ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: AUTOMATYKA z. 8 Nr kol. 192

STANISŁAW MALZACHER
Katedra Elektroniki Przemysłowej

PORÓWNANIE WARUNKÓW I MOŻLIWOŚCI REALIZACJI NIEZALEŻNEGO ODCZYTU W MOSTKACH LINIOWYCH I NIELINIOWYCH PRĄDU ZMIENNEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę układów mostkowych prądu zmiennego z elementami liniowymi i nieliniowymi, które pozwalają na niezależny odczyt składowej rzeczywistej i urojonej mierzonej impedancji. Określono warunki konieczne dla realizacji niezależnego odczytu obu szukanych składowych impedancji w przypadku liniowych i nieliniowych indukcyjności i pojemności w mostku. Omówiono metody rozwiązywania równań nieliniowych dla określenia warunków równowagi w mostkach z elementami nieliniowymi. Wyniki rozważań zestawiono w tablicach.

1. Wstęp

Jeśli za temat naszych rozważań obierzemy klasyczny układ mostka Wheatstone'a prądu zmiennego, złożony z czterech impedancji, to pod niezależnym odczytem będziemy rozumieć takie warunki pomiaru, w których dwa elementy zmienne, równoważące mostek będą wpływać niezależnie na dwa warunki równowagi mostka. Utrzymanie tej zasady pomiaru pozwala skalować te elementy zmienne wprost w wielkościach składowej rzeczywistej i urojonej mierzonej impedancji. Można zauważyć z góry, że będzie to możliwe tylko wtedy, gdy elementami równoważącymi będą: rezystancja i reaktancja lub konduktancja i susceptancja. W przypadkach gdy ze względów technicznych nie można stosować zmiennej reaktancji lub susceptancji, mostek może być zrównoważony dwiema rezystancjami: odczyt niezależny jest jednak wtedy zasadniczo niemożliwy. W takim przypadku w sposób niezależny można odczytać tylko albo składową rezystancję albo reaktancję oraz wielkość utworzoną z ich stosunku np. dobroć Q lub tangens kąta

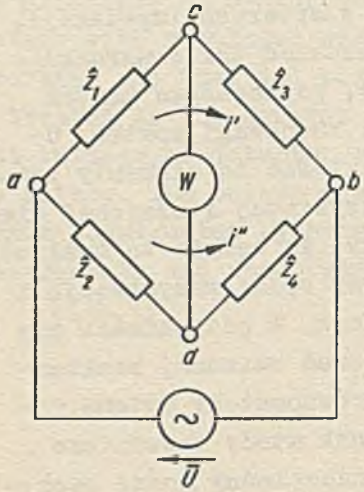
stratności - tgδ [1, 2, 3]. Przypadkami tymi, stanowiącymi niezależne zagadnienie pomiarowe, w niniejszych rozważaniach nie będzie się zajmować.

Jest natomiast rzeczą interesującą zbadanie i zapoznanie się oraz porównanie z punktu widzenia niezależnego odczytu, zachowania się mostków liniowych i mostków, w których w ramieniu zawierającym mierzoną impedancję zastąpiono reaktancję liniową przez nieliniową np. w postaci nieliniowej indukcyjności lub pojemności. Porównanie to można przeprowadzić na przykład w oparciu o klasyczną klasyfikację mostków typu Wheatstone'a podaną przez Fergusona.

Zagadnienie niezależnego odczytu w mostkach z elementami nieliniowymi nabiera coraz większego znaczenia w związku z coraz szerszym stosowaniem układów zawierających takie mostki w elektronice, automatyce, pomiarach wielkości nielektrycznych metodami elektrycznymi i badaniach nieniszczących.

2. Warunki niezależnego odczytu w mostku liniowym

Najbardziej ogólnie można przedstawić mostek prądu zmiennego z elementami liniowymi jak na rys. 1.



Rys. 1. Mostek prądu zmiennego (W - wskaźnik równowagi mostka)

Dla ułatwienia dalszej analizy i rozważań wprowadzimy pewne oznaczenia i pojęcia dodatkowe. Gałąź "a-c-b" zawierającą impedancje $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_3$ będziemy nazywać gałęzią nieparzystą; gałąź "a-d-b" zawierającą impedancje $\hat{Z}_2$ i $\hat{Z}_4$ będziemy nazywać gałęzią parzystą mostka. Prądy i napięcia oraz kąty fazowe odniesione do gałęzi nieparzystej będziemy oznaczać - jedną kreską, odniesione do gałęzi parzystej dwiema kreskami u góry symbolu. Zakładamy, że mostek jest zasilany napięciem czysto sinu-

soidalnym (początkowy kąt fazowy równy zero), z źródła o oporności wewnętrznej do pominięcia, a wskaźnik równowagi mostka ma impedancję wejściową nieskończenie wielką.

