ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 28 ELEKTRYKA z.9 1961

TADEUSZ STĘPNIEWSKI

Katedra Wysokich Napięć

OKREŚLANIE PRZEBIEGÓW FALOWYCH W LINIACH DŁUGICH METODĄ CHARAKTERYSTYK

Streszczenie. Podano zasadnicze podstawy zastosowania graficznej metody charakterystyk do określania przebiegów falowych w punktach węzłowych linii długich bez strat. Ogólne zależności uzupełniono przykładami zastosowania metody dla przypadków: rozgałęzienia linii długiej, włączenia oporności nieliniowej równolegle do linii długiej, włączenia szeregowego krótkiego odcinka kabla w ciąg linii napowietrznej. Podano zakres zastosowania metody.

Analiza przebiegów falowych w punktach nieciągłości linii długich przy pomocy metody kolejnych odbić i sumowania fal składowych, przesuniętych w czasie, (siatka Bewley'a) jest żmudna i pracochłonna [1]. Znaczne uproszczenie rozwiązania uzyskuje się przy zastosowaniu graficznej metody charakterystyk. Metoda ta została zastosowana początkowo przez Bergerona do badania przebiegów hydrodynamicznych w rurociągach, a następnie rozszerzona na przebiegi nieustalone w obwodach elektrycznych [2][3] [4] [5].

Metoda charakterystyk pozwala na stosunkowo szybkie i proste określanie chwilowych wypadkowych wartości napięć i prądów oraz ich przebiegów czasowych w określonych punktach linii. Szczególnie interesujące są węzły, w których występuje zmiana oporności falowych linii, rozgałęzienie lub włączenie elementów o własnościach skupionych: oporności liniowych i nieliniowych, pojemności, indukcyjności. Metoda znajduje zastosowanie głównie dla rozpatrywania udarowych przebiegów falowych, ale może być użyta

również i dla określania w liniach długich nieustalonych przebiegów napięciowych, występujących w czasie zwarć [6]

Podstawą zastosowania metody charakterystyk są zasadnicze równania dla linii długiej bez strat:

$$u = F(x-vt) + G(x+vt) \tag{1}$$

$$iZ = F(x-vt) - G(x+vt) \tag{2}$$

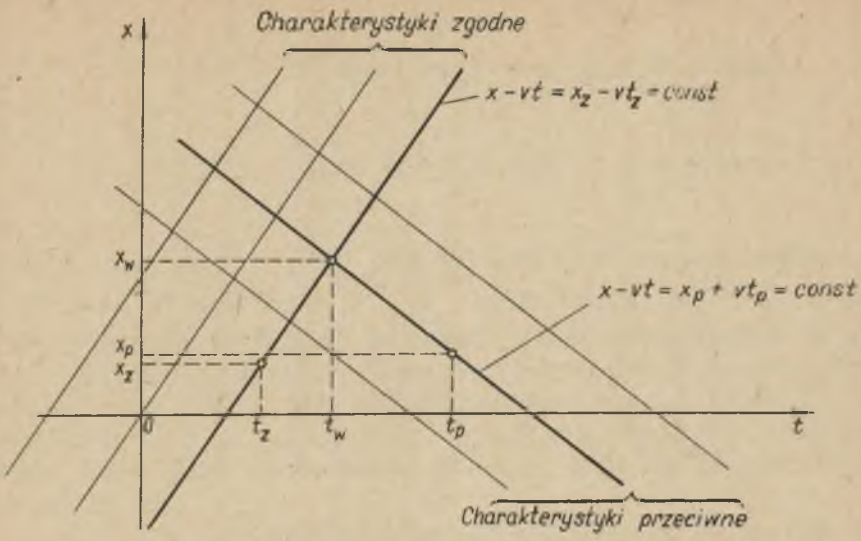
Dodając lub odejmując powyższe równania stronami otrzymuje się:

