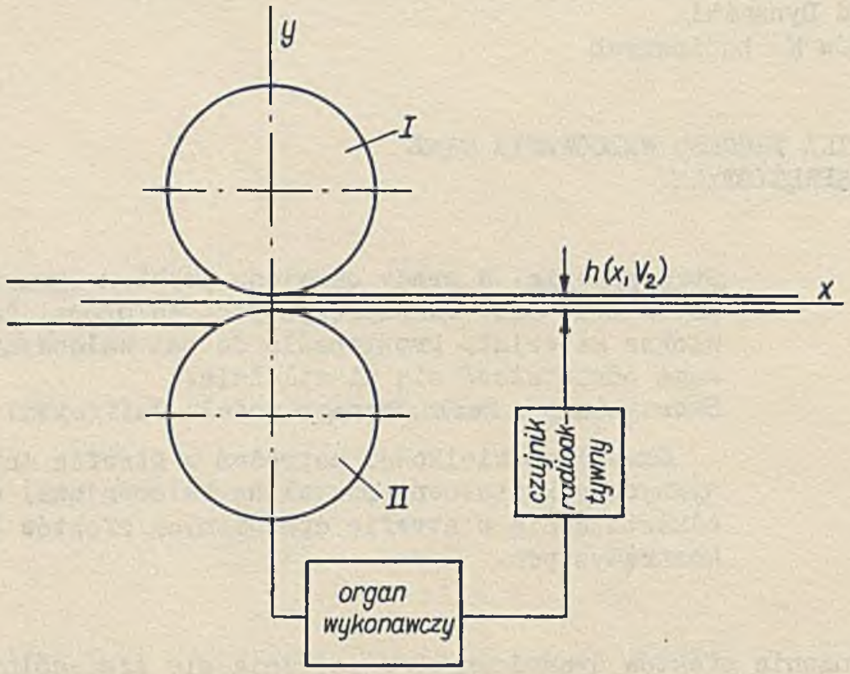
Określono wielkości naprężeń w strefie intensywnych odkształceń (szczelina walcownicza) oraz odkształcenia w strefie opóźnionych efektów lepkosprężystych.

Zagadnienie efektów dynamicznych uwidacznia się szczególnie wyraźnie w przypadku sterowania procesem walcowania przy dużych prędkościach posuwu. Pomiaru grubości $h(x, V_1)$ dokonuje się przy pomocy czujnika. Sygnał ten z kolei steruje organem wykonawczym. Problem polega na określeniu $h(x, V_1)$ w zależności od warunków kinematycznych procesu oraz własności dynamicznych materiału walcowanego. W pracy przyjęto, że materiałem walcowanym jest ciało lepkosprężyste. W rozważaniach szczegółowych wykorzystano model reologiczny Jeffreysa [2].

1. Model kinematyczny procesu walcowania

Walce I i II obracają się w przeciwnych kierunkach, (rys. 1) pomiędzy nimi kształtuje się materiał.
Rozróżniamy trzy strefy materiału: A - strefa neutralna, B - strefa intensywnych odkształceń, wreszcie C - strefa opóźnionych efektów lepkosprężystych.

Załóżmy, że kierunki osi x i y są głównymi kierunkami odkształceń. Przez h_o oznaczamy grubość taśmy przed walcowaniem.



