

JAN HARASIMOWICZ

Katedra Podstaw Elektrotechniki

WPLYW INDUKCYJNOŚCI ROZPROSZENIA TRANSFORMATORA  
ZASILAJĄCEGO NA PRZEBIEGI PRĄDÓW W UKŁADZIE PRO-  
STOWNIKOWYM DWUPOŁÓWKOWYM Z PRZEWODEM ZEROWYM

/Rękopis dostarczono 15.I.1960 r./

S t r e s z c z e n i e. Praca zawiera analizę matematyczną przebiegów czasowych prądów w układzie prostownikowym dwupołówkowym z przewodem zerowym, przeprowadzoną przy pomocy rachunku operatorowego. Wyprowadzono wzór na średnią wartość prądu wyprostowanego w zależności od wielkości indukcyjności anodowych.

1. Wstęp

Indukcyjność rozproszenia transformatora zasilającego wywiera istotny wpływ na przebiegi prądów w układzie prostownikowym, a co za tym idzie również na wartość średnią prądu obciążenia.

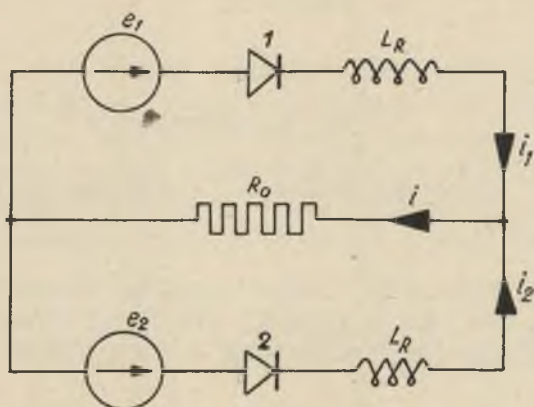
Praca niniejsza jest próbą zilustrowania powyższej tezy przy pomocy metody odmiennej od niewłaściwie w tym przypadku stosowanej czasami metody szeregów Fouriera.

2. Schemat zastępczy układu

Rozpatrzony zostanie dwupołówkowy prostownik idealny zasilany z transformatora z wyprowadzonym środkiem. Obciążenie tego układu prostownikowego stanowi oporność czynna.

Schemat zastępczy układu przedstawia rys.1, gdzie

$$e_1 = - e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi) \quad //1//$$



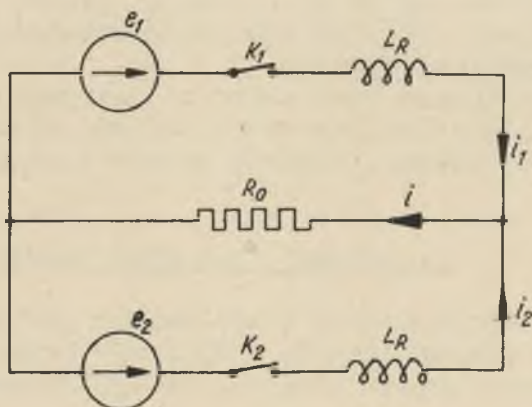
Rys.1. Schemat zastępczy dwupołkowego układu prostownikowego

$L_R$  = wypadkowa indukcyjność rozproszenia jednej połowy uzwojenia

$R_o$  = czynna oporność obciążenia.

Idealne elementy prostujące 1 i 2 można zastąpić dwoma kluczami  $K_1$  i  $K_2$ , które są otwierane i zamykane w określonych momentach czasu.

Zmodyfikowany schemat zastępczy przedstawia rys.2.



Rys.2. Zmodyfikowany schemat zastępczy dwupołkowego układu prostownikowego

### 3. Równania ogólne prądów

Prądy  $i_1$  i  $i_2$  oraz prąd wypadkowy  $i$  są przebiegami periodycznymi, przyjmującymi jedynie wartości dodatnie lub równe zeru.

