ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 28 ELEKTRYKA z. 9 1961

WŁADYSŁAW PASZEK

Katedra Maszyn Elektrycznych

WPŁYW OBWODÓW TŁUMIĄCYCH NA WŁASNOŚCI DYNAMICZNE WZMACNIACZA ELEKTROMASZYNOWEGO

Streszczenie. Porównano wpływ litego rdzenia na przebieg narastania strumienia i prądu wzbudzenia w rdzeniu o przekroju kołowym i prostokątnym, w modelu obwodu magnetycznego wzmacniacza elektromaszynowego.

1. WPŁYW LITEGO RDZENIA

Stojany wzmacniaczy elektromaszynowych składane są z pakietu blach twornikowych (analogicznie jak wirnik) względnie w przypadku wzmacniaczy małych mocy mogą być zbudowane z jarzma staliwnego, do którego umocowane są pieńki i nabiegunniki, tak jak ma to miejsce w zwykłych maszynach prądu stałego. Staliwny stojan wzmacniacza powoduje pogorszenie własności wzmacniacza na skutek:

a) większej oporności magnetycznej staliwa od blachy twornikowej (przenikalność magnetyczna staliwa jest około 3-5 razy mniejsza dla nasyceń mniejszych od 10000 Gs, natomiast w miarę powiększania indukcji różnice przenikalności maleją),

b) poszerzenia pętlicy histerezy w porównaniu do blachy twornikowej,

c) powiększenia stałej czasowej wzmacniacza (przy zmianie strumienia powstają w rdzeniu litym prądy wirowe, które powiększają bezwładność magnetyczną wzmacniacza).

We wzmacniaczach małej mocy ujemne strony staliwa odczuwamy tylko nieznacznie.

Powiększony opór magnetyczny stojana można zastąpić równoważnym powiększeniem szczeliny. Od długości tej szczeliny zależy stała czasowa uzwojeń wzmacniacza. W wypadkach, gdy zależy na małych stałych czasowych więcej aniżeli na wysokim współczynniku wzmocnienia mocy, powiększenie równoważnej szczeliny może być nawet pożądane. Ponadto przez dobór wymiarów jarzma można obniżyć opór magnetyczny jarzma do pożądanej wartości. Przez odpowiednio dobrane przemagnesowywanie prądem zmiennym możemy poważnie zwęzić pętlicę histerezy wzmacniacza.

Metoda przemagnesowywania w przypadku litych stojanów jest skuteczna jedynie dla wzmacniaczy małej mocy. W miarę powiększenia wymiarów geometrycznych staliwnego jarzma stojana maleje skuteczność tej metody z powodu stłumienia strumienia przemagnesowywującego przez prądy wirowe kształtujące się w rdzeniu litym.

Wpływ litego rdzenia na stałą czasową wzmacniacza pracującego w stanie nienasyconym można oszacować na podstawie modelu obwodu magnetycznego przedstawionego na rys.1a.

Obliczenie przebiegów nieustalonych występujących w uzwojeniu wzbudzenia i litym bloku oprzemy na następujących założeniach upraszczających.

1. Zakładamy, że pole magnetyczne wytworzone przez prąd wzbudzenia jest polem jednorodnym, jednoosiowym w rdzeniu litym, skierowanym w kierunku osi z. Na pole to nakłada się pole wytworzone przez strugi prądów wirowych bloku litego. Z uwagi na takie złożenie wypadkowego pola rdzenia występuje na obwodzie zewnętrznym przekroju rdzenia indukcja

$$B_i = I_w z_w \mu_z$$

zależna tylko od prądu wzbudzenia, a nie zależna od prądów wirowych w rdzeniu litym.

W stanie ustalonym przy stałym prądzie wzbudzenia w każdym miejscu przekroju S_j występuje indukcja $B_0 = B_i$.

2. Zakładamy, że strumień przenikający przez rdzeń sprzęga się idealnie ze wszystkimi zwojami cewki wzbudzenia. Strumień rozproszenia wyodrębniony na rysunku nie przenika przez rdzeń lity.

3. Zakładamy stałą wartość przenikalności magnetycznej części ferromagnetycznej obwodu magnetycznego. Z uwagi na założony osiowy przebieg linii pola w rdzeniu litym i szczelinie powietrznej opór magnetyczny całego obwodu magnetycznego ześrodkujemy w rdzeniu litym, którego przenikalność zastępcza wynosi $\mu_{wz} \cdot \mu_0 = \mu_z$.

Względną przenikalność zastępczą μ_{wz} obliczymy z relacji

$$\frac{\mu_{wj} S_j}{2l_j} + \frac{S_\delta}{2\delta} + \sum \frac{S_F \mu_{wF}}{l_F} = \frac{\mu_{wz} S_j}{2l_j}. \tag{1a}$$

Przyjmując zależność

$$\mu_{wz} = \frac{l_j}{\delta_z},$$

otrzymamy zastępczą długość szczeliny

$$\frac{l_j}{\delta_z} = \frac{l_j}{\delta} \frac{S_\delta}{S_j} + \mu_{wj} + \sum \frac{S_F}{S_j} \frac{2l_j \mu_{wF}}{l_F}. \tag{1b}$$

Na skutek podstawowego udziału szczeliny w łącznym oporze magnetycznym obwodu otrzymamy

$$\delta_z \approx \delta \frac{S_j}{S_\delta}.$$

Przebieg nieustalony opisany jest przez dwa układy równań różniczkowych

a) Układ równań Maxwella dla litego materiału ferromagnetycznego

$$\text{rot}\,\bar{K} = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J},$$

$$\bar{K} = \varrho\,\bar{\omega}, \tag{2}$$

$$\bar{B} = \mu_z \bar{H} = \mu_{wz}\mu_o \circ \bar{H},$$

$$\text{div}\,\bar{B} = 0.$$

Po wyeliminowaniu gęstości prądowej prądów wirowych $\bar{J}$ otrzymamy

$$\text{rot rot}\,\bar{B} = \text{grad div}\,\bar{B} - \Delta\bar{B} = -\Delta\bar{B} = -d^2\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

przy czym

$$d^2 = \frac{\mu_z}{\varrho} = \frac{\mu_{wz}\circ\mu_o}{\varrho}.$$

Uwzględniwszy jednoosiowy układ pola w rdzeniu $\bar{B} = B$ otrzymamy podstawowe równanie wyjściowe

$$\Delta B = d^2\frac{dB}{dt}. \tag{4}$$

Indukcja $B(x,y,t)$ jest ogólnie funkcją rozpatrywanego miejsca przekroju (x,y) rdzenia i czasu t.

Stosując w oparciu o przekształcenie Laplace'a-Carsona rachunek operatorowy dla zmiennej czasu otrzymamy postać równania wyjściowego w zapisie operatorowym

$$\Delta B(x,y,p) = pd^2[B(x,y,p) - B(x,y,t = o)]. \qquad (5)$$

b) Układ równań obwodu elektrycznego uzwojenia wzbudzenia

$$I_w(t)R + \frac{dI_w}{dt} L_s + \frac{d\phi}{dt} z_w = U(t) \qquad (6a)$$

i w zapisie operatorowym

$$I_w(p)R+p\left[I_w(p)-I_w(t=o)\right] L_s+p\left[\phi(p)-\phi(t=o)\right] z_w=U(p). \qquad (6b)$$

Strumień rdzenia sprzęgający się idealnie z uzwojeniem wzbudzenia jest tylko funkcją czasu $\phi(t)$. Zatem

$$\Phi(p) = \int_{S_j} B(x,y,t)dS_j. \qquad (7)$$

Analizę przebiegów nieustalonych zawęzimy do przypadku załączania napięcia stałego $U(t) = U\,1(t)$ do zacisków uzwojenia wzbudzenia przy zerowych warunkach początkowych. Mamy zatem $I(t=o) = B(x,y,t=o) = \Phi(t=o) = 0$ oraz $I_w(t=\infty) = I_{wo} = \frac{U}{R}$. Strumień $\Phi(p)$ możemy przedstawić w takim przypadku w postaci ogólnej (8), którą zweryfikujemy na przykładzie szczególnych typów przekroju rdzenia.

$$\Phi(p) = \frac{I_w(p)}{I_{wo}} \Phi_o \cdot A(q), \qquad (8)$$

przy czym $\qquad q = (-\tau p)^{\frac{1}{\nu}}$

$$\Phi_o = I_{wo} \frac{Z_w \cdot \mu_z \cdot S_j}{l_j}$$

τ, ν - stałe współczynniki, które zależą od typu przekroju rdzenia.