Przyjmijmy teraz, że impedancją mierzoną jest $\hat{Z}_1$, przy czym na ogół interesować nas będą obie jej składowe: rezystancja R_1 i reaktancja X_1. Znajdźmy stosunek napięć na ramionach: "b-c" i "b-d":

$$\vartheta = \frac{\hat{U}_{bc}}{\hat{U}_{bd}} = \frac{\dfrac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}}{\dfrac{\hat{Z}_4}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_4}} = \frac{\hat{Z}_2\hat{Z}_3 + \hat{Z}_3\hat{Z}_4}{\hat{Z}_1\hat{Z}_4 + \hat{Z}_3\hat{Z}_4} = \vartheta e^{j\theta}, \qquad (1)$$

gdzie:

ϑ - stosunek modułów $|\hat{U}_{bc}|$ i $|\hat{U}_{bd}|$,

θ - kąt fazowy między tymi napięciami.

Z równania (1) otrzymamy

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{Z}_2\hat{Z}_3 + \hat{Z}_3\hat{Z}_4\,(1 - \vartheta e^{j\theta})}{\hat{Z}_4\ \vartheta e^{j\theta}}. \qquad (2)$$

W warunkach równowagi potencjały punktów "c" i "d" są sobie równe, ponieważ $\hat{U}_{bc} = \hat{U}_{bd}$. Wtedy $\vartheta = 1, \theta = 0$ i jednocześnie

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4} \text{ względnie } Z_1 = \frac{Z_2Z_3}{Z_4} \text{ oraz } \varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_4. \qquad (3)$$

Jest to znane podstawowe równanie dla mostka zrównoważnego, które można przedstawić również w postaci

$$R_1 + jX_1 = \frac{(R_2 + jX_2)\,(R_3 + jX_3)}{R_4 + jX_4}. \qquad (4)$$

Zbadajmy teraz jakie warunki muszą być spełnione, aby zaistniała możliwość niezależnego odczytu w mostku z elementami liniowymi. Jak wynika z wyrażenia (3) lub (4) zarówno impedancja porównawcza jak i impedancje stosunkowe mogą być wybrane rozmaicie. Rozróżnić możemy trzy przypadki [4]:

$$1)\quad \hat{Z}_1 = R_1+jX_1 = (R_2+jX_2)\frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4} = (R_2+jX_2)\frac{Z_3}{Z_4}\cdot e^{j(\varphi_3-\varphi_4)} \tag{5}$$

$$2)\quad \hat{Z}_1 = R_1+jX_1 = (R_3+jX_3)\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_4} = (R_3+jX_3)\frac{Z_2}{Z_4}\cdot e^{j(\varphi_2-\varphi_4)} \tag{6}$$

$$3)\quad \hat{Z}_1 = R_1+jX_1 = \frac{1}{R_4+jX_4}(R_2+jX_2)(R_3+jX_3) = (G_4-jB_4)\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Y}_3} =$$

$$= (G_4-jB_4)\cdot Z_2Z_3\cdot e^{j(\varphi_2+\varphi_3)}. \tag{7}$$

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo przypadek pierwszy. W tym celu zastąpimy w wyrażeniu (5) stosunek $\frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4}$ przez liczbę zespoloną:

$$\frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4} = \frac{R_3+jX_3}{R_4+jX_4} = \alpha + j\beta. \tag{8}$$

Wówczas

$$\hat{Z}_1 = R_1+jX_1 = (R_2+jX_2)(\alpha + j\beta) = A + jB \tag{9}$$

przy czym

$$A = \alpha R_2 - \beta X_2 \tag{10}$$

$$B = \alpha X_2 + \beta R_2 . \tag{11}$$

Z (10) i (11) wynika, że obydwa parametry zmienne impedancji porównawczej wpływają równocześnie na składową czynną (A) i

bierną (B) impedancji $\hat{Z}_1$, co uniemożliwia dokonanie niezależnego odczytu. Można jednakże elementy składowe mostka dobrać tak, aby α lub β stały się równe zeru: wtedy niezależny odczyt stanie się możliwy.