Prądy te spełniają następujące zależności:

$$\left. \begin{aligned} i_1(\omega t) &= i_1(\omega t \pm 2k\pi) \\ i_2(\omega t) &= i_2(\omega t \pm 2k\pi) \\ i_2(\omega t) &= i_1[\omega t \pm (k+1)\pi] \\ i(\omega t) &= i_1(\omega t) + i_2(\omega t) = i(\omega t \pm k\pi) \end{aligned} \right\} \quad /2/$$

gdzie

$$k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Praca układu prostownikowego składa się z kolejno po sobie następujących interwałów czasowych, przewodzenia jednego z elementów prostujących oraz przewodzenia obydwu elementów prostujących jednocześnie, co ilustruje rys.3.

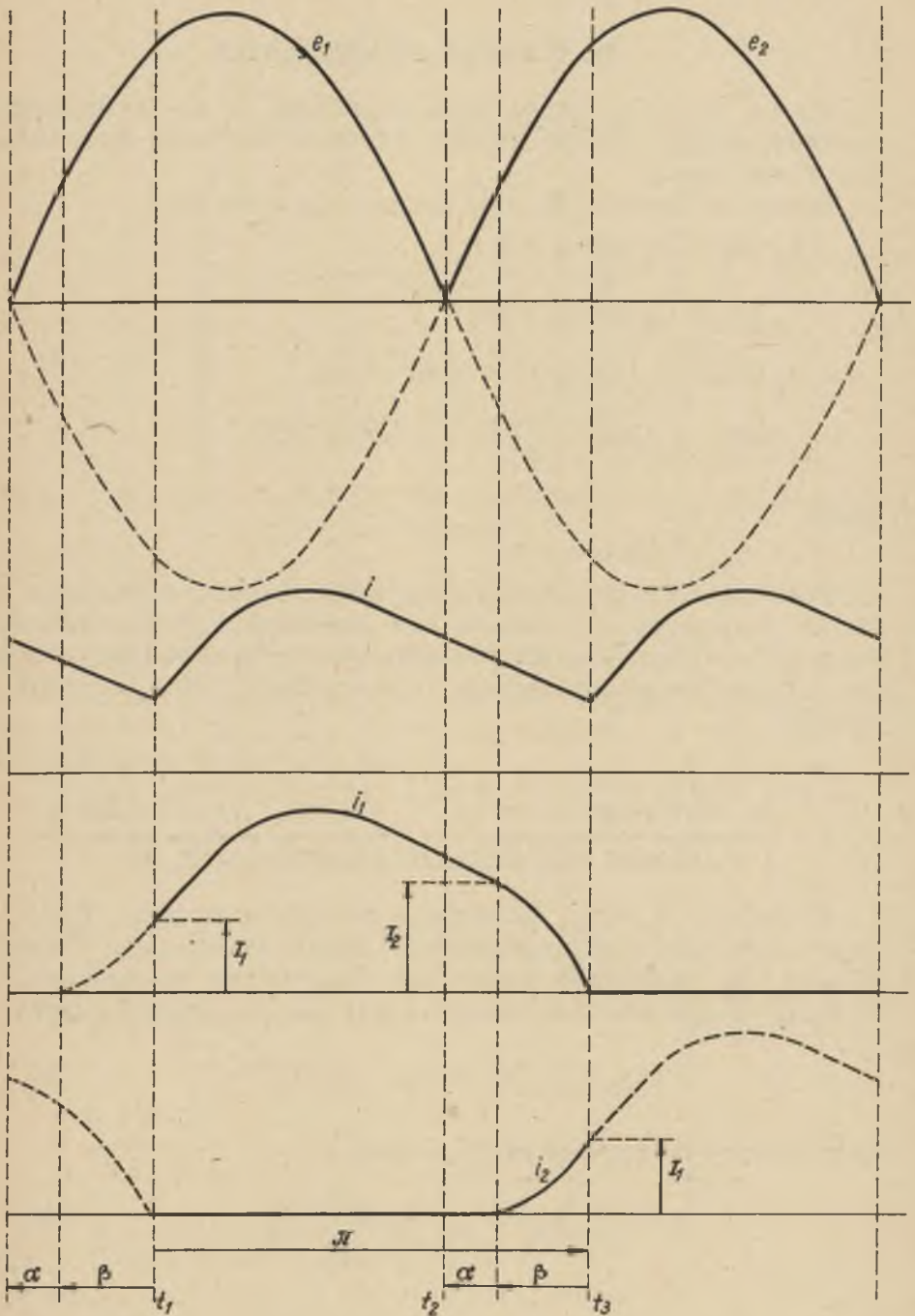
### 4. Interwał czasowy $t_1 < t < t_2$ przewodzenia jednego elementu prostującego /nr 1/