Jeżeli wprowadzimy podstawienie $p = \frac{-q^{\nu}}{\tau}$ otrzymamy transformatę

$$\frac{I_w(q)}{I_{wo}} = \frac{1}{G(q)} = \frac{1}{1 - q^{\nu} \frac{T_\mu}{\tau}\left[\sigma + A(q)\right]}, \tag{9a}$$

gdzie

$\sigma = \frac{L_s}{L_\mu}$ - współczynnik rozproszenia,

$T_\mu = \frac{L_\mu}{R}$; $L_\mu = \frac{\Phi_o \cdot z_w}{I_{wo}}$.

Przejście na postać czasową otrzymamy na podstawie wzoru Heaviside'a

$$\frac{I_w(t)}{I_{wo}} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{G\left[(-\tau p)^{\frac{1}{\nu}}\right]} = \frac{1}{G(0)} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-q_k^{\nu} \frac{t}{\tau}}}{G'(q_k)\left[\frac{-q_k^{\nu}}{\tau}\left(\frac{dq}{dp}\right)_{q_k}\right]} = \tag{9b}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\frac{\tau}{T_\mu} e^{-q_k^{\nu} \frac{t}{T_\mu}}}{\frac{\tau}{T} + q_k^{(\nu+1)} \frac{A'(q_k)}{\nu}} = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k e^{-\frac{t\beta_k}{T_\mu}}.$$

gdzie

$$q_k = \text{pierwiastki funkcji } G(q)$$

$$\alpha_k = \frac{\frac{\tau}{T_\mu}}{\frac{\tau}{T_\mu} + q_k \frac{A(q_k)}{\nu}(\nu+1)} = \frac{\sigma + A(q_k)}{\sigma + A(q_k) + \frac{q}{\nu} A'(q_k)},$$

$$\beta_k = q_k^2 \cdot \frac{T_\mu}{\tau}.$$

Analogiczną postać przybierze czasowy przebieg strumienia w rdzeniu

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \gamma_k e^{-\frac{t\beta_k}{T_\mu}}. \tag{10}$$

W ogólnym przypadku występuje nieskończona liczba rzeczywistych pierwiastków funkcji $G(q)$. Wartości pierwiastków rosną monotonicznie, q_1 oznacza pierwiastek najmniejszy. Zarówno prąd wzbudzenia jak i strumień można przedstawić przy pomocy nieskończonego szeregu funkcji wykładniczych o stałych czasowych $T_k = \frac{T_\mu}{\beta_k}$ (β_k liczba rzeczywista). Udział strumienia i prądu przyporządkowany odnośnej stałej czasowej T_k wyrażony jest przez współczynnik α_k i γ_k. Ogólnie zachodzą następujące związki dla poszczególnych składowych przebiegów wykładniczych.

a) Jeżeli podstawimy przebiegi czasowe prądu (9b) i strumienia (10) do równania obwodu elektrycznego (6a) otrzymamy dla każdej k-tej składowej związek

$$\alpha_k (1 - \beta_k \sigma) - \gamma_k \beta_k = 0. \tag{11a}$$

Stąd ogólnie mamy

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k (1 - \beta_k \sigma)}{\beta_k}. \tag{11b}$$

b) Udział poszczególnych składowych przebiegów czasowych prądu strumienia maleje w miarę wzrostu β_k. Innymi słowy składowe przebiegów o małej stałej czasowej wykazują tym mniejszy udział w łącznym przebiegu sumarycznym, im mniejsza jest stała czasowa składowego przebiegu wykładniczego. Otrzymamy ogólnie

$$
\begin{aligned}
q_k &< q_{k+1}, \\
\alpha_k &> \alpha_{k+1}, \\
\beta_k &> \beta_{k+1}, \\
\gamma_k &> \gamma_{k+1}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ponieważ założono zerowe wartości początkowe prądu i strumienia otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k = 1; \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \gamma_k = 1.$$

c) Zasadnicze znaczenie praktyczne posiada składowa strumienia i prądu o największej stałej czasowej, odpowiadająca najmniejszemu pierwiastkowi mianownika. Składową tę nazywamy podstawową składową strumienia lub prądu. Pozostałe składowe możemy dla przybliżonych obliczeń ująć w jeden człon przybliżony zanikający z pewną zastępczą małą stałą czasową $T_h = \frac{T_\mu}{\beta_h}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{I_w(t)}{I_{wo}} &\approx 1 - \alpha_1 e^{-\frac{t\beta_1}{T_\mu}} - (1-\alpha_1) e^{-\frac{t\beta_h}{T_\mu}}, \\
\frac{\varphi(t)}{\Phi_o} &\approx 1 - \gamma_1 e^{-\frac{t\beta_1}{T_\mu}} - (1-\gamma_1) e^{-\frac{t\beta_h}{T_\mu}}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

d) Przez analogię do transformatora ze zwartym uzwojeniem wtórnym można dla przybliżonych obliczeń zastąpić przypadek uzwojenia wzbudzenia z rdzeniem litym schematem zastępczym przedstawionym na rys.1b w którym spełnione byłyby relacje przybliżone podane w równaniach (13) Z porównania równań (13) z ogólnym rozwiązaniem przebiegów prądu i strumienia na schemacie zastępczym otrzymamy parametry zastępczej gałęzi rdzenia litego [4][3].

$$\beta_h = \frac{1 - \alpha_1}{(1 - \alpha_1)\sigma + 1 - \gamma_1},$$

$$1+\sigma_h = \frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{(1+\sigma)^2\left[\beta_1+\beta_h-(1+\sigma)\beta_1\beta_h - \frac{1}{1+\sigma}\right]}, \quad (14)$$

$$R_F = \beta_1\beta_h\,(1+\sigma)\left[1 + \sigma_h - \frac{1}{1+\sigma}\right].$$

Oczywiście parametry σ_h, R_F rdzenia litego zależą w ogólnym przypadku od stałych obwodu elektrycznego. Przy zmianach oporności czynnej R oraz rozproszenia zmieniają się parametry σ_h i R_F. Schemat zastępczy staje się mało przydatny w przypadku, gdy stała czasowa T_μ dąży do zera (np. gdy $R \to \infty$), otrzymamy bowiem w tym szczególnym przypadku jednowykładniczy przebieg strumienia zamiast aproksymacji przebiegiem dwuwykładniczym.

f) W szczególnym przypadku $T_\mu = 0$ prąd wzbudzenia narasta skokowo do wartości ustalonej. Zachodzi tak w przypadku zasilania uzwojenia wzbudzenia ze źródła prądomotorycznego. Nieustalony przebieg strumienia ma w dalszym ciągu przebieg złożony z nieskończonego szeregu funkcji wykładniczych, który otrzymać możemy z odwrotnej transformacji wyrażenia $\Phi(p)$.

$$\Phi(t) = \Phi_0 \mathcal{L}^{-1}\left[A(p)\right]. \quad (15)$$

Przebieg strumienia w takim szczególnym przypadku ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ jego superpozycja na stały strumień ustalony przeciwnego znaku daje w rezultacie przebiegi strumienia występujące przy przerwie zasilania uzwojenia wzbudzenia.

Na rys.1c przedstawiono schemat zastępczy dla przypadku rdzenia litego o uzwojeniu wzbudzenia zasilanym ze źródła prądowego. Przebieg strumienia aproksymowany jest przy takim schemacie przebiegiem dwuwykładniczym. Na rys.1d przedstawiono przebiegi prądu i strumienia w uzwojeniu wzbudzenia po przyłożeniu napięcia stałego do uzwojenia wzbudzenia, oraz na rys.1e przebieg zanikania strumienia przy wyłączeniu prądu wzbudzenia.

Rozpatrzmy dwa typy przekrojów rdzenia litego, przekrój kołowy, najprostszy do analizy, oraz przekrój prostokątny.