$$u + iZ = 2F(x-vt) \tag{3}$$

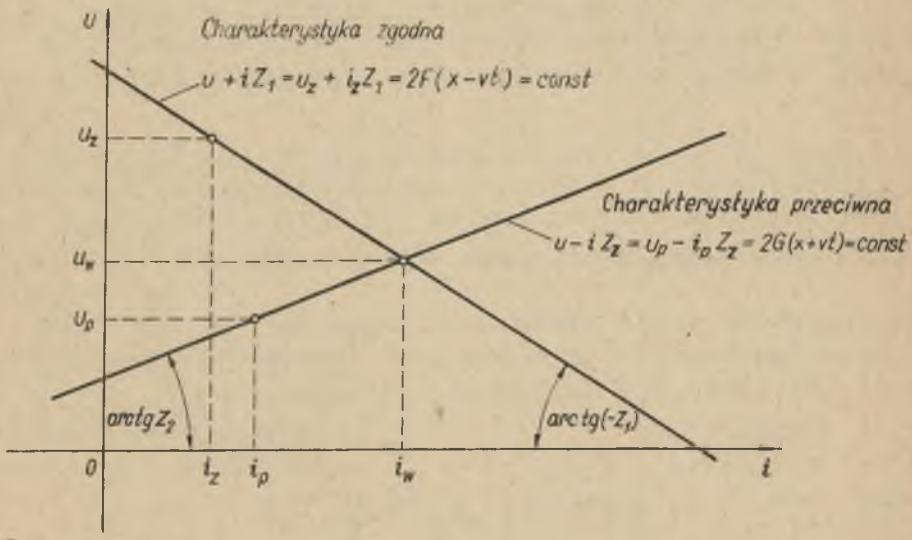
$$u - iZ = 2G(x+vt) \tag{4}$$

Równanie (3) przedstawia zależności dla przebiegów zgodnych z dodatnimi wartościami x, a równanie (4) dla przebiegów w kierunku przeciwnym $(-x)$. Chwilowe wartości funkcji $F(x-vt)$ oraz $G(x+vt)$ przesuwają się wzdłuż linii o oporności falowej $Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ z szybkością $v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$, gdzie L' jest indukcyjnością, a C' jest pojemnością jednostki długości linii. Określone wartości powyższych funkcji w układzie współrzędnych x, t są liniami prostymi i przedstawiają charakterystyki "zgodne" dla $x-vt = const$ oraz "przeciwne" dla $x+vt=const$. Na rysunku (1) przedstawiono rodziny takich charakterystyk, których położenie określone jest wartościami brzegowymi x_z, t_z lub x_p, t_p.

Z równań (3) oraz (4) wynika, że suma $u+iZ$ jest zależna tylko od $(x-vt)$, a więc od przebiegów w kierunku dodatnich x (zgodnym), a różnica $(u-iZ)$ jest zależna tylko od przebiegów w kierunku ujemnych x (przeciwnym). Określonym wartościom każdej charakterystyki $x-vt=x_z-vt_z=const$ lub $x+vt=x_p+vt_p=const$ odpowiadają określone wartości:



Rys.1. Charakterystyki zgodne i przeciwne w układzie (x,t)



Rys.2. Charakterystyki napięciowo-prądowe, zgodne i przeciwne

$$u + iZ = 2F(x_z - vt_z) = u_z + i_z Z = \text{const} \quad (5)$$

$$u - iZ = 2G(xp + vt_p) = u_p - i_p Z = \text{const} \quad (6)$$

gdzie u_z, u_p, i_z, i_p są wartościami wypadkowych napięć i prądów w punktach x_z, x_p dla chwil t_z, t_p. Z powyższego wynika również, że każdej charakterystyce w układzie (x,t) odpowiada charakterystyka napięciowo-prądowa w układzie (u,i), co przedstawione jest na rys.2. Charakterystyki te są liniami prostymi, których pochylenie określone jest opornością falową, a położenie warunkami brzegowymi.

Jeżeli w określonym punkcie x_w,t_w przecinają się dwie charakterystyki, to zgodnie z równaniami (5) oraz (6), jednakowe wartości napięć i prądów muszą wystąpić równocześnie na odpowiadających charakterystykach napięciowo-prądowych, co odpowiada przecięciu tych charakterystyk w punkcie o współrzędnych u_w,i_w. Eksponowanymi punktami układu są węzły, w których następuje załamanie i odbicie fal. Dla znalezienia poszukiwanego rozwiązania tj. wartości napięcia u_w oraz prądu i_w potrzebne jest dodatkowe równanie, charakteryzujące węzeł.