Rys. 1

W strefie intensywnych odkształceń miarą odkształcenia w kierunku osi y jest

$$\varepsilon = \frac{h-h_o}{h_o} \tag{1.1}$$

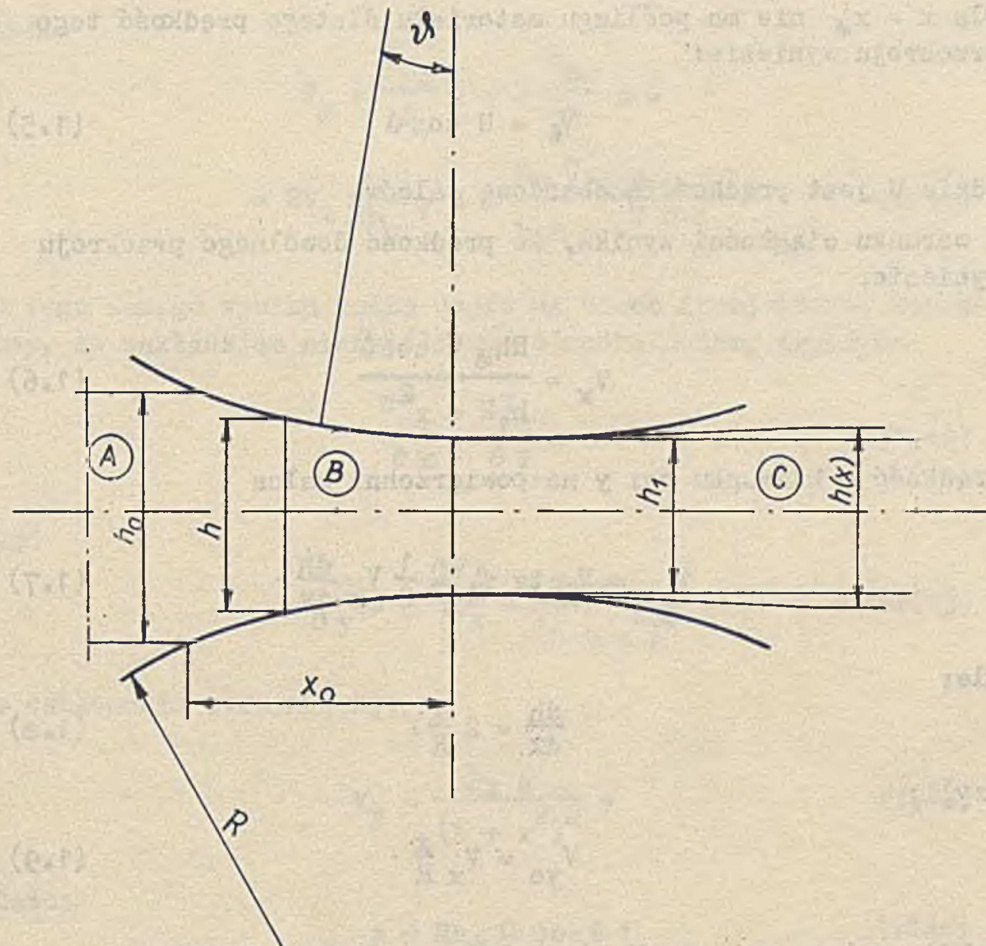
gdzie h jest grubością warstwy walcowanej w dowolnym przekroju

ale $$h = 2\left(\frac{h}{2} + R - \sqrt{R^2 - x^2}\right) \tag{1.2}$$

$$h_o = 2\left(\frac{h}{2} + R - \sqrt{R^2 - x_o^2}\right) \tag{1.3}$$

Przedstawiając (1.2) i (1.3) do (1.1) napiszemy

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x_o^2}}{\frac{h}{2} + R - \sqrt{R^2 - x_o^2}} \tag{1.4}$$



Rys. 2

Jeżeli przyjąć, że $x \ll R$ to zależność (1.4) uprości się

$$\varepsilon = \frac{x^2 - x_o^2}{Rh_1 + x_o^2} \tag{1.4a}$$

gdyż wtedy: $h \cong (h_1 + \frac{x^2}{R})$ (1.4b)

Dla $x = x_\vartheta$ nie ma poślizgu materiału dlatego prędkość tego przekroju wyniesie:

$$V_\vartheta = U \cos\vartheta \tag{1.5}$$

gdzie U jest prędkością obwodową walców.