1.1. Przekrój kołowy rdzenia

Równanie (4) (5) wyrażone przy użyciu współrzędnych cylindrycznych przybiera postać

$$\frac{\partial^2 B(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B(r,t)}{\partial r} = d^2 \frac{\partial B(r,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 B(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B(r,p)}{\partial r} = d^2 p\, B(r,p). \tag{16}$$

Rozwiązaniem równania jest funkcja Bessel'a zerowego rzędu [6]

$$B(r,p) = \frac{I_w(p)}{I_{wo}} B_o \frac{J_o(jd\sqrt{p}\,r)}{J_o(jd\sqrt{p}\,r_o)}, \tag{17}$$

spełniające warunek brzegowy

$$B(r_o,p) = B_o \frac{I_w(p)}{I_{wo}}.$$

Rozwiązanie całki (7) daje wyrażenie (8), które w przypadku przekroju kołowego przybiera postać

$$A(p) = \frac{J_1(j\,d\sqrt{p}\,r_o)}{J_o(j\,d\sqrt{p}\,r_o)} \cdot \frac{2}{j\,d\sqrt{p}\,r_o}. \tag{18}$$

Kładąc $q = jd\sqrt{p}\,r_o$ otrzymamy

$$(jdr_o)^2 = -d^2r_o^2 = -\tau, \tag{19}$$

$$\nu = 2.$$

$$A(q) = \frac{J_1(q)}{J_o(q)}\,\frac{2}{q}, \tag{20}$$

$$G(q) = 1 - q^2\,\frac{T_\mu}{\tau}\left[\sigma + \frac{J_1(q)}{J_2(q)}\,\frac{2}{q}\right]. \tag{21}$$

Pierwiastki funkcji $G(q)$ możemy znaleźć wykreślnie jako punkty przecięcia dwóch funkcji pomocniczych $f_1(q)$ oraz $f_2(q)$, przy czym

$f_1(q) = \frac{\tau}{2T_\mu} - q^2\,\frac{\sigma}{2}$ - parabola przesunięta,

$f_2(q) = q\,\frac{J_1(q)}{J_2(q)}$ - funkcja wyrażona przy pomocy funkcji Bessel'a ujętych tabelarycznie o nieskończonej liczbie biegunów prostych q_{ko}.

Pierwsze kolejne bieguny funkcji $f_2(q)$ występują przy

$$q_{10} \approx 2{,}405,$$

$$q_{20} \approx 5{,}521,$$

$$q_{30} \approx 8{,}654,$$

$$q_{40} \approx 11{,}792,$$

$$q_{50} \approx 14{,}931.$$

Uwzględnienie rozproszenia uzwojenia wzbudzenia utrudnia wyznaczenie punktów przecięcia. Przy pominięciu rozproszenia funkcja $f_1(q)$ przyjmuje wartość stałą.

Dla dużych wartości q możemy posłużyć się przybliżeniem $f_2(q) \approx q\,tg(q - \frac{\pi}{4})$.

Na rys.2a wykreślono przebieg funkcji $f_2(q)$ i zaznaczono sposób znajdywania pierwiastków funkcji $G(p)$. Stałe czasowe składowych funkcji wykładniczych prądu i strumienia

$$T_k = \frac{T_\mu}{\beta_k} = \frac{\tau}{q_k^2}.$$

Współczynniki składowych funkcji prądu otrzymamy po rozwiązaniu równania (9b)

$$\alpha_k = \frac{\sigma + \frac{2}{q_k}\frac{J_1(q_k)}{J_0(q_k)}}{1 + \sigma + \left[\frac{J_1(q_k)}{J_0(q_k)}\right]^2} = \frac{1}{q_k^2}\,\frac{\frac{\tau}{T_\mu}}{1 + \sigma + \frac{1}{4}\left(\frac{\tau}{T_\mu q_k} - \sigma q_k\right)^2}. \quad (22)$$

Współczynniki składowych funkcji strumienia otrzymamy z podstawowej relacji (11b).

Jeżeli ograniczymy obliczenia do praktycznie najważniejszej podstawowej składowej prądu i strumienia, zatem do obliczenia współczynników β_1, α_1, γ_1 i przyjmiemy typową przeciętną wartość współczynnika rozproszenia σ=0,05 możemy sporządzić wykres (rys.2b), na którym współczynniki α_1, β_1, γ_1, $\frac{\tau}{T_\mu}$ przedstawione są jako funkcje wartości pierwszego pierwiastka q_1 funkcji $G(q)$. Na podstawie tego wykresu wyznaczamy współczynniki α_1, β_1, γ_1 wychodząc z danej wartości $\frac{\tau}{T_\mu}$.

Graniczny przypadek $\frac{\tau}{T_\mu} \to \infty$ występuje przy zasilaniu uzwojenia wzbudzenia ze źródła prądomotorycznego.

Stała czasowa podstawowej składowej strumienia wynosi w tym granicznym przypadku

$$T_1 = T_{Fo} = \frac{d^2 r_o^2}{2,405},$$

$$\gamma_1 = \gamma_{Fo} = \frac{4}{2,405^2} = 0,6917.$$

1.2. Przekrój prostokątny rdzenia

Równanie (4) i (5) wyrażone przy użyciu współrzędnych prostokątnych przybiera postać

$$\frac{\partial^2 B(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(x,y,t)}{\partial y^2} = d^2 \frac{\partial B(x,y,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 B(x,y,p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(x,y,p)}{\partial y^2} = pd^2 B(x,y,p). \tag{23}$$

Rozpatrzmy dwie metody rozwiązania równania (23) stosując a) podstawienie Rüdenberg'a [5]

b) podstawienie P. Debye'a - Prassler'a [4]

1.2.1. Podstawienie Rüdenberga

$$B(x,y,p) = \frac{I_w(p)}{I_{wo}}\left[B_o - \sum_{\substack{m=1,3,5...\\ n=1,3,5...}}^{m,n=\infty} B_{m,n} \cos(m\pi\frac{x}{a})\cos(n\pi\frac{y}{b}) f_{m,n}(p)\right] \tag{24}$$

m,n - oznaczają naturalne liczby nieparzyste. Przebieg indukcji przedstawiony jest w równaniu (24) jako nieskończona suma harmonicznych przestrzennych rzędu m,n pochodzących z rozkładu indukcji w rdzeniu na przestrzenny szereg Fouriera.

$$\frac{B_{m,n}}{B_o} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{1}{m \cdot n} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2}+1\right)} . \tag{25}$$

Każda harmoniczna oddzielnie spełnić musi równanie (23). Z warunku tego wyznaczyć możemy funkcję $f_{m,n}(p)$

$$f_{m,n}(p) = \frac{p\, T_{m,n}}{1 + p\, T_{m,n}} , \tag{26}$$

przy czym

$$T_{m,n} = \frac{d^2}{\pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]} . \tag{27}$$

Rozwiązanie powyższe spełnia warunki brzegowe na obwodzie przekroju rdzenia

$$B_{\substack{(p)\\ \text{obwód}}} = B_o \frac{I_w(p)}{I_{wo}} .$$

Z rozwiązania całki (7) otrzymamy wyrażenie (8), które przybierze postać

$$A(p) = \sum_{\substack{m=1,3,5\ldots\\ n=1,3,5\ldots}}^{m,n=\infty} \sum \frac{\varphi_{m,n}}{1 + pT_{m,n}} , \tag{28}$$

przy czym

$$\varphi_{m,n} = \frac{64}{\pi^4} \frac{1}{(m,n)^2}.$$

Kładąc $p = -q$, $\tau = 1$; $\nu = 1$ otrzymamy

$$G(q) = 1 - q\,T_\mu\left[\sigma + \sum_{m,n=1,3,5...}^{m,n=\infty}\sum \frac{\varphi_{m,n}}{1 - qT_{m,n}}\right] \quad (29)$$

Pierwiastki funkcji $G(q)$ możemy wyznaczyć jako punkty przecięcia funkcji pomocniczych $f_1 = \frac{1}{T_\mu}$, oraz $f_2(q) = q\left[\sigma + \sum_{m,n=1,3,5...}^{m,n=\infty}\sum \frac{\varphi_{m,n}}{1-qT_{m,n}}\right]$.

Z uwagi na silną zbieżność szeregu $A(p)$ obliczenie pierwiastków nie nastręcza trudności, w szczególności, gdy ograniczymy się do wyznaczenia tylko jednego lub kilku pierwszych pierwiastków.

Z równania (9b) otrzymamy

$$\alpha_k = \frac{\frac{\tau}{T_\mu}}{\frac{\tau}{T_\mu} + q^2 \sum_{m,n=1,3,5...}^{m,n=\infty}\sum \frac{\varphi_{m,n}\,T_{m,n}}{(1-q_k\,T_{m,n})^2}}. \quad (30)$$

Nieporęczność rozwiązania polega na tym, że nie możemy sporządzić uniwersalnego wykresu pomocniczego, z którego można by otrzymać od razu wartości pierwiastka, ponieważ stałe czasowe $T_{m,n}$ zależą od konkretnych danych wymiarów geometrycznych i danych materiałowych rdzenia.

