ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: AUTOMATYKA z. 8 Nr kol. 192

EDWARD KĄCKI
Politechnika Łódzka

ZASTOSOWANIE MASZYNY ANALOGOWEJ DO BADANIA STANÓW NIEUSTALONYCH W JEDNORODNEJ LINII ELEKTRYCZNEJ x)

Streszczenie: W pracy omówiono badanie stanów nieustalonych w jednorodnej linii elektrycznej o długości a przy pomocy maszyny analogowej. Możliwość zastosowania maszyny analogowej do modelowania przebiegu napięcia $u(x,t)$ wzdłuż linii uzyskano po sprowadzeniu równania różniczkowego cząstkowego (2) opisującego przebieg napięcia $u(x,t)$ do postaci różnicowo-różniczkowej, skąd otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych.

W pracy przedstawiono układ analogowy (rys. 3) w którym uzyskuje się przebiegi zmian napięcia wzdłuż linii przy następujących warunkach początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$ oraz $u_t(x,0) = \psi(x)$ dla $0 \leq x \leq a$ i warunku brzegowym $u(0,t) = f(t)$ dla $t > 0$ charakteryzującym rodzaj zasilania linii na krańcu $x=0$. Do zacisków P_1, P_2, P_3 układu podanego na rys. 3 należy dołączyć odpowiednie zaciski jednego z układów realizujących warunek brzegowy charakteryzujący rodzaj obciążenia linii na krańcu $x=a$. Układy analogowe odpowiadające 7 rodzajom obciążenia (rys. 1) przedstawione są na rysunkach 4–9.

W pracy omówiono krótko następujące szczególne przypadki: linię typu RC oraz linię typu LC. Dla linii elektrycznej bez strat przedstawiono na rys. 10 układ analogowy modelujący przebiegi napięcia wzdłuż linii.

1. Wstęp

Analiza stanów nieustalonych w jednorodnej linii elektrycznej sprowadza się do dyskusji nad przebiegami zmian napięcia $u(x,t)$

---

x) Praca nagrodzona na Konkursie Gliwickiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1966.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

Статься повящена проблемам связанным из подбором коэффициента шкалы времени математических модели линейных систем моделированных при использованию електронной аналоговой машины. Во первой части работы исследовано влияние изменеиия шкалы амплитуд и времени на переходные режимы машинной модели. Во второй части работы пользуясь алгебрическими методами локализации собственных значений действительных матриц выведено метод определения шкалы времени исследованной модели. Метод позваляет определить коэффициент шкалы времени зная только постоянные моделированной системы.

THE METOD OF CALCULATION THE TIME SCALE COEFFICIENT OF LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper a problems of linear systems simulation using an electronic analogue computers is considered. Time scale coefficient is a most important problem. The first part of the paper is devoted to the problem of analysis the machine solutions obtained by amplitud and time scale change of primary system equations. The algebraic method of calculation the time scale coefficient using only known parameters of the system is presented in thesecond part of the paper.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: AUTOMATYKA z. 8 Nr kol. 192

EDWARD KĄCKI
Politechnika Łódzka

ZASTOSOWANIE MASZYNY ANALOGOWEJ DO BADANIA STANÓW NIEUSTALONYCH W JEDNORODNEJ LINII ELEKTRYCZNEJ x)

Streszczenie: W pracy omówiono badanie stanów nieustalonych w jednorodnej linii elektrycznej o długości a przy pomocy maszyny analogowej. Możliwość zastosowania maszyny analogowej do modelowania przebiegu napięcia $u(x,t)$ wzdłuż linii uzyskano po sprowadzeniu równania różniczkowego cząstkowego (2) opisującego przebieg napięcia $u(x,t)$ do postaci różnicowo-różniczkowej, skąd otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych.

W pracy przedstawiono układ analogowy (rys. 3) w którym uzyskuje się przebiegi zmian napięcia wzdłuż linii przy następujących warunkach początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$ oraz $u_t(x,0) = \psi(x)$ dla $0 \leq x \leq a$ i warunku brzegowym $u(0,t) = f(t)$ dla $t > 0$ charakteryzującym rodzaj zasilania linii na krańcu $x=0$. Do zacisków P_1, P_2, P_3 układu podanego na rys. 3 należy dołączyć odpowiednie zaciski jednego z układów realizujących warunek brzegowy charakteryzujący rodzaj obciążenia linii na krańcu $x=a$. Układy analogowe odpowiadające 7 rodzajom obciążenia (rys. 1) przedstawione są na rysunkach 4–9.

W pracy omówiono krótko następujące szczególne przypadki: linię typu RC oraz linię typu LC. Dla linii elektrycznej bez strat przedstawiono na rys. 10 układ analogowy modelujący przebiegi napięcia wzdłuż linii.