Z warunku ciągłości wynika, że prędkość dowolnego przekroju wyniesie:

$$V_x = \frac{Rh_\vartheta U \cos\vartheta}{h_1 R + x^2} \tag{1.6}$$

Prędkość o kierunku osi y na powierzchni walca

$$V_{yo} = V_x \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{2} V_x \frac{dh}{dx}. \tag{1.7}$$

Ale:

$$\frac{dh}{dx} = 2\frac{x}{R}; \tag{1.8}$$

czyli:

$$V_{yo} = V_x \frac{x}{R}. \tag{1.9}$$

Załóżmy następnie, że V_y jest liniową funkcją zmiennej y. Zatem:

$$V_y = C_1 y + C_2 \tag{1.10}$$

Dla:

$$y = o \quad V_y = o,$$

natomiast dla

$$y = y_o . \; V_y = V_{yo};$$

stąd:

$$C_2 = o, \quad V_{yo} = C_1 \, y_o$$

Zatem:

$$V_y = \frac{V_{yo}}{y_o} y = 2 \frac{V_{yo}}{h} y =$$

$$= 2V_x \frac{x}{Rh_o} y = 2 \frac{h_\vartheta \, U \cos\vartheta}{h_1 R + x^2} \frac{x}{h} y \qquad (1.11)$$

Do tego samego wyniku można dojść na nieco innej drodze. Zauważamy, że zakładając nieściśliwość ośrodka możemy napisać:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = o \qquad (1.12)$$

stąd

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = - \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{2x \, a}{(b + x^2)^2} \qquad (1.13)$$

Po całkowaniu otrzymujemy:

$$V_y = \frac{2x \, a}{(b + x^2)^2} y \qquad (1.14)$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} a &= Rh_\vartheta \, U \cos\vartheta \\ b &= h_1 R \end{aligned}\right\} \qquad (1.14a)$$

Całkując (1.13) założono, że dla $y = o$, $V_y = o$. Łatwo zauważamy identyczność wyniku (1.11) z (1.14).

2. Zjawiska dynamiczne

W naszych rozważaniach interesować będzie nas przede wszystkim proces zmian grubości warstwy walcowanej. Założymy, że każde włókno o kierunku osi y pracuje niezależnie. Innymi słowy, założymy jednoosiowy stan naprężeń. W tym przypadku, dla ciał lepkosprężystych, równanie stanu wiążące naprężenie $\sigma(t)$ z odkształceniem $\varepsilon(t)$ jest następujące [1]:

$$P(D)\ \sigma(t) = Q(D)\ \varepsilon(t) \tag{2.1}$$

gdzie: $P(D)$ i $Q(D)$ są liniowymi operatorami względem czasu t.

Ponieważ rozpatrujemy ciała podlegające zasadzie superpozycji Boltzmanna przeto, $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$ można traktować jako sumy naprężeń i odkształceń.

Wykonując transformację Laplace'a na (2.1) możemy określić funkcuę przejścia układu

$$K(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} \tag{2.2}$$

Funkcja

$$\Psi(p) = \frac{1}{p} K(p) \tag{2.3}$$

jest transformatą funkcji relaksacji materiału walcowanego.

Można utworzyć inną funkcję operatorową $\varphi(p)$ taką ażeby,

$$\Psi(p)\ \varphi(p) = \frac{1}{p^2} \tag{2.4}$$

$\varphi(p)$ jest transformatą funkcji pełzania materiału.

Przejdziemy obecnie do opisu interesującego nas zjawiska. W strefie intensywnych odkształceń wymuszonych $\varepsilon(t)$, możemy znaleźć rozkład naprężeń $\sigma(t)$ z równania

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \Psi(t-\tau) d\tau \tag{2.5}$$

Przechodząc do strefy opóźnionych efektów lepkosprężystych, będziemy interesować się odkształceniami o kierunku osi y, które można wyznaczyć z analogicznej zależności

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \varphi(t-\tau) d\tau \tag{2.6}$$

W naszym przypadku

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t)\, H(t) \tag{2.7}$$

gdzie: $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x > o \\ o & \text{dla} \quad x < o \end{cases}$

Funkcja Heaviside'a $H(t)$ wprowadzona w (2.7) sprawia, że historia odkształconego włókna zaczyna się od $t = o$.