Zastosowanie praktyczne metody charakterystyk wyjaśniają podane niżej rozwiązania dla kilku typowych przypadków.

Rozgałęzienie linii. W punkcie węzłowym W (rys.3) występuje rozgałęzienie linii o opornościach falowych Z_1, Z_2, Z_3. Po linii Z_1 nadchodzi fala wędrowna prostokątna u_o. Poszukiwane jest napięcie w węźle oraz prądy liniowe.

Napięcie u_o po dojściu do węzła ulega odbiciu i osiąga wartość poszukiwaną u_w, która przechodzi na linie Z_2 oraz Z_3. Charakterystyka zgodna dla linii Z_1 odpowiada zależności:

$$u_1 + i_1 Z_1 = \text{const.} \quad (7)$$

Stałą wyznaczyć można z warunku granicznego np. dla otwartego końca Z_1 napięcie $u_1 = 2u_o$, a prąd $i_1=o$, stąd const $= 2u_o$. Ostatecznie:

$$u_1 + i_1 Z_1 = 2u_o \tag{7a}$$

Charakterystyka w układzie (u,i) przedstawiona jest prostą $-Z_1$, przechodzącą przez punkty: $i_1 = 0, u_1 = 2u_o$; $u_1 = 0, i_1 = \frac{2u_o}{Z_1} = 2i_o$ (rys. 3c).

Charakterystyki przeciwne Z_2 oraz Z_3 przechodzą przez początek współrzędnych i odpowiadają zależnościom:

$$u_2 - i_2 Z_2 = 0, \quad u_3 - i_3 Z_3 = 0 \tag{8}$$

Należy zaznaczyć, że $u_w = u_1 = u_2 = u_3$.

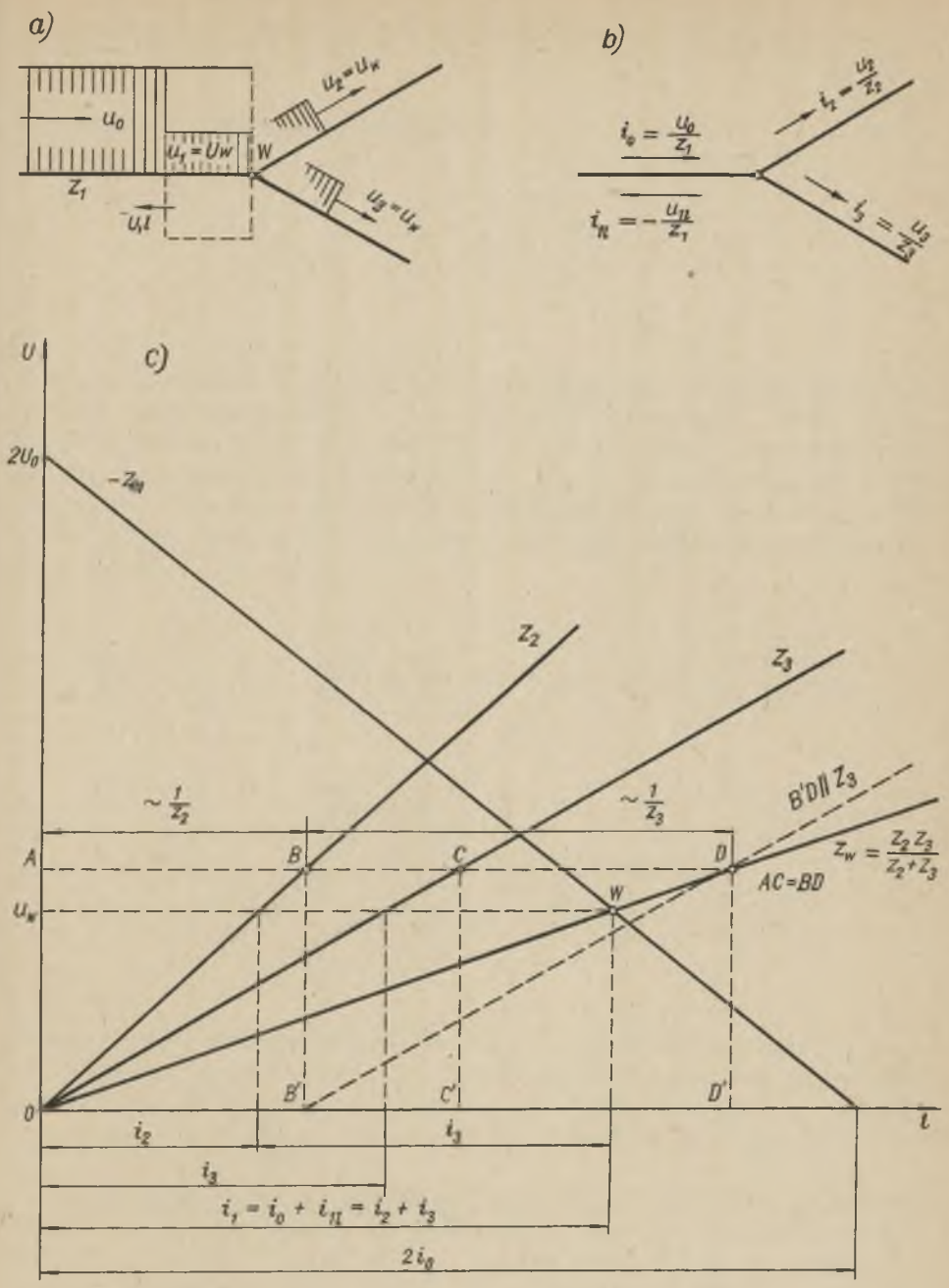
Dodatkowe równanie, charakteryzujące punkt węzłowy dotyczy równości prądów z obydwu stron punktu węzłowego lub w innym ujęciu sprowadza się do znalezienia wypadkowej oporności, równolegle połączonych Z_2 i Z_3.