1. Wstęp

Analiza stanów nieustalonych w jednorodnej linii elektrycznej sprowadza się do dyskusji nad przebiegami zmian napięcia $u(x,t)$

---

x) Praca nagrodzona na Konkursie Gliwickiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1966.

lub natężenia prądu elektrycznego $i(x,t)$, a więc nad funkcjami będącymi rozwiązaniami równań różniczkowych telegrafistów

$$G\,u = -\frac{\partial i}{\partial x} - C\,\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$R\,i = -\frac{\partial u}{\partial x} - L\,\frac{\partial i}{\partial t} \tag{1}$$

przy odpowiednich warunkach granicznych. Parametry G, R, C i L są gęstościami liniowymi upływności, oporności, pojemności i indukcyjności linii. Funkcje $u(x,t)$ oraz $i(x,t)$ spełniają dwa analogiczne równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (LG + RC)\,\frac{\partial u}{\partial t} - RG\,u = 0$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (LG + RC)\,\frac{\partial i}{\partial t} - RG\,i = 0 \tag{2}$$

Wyznaczenie dokładnego rozwiązania jednego z równań (2) w pewnej zamkniętej formie jest na ogół bardzo uciążliwe i pracochłonne, zależnie od rodzaju warunków granicznych. Jednak nawet w przypadku mniej skomplikowanych warunków granicznych wyznaczone funkcje $u(x,t)$ oraz $i(x,t)$ opisujące stany nieustalone w linii elektrycznej posiadają zazwyczaj postać nieskończonego szeregu funkcyjnego o dość skomplikowanych składnikach i dlatego od wyznaczenia tych funkcji do przeanalizowania ich przebiegów jest jeszcze daleka droga prowadząca przez wiele żmudnych rachunków.

Wykorzystanie maszyny analogowej do rozwiązywania równań różniczkowych (2) niezwykle upraszcza badanie stanów nieustalonych w linii elektrycznej i jednocześnie bardzo skraca czas badań.

2. Przypadek ogólny

Równania różniczkowe (2) opisujące przebiegi napięcia $u(x,t)$ oraz natężenia prądu $i(x,t)$ w linii są identyczne pod względem formalnym i dlatego zajmiemy się jedynie wyznaczeniem funkcji $u(x,t)$ przy odpowiednich warunkach początkowych i brzegowych. Wyznaczenie na maszynie analogowej przebiegu natężenia prądu $i(x,t)$ odbywa się w analogiczny sposób jak funkcji $u(x,t)$.

Dla ustalenia uwagi oraz uzyskania możliwości podania schematów analogowych realizujących rozwiązania równań (2) będziemy musieli ograniczyć się do rodziny rozwiązań odpowiadających tylko pewnej klasie warunków granicznych i dlatego ogólność rozważanego w tym rozdziale przypadku polega jedynie na rozpatrywaniu pełnych równań (2).

Przyjmujemy, że napięcie oraz szybkość zmian tego napięcia wzdłuż linii w chwili początkowej $t=0$ są określone przez funkcje $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ i stąd mamy dla funkcji $u(x,t)$ następujące warunki początkowe

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{3}$$

gdzie:

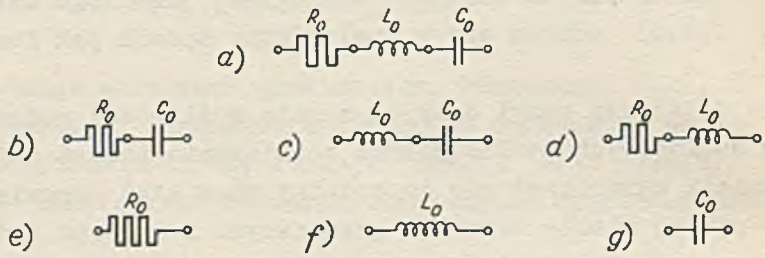
$a > 0$ jest długością linii.

Na krańcu $x=0$ linia zasilana jest napięciem o przebiegu $f(t)$ dla $t>0$ i stąd mamy następujący warunek brzegowy

$$u(0,t) = f(t) \qquad \text{dla} \quad t>0 \tag{4}$$

Drugi warunek brzegowy wynika ze sposobu obciążenia linii na krańcu $x=a$. W niniejszej pracy przyjmujemy, że obciążenie linii składa się z idealnych elementów, a mianowicie opornika, dławika i kondensatora. Wymienione elementy bądź wszystkie trzy są połączone w szereg, bądź po dwa lub też przyłączone są do linii pojedyńczo jak jest to przedstawione na rys. 1.

