ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: AUTOMATYKA z. 8 Nr kol. 192

OLGIERD PALUSIŃSKI
Katedra Teorii Regulacji

METODA OKREŚLANIA SKALI CZASU MODELI MATEMATYCZNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH[x)]

Streszczenie: Praca poświęcona jest zagadnieniom związanym z wyborem skali czasu modeli matematycznych układów liniowych symulowanych przy pomocy elektronicznej maszyny analogowej prądu stałego.

W pierwszej części pracy zbadano wpływ zmiany skali amplitud i skali czasu na przebiegi w modelu symulowanym. W drugiej części pracy w oparciu o algebraiczne metody lokalizacji wartości własnych macierzy zaproponowano sposób wyboru skali czasu w oparciu o znane parametry układu modelowanego.

1. Skalowanie modelu liniowego

1.1. Analiza modelu matematycznego

W dalszym ciągu zajmować się będziemy modelami matematycznymi, które można przedstawić przy pomocy jednorodnego układu równań różniczkowych zwyczajnych o postaci:

$$\dot{x} = A\,x, \tag{1.1}$$

gdzie:

x = jest wektorem kolumnowym,

$x^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$,

A - jest macierzą kwadratową o elementach stałych,

$A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$

---

x) Praca nagrodzona na konkursie Gliwickiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1966.

Do modeli matematycznych typu (1.1) prowadzi analiza właściwości dynamicznych układów o stałych skupionych dla małych odchyleń od punktu pracy. Wiele praktycznych liniowych układów niejednorodnych można scharakteryzować przy pomocy modelu (1.1) wprowadzając odpowiednie warunki początkowe dla składowych wektora x.

Symulując układy o stałych rozłożonych najbardziej użyteczną metodą równań różniczkowo-różnicowych dochodzimy również do modelu matematycznego typu (1.1). Przedstawimy obecnie znaną ogólną postać rozwiązania układu (1.1).

W tym celu wprowadzimy nowy wektor y określony równaniem macierzowym

$$y = P\,x, \tag{1.2}$$

gdzie:

P - jest macierzą ortogonalną.

Eliminując wektor x z układu równań (1.1) otrzymujemy

$$\dot{y} = PAP^{-1}\,y. \tag{1.3}$$

Macierz P wybieramy tak by doprowadzić równanie (1.3) do postaci kanonicznej. Jeżeli wartości własne macierzy A są pojedyńcze to rozwiązanie układu równań (1.3) można przedstawić w postaci

$$y_i = y_i(o)\,e^{\lambda_i t} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{1.4}$$

gdzie:

λ_i - wartości własne macierzy A.

Na podstawie (1.2) otrzymujemy

$$y_i(o) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,x_k(o) \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{1.5}$$

gdzie:

p_{ik} - elementy macierzy P.

Uwzględniając relację (1.5) możemy napisać

$$y_i = \left[\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, x_k(o)\right] e^{\lambda_i t} \tag{1.6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Na podstawie układu równań (1.2) możemy uzależnić "i tą" składową wektora x od składowych wektora y

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} q_{il}\, y_l \tag{1.7}$$

gdzie:

q_{il} - elementy macierzy P^{-1}

Eliminując w oparciu o związek (1.6) y_l występujące w równaniu (1.7) otrzymujemy ostateczną postać rozwiązań układu (1.1)

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} b_{il}\, e^{\lambda_l t},$$

gdzie:

$$b_{il} = q_{il} \sum_{k=1}^{n} p_{lk}\, x_k(o)$$

1.2. Skalowanie amplitud

Aby modelować układ (1.1) przy pomocy maszyny analogowej musimy wszystkie składowe wektora x które nazywa się zwykle zmiennymi rzeczywistymi, zastąpić napięciami - zmiennymi maszynowymi, zgodnie z relacją

$$X_k = a_{x_k}\, x_k \tag{1.9}$$

gdzie:

x_k – zmienna rzeczywista,
X_k – zmienna maszynowa,
a_{x_k} – współczynnik skali amplitud.