Dla $\beta = 0$ otrzymamy $\frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4} = \alpha$, dla $\alpha = 0$, odpowiednio $\frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4} = j\beta$. Innymi słowy, dla niezależnego odczytu iloraz impedancji stosunkowych musi mieć charakter czysto rzeczywisty ($\varphi_3 - \varphi_4 = 0$) lub czysto urojony ($\varphi_3 - \varphi_4 = \pm \frac{\pi}{2}$), a nie zespolony.

Znalezione dla naszego przypadku z wyrażenia (8) wartości α i β wynoszą:

$$\alpha = \frac{R_3R_4 + X_3X_4}{R_4^2 + X_4^2} \tag{12}$$

$$\beta = \frac{R_4X_3 - R_3X_4}{R_4^2 + X_4^2} . \tag{13}$$

Warunek $\beta = 0$ będzie spełniony gdy $R_4X_3 - R_3X_4 = 0$ czyli $R_4X_3 = R_3X_4$, stąd:

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{X_3}{X_4} \tag{14}$$

lub

$$\frac{R_3}{X_3} = \frac{R_4}{X_4} . \tag{15}$$

Z wyrażeń (12) i (14) wynika, że

$$\alpha = \frac{R_3}{R_4} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{R_3R_4 + X_3X_4}{R_4^2 + X_4^2} \tag{16}$$

natomiast z wyrażenia (15):

$$\operatorname{ctg} \varphi_3 = \operatorname{ctg} \varphi_4, \quad \text{czyli} \quad \varphi_3 = \varphi_4 \quad \text{i} \quad \varphi_3 - \varphi_4 = 0. \tag{17}$$

Zatem równość $\beta = 0$ będzie spełniona wtedy, gdy jako $\hat{Z}_3$ i $\hat{Z}_4$ zastosujemy elementy dające taki sam kąt przesunięcia fazowego np. dwie czyste rezystancje, dwie czyste indukcyjności, dwie czyste pojemności. Ponieważ uzyskanie indukcyjności o pomijalnej wartości rezystancji własnej i pojemności własnej jest trudne - układ z indukcyjnościami stosunkowymi ma małe znaczenie praktyczne.

W oparciu o (5) i (8) oraz przy założeniu $\beta = 0$, warunek równowagi mostka przyjmie wygląd:

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (R_2 + jX_2)\alpha$$

skąd

$$R_1 = \alpha R_2 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{lub} \quad R_1 = R_2 \frac{X_3}{X_4} \tag{18}$$

$$X_1 = \alpha X_2 = X_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{lub} \quad X_1 = X_2 \frac{X_3}{X_4}. \tag{19}$$

Warunki te spełnia grupa I-a mostków zestawiona w tablicy I. Grupę tę możemy określić mianem mostków o stałej różnicy faz $\varphi_3 - \varphi_4 = 0$.

Przejdźmy z kolei do warunku $\alpha = 0$, który będzie spełniony, zgodnie z wyrażeniem (12) gdy $R_3R_4 + X_3X_4 = 0$, czyli $R_3R_4 = -X_3X_4$; skąd

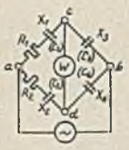
$$\frac{R_3}{X_4} = -\frac{X_3}{R_4} \tag{20}$$

lub

$$\frac{R_3}{X_3} = -\frac{X_4}{R_4}. \tag{21}$$

Z wyrażeń (13) i (20) wynika, że:

$$\beta = \frac{R_3}{X_4} = -\frac{X_3}{R_4} = \frac{R_4X_3 - R_3X_4}{R_4^2 + X_4^2}. \tag{22}$$