Wypiszemy obecnie warunki brzegowe odpowiadające poszczególnym przypadkom obciążenia a, b, c, d, e, f, g pokazanym na rys. 1.



Rys. 1. Rodzaje rozważanych w pracy obciążeń linii elektrycznej na krańcu x=a

a) Parametrami obciążenia są R_o, L_o, C_o

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= L_o C_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + R_o C_o \frac{du_c}{dt} + u_c \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} &= L C_o \frac{d^2u_c}{dt^2} - R C_o \frac{du_c}{dt} \end{aligned}\right\} \text{dla } t>0 \quad (5)$$

gdzie: $u_c(t)$ jest napięciem na zaciskach kondensatora, przy czym

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad (6)$$

b) Parametrami obciążenia są R_o, C_o

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= R_o C_o \frac{du_c}{dt} + u_c \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} &= - LC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} - RC_o \frac{du_c}{dt} \end{aligned}\right\} \text{dla } t > 0 \quad (7)$$

gdzie:

u_c jak w przypadku a) spełnia warunki (6).

c) Parametrami obciążenia są L_o, C_o

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= L_o C_o \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} &= - L C_o \frac{d^2 u_c}{dt^2} - R C_o \frac{du_c}{dt} \end{aligned}\right\} \text{dla } t>0 \qquad (8)$$

gdzie:

u_c jak w przypadku a) spełnia warunki (6).

d) Parametrami obciążenia są R_o, L_o

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= \frac{L_o}{R_o} \frac{du_R}{dt} + u_R \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} &= - \frac{L}{R_o} \frac{du_R}{dt} - \frac{R}{R_o} u_R \end{aligned}\right\} \text{dla } t>0 \qquad (9)$$

gdzie:

u_R jest napięciem na zaciskach opornika, przy czym

$$u_R(0) = 0 \qquad (10)$$

e) Parametrem obciążenia jest R_o

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} + \frac{L}{R_o} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=a} = - \frac{R}{R_o} u(a,t) \quad \text{dla } t > 0 \qquad (11)$$

f) Parametrem obciążenia jest L_o

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)_{x=a} + \frac{L}{L_o}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=a} = -\frac{R}{L_o}\, u(a,t) \quad \text{dla} \quad t>0 \tag{12}$$

g) Parametrem obciążenia jest C_o

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)_{x=a} + \frac{C}{C_o}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=a} = -\frac{G}{C_o}\, u(a,t) \quad \text{dla} \quad t>0 \tag{13}$$

Warunki brzegowe (5) - (13) opisujące odpowiedni rodzaj obciążenia linii związane są z założonymi warunkami początkowymi (3), zatem w przypadku zmiany warunków (3) niektóre z warunków (5) - (13) mogą w pewnym niewielkim stopniu ulec zmianie.

Przejście od równań różniczkowych (2) do układów równań różnicowo-różniczkowych umożliwia zastosowanie maszyny analogowej do analizy stanów nieustalonych w linii elektrycznej.

Obecnie w pierwszym z równań (2) zastępujemy pochodne względem zmiennej x przez odpowiednie ilorazy różnicowe i w ten sposób otrzymujemy układ równań różnicowo-różniczkowych [1]. Analogicznie postępujemy z odpowiednimi warunkami granicznymi.

Dzielimy obecnie długość a linii na n równych części i otrzymujemy stąd wartość przyrostu h zmiennej x

$$h = \frac{a}{n} \tag{14}$$

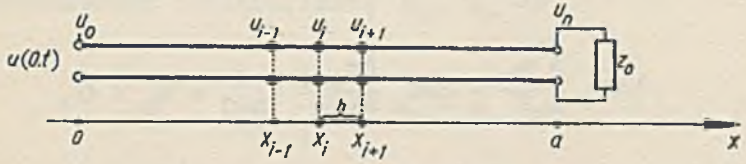
Punktami podziału przedziału $\langle 0,a \rangle$, a więc i rozważanej linii elektrycznej (rys. 2) są

$$x_i = i\,h \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots n \tag{15}$$

przy czym $x_o = 0$ oraz $x_n = a$. Po wprowadzeniu następującego oznaczenia $u_i(t) = u(x_i,t)$ piszemy układ równań różnicowo-różniczkowych dla linii

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - L\,C\,\frac{d^2u_i}{dt^2} - (LG + RC)\,\frac{du_i}{dt} - RG\,u_i = 0 \qquad (16)$$

dla $i = 1,2,\ldots n-1$. Dla funkcji $u_o(t)$ oraz $u_n(t)$ otrzymujemy dodatkowe związki wynikające z przyjętych już warunków brzegowych.