W chwili  $t = t_1$  następuje otwarcie klucza  $K_2$ , przy czym klucz  $K_1$  pozostaje nadal zamknięty. Otwarcie klucza  $K_2$  powoduje powstanie w obwodzie zastępczym /rys.4/ stanu nieustalonego o warunkach początkowych:

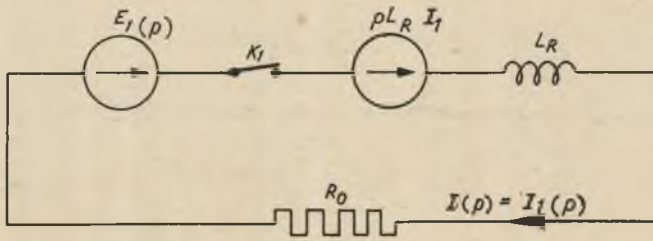
$$i(t_1) = i_1(t_1) = I_1, \quad i_2(t_1) = 0 \quad /3/$$

oraz zależnościach między prądami:

$$i(t) = i_1(t), \quad i_2(t) = 0 \quad /4/$$



Rys.3. Przebiegi prądów w dwupołówkowym układzie prostownikowym



Rys.4. Operatorowy obwód zastępczy dla interwału czasowego  $t_1 < t < t_2$

Równanie prądu  $i(t) = i_1(t)$  znajdujemy posługując się rachunkiem operatorowym

$$(pL_R + R_0) I(p) = E_1(p) + pL_R I_1$$

stąd

$$I(p) = \frac{1}{pL_R + R_0} E_1(p) + \frac{pL_R}{pL_R + R_0} I_1$$

Odpowiednie równanie czasowe ma postać:

$$i(t) = i_1(t) = \frac{E_m}{Z} \left[ \sin(\omega t + \alpha + \beta - \varphi) - \sin(\alpha + \beta - \varphi) e^{pt} \right] + I_1 e^{pt} \quad /5/$$

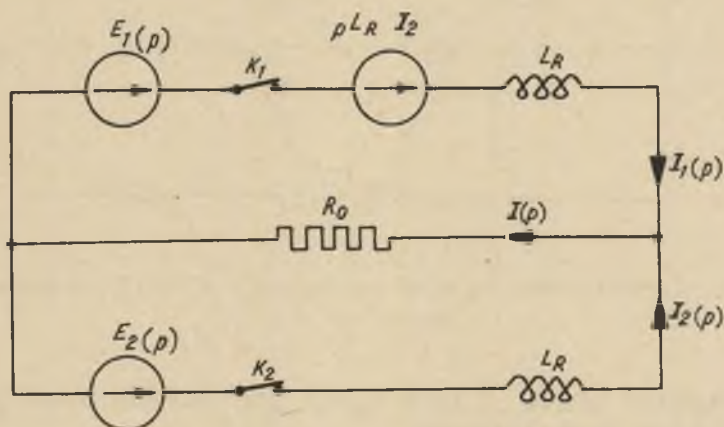
gdzie:

$$Z = \sqrt{R_0^2 + X_R^2}, \quad X_R = \omega L_R, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_R}{R_0}, \quad p = -\frac{R_0}{L_R} = -\frac{\omega}{\operatorname{tg} \varphi}$$