Technika wprowadzania współczynników skali amplitud polega na pomnożeniu "i-tego" równania układu (1.1) przez współczynnik a_{x_i} oraz podstawieniu wyrażenia

$$x_k = \frac{1}{a_{x_k}} (a_{x_k} x_k) = \frac{1}{a_{x_k}} X_k \tag{1.10}$$

w miejsce "k-tej" składowej wektora x.

Wprowadzając w taki sposób współczynniki skali amplitud otrzymujemy na podstawie (1.1) układ równań maszynowych

$$\dot{X}_i = a_{x_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{i_k}}{a_{x_k}} X_k \tag{1.11}$$

$$i=1,2,\ldots,n$$

Postać macierzowa układu równań maszynowych jest następująca:

$$\dot{X} = DAD^{-1}x \tag{1.12}$$

gdzie:

D – jest macierzą diagonalną.

Macierz D – występująca w układzie równań (1.12) ma następującą budowę

$$D = \begin{bmatrix} a_{x_1} & & & \\ & a_{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{x_n} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Aby uzyskać ogólną postać rozwiązań układu (1.12) wprowadzamy nowy wektor Y zgodnie z relacją

$$Y = PD^{-1}X \qquad (1.14)$$

gdzie:

P - jest macierzą ortogonalną identyczną z macierzą występującą w równaniu (1.2).

Postępując podobnie jak w przedstawionej już części pracy uzyskujemy następującą ogólną postać rozwiązań układu (1.12).

$$x_i = a_{x_i} \sum_{l=1}^{n} b_{il}\, e^{\lambda_l t} \qquad (1.15)$$

gdzie:

$$b_{il} = q_{il} \sum_{k=1}^{n} p_{lk}\, x_k(o)$$

Porównując równania (1.8) oraz (1.15) stwierdzamy, że rozwiązania układu równań maszynowych różnią się od rozwiązań rzeczywistych wyłącznie wielkością amplitud. Tak więc wprowadzenie współczynników a_{x_i} wiąże się tylko ze zmianą wielkości amplitud, nie zmienia natomiast wartości własnych macierzy układu równań maszynowych.

1.3. Wprowadzenie skali czasu

Symulowanie modeli matematycznych układów technicznych na maszynie analogowej wymaga bardzo często zmiany skali czasu. Zmiana skali czasu jest konieczna wtedy gdy procesy w układzie rzeczywistym charakteryzują się stałymi czasowymi rzędu minut lub godzin, a także w przypadku gdy stałe czasowe charakteryzujące procesy rzeczywiste są rzędu milisekund lub mniejsze.

W pierwszym przypadku zmienia się skalę czasu tak by proces maszynowy przebiegał szybciej niż proces rzeczywisty. Takie postępowanie jest podyktowane przede wszystkich ograniczoną dokładnością pracy integratorów. Analiza pracy integratorów [2] wykazuje bowiem, że dokładność całkowania jest w ogólności tym większa im szybsze są przebiegi.

W drugim przypadku wybieramy skalę czasu tak by proces maszynowy przebiegał wolniej niż proces rzeczywisty. Postępowanie takie wynika z bezwładności przyrządów pomiarowych, a zwłaszcza rejestrujących. Zmiana skali czasu polega na podzieleniu prawych stron układu równań (1.11) przez współczynnik skali czasu

$$a_t = \frac{\tau}{t}$$

gdzie:

τ – czas maszynowy,

t – czas rzeczywisty,

a_t – współczynnik skali czasu.

Równania maszynowe po zmianie skali czasu mają postać

$$\dot{X}_i = \frac{1}{a_t} \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} X_k \frac{a_{x_i}}{a_{x_k}} \tag{1.16}$$

lub w formie macierzowej

$$\dot{X} = \frac{1}{a_t} DAD^{-1} X \tag{1.17}$$

Doprowadzając (1.17) do postaci kanonicznej przy pomocy przekształcenia

$$Y = PD^{-1}X \tag{1.18}$$

otrzymujemy

$$\dot{Y} = \frac{1}{a_t} PAP^{-1}Y \tag{1.19}$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\dot{Y}_i = \frac{\lambda_i}{a_t} Y_i \tag{1.20}$$