W granicznym przypadku $T_\mu \to 0$ otrzymamy następujące pierwiastki $G(q)$ i współczynniki poszczególnych składowych harmonicznych przestrzennych strumienia

$$q_{ko} = \frac{1}{T_{m,n}}, \qquad \gamma_{ko} = \varphi_{m,n}. \quad (31)$$

Pierwszy podstawowy pierwiastek otrzymamy dla m=1, n=1

$$T_{Fo} = \frac{d^2 ab}{\pi^2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)},$$

$$\gamma_{Fo} = \frac{64}{\pi^4} \approx 0{,}66 . \tag{32}$$

1.2.2. Podstawienie Debye'a - Prassler'a

$$B(x,y,p) = B_o \frac{I_w(p)}{I_{wo}} \left[F_a(x,y,p) + F_b(x,y,p)\right], \tag{33}$$

przy czym

$$F_a(x,y,p) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{\mathrm{ch}\alpha y}{\mathrm{ch}\alpha\frac{b}{2}} \frac{\cos\beta x}{\cos\beta\frac{a}{2}}, \tag{34}$$

$$F_b(x,y,p) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+3}{3}} \frac{\mathrm{ch}\gamma x}{\mathrm{ch}\gamma\frac{a}{2}} \frac{\cos\delta y}{\cos\delta\frac{b}{2}} . \tag{35}$$

Podstawiwszy (34) i (35) do równania (5) otrzymamy

$$\alpha = \sqrt{m^2 \frac{\pi^2}{a^2} + pd^2}; \qquad \beta = m\frac{\pi}{a} .$$

$$\beta = \sqrt{n^2 \frac{\pi}{b^2} + rd^2}; \qquad \delta = n\frac{\pi}{b} . \tag{36}$$

Na obwodzie przekroju rdzenia otrzymamy $F_a + F_b = 1$, co spełnia tym samym warunek brzegowy.

Rozwiązanie całki (7) daje wyrażenie (8) o postaci

$$A(q) = F_c(q) + F_d(q), \tag{37}$$

przy czym

$$q = -pd^2ab, \qquad \tau = abd^2, \qquad \nu = 1,$$

$$F_c(q) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{m^2\pi^2\frac{b}{a} - q}\right]}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{m^2\pi^2\frac{b}{a} - q}}, \tag{38}$$

$$F_d(q) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{th}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{n^2\pi^2\frac{a}{b} - q}\right]}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{n^2\pi^2\frac{a}{b} - q}}. \tag{39}$$

Funkcje $F_c(q)$ oraz $F_d(q)$ wyrażone są przez szereg szybkozbieżny, w szczególności dla małych wartości q. Funkcje te przyjmują te same wartości dla parametru $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$. Pierwiastki równania $G(q)$ otrzymamy jako przecięcie dwóch funkcji pomocniczych

$$f_1(q) = \frac{\tau}{T_\mu} - q \quad (- \text{ linia prosta})$$

oraz

$$f_2(q) = \left(F_c(q) + F_d(q)\right)q.$$

Na rys.3a przedstawiono przebieg funkcji pomocniczej $f_2(q)$, obliczonej z równania (37) dla rdzeni prostokątnych o stosunku boków $\frac{a}{b} = 1,2,4$. Funkcja $f_2(q)$ jest funkcją o nieskończonej liczbie biegunów prostych

$$q_{ko} = \pi^2 \left(m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}\right).$$

Funkcję tę przedstawiono na rys.3a w przedziale od $q=0$ do pierwszego bieguna funkcji przy $m=1$, $n=1$.

Pierwiastki wypadają te same dla stosunku boków $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ co potwierdza oczywisty wniosek, że rozwiązanie nie zależy od przemiany osi x i y.

Z wykresu na rys.3b możemy otrzymać pierwszy pierwiastek funkcji $G(q)$ oraz współczynniki $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ dla rdzenia o przekroju prostokątnym i stosunku boków $\frac{a}{b}=1,2,4$ przy współczynniku rozproszenia $\sigma = 0,05$ przy znanej wartości $\frac{\tau}{T_\mu}$.

1.2. Rozwiązania przybliżone

W przypadku rdzenia o przekroju prostokątnym obliczenie wykresów pomocniczych funkcji nie stabelaryzowanych na podstawie szeregów nieskończonych stanowi duże utrudnienie. Na rys.3a podano funkcję pomocniczą tylko w wąskim przedziale, do pierwszego bieguna funkcji pomocniczej i tylko dla trzech wartości stosunku $\frac{b}{a}$. Przy rosnącym stosunku $\frac{b}{a}$ obliczenie funkcji pomocniczej jest utrudnione z powodu słabszej zbieżności szeregu.

Przy dużym stosunku $\frac{b}{a}$ możemy posłużyć się uproszczonym modelem zastępczym rdzenia polegającym na założeniu elektrycznie superprzewodzących przeciwległych dwóch powierzchni bocznych rdzenia. Superprzewodność powierzchni bocznych powoduje, że linie prądów wirowych przebiegają równolegle do krawędzi bocznych rdzenia (rys.4). Przebieg pola jest wtedy identyczny jak w przypadku rdzenia przy $b \to \infty$. W takim szczególnym przypadku wyjściowe równanie różniczkowe przybiera prostszą postać

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial^2 x} = d^2 \frac{\partial B(x,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 B(x,p)}{\partial^2 x} = d^2 p\, B(x,p). \tag{40}$$

Stosując podstawienie

$$B(x,p) = B_o \frac{I_w(p)}{I_{wo}} \frac{ch\alpha x}{ch\alpha \frac{a}{2}} \tag{41}$$

spełniające warunek brzegowy dla $x = \pm \frac{a}{2}$ otrzymamy z równania (5)

$$\alpha = \sqrt{p}\, d. \tag{42}$$

Rozwiązanie równania (8) przybiera postać

$$A(q) = \frac{tg\, q}{q},$$

gdzie

$$q^2 = -p\tau; \qquad \tau = (d\,\frac{a}{2})^2; \qquad \nu = 2;$$

oraz

$$G(q) = \frac{\tau}{T_\mu} - q^2 \left(\sigma + \frac{tg\, q}{q}\right).$$

Pierwiastki równania $G(q)$ otrzymamy jako punkty przecięcia funkcji pomocniczych

$$f_1(q) = \frac{\tau}{T_\mu} - q^2\sigma$$

i funkcji

$$f_2(q) = q \operatorname{tg} q$$

Znalezienie pierwiastków równania nie nastręcza kłopotów z uwagi na znany przebieg funkcji pomocniczej $q \operatorname{tg} q$
Z równania (9b) otrzymamy

$$\alpha_k = \frac{2\frac{\tau}{T_\mu}}{2\frac{\tau}{T_\mu} + q_k^2\left(\frac{1}{\cos^2 q_k} - \frac{\operatorname{tg} q_k}{q_k}\right)},$$

$$\beta_k = q_k^2 \frac{T_\mu}{\tau}.$$

Z wykresu na rys.4 możemy otrzymać pierwszy pierwiastek równania $G(q)$ oraz współczynnik $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ przy współczynniku rozproszenia $\sigma = 0{,}05$ przy danej wartości $\frac{\tau}{T_\mu}$.

W przypadku szczególnym $T_\mu = 0$ otrzymamy

$$T_{ko} = \frac{d^2 a^2}{\pi^2 n^2} \qquad \text{przy} \qquad n = 1, 3, 5 \ldots$$

$$\gamma_{ko} = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{n^2}.$$

Dla $n = 1$ otrzymamy

$$T_{Fo} = \frac{d^2 a^2}{\pi^2},$$

$$\gamma_{Fo} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}81.$$

W przypadku rdzeni o przekroju kwadratowym lub rombowym możemy posłużyć się uproszczeniem polegającym na tym, że zamiast rdzenia litego założymy przekrój lamelowany w sposób szufladkowy, zaznaczony na rys.5. Musimy mieć na uwadze, że na skutek takiego uwarstwienia izolowanych od siebie blach otrzymujemy zawsze mniejsze wartości stałej czasowej podstawowej składowej prądu i strumienia. Przy lamelowanym rdzeniu, w którym uwarstwienie blach wymusza przebieg strug prądów wirowych równolegle do krawędzi przekroju równanie różniczkowe (4) traci ważność. Pole w takim rdzeniu jest polem o zmienności jednowymiarowej.

Uwzględniając, że długość O_r obwodu strugi prądu wirowego w rdzeniu lamelowanym jest proporcjonalna do promienia r, a przekrój S_r rdzenia do kwadratu r

$$S_r = C_1 r^2, \tag{46}$$

$$O_r = C_2 r, \tag{47}$$

otrzymamy na podstawie praw Maxwella

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[J(r,t) \cdot \varrho \cdot O_r\right] = -\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \cdot \frac{dS_r}{dr} \tag{48}$$

i wreszcie równanie wyjściowe, analogiczne do równania przy przekroju kołowym

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial B(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{C_1}{C_2} d^2 \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{49}$$

Lamelowany przekrój rombowy zastąpić możemy równoważnym przekrojem kołowym o tej samej powierzchni, którego zastępcza oporność właściwa ϱ_z powiększona została fikcyjnie do wartości $\varrho \cdot \frac{C_2}{C_1}$.