5. Interwał czasowy  $t_2 < t < t_3$  przewodzenia obydwu elementów prostujących jednocześnie

W chwili  $t = t_2$  następuje zamknięcie klucza  $K_2$ , przy czym klucz  $K_1$  pozostaje nadal zamknięty. Zamknięcie klucza  $K_2$  powoduje powstanie w obwodzie zastępczym /rys.5/ stanu nieustalonego o warunkach początkowych:

$$i(t_2) = i_1(t_2) = I_2, \quad i_2(t_2) = 0 \quad /6/$$



Rys.5. Operatorowy obwód zastępczy dla interwału czasowego  $t_2 < t < t_3$

oraz zależności między prądami

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad /7/$$

Posługując się jak poprzednio, rachunkiem operatorowym znajdujemy równania

$$pL_R I_1(p) + R_0 I(p) = E_1(p) + pL_R I_2$$

$$pL_R I_2(p) + R_0 I(p) = E_2(p)$$

które prowadzą do następujących wyrażeń na  $I$ ,  $I_1(p)$  i  $I_2(p)$

$$I(p) = \frac{pL_R}{pL_R + 2R_0} I_2$$

$$I_1(p) = \frac{1}{2} [I(p) + I_2] + \frac{1}{pL_R} E_1(p)$$

$$I_2(p) = \frac{1}{2} [I(p) - I_2] - \frac{1}{pL_R} E_1(p)$$

Odpowiednie równania czasowe mają postać:

$$i(t) = I_2 e^{2pt} \quad /8/$$

$$i_1(t) = \frac{1}{2} I_2 (1 + e^{2pt}) + \frac{E_m}{X_R} [\cos(\omega t + \alpha) - \cos \alpha] \quad /9/$$

$$i_2(t) = -\frac{1}{2} I_2 (1 - e^{2pt}) - \frac{E_m}{X_R} [\cos(\omega t + \alpha) - \cos \alpha] \quad /10/$$

W chwili  $t = t_3$  następuje otwarcie klucza  $K_1$ , przy czym klucz  $K_2$  pozostaje nadal zamknięty. Daje to początek nowemu interwałowi czasowemu przewodzenia jednego elementu prostującego /nr 2/. Powstający przy otwarciu klucza  $K_1$  stan nieustalony daje się, dzięki zależnościom wyrażonym układem równań /2/, sprowadzić do przypadku rozpatrzonego w punkcie 4 i nie wymaga osobnego omówienia.

#### 6. Wyznaczanie wartości stałych $I_1$ , $I_2$ oraz argumentów $\alpha$ i $\beta$

Korzystając z warunku ciągłości funkcji prądu płynącego przez cewkę, układamy trzy następujące równania:

$$i(t_2) = I_2 \quad /11/$$

$$i(t_3) = I_1 \quad /12/$$

$$i_1(t_3) = 0 \quad /13/$$

Czwarte równanie otrzymujemy na mocy założenia, że element prostujący nr 2 zaczyna przewodzić prąd /klucz  $K_2$  zamyka się/ w chwili gdy wartość spadku napięcia na obciążeniu  $R_0 i(t)$  zrówna się z wartością SEM-iej  $e_2(t)$ :

$$R_0 \cdot i(t_2) = e_2(t_2) \quad /14/$$

Posługując się odpowiednio równaniami /5/, /8/, /9/, i /11/ w celu wyrażenia lewych stron równań /11/, /12/ /13/ i /14/ otrzymamy:

$$I_1 e^{-\frac{\pi-\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} - I_2 - \frac{E_m}{2} \left[ \sin(\alpha-\varphi) + \sin(\alpha+\beta-\varphi) e^{-\frac{\pi-\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} \right] = 0 \quad /15/$$

$$I_2 e^{-\frac{2\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} - I_1 = 0 \quad /16/$$

$$\frac{1}{2} I_2 \left( 1 + e^{-\frac{2\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} \right) + \frac{E_m}{X_R} \left[ \cos(\beta+\alpha) - \cos\alpha \right] = 0 \quad /17/$$

$$R_o I_2 - E_m \cdot \sin\alpha = 0 \quad /18/$$

Z równań /16/ i /18/ wyznaczamy bez trudu wartości stałych  $I_1$  i  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{E_m}{R_o} \cdot \sin\alpha \cdot e^{-\frac{2\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} \quad /19/$$