$$i_1 = i_o + i_{11} = i_2 + i_3 \tag{9}$$

Ponieważ $i_{11} = -\frac{u_{11}}{Z_1} = -\frac{u_w - u_o}{Z_1}$, a $i_o = \frac{u_o}{Z_1}$, więc po podstawieniu do równania (9) otrzymuje się:

$$\frac{u_o}{Z_1} - \frac{u_w - u_o}{Z_1} = \frac{u_w}{Z_2} + \frac{u_w}{Z_3}$$ i po przekształceniu:

$$\frac{2u_o}{Z_1} - \frac{u_w}{Z_1} = \frac{u_w}{Z_2} + \frac{u_w}{Z_3} = u_w \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) = u_w \frac{1}{Z_w}$$



Rys.3. Rozgałęzienie linii

a - układ zasadniczy i zależności napięciowe, b - rozpływ prądów, c - rozwiązanie graficzne metodą charakterystyk

Wypadkową charakterystykę

$$Z_w = \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

otrzymać można graficznie w następujący prosty sposób: Przez dowolny punkt A na osi U (rys.3c) kreśli się prostą równoległą do osi i, przecinającą charakterystyki Z_2, Z_3 w punktach B oraz C, a następnie odmierza się BD = AC, kreśląc przez B równoległą do Z_3. Prosta OD jest poszukiwaną charakterystyką oporności wypadkowej Z_w gdyż:

$$\frac{BB'}{OB'} = Z_2 \qquad \frac{OB'}{OA} = \frac{1}{Z_2} \qquad OB' = AB = \frac{1}{Z_2} \cdot OA$$

$$\frac{CC'}{OC'} = Z_3 \qquad \frac{OC'}{CC'} = \frac{1}{Z_3} \qquad OC' = AC = \frac{1}{Z_3} \cdot OA$$

$$AB + AC = AB + BD = \frac{1}{Z_2} OA + \frac{1}{Z_3} \cdot OA = \frac{1}{Z_w} OA.$$

Przecięcie charakterystyki Z_w z charakterystyką $-Z_1$ daje punkt przecięcia W, którego współrzędne dają poszukiwane wielkości napięcia u_w oraz prądu i_1. Prądy i_2 oraz i_3 łatwo określa się również z rysunku.

Oporność nieliniowa włączona równolegle do linii. Rysunek 4a przedstawia interesujący ogólny przypadek włączenia w węźle W, w którym łączą się linie o opornościach falowych Z_1 oraz Z_2, skupionej oporności nieliniowej np. słupa zmiennooporowego odgromnika zaworowego o znanej charakterystyce $U_R = f(i_R)$. Dla rozwiązania graficznego przyjęto zadany kształt fali wędrownej $u_o = f(t)$, przedstawiony na rys.4b.