W świetle powyższych wywodów rozwiązanie tego zagadnienia innymi metodami, z którymi spotykamy się w literaturze technicznej prowadzi do nieścisłych wyników [1] [2]1).

W przypadku przybliżonej analizy przebiegów nieustalonych wzmacniaczy elektromaszynowych z litą częścią obwodu magnetycznego (np. litym jarzmem stojana lub litym pieńkiem biegunowym), schemat zastępczy uzwojenia wzbudzenia przedstawiony na rys. 1b komplikuje funkcję przejścia wzmacniacza z uwagi na istnienie zastępczej indukcyjności rozproszenia harmonicznych przestrzennych strumienia. Jeżeli zaniedbamy w równaniach tę indukcyjność, zastępujemy działanie rdzenia litego zastępczym zwartym uzwojeniem idealnie sprzężonym z uzwojeniem wzbudzenia. Oczywiście przy takim uproszczeniu mija się z celem obliczenie stałej czasowej podstawowej składowej przebiegu prądu i strumienia. Zastępczą oporność czynną rdzenia bocznikującą indukcyjność magnesowania uzwojenia wzbudzenia oszacować możemy ze stałej czasowej T_{F0} podstawowej składowej przebiegu strumienia przy wymuszonym prądzie wzbudzenia.

Stała czasowa narastania prądu i strumienia równa jest przy takim uproszczeniu sumie stałej czasowej T_{F0} i stałej czasowej T_{μ}. Ponieważ stała czasowa rdzenia litego sumuje się ze stałą czasową uzwojenia wzbudzenia, stanowi ona dolną granicę wypadkowej stałej czasowej, do której możemy się zbliżyć za pomocą wtrącenia dodatkowych oporności do obwodu uzwojeń sterujących. Przy dużym udziale stałej czasowej rdzenia litego w wypadkowej stałej czasowej wtrącanie oporności dodatkowych do obwodu uzwojenia sterującego może spowodować znaczne zmniejszenie dobroci wzmocnienia mocy wzmacniacza [3].

Oczywiście przy bardziej dokładnej analizie stanów nieustalonych przydatny jest schemat zastępczy z rys. 1b, którego parametry obliczamy ze współczynników $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Przy uściślaniu analizy wpływu rdzenia litego na przebiegi nieustalone musimy zdawać sobie sprawę z ograniczonej wierności odwzorowania rzeczywistych warunków obwodu magnetycznego w przyjętym modelu. Przyczyny roz-

1) W rdzeniu kwadratowym w przypadku $T_{\mu} = 0$ otrzymuje się przy pomocy wzorów wyprowadzonych w literaturze [1] [2] stałą czasową podstawowej składowej strumienia dwukrotnie większą od wartości poprawnej. Warto podkreślić, że prawidłowe rozwiązanie przekroju o szufladkowym uwarstwieniu blach daje rozbieżność, oczywiście in minus, zaledwie o 5%.

bieżności właściwości modelu i rzeczywistego obwodu magnetycznego można uszeregować w następującej kolejności:

a) wpływ nasycenia obwodu magnetycznego, który pominięto,

b) wpływ innego kształtu rdzenia aniżeli w modelu (np. wpływ litego jarzma stojana odbiega od prostopadłościanu),

c) wpływ innego umiejscowienia uzwojenia wzbudzenia w obwodzie magnetycznym aniżeli w przyjętym modelu (np. uzwojenie wzbudzenia przeważnie nie obejmuje litego rdzenia).

2. WPŁYW ZWARTYCH ZEZWOJÓW KOMUTUJĄCYCH TWORNIKA

Zezwoje komutujące zwarte przez kontakt szczotkowy, które sprzęgają się z uzwojeniem sterującym wzmacniacza stanowią poza litym stojanem drugi zwarty obwód tłumiący, w którym płynie prąd transformacji przy zmianach strumienia wzbudzenia (rys.6). Stałą czasową tego obwodu trudno obliczyć teoretycznie z uwagi na to, że oporność czynna tego obwodu zależy w dużym stopniu od oporności przejścia szczotek zamykających obwód tłumiący. Pomiary laboratoryjne wykazały, że udział stałej czasowej zwartego obwodu zezwojów komutujących w wypadkowej stałej czasowej wzmacniacza jest niewielki i za wyjątkiem szczególnego przypadku znacznie zmniejszonej stałej czasowej uzwojenia sterującego przez wtrącenie w obwód uzwojenia dużej oporności dodatkowej przy całkowicie blachowanym obwodzie magnetycznym, może zostać praktycznie zawsze pominięty. Przy bardzo szybkich zmianach strumienia sterującego prąd transformacji w obwodzie zezwojów komutujących może w szczególnych przypadkach przyczynić się do iskrzenia kontaktu szczotka-komutator.

LITERATURA

1. J.J.Brockman. CE Linkous: - D-C Machines: Response to impact excitation. AIEETr Part III 1955.

2. S.J.Dunajewskij. Wlijanie wichrewych tokow na proces ustanowlenia potoka Elektricestwo 2/1951.

3. W.Paszek: Projektowanie wzmacniaczy maszynowych z polem poprzecznym. Archiwum Automatyki i Telemechaniki 3/4 1957.

4. H.Prassler: Schaltvorgänge im magnetischen Kreis elektrischer Maschinen mit massiven Eisenteilen. Archiv. für El.3/1957.

5. R.Rüdenberg: Elektrische Schaltvorgänge. Springer Verlag Berlin 1953.

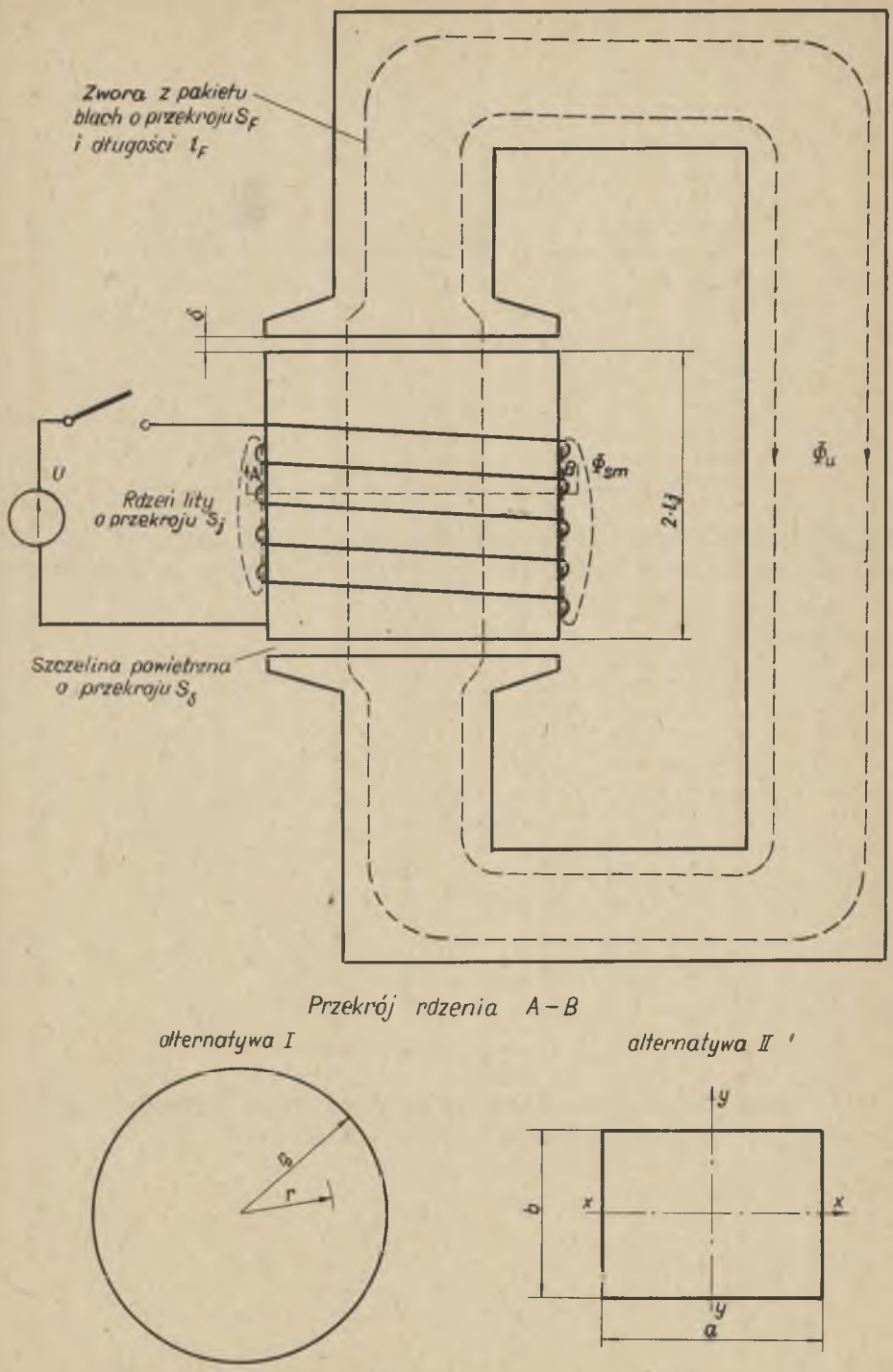
6. K.W.Wagner: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation Leipzig 1950.