TABL. I		MOSTKI LINIOWE				MOSTKI NIELINIOWE	
	UKŁAD	WIELKOŚCI MIERZONE		WIELKOŚCI RÓWNOWAŻĄCE Z NIEZALEŻNYM ODCZYTEM		WIELKOŚCI RÓWNOWAŻĄCE Z NIEZALEŻNYM ODCZYTEM	
		WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE	WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE	WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE
	Ia MOSTKI ZE STAŁĄ RÓŻNICĄ FAZ : $\varphi_3 - \varphi_4 = 0$						
1		$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$ $X_1 = X_2 \frac{R_3}{R_4}$	$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$ $L_1 = L_2 \frac{R_3}{R_4}$	$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$ $X_2 = X_1 \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$ $L_2 = L_1 \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{R_3} - R_4$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{R_3} - R_4$ $L_2 = \frac{U}{\omega J_1'} \sin\Pi_1' \frac{R_4}{R_3}$
2		$R_1 = R_2 \frac{X_3}{X_4}$ $X_1 = X_2 \frac{X_3}{X_4}$	$R_1 = R_2 \frac{L_3}{L_4}$ $L_1 = L_2 \frac{L_3}{L_4}$	$R_2 = R_1 \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = X_1 \frac{X_4}{X_3}$	$R_2 = R_1 \frac{L_4}{L_3}$ $L_2 = L_1 \frac{L_4}{L_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{X_3} - X_4$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{L_4}{L_3}$ $L_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{L_4}{L_3} - L_4$
3		$R_1 = R_2 \frac{X_3}{X_4}$ $X_1 = X_2 \frac{X_3}{X_4}$	$R_1 = R_2 \frac{C_4}{C_3}$ $L_1 = L_2 \frac{C_4}{C_3}$	$R_2 = R_1 \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = X_1 \frac{X_4}{X_3}$	$R_2 = R_1 \frac{C_3}{C_4}$ $L_2 = L_1 \frac{C_3}{C_4}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{X_3} - X_4$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{C_3}{C_4}$ $L_2 = \frac{U}{\omega J_1'} \sin\Pi_1' \frac{C_3}{C_4} + \frac{1}{\omega^2 C_4}$
4		$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$ $X_1 = X_2 \frac{R_3}{R_4}$	$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$ $C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$ $X_2 = X_1 \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$ $C_2 = C_1 \frac{R_3}{R_4}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{R_3} - R_4$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{R_4}{R_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{R_3} - R_4$ $C_2 = \frac{1}{\frac{U}{J_1'} \omega \sin\Pi_1' \frac{R_4}{R_3}}$
5		$R_1 = R_2 \frac{X_3}{X_4}$ $X_1 = X_2 \frac{X_3}{X_4}$	$R_1 = R_2 \frac{L_3}{L_4}$ $C_1 = C_2 \frac{L_4}{L_3}$	$R_2 = R_1 \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = X_1 \frac{X_4}{X_3}$	$R_2 = R_1 \frac{L_3}{L_4}$ $C_2 = C_1 \frac{L_4}{L_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{X_3} - X_4$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{L_4}{L_3}$ $C_2 = \frac{1}{\frac{U}{J_1'} \omega \sin\Pi_1' \frac{L_4}{L_3} - \omega^2 L_4}$
6		$R_1 = R_2 \frac{X_3}{X_4}$ $X_1 = X_2 \frac{X_3}{X_4}$	$R_1 = R_2 \frac{C_4}{C_3}$ $C_1 = C_2 \frac{C_3}{C_4}$	$R_2 = R_1 \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = X_1 \frac{X_4}{X_3}$	$R_2 = R_1 \frac{C_3}{C_4}$ $C_2 = C_1 \frac{C_4}{C_3}$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{X_3}$ $X_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{X_3} - X_4$	$R_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{C_3}{C_4}$ $C_2 = -\frac{1}{\frac{U}{J_1'} \omega \sin\Pi_1' \frac{C_3}{C_4} + \frac{1}{C_4}}$
	Ib MOSTKI ZE STAŁĄ RÓŻNICĄ FAZ : $\varphi_3 - \varphi_4 = +\frac{\pi}{2}$						
7		$R_1 = X_2 \frac{X_3}{R_4}$ $X_1 = R_2 \frac{X_3}{R_4}$	$R_1 = \frac{1}{C_2} \frac{L_3}{R_4}$ $L_1 = R_2 \frac{L_3}{R_4}$	$X_2 = -R_1 \frac{R_4}{X_3}$ $R_2 = X_1 \frac{R_4}{X_3}$	$C_2 = \frac{1}{R_1} \frac{L_3}{R_4}$ $R_2 = L_1 \frac{R_4}{L_3}$	$X_2 = -\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{X_3}$ $R_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{R_4}{X_3} - R_4$	$C_2 = \frac{J_1'}{U} \frac{L_3}{R_4} \frac{1}{\cos\Pi_1'}$ $R_2 = \frac{U \sin\Pi_1' R_4}{J_1' \omega L_3} - R_4$
8		$R_1 = X_2 \frac{R_3}{X_4}$ $X_1 = -R_2 \frac{R_3}{X_4}$	$R_1 = \frac{1}{C_2} R_3 C_4$ $L_1 = R_2 R_3 C_4$	$X_2 = R_1 \frac{X_4}{R_3}$ $R_2 = -X_1 \frac{X_4}{R_3}$	$C_2 = \frac{1}{R_1} R_3 C_4$ $R_2 = L_1 \frac{1}{C_4 R_3}$	$X_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{R_3} - X_4$ $R_2 = -\frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{R_3}$	$C_2 = \frac{1}{\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{1}{R_3 C_4} - \frac{1}{C_4}}$ $R_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{1}{\omega R_3 C_4}$
	Ic MOSTKI ZE STAŁĄ RÓŻNICĄ FAZ : $\varphi_3 - \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$						
9		$R_1 = X_2 \frac{R_3}{X_4}$ $X_1 = -R_2 \frac{R_3}{X_4}$	$R_1 = L_2 \frac{R_4}{L_4}$ $C_1 = \frac{1}{R_2} \frac{L_4}{R_3}$	$X_2 = R_1 \frac{X_4}{R_3}$ $R_2 = -X_1 \frac{X_4}{R_3}$	$L_2 = R_1 \frac{L_4}{R_3}$ $R_2 = \frac{1}{C_1} \frac{L_4}{R_3}$	$X_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{X_4}{R_3} - X_4$ $R_2 = -\frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{X_4}{R_3}$	$L_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{L_4}{R_3} - L_4$ $R_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{\omega L_4}{R_3}$
10		$R_1 = -X_2 \frac{X_3}{R_4}$ $X_1 = R_2 \frac{X_3}{R_4}$	$R_1 = L_2 \frac{1}{C_3 R_4}$ $C_1 = \frac{1}{R_2} C_3 R_4$	$X_2 = -R_1 \frac{R_4}{X_3}$ $R_2 = X_1 \frac{R_4}{X_3}$	$L_2 = R_1 C_3 R_4$ $R_2 = \frac{1}{C_1} C_3 R_4$	$X_2 = -\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{R_4}{X_3}$ $R_2 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{R_4}{X_3} - R_4$	$L_2 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' R_4 C_3$ $R_2 = -\frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' R_4 \omega C_3 - R_4$