Rys. 2. Punkty podziału linii

Układ równań różniczkowych zwyczajnych (16) możemy zapisać w następującej postaci

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} + A\,\frac{du_i}{dt} - B\,u_{i-1} + D\,u_i - B\,u_{i+1} = 0, \qquad (17)$$

gdzie:

$i = 1,2, \ldots n-1$ oraz

$$A = \frac{G}{C} + \frac{R}{L}, \quad B = \frac{1}{h^2LC}, \quad D = \frac{2 + h^2RG}{h^2LC}. \qquad (18)$$

Funkcje $u_i(t)$ dla $i=1,2,\ldots n-1$ spełniają następujące warunki początkowe wynikające z warunków (3)

$$u_i(0) = \varphi(x_i); \qquad \left(\frac{du_i}{dt}\right)_{t=0} = \psi(x_i). \qquad (19)$$

Funkcja $u_o(t)$ jest określona przez warunek (4), zatem mamy

$$u_o(t) = f(t) \qquad \text{dla} \quad t>0. \tag{20}$$

Obecnie przedstawimy w postaci różnicowej lub różniczkowo-różnicowej warunki brzegowe (5) - (13) odnoszące się do krańca $x=a$ rozważanej linii elektrycznej

a) Parametrami obciążenia są R_o, L_o, C_o

$$\begin{aligned} L_oC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + R_oC_o \frac{du_c}{dt} + u_c - u_n &= 0 \\ hLC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + hRC_o \frac{du_c}{dt} - u_{n-1} + u_n &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie:

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

b) Parametrami obciążenia są R_o, C_o

$$\begin{aligned} R_oC_o \frac{du_c}{dt} + u_c - u_n &= 0 \\ hLC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + hRC \frac{du_c}{dt} - u_{n-1} + u_n &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie:

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

c) Parametrami obciążenia są L_o, C_o

$$L_oC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c - u_n = 0$$

$$hLC_o \frac{d^2u_c}{dt^2} + hRC_o \frac{du_c}{dt} - u_{n-1} + u_n = 0 \tag{23}$$

gdzie:

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

a) Parametrami obciążenia są R_o, L_o

$$\frac{L_o}{R_o} \frac{du_R}{dt} + u_R - u_n = 0$$

$$\frac{hL}{R_o} \frac{du_R}{dt} + \frac{hR}{R_o} u_R - u_{n-1} + u_n = 0 \tag{24}$$

gdzie:

$$u_R(0) = 0.$$

e) Parametrem obciążenia jest R_o

$$\frac{hL}{R_o} \frac{du_n}{dt} - u_{n-1} + \left(1 - \frac{hR}{R_o}\right) u_n = 0 \tag{25}$$

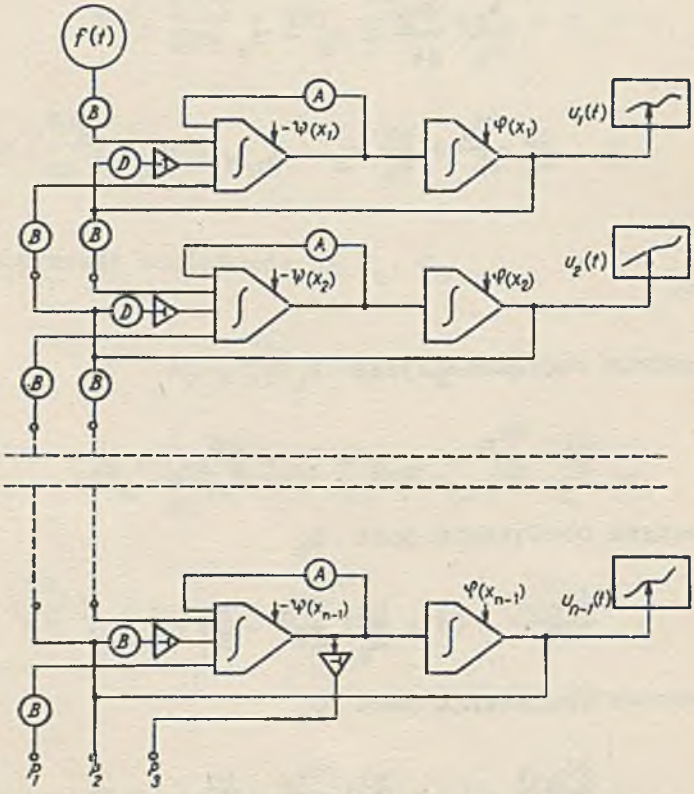
f) Parametrem obciążenia jest L_o

$$\frac{du_{n-1}}{dt} - \left(1 + \frac{hL}{L_o}\right) \frac{du_n}{dt} - \frac{hR}{L_o} u_n = 0 \tag{26}$$