Dla punktu W słuszna jest następująca zależność, dotycząca równości napięć:

$$u_1 = u_o + u_1 = u_R = u_2 \tag{10}$$

gdzie u_{11} jest napięciem odbitym od W, oraz słuszna jest równość prądów:

$$i_o + i_{11} = i_R + i_2 \tag{11}$$

przy czym:

$$i_o = \frac{U_o}{Z_1}; \quad i_{11} = -\frac{U_{11}}{Z_1} = -\frac{U_R - U_o}{Z_1}; \quad i_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{U_R}{Z_2}$$

stąd:

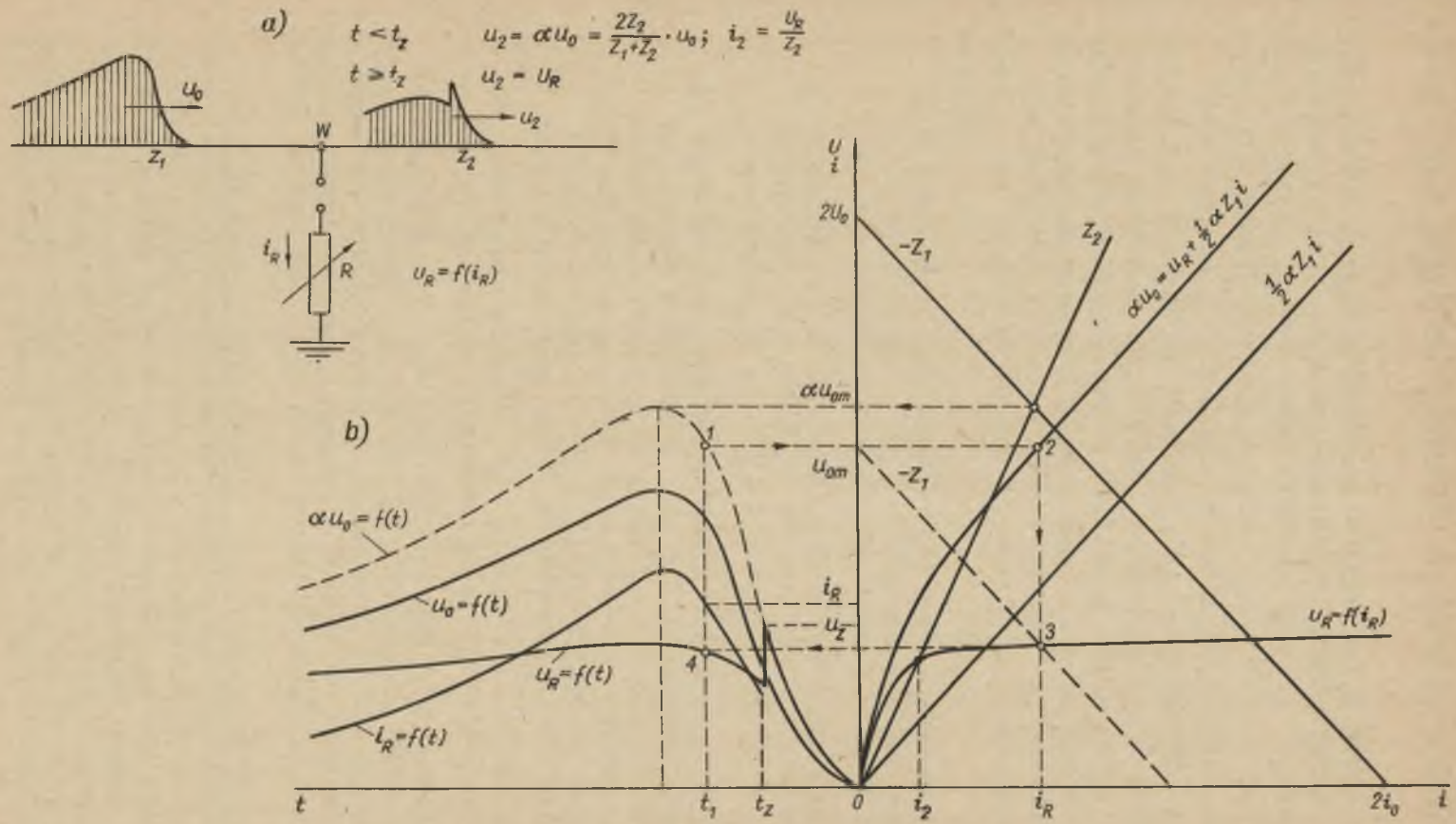
$$\frac{U_o}{Z_1} - \frac{U_R - U_o}{Z_1} = i_R + \frac{U_R}{Z_2}$$