Różniczkując napiszemy:

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} = \varepsilon(t)\, \delta(t) + H(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \tag{2.8}$$

$\delta(t)$ jest funkcją Diraca.

Analogicznie dla $\sigma(t)$

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = \sigma(t)\, \delta(t) + H(t) \frac{\sigma(t)}{\partial t} \tag{2.9}$$

Podstawiając (2.8) i (2.9) odpowiednio do (2.5) i (2.6) otrzymujemy:

$$\sigma(t) = \varepsilon(o)\Psi(t) + \int_0^t \frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}\Psi(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \varepsilon(o)\Psi(t) + \varepsilon(t)\Psi(o) - \varepsilon(o)\Psi(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau)\frac{\partial\Psi(t-\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,$$

Podstawiając

$$\bar{\Psi}(t-\tau) = -\frac{\partial\Psi(t-\tau)}{\partial\tau}$$

napiszemy

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)\Psi(o) + \int_0^t \varepsilon(\tau)\bar{\Psi}(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.10)$$

Funkcja $\bar{\Psi}(t-\tau)$ jest tak zwaną funkcją pamięci układu (dziedziczenia).
Analogicznie

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\varphi(o) + \int_0^t \sigma(\tau)\Phi(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.11)$$

gdzie: $\Phi(t-\tau) = -\frac{\partial\varphi(t-\tau)}{\partial\tau}$

Wartość naprężeń może być obliczona dla strefy B na podstawie (2.10), w strefie tej bowiem możemy określić $\varepsilon(t)$ w oparciu o (1.4a) podstawiając w miejsce x wartość $x(t)$ określoną z równania:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{b + x^2} \qquad (2.12)$$

Całkując (2.12) otrzymamy:

$$t = \frac{b}{a}(x - x_o) + \frac{1}{3a}(x^3 - x_o^3) \qquad (2.13)$$

a stąd

$$x(t) = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{q_2^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{q_2^3}{27}}} \qquad (2.14)$$

gdzie:

$$q_1 = x_0^3 - 3bx_0 - 3at \qquad (2.14a)$$

$$q_2 = 3b$$

Z łatwością stwierdzamy, że rozwiązanie całki (2.10) bardzo się komplikuje, dlatego wygodniej będzie przyjąć rozwinięcie w szereg x(t) z ograniczeniem się do pierwszych wyrazów. Wtedy:

$$x(t) = x_0 + \alpha t + \beta t^2 \qquad (2.15)$$

Formalnie nie łącząc (2.15) z (2.14) możemy określić α i β z warunku ciągłości, bowiem

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\beta t$$

Dla $t = o$

włókno wchodzi do strefy B z prędkością V_o, zatem $\alpha = V_o$, natomiast dla $t = t_1$, włókno opuszcza strefę B z prędkością V_1, z czego wynika, że:

$$V_1 = \alpha + 2\beta t_1 \qquad (2.16)$$

Na podstawie (2.15)

$$t = \frac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(x-x_o)}\right) \qquad (2.17)$$

Dla $t = t_1$ $x = x_1$,

czyli $t_1 = \frac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(x_1-x_o)}\right)$ (2.18)

Czas t_1 nie jest ujemnym bo wartość $x_o < o$.
Podstawiając (2.18) do (2.16) otrzymujemy.

$$V_1 = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(x_1 - x_o)}$$

Stąd

$$\beta = \frac{V_o^2 - V_1^2}{4(x_1 - x_o)} \tag{2.19}$$

albo

$$\beta = V_1^2 \frac{1 - \left(\frac{h_1}{ho}\right)^2}{4(x_1 - x_o)} \tag{2.20}$$

W dalszym ciągu można V_1 powiązać z prędkością obwodową walców U.