$$I_2 = \frac{E_m}{R_o} \sin\alpha \quad /20/$$

Podstawiając za  $I_1$  i  $I_2$  odpowiednio /19/ i /20/ do równań /15/ i /17/ i rozwikłując otrzymane wyrażenia ze względu na funkcję  $\operatorname{tg}\alpha$  otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi - \sin(\beta-\varphi) e^{-\frac{\pi-\beta}{\operatorname{tg}\varphi}}}{\frac{1 - e^{-\frac{\pi+\beta}{\operatorname{tg}\varphi}}}{\cos\varphi} + \cos\varphi + \cos(\beta-\varphi) e^{-\frac{\pi-\beta}{\operatorname{tg}\varphi}}} \quad /21/$$

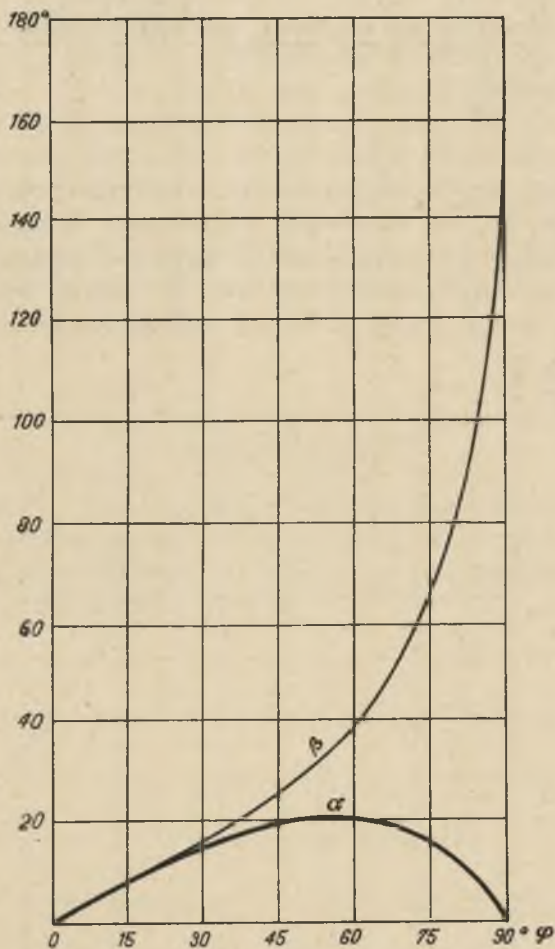
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \cos\beta}{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi \left( 1 + e^{-\frac{2\beta}{\operatorname{tg}\varphi}} \right) - \sin\beta} \quad /22/$$

gdzie

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{oraz} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$



Układ równań /21/ i /22/ rozwiązujemy metodą analityczno-graficzną, wykreślając dla każdej założonej wartości parametru  $\varphi = \arctg \frac{X_R}{R_0}$  dwie krzywe  $\alpha = f_1(\varphi, \beta)$  oraz  $\alpha = f_2(\varphi, \beta)$  i szukając ich punktów przecięcia. Metoda ta pozwala sporządzić wykresy zależności argumentów  $\alpha$  i  $\beta$  od parametru  $\varphi$ . Wykresy takie:  $\alpha = F_1(\varphi)$  oraz  $\beta = F_2(\varphi)$  przedstawia rysunek 6.