a po przekształceniu i oznaczeniu współczynnika przepuszczenia $\alpha = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$.

$$u_R = \alpha u_o - \frac{1}{2}\alpha Z_1 i_R \tag{12}$$

W przypadku gdy $i_R = 0$, co odpowiada odłączeniu oporności R i przejściu fali u_o bezpośrednio z linii o oporności Z_1 na linię Z_2, równanie (12) wyraża się prostą znaną zależnością;

$$U_2 = \alpha U_o \tag{12a}$$



Rys.4. Oporność nieliniowa włączona równolegle do linii a) układ zasadniczy, b) rozwiązanie graficzne metodą charakterystyk

którą łatwo określić graficznie (rys.4b) z przecięcia charakterystyki $-Z_1$, przechodzącej przez rzędną $2u_o$ dla odciętej $i_1 = 0$ oraz charakterystyki Z_2 $(u_2 - i_2 Z_2 = 0)$. Dla stacji krańcowej, gdy $Z_2 = \infty$, $\alpha = 2$.

Przy włączonej oporności $R = f(i_R)$ rozwiązanie graficzne tj. oznaczenie wartości u_R oraz prądu i_R dla dowolnej wartości $u_o = f(t)$ otrzymuje się z przecięcia charakterystyk wg równania (12) oraz $U_R = f(i_R)$ tj. ze współrzędnych punktu (3) na prawej stronie rys.1b.

Dla zadanego kształtu fali udarowej $u_o = f(t)$ łatwo kreśli się charakterystykę $u_R = f(t)$ w następujący sposób:

a) W układzie (u,t) kreśli się zadany przebieg $u_o = f(t)$ oraz $\alpha u_o = f(t)$, określając współczynnik przepuszczenia α dla znanych Z_1 oraz Z_2.

b) W układzie (u,i) kreśli się charakterystykę danej oporności $U_R = f(i_R)$, prostą $\frac{1}{2}\alpha Z_1 i$ oraz krzywą pomocniczą $\alpha u_o = u_R + \frac{1}{2}\alpha Z_1 i$.

c) Rzutuje się poziomo punkty (1) krzywej $\alpha u_o = f(t)$ na krzywą pomocniczą αu_o i punkt przecięcia (2) rzutuje pionowo na krzywą $u_R = f(t)$, a otrzymany punkt przecięcia (3) dalej rzutuje poziomo do przecięcia z rzędną $\alpha u_o = f(t)$. Otrzymany punkt (4) daje poszukiwany punkt charakterystyki $u_R = f(t)$.

d) Przenosząc odciętą i_R z układu (u,i) do układu (i,t) otrzymuje się zależność $i_R = f(t)$.

W przypadku gdy słup zmiennooporowy odgromnika włączony jest przez iskiernik (I_z), działanie odgromnika rozpoczyna się dopiero po osiągnięciu przez napięcie w punkcie węzłowym (αu_o) wartości udarowego napięcia zapłonu iskiernika (u_z), co zachodzi w chwili t_z.

Odcinek kablowy włączony w ciąg linii napowietrznej. Przy pomocy metody charakterystyk łatwo jest określić przebiegi falowe powstające w krótkich odcinkach kablowych na podejściach do stacji. Rozpatruje się wielokrotne odbicia, występujące na obydwu końcach kabla, wychodząc zawsze z wartości nowo powstałej fali. Rysunek 5 przedstawia przykład zastosowania metody charakterystyk dla określenia napięcia na końcach kabla w funkcji czasu.