Mianowicie

$$V_1 h_1 = U h_\vartheta \cos\vartheta \tag{2.21}$$

a stąd

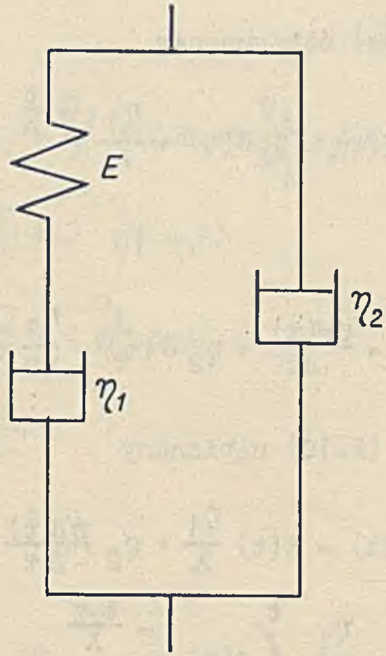
$$\beta = U^2 \left(\frac{h_\vartheta}{h_1}\right)^2 \cos^2\vartheta \frac{1 - \left(\frac{h_1}{h_o}\right)^2}{4(x_1 - x_o)} \quad . \tag{2.22}$$

3. Przypadek ciała Jeffreysa

W rozważaniach szczegółowych weźmiemy pod uwagę model Jeffreysa [2] [3]. Model ten (rys. 2) składa się z równolegle połączonych modeli Maxwella i modelu Newtona. Do określenia zachowania się takiego układu wystarczy trzy stałe E, η_1 i η_2. Oznaczają one odpowiednio, moduł sprężystości oraz lepkości tłumików.

Równanie stanu dla przyjętego modelu jest następujące:

$$\left(\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1}\right)\sigma(t) = \left[\left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\eta_2}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\varepsilon(t) \qquad (3.1)$$



Rys. 3

Wykonując transformację Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych otrzymujemy:

$$\left(\frac{p}{E} + \frac{1}{\eta_1}\right)\sigma(p) = \left[\left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)p + \frac{\eta_2}{E}p^2\right]\varepsilon(p) \qquad (3.2)$$

stąd

$$\Psi(p) = \frac{\eta_1\eta_2 p}{E(1 + \lambda p)} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{1 + \lambda p} \qquad (3.3)$$

gdzie: $\lambda = \frac{\eta_1}{E}$

Po przekształceniach

$$\Psi(p) = \eta_2 + \eta_1 \frac{1}{1+\lambda p} \tag{3.3a}$$

Retransformując (3.3a) otrzymujemy

$$\Psi(t) = \eta_2 \delta(t) + \frac{\eta_1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{3.4}$$

Funkcja

$$\bar{\Psi}(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \eta_2 \delta'(t) - \frac{\eta_1}{\lambda 2} e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{3.5}$$

korzystając z wzoru (2.10) napiszemy

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \frac{\eta_1}{\lambda} + \eta_2 \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} - \frac{\eta_1}{\lambda^2} \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} d\tau \tag{3.6}$$

Wyrażenie (3.6) jest słuszne dla strefy B tzn. dla $o \leqslant t \leqslant t_1$. Korzystając z (1.4a) oraz z (2.15) napiszemy

$$\varepsilon(t) = \frac{B}{2} \left[2x_o \alpha t + (\alpha^2 + 2x_o \beta) t^2 + 2\alpha\beta t^3 + \beta^2 t^4 \right] \tag{3.7}$$

gdzie

$$B = \frac{2}{Rh_1 + x_o^2} \tag{3.7a}$$

Natomiast

$$\frac{(t)}{t} = B\, x_o + (^2 + 2x_o)t + 3 \; t^2 + 2 \; ^2 t \tag{3.8}$$

Wstawiając (3.7) i (3.8) do (3.6) oraz wykonując całkowanie otrzymujemy

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \sigma_3 t^3 + \sigma_4 t^4 + \sigma_5 (1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}) \qquad (3.9)$$

gdzie:

$$\sigma_0 = +\eta_2 a_1; \; \sigma_1 = \frac{\eta_1}{\lambda} (a_1 - b_1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} a_2 \lambda)$$