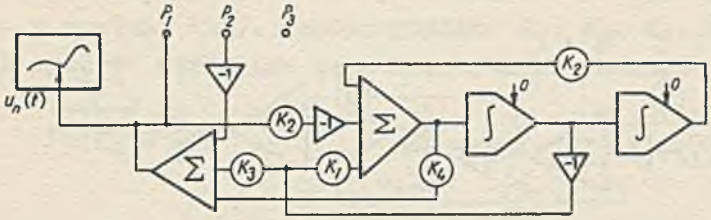
g) Parametrem obciążenia jest C_o

$$\frac{du_{n-1}}{dt} - \left(1 + \frac{hC}{C_o}\right) \frac{du_n}{dt} - \frac{hG}{C_o} u_n = 0 \tag{27}$$

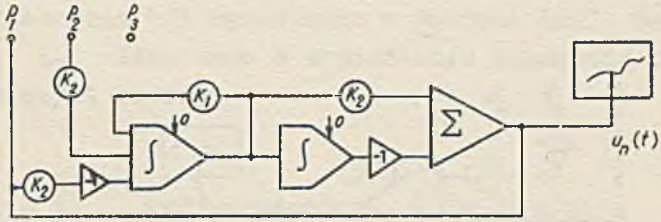
Przebiegi funkcji $u_i(t)$ dla $i = 1,2,...n$ otrzymujemy na maszynie analogowej w układzie połączeń przedstawionym na rys. 3. Układ ten uwzględnia warunki początkowe (19) oraz warunek brzegowy dla krańca $x=0$ linii w postaci (20). Jednak układ ten jest niekompletny, ponieważ nie uwzględnia on warunku brzegowego dla drugiego krańca $x=a$ rozważanej linii elektrycznej. Dla otrzymania pełnego układu analogowego uwzględniającego również jeden z warunków (5) (13) w postaci (21) - (27) należy do końcówek P_1, P_2, P_3 układu podanego na rys. 3 dołączyć odpowiednie końcówki układu realizującego warunek brzegowy dla $x=a$ i dla danego rodzaju obciążenia linii. Schematy analogowe realizujące warunek brzegowy dla krańca $x=a$ linii przedstawione są na rys. 4-9.



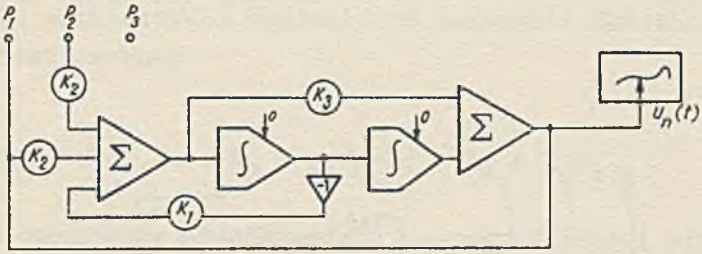
Rys. 3. Schemat układu analogowego dla układu równań (17)



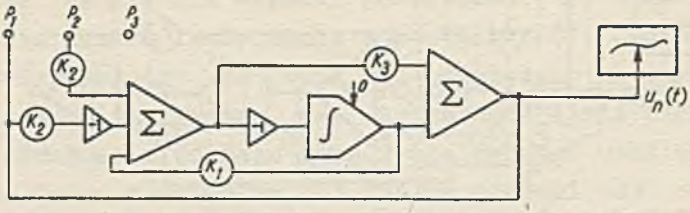
Rys. 4. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (5)



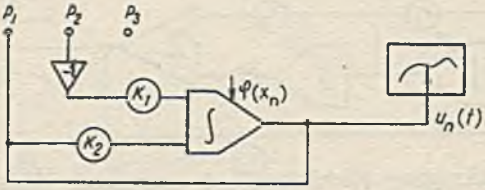
Rys. 5. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (7)



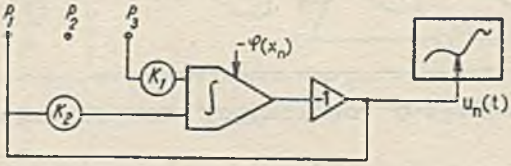
Rys. 6. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (8)



Rys. 7. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (9)



Rys. 8. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (11)



Rys. 9. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (12) lub (13)