Przecięcia charakterystyk $-Z_1$ oraz Z_2 dają napięcia na początku kabla U_A, natomiast przecięcia charakterystyk $-Z_2$ oraz Z_3 napięcia na końcu kabla U_B. Dla chwili $t=0$, przyjętej dla momentu dojścia fali U_o do węzła A słuszne są zależności:

$$u_{1o} + i_{1o} Z_1 = const = 2u_o \text{ dla linii } Z_1$$

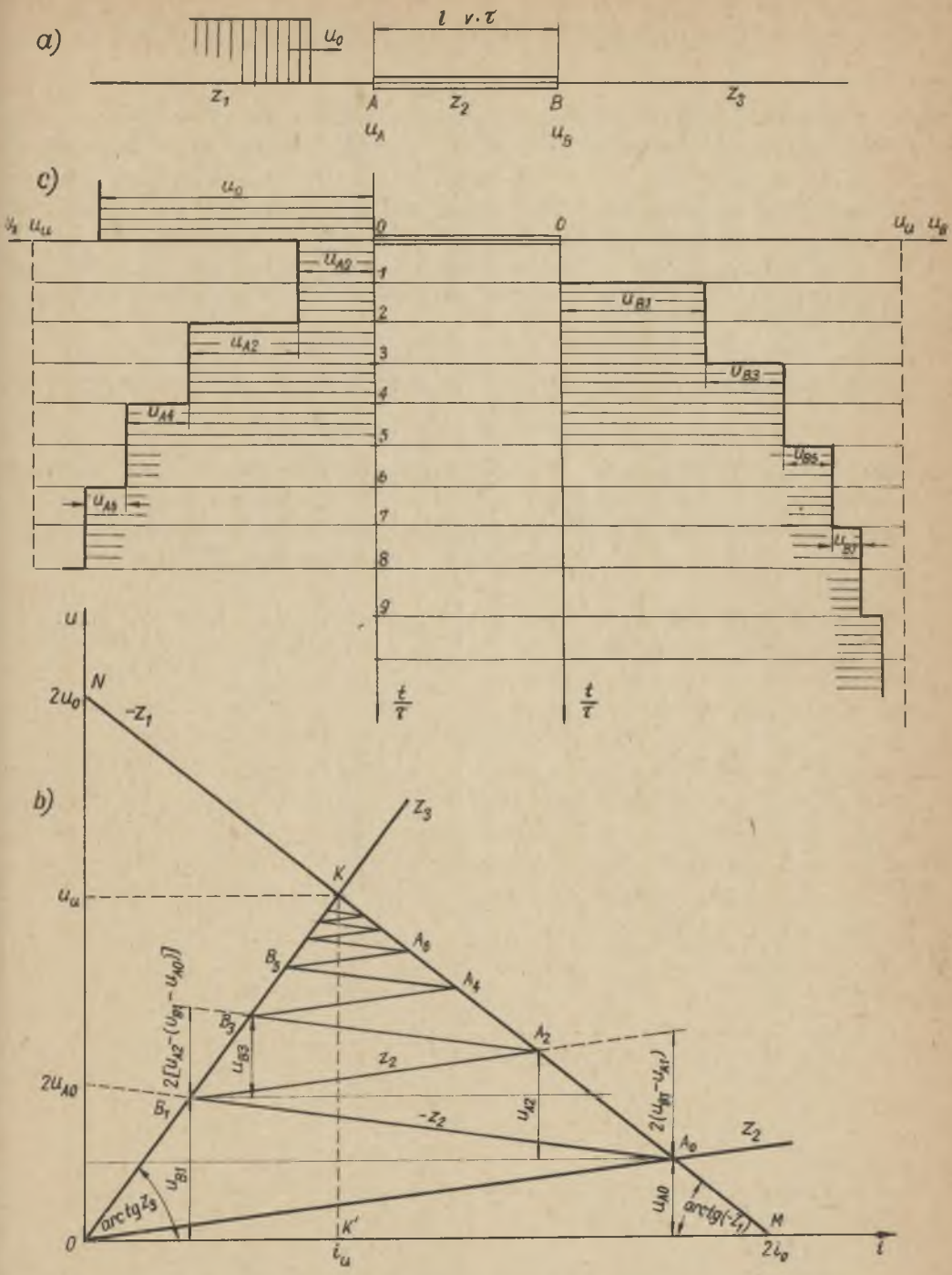
$$u_{2o} - i_{2o} Z_2 = const = 0 \quad \text{dla linii } Z_2$$