$$\sigma_2 = \frac{\eta_1}{\lambda} (a_2 - \frac{b_2}{\lambda} + 3 \frac{\eta_2}{\eta_1} a_3 \lambda)$$

$$\sigma_3 = \frac{\eta_1}{\lambda} (a_3 - \frac{b_3}{\lambda^2} + 4 \frac{\eta_2}{\eta_1} a_4 \lambda) \qquad (3.9a)$$

$$\sigma_4 = \frac{\eta_1}{\lambda} (a_4 - \frac{b_4}{\lambda^3})$$

$$\sigma_5 = -\eta_1 \; A$$

$$a_1 = Bx_0 \alpha$$

$$a_2 = \frac{B}{2} (\alpha^2 + 2x_0 \beta) \qquad (3.9b)$$

$$a_3 = B \alpha \beta$$

$$a_4 = \frac{1}{2} B \alpha^2$$

$$A = 2 \lambda a_2 - a_1 - 6 \lambda^2 (a_3 - 4 \lambda a_4)$$

$$b_1 = a_1 + 2 \lambda a_2 + 6 \lambda^2 (a_3 - 4 \lambda a_4) \qquad (3.9c)$$

$$b_2 = \lambda a_2 - 3\lambda^2 (a_3 - 4\lambda a_4)$$

$$b_3 = \lambda^2 (a_3 - 4\lambda a_4)$$

$$b_4 = \lambda^3 a_4$$

Przechodząc w dalszym ciągu do obliczania odkształceń w strefie opóźnionych efektów lepkosprężystych będziemy korzystać z (2.11). Transformata funkcji pełzania dla przyjętego modelu reologicznego Jeffreysa jest, co wynika z (3.2), następująca:

$$\varphi(p) = \frac{\eta_1}{pE(\eta_1+\eta_2)(1+\lambda_1 p)} + \frac{1}{(\eta_1+\eta_2)p^2(1+\lambda_1 p)} \tag{3.10}$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1\eta_2}{E(\eta_1+\eta_2)} \tag{3.10a}$$

Natomiast

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_1}{\eta_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\right) + \frac{1}{\eta_1+\eta_2}\left(\lambda_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} + t - \lambda_1\right) \tag{3.11}$$

Różniczkując $\varphi(t)$ otrzymujemy:

$$\Phi(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{1}{\eta_2} e^{-\frac{t}{\lambda_1}} + \frac{1}{\eta_1+\eta_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\right) \tag{3.12}$$

Albo po przekształceniu

$$\Phi(t) = \Phi_o + \Phi_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \tag{3.13}$$

gdzie:

$$\Phi_o = \frac{1}{\eta_1+\eta_2}$$
$$\Phi_1 = \frac{1}{\eta_2(\eta_1+\eta_2)} \qquad (3.13a)$$

Wykorzystując (3.6) będziemy mogli określić opóźnione efekty lepkosprężyste scharakteryzowane odkształceniem $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t) \qquad (3.14)$$

gdzie:

$$\varepsilon_1(t) = \eta_2 \left(\Phi_o \varepsilon(t_1) + \Phi_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \int_o^{t_1} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} e^{\frac{\tau}{\lambda_1}} d\tau\right)$$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\eta_1}{\lambda}\left[\Phi_o \int_o^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau + \Phi_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \int_o^{t_1} \varepsilon(\tau) e^{\frac{\tau}{\lambda_1}} d\tau\right] \qquad (3.14a)$$

$$\varepsilon_3(t) = -\frac{\eta_1}{\lambda^2}\left[\Phi_o \int_o^{t_1} F(\tau)d\tau + \Phi_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \int_o^{t_1} F(\tau) e^{\frac{\tau}{\lambda_1}} d\tau\right]$$

Natomiast:

$$F(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\lambda}} \int_o^{\tau} \varepsilon(\nu) e^{\frac{\nu}{\lambda}} d\nu \qquad (3.14b)$$