Z równań (1.20) wynikają następujące zależności

$$Y_i = Y_i(o)\, e^{\frac{\lambda_i}{a_t} t} \tag{1.21}$$

W oparciu o związki (1.19) po przekształceniach przedstawionych w par. 1.1. otrzymujemy

$$X_i = a_{x_i} \sum_{l=1}^{n} b_{il}\, e^{\frac{\lambda_l}{a_t} t} \tag{1.22}$$

Ze wzoru (1.22) wynika, że wprowadzenie nowej skali czasu nie wpływa na wielkości amplitud, zmienia tylko wartości własne macierzy układu równań maszynowych.
Jeżeli oznaczymy

$$\lambda_l = -\frac{1}{T_l} + jw_l$$

to widocznym staje się, że zmiana skali czasu prowadzi do zmiany stałych czasowych przebiegów maszynowych wprost proporcjonalnie, a częstotliwości odwrotnie proporcjonalnie do współczynnika a_t.

2. Wybór skali czasu

2.1. Przesłanki wyboru skali czasu

Właściwości integratorów skłaniają nas do przyjęcia jak najmniejszej wartości współczynnika skali czasu a_t. Współczynnik ten nie może być dowolnie mały, ponieważ zmniejszanie a_t wiąże się ze zwiększeniem prędkości przebiegów w maszynie i zmniejszaniem dokładności urządzeń rejestrujących. W tej części pracy zaproponujemy pewną metodę określania wielkości współczynnika a_t.

Przypuśćmy dla uproszczenia, że rejestrator można traktować w przybliżeniu jak element inercyjny pierwszego rzędu o stałej czasowej T. Aby tego rodzaju przyrząd rejestrował poprawnie sygnały o postaci określonej wzorem (1.22) należy dobrać współczynnik a_t tak aby nierówności

$$a_t\, T_l > T$$

$$\frac{w_l}{a_t} < w_{qr} \cong \frac{1}{T} \tag{2.1}$$

były spełnione dla każdej wartości T_l oraz w_l. Zbadamy obecnie w jaki sposób nie obliczając wartości własnych macierzy A - co na ogół jest zadaniem rachunkowo bardzo trudnym - oszacować wartość maksymalną $w_l = w_{max}$ oraz minimalną $T_l = T_{min}$. Znając wartość w_{max} oraz T_{min} można zgodnie z warunkami (2.1) wybrać współczynnik a_t na podstawie nierówności

$$a_t > \max\left\{\frac{T}{T_{min}};\ w_{max}\, T\right\} \tag{2.2}$$

Zwykle a_t przyjmujemy o rząd większe od maksymalnej z dwu wartości w nawiasie klamrowym.

2.2. Możliwości określenia wielkości T_{min} oraz w_{max}

Przy określaniu wielkości T_{min} oraz w_{max} wykorzystamy metody lokalizacji wartości własnych macierzy przedstawione w pracy [1].

W dalszym ciągu tego opracowania posługiwać się będziemy następującymi wielkościami:

- sumą modułów elementów "i-tego" wiersza macierzy A

$$R_i = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

- sumą modułów "j-tej" kolumny

$$T_j = \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|$$

- sumą modułów "i-tej" kolumny oraz "i-tego" wiersza

$$S_i = (T_i + R_i)$$

Największą z sum R_i oznaczymy symbolem R, będzie więc

$$R = \max_i R_i \tag{2.3}$$

Podobnie oznaczymy

$$T = \max_j T_j \tag{2.4}$$

oraz

$$S = \max_i S_i \tag{2.5}$$

Z nierówności PARKER'a oraz FARNELL'a przedstawionych w pracy [1] wynika, że największa co do modułu wartość własna macierzy A spełnia warunek

$$\left|\lambda_{max}\right| \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}\ S;\ \sqrt{RT}\right\} \tag{2.6}$$