РЕЗЮМЕ

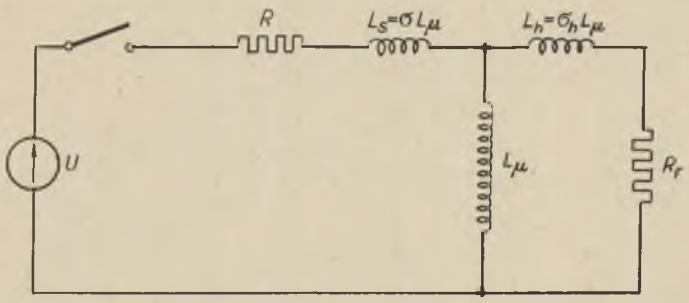
В работе сравнивается влияние литого стального сердечника с круглым и четырехугольным сечением на процесс нарастания магнитного потока и тока возбуждения для магнитной модели электромашинного усилителя.

RÉSUMÉ

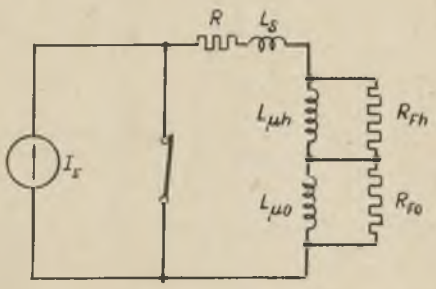
L'auteur fait une comparaison de l'influence du bloc d'acier d'une section ronde et rectangulaire sur l'acroissement du flux et du courant pour le modéle magnétique d'une machine-amplificateur.



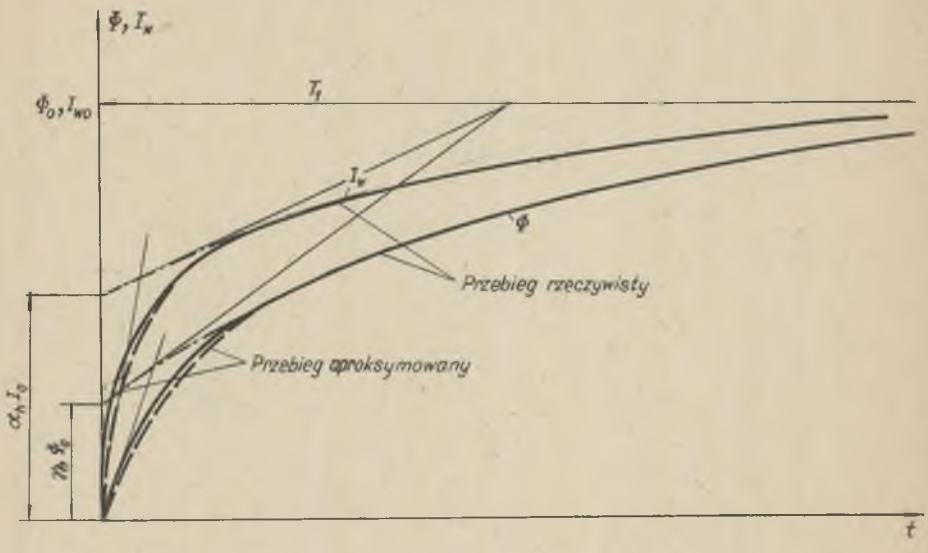
Rys.1a. Model obwodu magnetycznego z litym rdzeniem



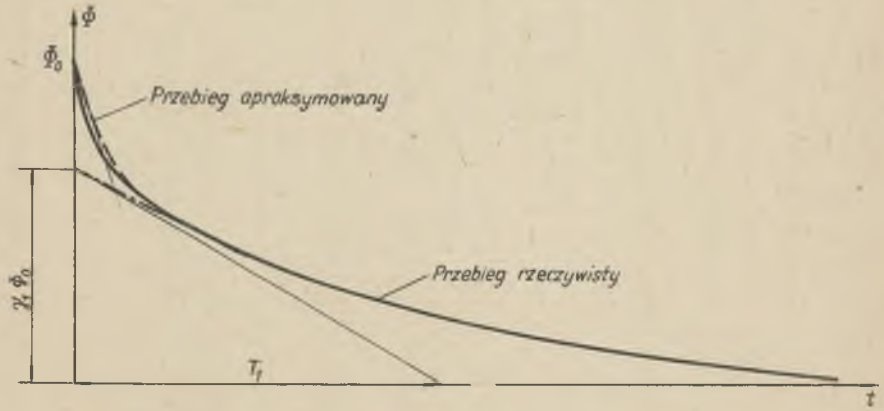
Rys.1b. Schemat zastępczy elektrycznego obwodu uzwojenia wzbudzenia z uwzględnieniem oddziaływania rdzenia litego



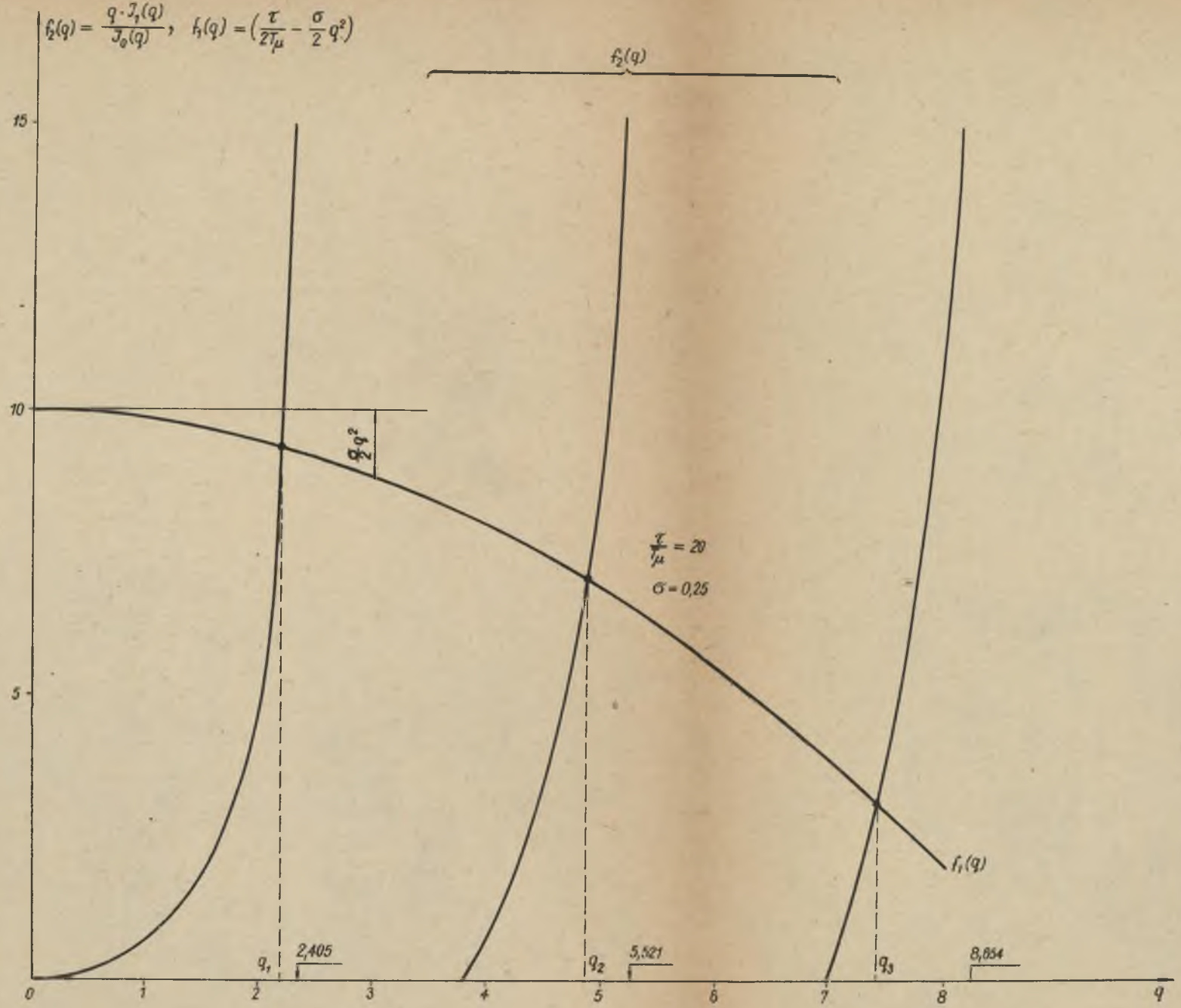
Rys.1c. Schemat zastępczy przy zasilaniu uzwojenia wzbudzenia ze źródła prądowego