Można również wykorzystać nezpośrednio (3.9), wtedy:

$$\varepsilon(t) = \int_o^{t_1} \sigma(\tau)\Phi(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= \sum_{i=o}^{4} \sigma_i \int_o^{t_1} \tau^i \Phi(t-\tau)d\tau + \sigma_5 \int_o^{t_1} (1-e^{-\frac{\tau}{\lambda}})\Phi(t-\tau)d\tau \qquad (3.15)$$

Wykonując całkowanie otrzymujemy:

$$\varepsilon(t) = \Phi_o\left[\sum_{i=o}^{4} \sigma_i \frac{t_1^{i+1}}{i+1} + \sigma_5\,(t_1 + \lambda e^{-\frac{t_1}{\lambda}})\right] +$$

$$+ \Phi_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\left\{\sigma_o\lambda_1(e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} - 1) + \sigma_1\lambda_1^2\left[(\frac{t_1}{\lambda_1} - 1)e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} + 1\right] + \sigma_2\lambda_1^3\left[(\frac{t_1^2}{\lambda_1^2} - 2\frac{t_1}{\lambda_1} +\right.\right.$$

$$\left. + 2)\,e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} - 2\right] + (\sigma_3 - 4\lambda_1\sigma_4)\,\lambda_1^4\left[(\frac{t_1^3}{\lambda_1^3} - 3\frac{t_1^2}{\lambda_1^2} + 6\frac{t_1}{\lambda_1} - 6)\,e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} + 6\right] +$$

$$\left. + \sigma_4\,\lambda_1\,t_1^4\,e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} + \sigma_5\left[\lambda_1(e^{\frac{t_1}{\lambda_1}} - 1) - \chi(e^{\frac{t_1}{\chi}} - 1)\right]\right\} \quad (3.13)$$

gdzie:
$$\chi = \frac{\lambda_1\lambda}{\lambda - \lambda_1} \quad (3.13a)$$

Grubość taśmy walcowanej wyrazić można w zależności od czasu równaniem

$$h(t) = h_o\left[1 + \varepsilon(t)\right] \quad (3.14)$$

Wielkość h(t) dąży do

$$h(\infty) = h_o\left[1 + \varepsilon(\infty)\right] \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\varepsilon(\infty) = \Phi_o\left[\sum_{i=o}^{4} \sigma_i \frac{t_1^{i+1}}{i+1} + \sigma_5\,(t_1 + \lambda e^{-\frac{t_1}{\lambda}})\right] \quad (3.14)$$

W ten sposób określiliśmy w pracy dwie wielkości

1) rozkład naprężeń $\sigma(t)$,

2) zmiany grubości taśmy w czasie $h(t)$.

Czas przebywania włókna w strefie intensywnych odkształceń dla omawianego modelu określimy wykorzystując (2.18), gdzie położymy $x_1 = 0$ wtedy

$$t_1 = \frac{1}{2\beta}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta x_0}\right) \qquad (3.15)$$

W wyrażeniu (3.13) można podstawić dla $t > t_1$ w miejsce t wartość $t_1 + t_2$, gdzie $t_2 = \frac{x}{V_1}$.

Wtedy

$$t = t_1 + \frac{x}{V} \qquad (3.16)$$

lub po wykorzystaniu (2.21)

$$t = t_1 + \frac{x\, h_1}{Uh_\vartheta \cos\vartheta} \qquad (3.17)$$

W ten sposób można określić h w zależności od położenia przekroju określonego współrzędną x.

4. Uwagi końcowe

Wracając do schematu na rysunku 1 zastanowimy się nad problemem przypadkowej zmiany grubości $h(x, V_1)$ o Δh_1.

W odpowiedzi na tę zmianę organ wykonawcy zmieni odległość pomiędzy walcami h_1.

Załóżmy, że Δh_1 jest tak małe, że można pominąć zmianę parametrów walcowania. Proces regulacji będzie polegał na ciągłej korekcji położenia wzajemnego walców w celu utrzymania żądanej grubości taśmy.