natomiast z wyrażenia (21):

$$\operatorname{ctg}\varphi_3 = -\operatorname{tg}\varphi_4 \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = -\operatorname{ctg}\varphi_4 = \operatorname{tg}(\varphi_4 \pm 90^\circ)$$

czyli

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \pm \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Równość $\alpha = 0$ będzie spełniona wtedy, gdy jako $\hat{Z}_3$ i $\hat{Z}_4$ zastosujemy elementy dające przesunięcia fazowe różniące się o $\pm 90^\circ$, czyli np. czystą rezystancję i czystą indukcyjność (także czystą indukcyjność i czystą rezystancję) lub czystą rezystancję i czystą pojemność (także czystą pojemność i czystą rezystancję). Podobnie jak w poprzednim przypadku układy z czystymi indukcyjnościami mają ograniczone znaczenie praktyczne.

W oparciu o (5) i (8) oraz przy założeniu $\alpha = 0$ warunek równowagi mostka przedstawi się teraz w sposób następujący:

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = j\beta(R_2 + jX_2) = -\beta X_2 + j\beta R_2$$

skąd

$$R_1 = -\beta X_2 = X_2 \frac{R_3}{X_4} = -X_2 \frac{X_3}{R_4} \tag{24}$$

$$X_1 = \beta R_2 = -R_2 \frac{R_3}{X_4} = R_2 \frac{X_3}{R_4}. \tag{25}$$

Warunki te spełniają grupy I-b i I-c mostków zestawionych w tablicy I, które można określić jako mostki o stałej różnicy faz

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \varphi_3 - \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

W obu tych grupach składowa rezystancja w mierzonej impedancji jest określana przez reaktancję impedancji porównawczej i odwrotnie - składowa reaktancja w impedancji mierzonej jest określana przez rezystancję w impedancji porównawczej. Zauważmy,