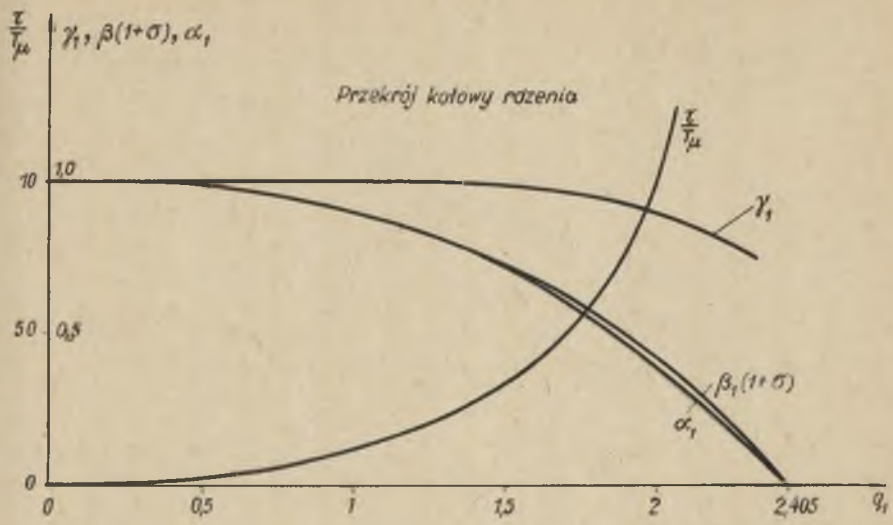
Rys.1d. Przebiegi narastania prądu wzbudzenia i strumienia po przyłączeniu napięcia o postaci skokowej



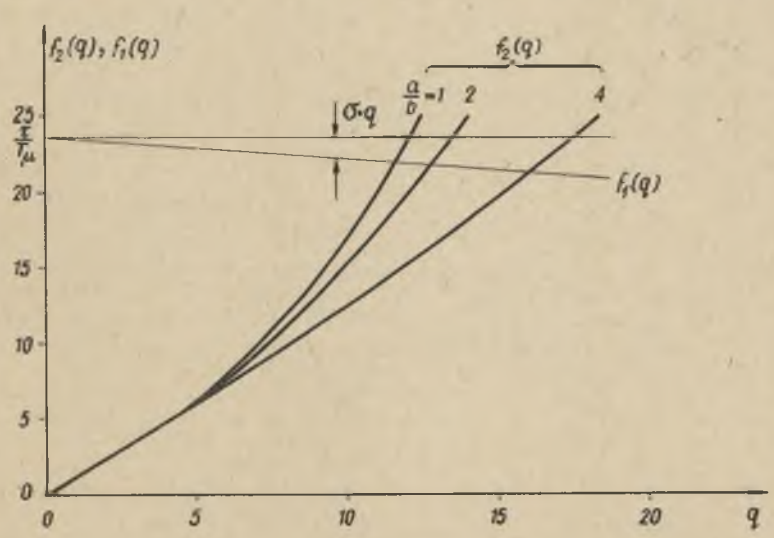
Rys.1e. Przebieg zanikania strumienia w rdzeniu litym



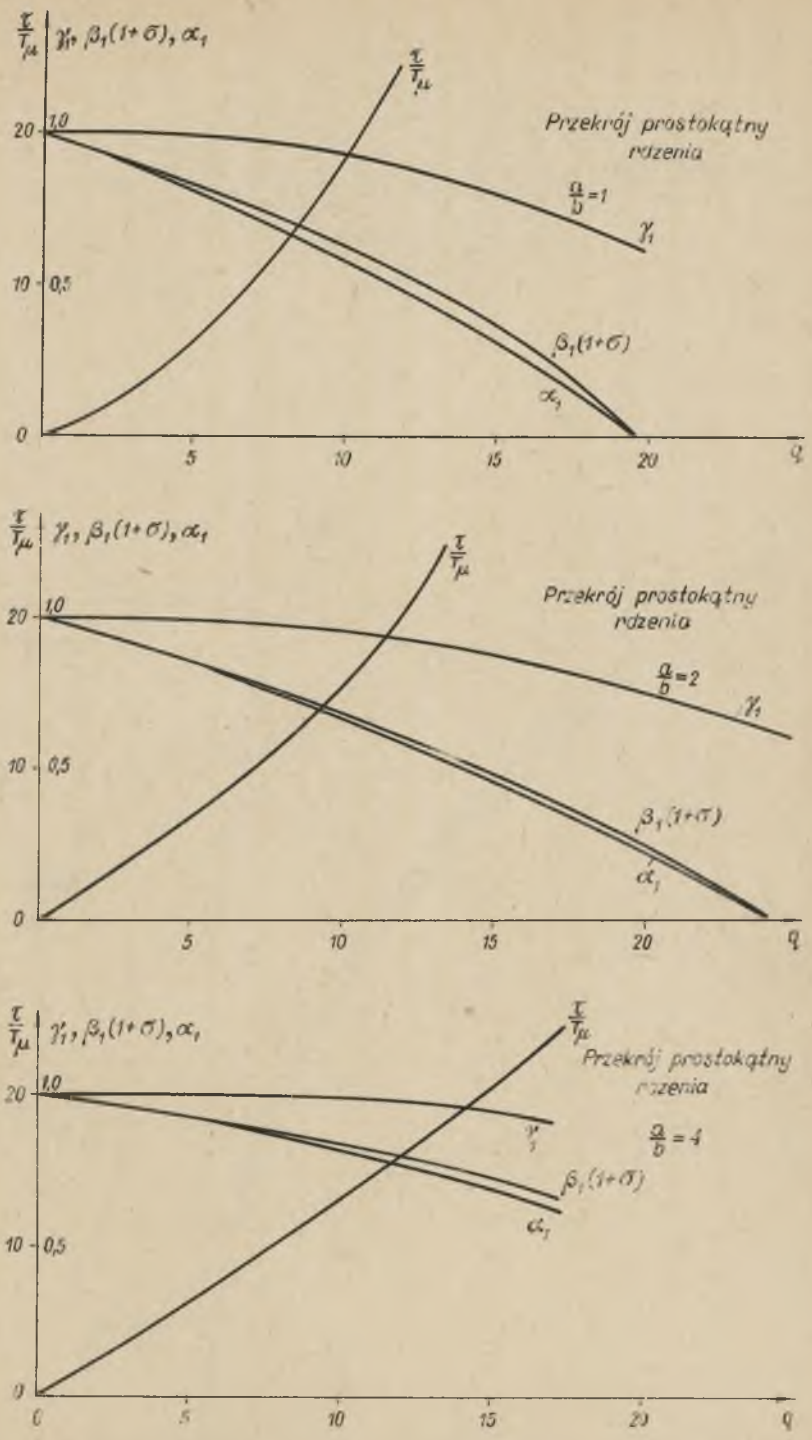
Rys.2a. Przebieg funkcji pomocniczych $f_1(q)$ i $f_2(q)$ w przypadku rdzenia o przekroju kołowym