Uwzględniając oznaczenia przyjęte dla części rzeczywistej i urojonej wartości λ_{max} napiszemy

$$\left|\lambda_{max}\right| = \sqrt{\frac{1}{T^2_{1_{min}}} + w_1^2} > \frac{1}{T_{min}} \tag{2.7}$$

lub

$$|\lambda_{max}| = \sqrt{\frac{1}{T_1^2} + w^2_{1_{max}}} > w_{1_{max}} \qquad (2.8)$$

Otrzymane nierówności (2.7) oraz (2.8) pozwalają następująco oszacować wartości w_{max} oraz T_{min}.

$$\frac{1}{T_{min}} < \min\left\{\frac{1}{2} S; \sqrt{RT}\right\} \qquad (2.9)$$

$$w_{max} < \min\left\{\frac{1}{2} S; \sqrt{RT}\right\} \qquad (2.10)$$

Dla bardziej dokładnego oszacowania wielkości w_{max} posłużymy się następującym twierdzeniem udowodnionym w pracy [1]:

Największa co do modułu różnica wartości własnych macierzy kwadratowej A spełnia nierówność

$$\max_{i \neq k} |\lambda_i - \lambda_k| \leq \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 - \frac{2}{n} |spA|^2} \qquad (2.11)$$

Symbol spA oznacza ślad macierzy A to znaczy

$$spA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Jeżeli wartość własna macierzy o elementach rzeczywistych jest liczbą zespoloną to istnieje zawsze wartość z nią sprzężona. Wobec tego na podstawie (2.11) napiszemy

$$2\, w_{max} < \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 - \frac{2}{n} \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right|^2} \qquad (2.12)$$

Wygodnie będzie w dalszym ciągu przyjąć oznaczenie

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 - \frac{1}{2n} \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right|^2} \qquad (2.13)$$

Możemy zatem napisać

$$w_{max} < Q \tag{2.14}$$

Otrzymane warunki (2.14) oraz (2.10) zapiszemy łącznie w postaci

$$w_{max} < \min \left\{ \frac{1}{2} S; \ \sqrt{RT}; \ Q \right\} \tag{2.15}$$

Podstawimy w wyrażeniu (2.2) w miejsce $\frac{1}{T_{min}}$ prawą stronę nierówności (2.9) i w miejsce w_{max} prawą stronę (2.15) dzięki czemu otrzymamy

$$a_t > \max \left\{ T \min \left[\frac{1}{2} S; \ \sqrt{RT}; \right]; T \min \left[\frac{1}{2} S; \sqrt{RT}; \ Q \right] \right\} \tag{2.16}$$

Uzyskany warunek pozwala oszacować wielkość współczynnika a_t.

Przy obliczaniu pamiętać musimy, że z podstawienia prawych stron nierówności (2.9) oraz (2.15) do warunku (2.2) wynika już pewien "zapas" wartości a_t.

LITERATURA

[1] PARODI M.: La localisation des valeurs caracteristiques des matrices et ses applications. Gauthier Villar Paris 1959. (tłum. rosyjskie Izd. Inostrannoj Lit. Moskwa 1960).

[2] MĘDRZYCKI J.: Wzmacniacze operacyjne prądu stałego. PWT Warszawa 1965.

[3] KORN G., KORN T.: Electronic analog and hybrid computers Mc Graw Hill N.York 1965.

Rękopis złożono w dniu 31.I.1967 r.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

Статься повящена проблемам связанным из подбором коэффициента шкалы времени математических модели линейных систем моделированных при использованию електронной аналоговой машины. Во первой части работы исследовано влияние изменения шкалы амплитуд и времени на переходные режимы машинной модели. Во второй части работы пользуясь алгебрическими методами локализации собственных значений действительных матриц выведено метод определения шкалы времени исследованной модели. Метод позваляет определить коэффициент шкалы времени зная только постоянные моделированной системы.

THE METOD OF CALCULATION THE TIME SCALE COEFFICIENT OF LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper a problems of linear systems simulation using an electronic analogue computers is considered. Time scale coefficient is a most important problem. The first part of the paper is devoted to the problem of analysis the machine solutions obtained by amplitud and time scale change of primary system equations. The algebraic method of calculation the time scale coefficient using only known parameters of the system is presented in thesecond part of the paper.