Schemat podany na rys. 4 dotyczy warunku brzegowego (5) wyrażonego w postaci (21). Współczynniki K_1, K_2, K_3, K_4 zaznaczone na rys. 4 określone są następującymi wzorami

$$K_1 = \frac{R_o}{L_o}; \qquad K_2 = \frac{1}{L_o C_o};$$

$$K_3 = hRC_o; \qquad K_4 = hLC_o. \tag{28}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 5 odnosi się do warunku brzegowego (7) wyrażonego w postaci (22). Współczynniki K_1, K_2, K_3 zaznaczone w wymienionym schemacie określone są następującymi wzorami

$$K_1 = \frac{R}{L}; \qquad K_2 = \frac{1}{hL\,C_o}; \qquad K_3 = R_oC_o. \tag{29}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 6 odnosi się do warunku brzegowego (8) wyrażonego w postaci (23). Współczynniki K_1, K_2, K_3 zaznaczone w wymienionym schemacie określone są następującymi wzorami

$$K_1 = \frac{R}{L}; \qquad K_2 = \frac{1}{hL\,C_o}; \qquad K_3 = L_oC_o. \tag{30}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 7 odnosi się do warunku brzegowego (9) wyrażonego w postaci (24). Współczynniki K_1, K_2, K_3 zaznaczone w wymienionym schemacie określone są następującymi wzorami

$$K_1 = \frac{R}{L}; \qquad K_2 = \frac{R_o}{h\,L}; \qquad K_3 = \frac{L_o}{R_o}. \tag{31}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 8 odnosi się do warunku brzegowego (11) wyrażonego w postaci (25). Współczynniki

K_1, K_2 zaznaczone w wymienionym schemacie określone są następującymi wzorami

$$K_1 = \frac{R}{h\,L}; \qquad K_2 = \frac{R_o - hR}{h\,L}. \tag{32}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 9 odnosi się zarówno do warunku brzegowego (12) wyrażonego w postaci (26), jak też do warunku (13) wyrażonego przez (27). W przypadku warunku (12) współczynniki K_1, K_2 zaznaczone w schemacie określone są wzorami

$$K_1 = \frac{L_o}{L_o + hL}; \qquad K = \frac{h\,R}{L_o + hL}; \tag{33}$$

natomiast dla warunku (13) współczynniki K_1, K_2 obliczamy ze wzorów

$$K_1 = \frac{C_o}{C_o + hC}; \qquad K_2 = \frac{h\,G}{C_o + hC}. \tag{34}$$

3. Kabel Thomsona

Przypadek rozważany w tym rozdziale dotyczy jednorodnej linii elektrycznej typu RC, a więc linii o indukcyjności $L=0$ i upływności $G=0$, jest on zatem szczególnym przypadkiem zagadnienia omówionego w rozdziale 2. Praktycznie rzecz biorąc dotyczy on linii o pomijalnie małej indukcyjności oraz upływności.

Dla kabla Thomsona równania (2) przyjmują postać równań przewodzenia ciepła

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\,\frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - RC\,\frac{\partial i}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Warunki graniczne dla funkcji $u(x,t)$ (ewentualnie dla $i(x,t)$)są szczególnym przypadkiem warunków granicznych omówionych w poprzednim rozdziale, tak jak równania (35) są szczególnym przypadkiem równań (2). Wystarczy bowiem przyjąć w odpowiednich wzorach $L=0$ i $G=0$.

Rozwiązywanie równań typu (35) na maszynie analogowej w odniesieniu do zagadnień cieplnych omówione jest w pracach [2] i [3], przy czym sama metoda postępowania jest analogiczna do przedstawionej w poprzednim rozdziale i dlatego pominiemy tutaj szczegółowe rozważania.

4. Linia bez strat

Przypadek rozważany w tym rozdziale dotyczy jednorodnej linii elektrycznej typu LC, a więc linii o oporności $R=0$ i upływności $G=0$, jest on zatem szczególnym przypadkiem zagadnienia omówionego w rozdziale 2. Praktycznie rzecz biorąc dotyczy on linii o pomijalnie małej oporności oraz upływności.

Dla linii bez strat równania (2) przyjmują następującą postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0. \qquad (36)$$

Przedstawimy układ analogowy realizujący rozwiązanie pierwszego z równań (36) dla funkcji $u(x,t)$ spełniającej warunki początkowe (3), warunek brzegowy (4) oraz drugi warunek brzegowy odpowiadający obciążeniu linii typu a) tzn. o parametrach R_o, L_o, C_o (patrz rys. 1). Jest to warunek dla krańca $x = a$ linii i ma on następującą postać

$$u(a,t) = L_oC_o\,\frac{d^2u_c}{dt^2} + R_oC_o\,\frac{du_c}{dt} + u_c \qquad \text{dla } t>0 \quad (37)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} = -\,L\,C_o\,\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

gdzie:

$u_c(t)$ jest napięciem na zaciskach kondensatora, przy czym

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{38}$$

Wzory (37) są szczególnym przypadkiem zależności (5).