Punkt przecięcia tych charakterystyk A_o pozwala określić napięcia u_{1o} oraz u_{2o} jak również prąd i_{2o}. Fala napięciowa u_{2o}, przepuszczona na linię kablową Z_2 po czasie $\tau = \frac{l_2}{v_2}$ dochodzi do punktu węzłowego B. Napięcie w tym węźle określa się podobnie, jak w wyżej podanym przypadku węzła A, ale z przecięcia się charakterystyk $-Z_2$ oraz $+Z_3$ w punkcie B1. Fala odbita od węzła B, o amplitudzie $U_{B1}-U_{Ao}$, biegnie z powrotem do A, odbija się znowu w kierunku B itd. Sposób określania napięć przy kolejnych odbiciach wynika z rysunku 5b. Po wielokrotnych odbiciach następuje eliminacja oporności falowej Z_2 i ustalona wartość napięcia określona jest przecięciem się charakterystyk $-Z_1$ oraz $+Z_3$. Z podobieństwa trójkątów KKM oraz ONM wynika zależność:

$$\frac{u_u}{2u_o} = \frac{K'M}{K'M+OK'} = \frac{\frac{U_u}{Z_1}}{\frac{U_u}{Z_1} + \frac{U_u}{Z_3}} = \frac{Z_3}{Z_3+Z_1}$$

Po przekształceniu otrzymuje się, znaną z analitycznego rozwiązania, zależność dla napięcia ustalonego:

$$u_u = 2u_o \frac{Z_3}{Z_1+Z_3}$$



Rys.5. Odcinek kablowy włączony w ciąg linii napowietrznej

a - układ zasadniczy, b - określenie graficzne napięć w punktach węzłowych, c - przebiegi napięć w funkcji czasu dla węzłów

Z wykresu 5b otrzymuje się łatwo schodkowy przebieg napięć U_A oraz u_B w funkcji czasu, przedstawionych na rysunku 5c.

Metoda charakterystyk może być zastosowana również do układów zawierających w punktach węzłowych skupione indukcyjności (L) lub pojemności (C). Indukcyjność L należy zastąpić krótkim odcinkiem linii o dużej oporności falowej Z_L, korzystając z zależności: $Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L'^2}{L'C'}} = \frac{L'}{\sqrt{L'C'}} = L'v = \frac{L'l}{t} = \frac{L}{t}$. Analogicznie pojemność C zastąpić można linią o małej oporności $Z_C = \frac{t}{C}$; t jest czasem przebiegu fali wzdłuż długości l zastępczej linii, która zamiast ciągłych przebiegów wykładniczych daje przebiegi schodkowe, które będą tym krótsze im mniejsza będzie długość zastępczego odcinka.

LITERATURA

1. Bewley L.V.: Traveling Waves on Transmission Systems. New York, John Wiley and Sons, 1951.

2. Bulla W.: Das Bergeron-Diagramm für Wanderwellen, EuM, 1954.

3. Maudit M.A.: Méthode graphique de Bergeron pour l'etude de la propagation des ondes de long des lignes électriques, Rev. gen. Electr. 1954.

4. Baatz H.: Überspannungen in Energieversorgungsnetzen. Berlin, Springer-Verlag, 1956.

5. Razewig D.W.: Razczet mnogokratnych otrażenij wołn w linijach s pomoszcziu metoda charakteristik. Moskwa 1959, L.I.Sirotińskij, Tiechnika wysokich naprjażenij.

6. Satche P., Grosse V.: Le calcul des tensions de rétablissement et des surtensions internes par la méthode de Bergeron, CIGRE 1950 Nr 128.

РЕЗЮМЕ

В работе даны главные основы графического „метода характеристик" для определения волновых явлений в узлах долгих линий без потерь. В качестве приложения даны примеры применения метода для различных условий. Дано определение пределов применения метода.

RÉSUMÉ

Le travail donne les foundements principales d'une méthode graphique dite „des characteristiques" pour determiner les phenomènes transitoires dans les points de jonction des lignes longues sans pertes. Comme compléments on a donné les exemples d'application de la méthode pour certains cas spéciales et on a determiné les limites d'applications de la méthode.