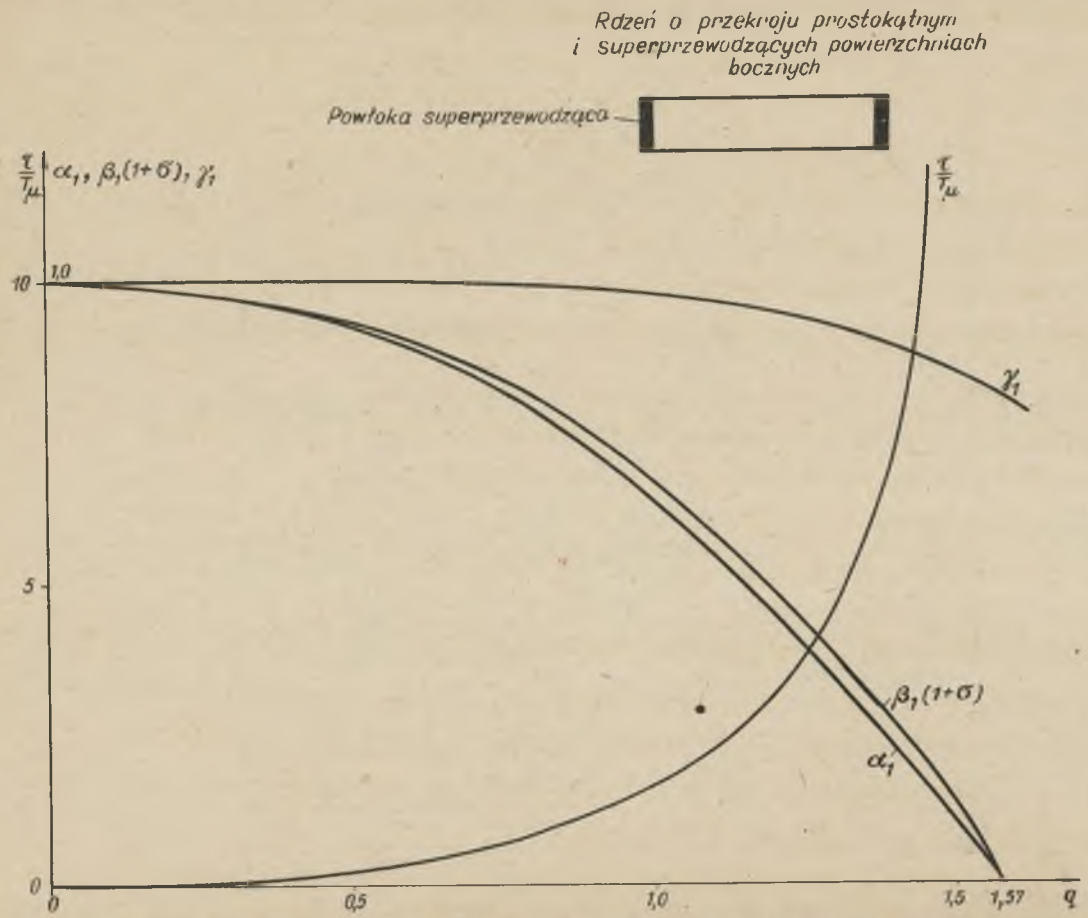
Rys.2b. Wykres pomocniczy do wyznaczenia podstawowej składowej wykładniczej prądu i strumienia w przypadku rdzenia o przekroju kołowym [4]



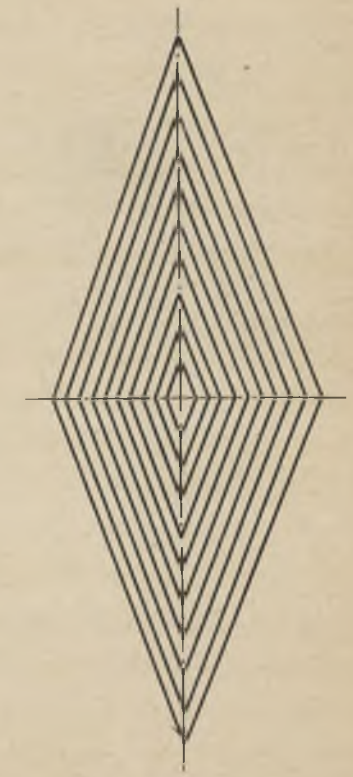
Rys.3a. Przebieg funkcji pomocniczych $f_1(q)$ i $f_2(q)$ w przypadku rdzenia o przekroju prostokątnym



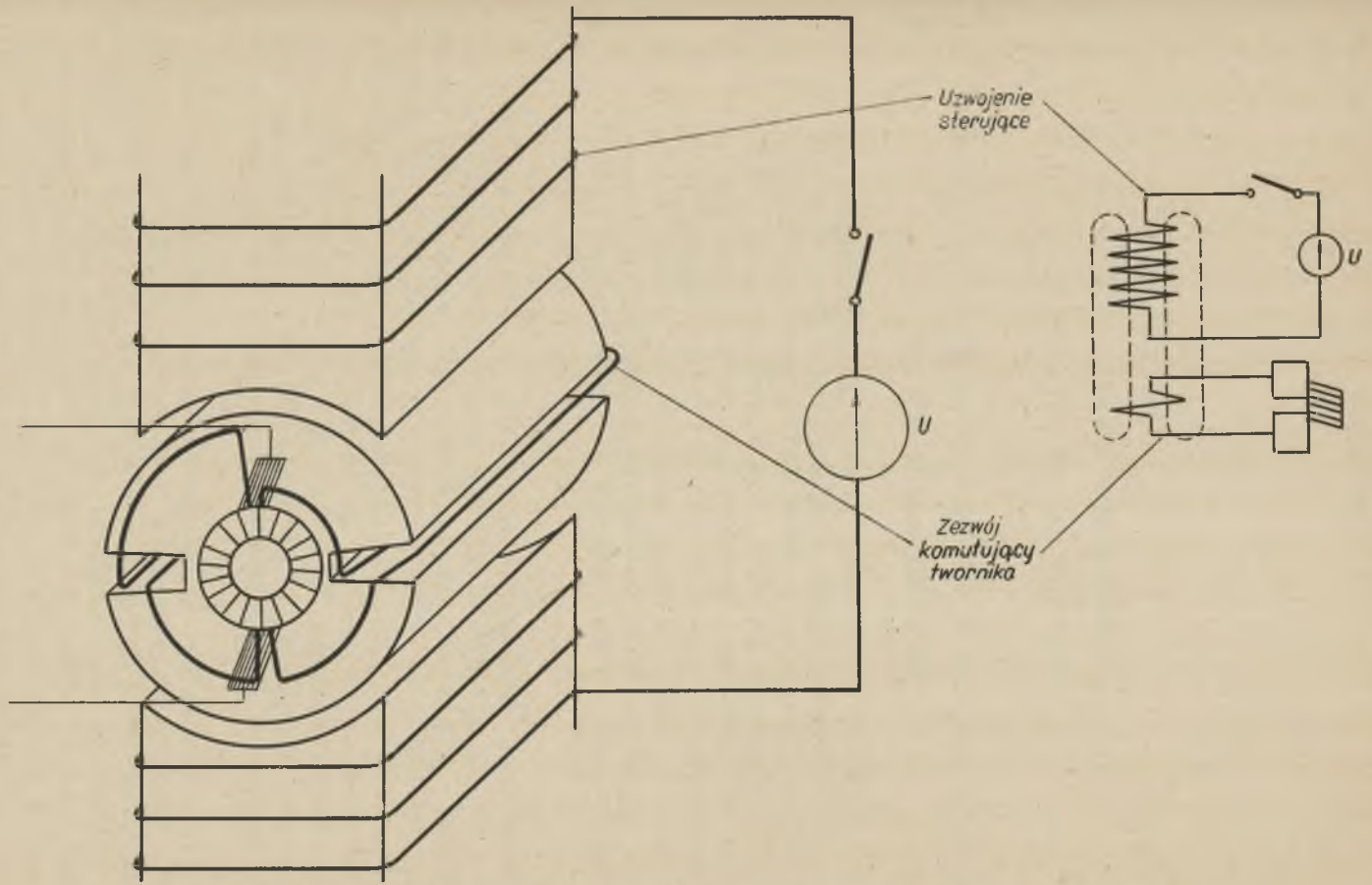
Rys.3b. Wykres pomocniczy do wyznaczenia podstawowej składowej wykładniczej prądu i strumienia w przypadku rdzenia o przekroju prostokątnym [4]



Rys.4. Wykres pomocniczy do wyznaczenia podstawowej składowej strumienia i prądu w przypadku rdzenia o przekroju prostokątnym z powłoką superprzewodzącą



Rys.5. Rdzeń o przekroju rombowym i szufladkowym ułożeniu blach składowych



Rys.6. Zezwój komutujący sprzężony z uzwojeniem sterującym