Postępując analogicznie jak w rozdziale 2 przedstawiamy pierwsze z równań (36) w postaci równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} = A\,u_{i-1} - 2\,A\,u_i + A\,u_{i+1}\,, \tag{39}$$

gdzie: $i=1,2,\ldots\ n-1$ oraz $A = (hLC)^{-1}$. Funkcje $u_i(t)$ dla $i=1,2,\ldots\ n-1$ spełniając następujące warunki wynikające z warunków (3)

$$u_i(0) = \left(\frac{du_i}{dt}\right)_{t=0} = 0\,. \tag{40}$$

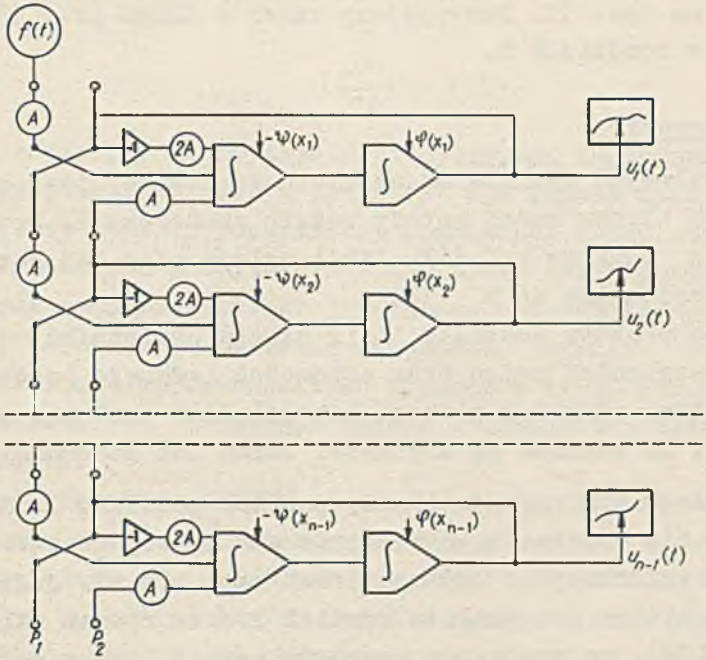
Funkcja $u_o(t) = f(t)$, co wynika z warunku (4). W odpowiedni sposób przedstawiamy również warunek (37)

$$\begin{aligned} L_oC_o\,\frac{d^2u_c}{dt^2} + R_oC_o\,\frac{du_c}{dt} + u_c - u_n &= 0 \\ hLC_o\,\frac{d^2u_c}{dt^2} - u_{n-1} + u_n &= 0\,, \end{aligned} \tag{41}$$

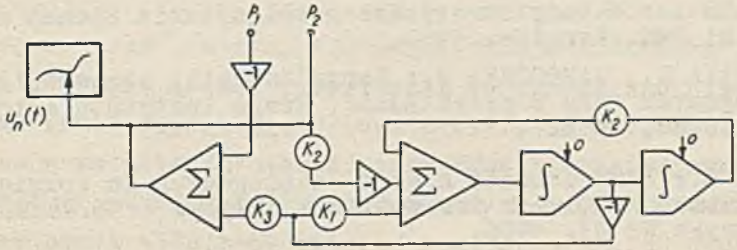
gdzie:

u_c spełnia warunek (38).

Przebiegi funkcji $u_i(t)$ dla $i=1,2,\ldots n$ otrzymujemy na maszynie analogowej w układzie połączeń przedstawionym na rys.10. Układ ten uwzględnia warunki początkowe (40) oraz warunek brzegowy dla krańca $x=0$ linii w postaci (20). Dla uwzględnienia w wymienionym układzie warunku brzegowego dla drugiego krańca $x=a$ rozważanej linii elektrycznej należy do końcówek P_1, P_2



Rys. 10. Schemat układu analogowego dla układu równań (39)



Rys. 11. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (37)

dołączyć układ realizujący warunek brzegowy dla odpowiedniego rodzaju obciążenia linii np. końcówki P_1, P układu przedstawionego na rys. 11. Postępujemy zatem w danym przypadku podobnie jak w rozdziale 2.

5. Zakończenie

Błąd uzyskanych wyników na maszynie analogowej jest dodatkowo obarczony błędem samej metody różnic skończonych. Ze wzrostem liczby n punktów podziału linii maleje błąd tej metody, jest on proporcjonalny do h^2 [1].

Liczbę punktów podziału linii należy uzależniać od przewidywanej szybkości zmian oraz stromości badanego przebiegu u(x,t), tzn. od kresu górnego bezwzględnej wartości pochodnych $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial u}{\partial x}$. Im większe są szybkości zmian lub stromości badanego przebiegu tym większą liczbę punktów podziału linii należy stosować dla uzyskania na maszynie analogowej dostatecznie dokładnych informacji o badanym przebiegu u(x,t). Jednak ze wzrostem liczby n wzrasta również liczba równań układu (17) czy też (39), co następnie powoduje wzrost liczby potrzebnych elementów liniowych maszyny analogowej do realizacji rozwiązania problemu. Dlatego maksymalna liczba punktów podziału linii ograniczona jest przez samą maszynę analogową, na której rozwiązujemy omawiane tutaj zagadnienie.