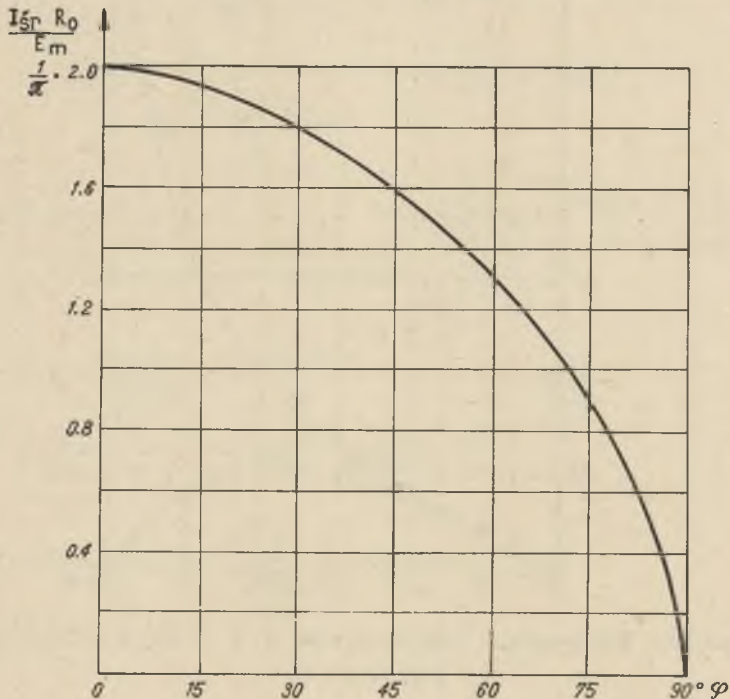
Rys.6. Zależność argumentów  $\alpha$  i  $\beta$  od wartości parametru  $\varphi$

### 7. Wartość średnia prądu wyprostowanego

Wartość średnią prądu  $i(t)$  wyrażamy w jednostkach względnych. Wyraża się ona wzorem:

$$\frac{I_{sr} R_0}{E_m} = \frac{1}{\pi} \left\{ \cos \varphi \int_0^{\pi-\beta} \sin(\omega t + \alpha + \beta - \varphi) d\omega t + \right. \\ \left. + \left[ -\cos \varphi \cdot \sin(\alpha + \beta - \varphi) + \sin \alpha \cdot e^{-\frac{2\beta}{\operatorname{tg} \varphi}} \right] \int_0^{\frac{\pi-\beta}{\operatorname{tg} \varphi}} e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}} d\omega t + \right. \\ \left. + \sin \alpha \int_0^{\beta} e^{-\frac{2\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}} d\omega t \right\} \quad /23/$$

Zależność względnej wartości średniej prądu wyprostowanego  $\frac{I_{sr} R_0}{E_m}$  od wartości parametru  $\varphi$  przedstawia rys.7. Można wykazać, że bezwzględna wartość prądu wyprostowanego dąży do 0, gdy  $\varphi$  dąży do  $\frac{\pi}{2}$  oraz, że wartości argumentów  $\alpha$  i  $\beta$  dążą wówczas odpowiednio do 0 i  $\pi$ .



Rys.7. Zależność względnej wartości średniej prądu wyprostowanego  $\frac{I_{sr} R_0}{E_m}$  od wartości parametru  $\varphi$

### 8. Wnioski

Metoda obliczeń zilustrowana w punktach 2 do 6 pozwala przewidzieć jak zachowa się układ prostownikowy, przy znacznych obciążeniach aż do stanu zwarcia idealnego włącznie.

Metodę tę można rozszerzyć na układy prostownikowe o liniowych elementach prostujących oraz na układy prostownikowe /o elementach prostujących idealnych bądź liniowych/ obciążone dowolną zawadą. Zaletą przedstawionej metody jest jej znaczna dokładność pozwalająca na odkrycie efektów nie dających się uchwycić w analizie prowadzonej metodą szeregów Fouriera.

Takim efektem jest np. wykazana w niniejszej pracy zależność średniej wartości prądu wyprostowanego od parametru  $\varphi$ .

Stosując metodę szeregów Fouriera już w założeniu odrzucamy możliwość wystąpienia takiego efektu.

### LITERATURA

I.M.P. Kostenko, L.R.Nojman i G.N.Bładzewicz: - Elektromagnitnyje prociessy w sistiemach s moszcznymi wypriamitielanymi ustanowkami. - Izdatielstwo Akademii Nauk CCCR Moskwa-Leningrad, 1946 r.

### Резюме

Работа содержит математический анализ мгновенных величин токов в системе двуполупериодного выпрямления с выведенной нейтралью. Автор дает выражение на среднюю величину тока в зависимости от анодных реактансов.

### Résumé

L'auteur donne un analyse mathématique des valeurs momentanées des courants dans un système des redresseurs avec barre neutre. Il déduit la formule de la valeur moyenne du courant redressé en fonction des reactances.