Ponieważ mamy do czynienia z ciałem Boltzmanna przeto te dodatkowe efekty będą superponowały się z efektami pierwotnymi.

Na przykład: chcąc obliczyć naprężenia w strefie intensywnych odkształceń wykorzystamy zależność:

$$\sigma_r(t) = \left[\varepsilon(t)+\varepsilon_r(t)\right]\Psi(o) + \int_0^t \varepsilon(\tau)+\varepsilon_r(\tau)\ \dot{\Psi}(t-\tau)d\tau \qquad (4.1)$$

gdzie: $\dot{\varepsilon}_r(t)$ jest dodatkowym odkształceniem włókien wynikającym z przesunięcia wzajemnego walców.

Możemy analogicznie obliczać odkształcenia w strefie opóźnionych efektów lepkosprężystych wykorzystując (3.14a).

Ze względu na skończoną wartość prędkości V_1 oraz skończoną odległość czujnika od szczeliny pomiędzy walcami, istnieje skończony czas martwy i ten z kolei może wpłynąć na okresowe zmiany grubości taśmy walcowanej.

Rozwiązanie przedstawione w niniejszej pracy zawiera liczne uproszczenia. Odnoszą się one, zarówno do wielkości kinematycznej strefy intensywnych odkształceń, jak i do stanu naprężeń w strefie B i C. Wydaje się, że bez większego trudu można całe rozumowanie przenieść na zagadnienie dwuwymiarowe. Wtedy problem nieco się skomplikuje. Rozsądniej chyba byłoby w obecnej chwili porównać otrzymane wyniki z rzeczywistością. Być może, że przez odpowiedni dobór parametrów η_1, η_2 i E w modelu Jeffreysa, można będzie dostatecznie wiernie opisać ten bardzo złożony proces.

LITERATURA

[1] Nowacki W.: Teoria pełzania.Warszawa Arkady 1963.

[2] Jeffreys H.: The Earth Canbride Univ Press 1929-1952.

[3] Reiner M.: Rheology Handbuch der Physik Bd VI Berlin 1958.

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Р е з ю м е

В статье рассмотрену проблему динамики процесса прокатки вязкоупругих материалов. Предполагается независимость деформации волокон материала, перпендикулярных к оси прокатки. Использована реологическая модель Джефрея. Автор различает три зоны прокатываемого материала:

1) нейтральная зона,
2) зона интенсивных деформаций,
3) зона опоздавших вязкоупругих эффектов. Принято плоское состояние деформации, определенное непрерывностью потока материала, а также кинематическими условиями процесса прокатки. Такое описание дает возможност использовать функцию состояния для определения натяжений и деформации. Таким образом получен ответ на вопроо: какие натяжения существуют в зоне интенсивных отклонений, а также какой вид отклонений в третей зоне.

Как натяжение так и деформация представляют собой функции параметров прокатываемого материала. Для определения свойств материала доотаточно указать три физических констант Джефрея: η_1, η_2 и E которые обозначают соответственно вязкость демифирования и модуль упругоср материала.

A DYNAMIC PROBLEM OF ROLLING PROCESS OF VISCOELASTIC BODIES

S u m m a r y

This paper presents a dynamic problem of rolling of viskoelastic bodies.

It's assumed the independence of deformation of the perpendicular fibres of material. The Jeffry's body is taken into consideration. Author diskriminates three zones of material: 1° the neutral zone, 2° the zone of intensive deforma-

tion, 3° the zone of delayed viscoelastic effects, It's assumed the flat state of stress, determined through continuity of material flow and kinematic conditions of rolling. This description makes possible the utilization of function of the state to describe the stress and deformation. In this way is given an answer for the following questions: what is the state of stress in the zone of intensive deformation and the changeability of deformation.

The state of stress and the state of deformation are functions of parameters of rolling and function of properties of rolling material. For determining of material properties it is necessery to know three material constants of Jeffrey's body: η_1, η_2 - coefficients of viscosity of dampers, E - Yung's modulus.