LITERATURA

[1] COLLATZ L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. PWN, Warszawa 1960.

[2] DECOWSKA Z., GAWROŃSKI R.: Zarys techniki stosowania maszyn analogowych wraz z przykładami. Prace Instytutu Automatyki PAN, z. 18, 1965.

[3] KĄCKI E.: Zastosowanie maszyn analogowych do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła. Zesz.Nauk. Pol.Ł. Elektryka Nr 23, 1966.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 31.I.1967 r.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

Р е з ю м е

В работе представлено исследование нестационарных состояний в однородной электрической линии о длине "a" при помощи аналоговой вычислительной машины. Возможность применения аналоговой машины для моделирования напряжения $u(x,t)$ вдоль линии получено после приведения дифференциального уравнения с частными производными (2), описующего изменения напряжения $u(x,t)$ к системе обыкновенных дифференциальных правнений (17). Это получено поделив линию на n равных частей и применевив метод конечных разностей.

В работе представлено аналоговую систему (рис. 3) моделирующую напряжение $u_i(t)$ вдоль линии в точках подела $x_i = ih$ Рассуждения проведены для следующих начальных условий $u(x_1 0) = \varphi(x)$ и $u'_t(x_1\ 0) = \psi(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant a$ и граничного условия $u(0,t) = f(t)$ для $t \geqslant 0$ характеризующего способ питания линии на конце $x = 0$. К клеммам P_1, P_2, P_3 системы представленной на рис. 3 надо приложить соответствующие клеммы одной из систем реализирующих граничное условие, которое характеризует способ нагрузки линии на конце $x = a$. Аналоговые системы, соответствующе 7 формам питания (рис. 1) линии, представленные на рис. 4-9, реализуют граничные условия, данные уравнениями (5) - (13) либо (21) - (27).

В работе описано кратко следующе особенные случаи: 1) линия типа RC; 2) линия типа LC. Первый случай описан в работе [3]. Для второго случая (для линии без потерь) представлено аналоговую систему (на рис. 10) моделирующую изменения напряжения $u_i(t)$ вдоль линии. Рассуждения проведено для одного рода нагрузки типа L_0, C_0, R_0 (см. рис. 1, a) для способа питания линии и начальных условий как в вышеупомянутом общем случае. Граничное условие вытекающее из этого типа питания описано уравнениями (37) либо (41).

В заключение оговерно кратко влияние числа n точек подела на ошибку полученных результатов.

APLICATION OF ANALOG COMPUTER FOR THE RESEARCH
THE NON-STEADY STATES OF HOMOGENEOUS ELECTRICAL LINE

S u m m a r y

In the paper is discussed the research of non-steady states of homogeneous electrical line of length "a" with analog computer. The possibility the aplication of analog computer to modeling of voltage $u(x,t)$ along the electrical line $0<x<a$ was obtained after reduction the partial differential equation (2) discribing changes of the voltage $u(x,t)$ to difference-differential equations. In result was obtained the ordinary differential equations system of second order (17). Just for that reason the line was dvided for n equal parts of lengths $h=an^{-1}$.

In this work is represented the analog system (fig. 3), in which is obtained the functions $u_i(t)$ along the line in the points of division $x_i=ih$. The considerations are conduced by the following initial conditions $u(x,0) = \varphi(x)$ and $u'_t(x,0) = \psi(x)$ for $0<x<a$ and by the boundary condition $u(0,t) = f(t)$ for $t \geqslant 0$ characterising the kind of feeding the line on the brink $x=0$. To the clips P_1, P_2, P_3 of the system represented on fig. 3 it becomes to subjoin with corresponding clips of one of the systems realizing the boundary condition characterising the kind of load the line on the brink $x=a$. On fig. 4-9 are represented analog systems for 7 kinds of load (fig.1) realizing the boundary conditions discribed with equations (5)-(13). This conditions are shown in differences form with formulas (21)-(27).

In the paper are discussed following particular cases: 1) line RC; 2) line LC. For the first case is made to the work [3], but for a line without a loss is shown on fig. 10 analog system modeling the functions $u_i(t)$ along the line. The considerations are conduced only for one kind of load (see fig.1a) by feeding the line and for initial conditions as in universal case aforenamed. The boundary conditions arisen from this kind of load are given with equations (37) or (41).

On the end of the work is discussed short the influence of the number n of division points on the error of the obtained results.