że przy zastosowaniu jako $\hat{Z}_3$ i $\hat{Z}_4$ pojedynczych, najprostszych elementów, dla spełnienia warunku (23) zachodzić muszą równocześnie związki:

$$R_3 = X_4 = 0 \tag{26}$$

lub

$$R_4 = X_3 = 0 . \tag{27}$$

Ponieważ dla mostka w momencie równowagi mamy: $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$ to wynika stąd, że dla $R_3 = X_4 = 0$ ($\varphi_3 = \pm \frac{\pi}{2}$, $\varphi_4 = 0$) różnica $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ i dla zachowania jednakowego znaku φ_1 i φ_3, impedancje $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_3$ muszą mieć ten sam charakter. Podobnie dla $R_4 = X_3 = 0$($\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \pm \frac{\pi}{2}$) różnica $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ i dla zachowania jednakowego znaku φ_2 i φ_4, z kolei impedancje $\hat{Z}_2$ i $\hat{Z}_4$ winne mieć ten sam charakter.

Zatrzymajmy się teraz na przypadku drugim, reprezentowanym przez wyrażenie (6). Gdybyśmy postąpili podobnie jak poprzednio, to otrzymalibyśmy trzy nowe grupy mostków, różniące się od trzech pierwszych tylko tym, że zamieniono w nich impedancje porównawcze $\hat{Z}_2$ na $\hat{Z}_3$, co jest jednoznaczne z zamianą miejscami ramion "a-d" i "b-c" mostka. Grupami tymi nie będziemy się zajmować szczegółowo ponieważ dla mostków liniowych dają one podobne warunki równowagi jak w przypadku grup: I-a, I-b i I-c, zaś w mostkach z reaktancjami nieliniowymi w ramieniu "a-c", stosowanie ich nie jest celowe ponieważ zmiany wartości elementów równoważących ($\hat{Z}_3$) powodują równoczesną zmianę napięcia i prądu w elemencie nieliniowym, nie ma więc jednoznacznie określonych warunków pomiarowych dla tego elementu.

Rozpatrzmy wreszcie ostatnią grupę mostków, reprezentowaną wyrażeniem (7). W tym celu rozważmy wpierw zależność dla impedancji stosunkowych:

$$\hat{Z}_2\hat{Z}_3 = (R_2+jX_2)\,(R_3+jX_3) = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Y}_3} = \frac{R_2+jX_2}{G_3-jB_3} , \tag{28}$$

z którego znajdujemy

$$\alpha = \frac{R_2G_3 - X_2B_3}{G_3^2 + B_3^2} \tag{29}$$

$$\beta = \frac{R_2B_3 + G_3X_2}{G_3^2 + B_3^2} . \tag{30}$$

Warunek $\beta = 0$ będzie spełniony gdy $R_2B_3 + G_3X_2 = 0$, czyli $R_2B_3 = - G_3X_2$, skąd

$$\frac{R_2}{G_3} = - \frac{X_2}{B_3} \tag{31}$$

lub

$$\frac{R_2}{X_2} = - \frac{G_3}{B_3} . \tag{32}$$

Z wyrażenia (29) i (31) wynika, że

$$\alpha = \frac{R_2}{G_3} = - \frac{X_2}{B_3} = \frac{R_2G_3 - X_2B_3}{G_3^2 + B_3^2} \tag{33}$$

natomiast z wyrażenia (32):

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = - \operatorname{ctg} \varphi_3 \quad \text{czyli } \varphi_2 = - \varphi_3 \quad \text{i} \quad \varphi_2 + \varphi_3 = 0 . \tag{34}$$

Wynika stąd, że równość $\beta = 0$ będzie spełniona wtedy, gdy jako $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_3$ zastosujemy albo dwie czyste rezystancje ($\varphi_2 = \varphi_3 = 0$) albo czystą indukcyjność i czystą pojemność ($\varphi_2 = -\varphi_3$).

W oparciu o (7) i (28) oraz przy założeniu $\beta = 0$, warunek równowagi będzie mieć postać:

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = \alpha(G_4 - jB_4)$$

skąd

$$R_1 = \alpha G_4 = G_4 \frac{R_2}{G_3} = - G_4 \frac{X_2}{B_3} \cdot \tag{35}$$

$$X_1 = -\alpha B_4 = - B_4 \frac{R_2}{G_3} = B_4 \frac{X_2}{B_3} . \tag{36}$$

Warunkom tym odpowiada grupa II mostków, zestawionych w tablicy II, które można określić jako mostki o stałej sumie faz $\varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

Rozpatrując z kolei przypadek $\alpha = 0$, otrzymujemy z wyrażenia (29):

$$R_2G_3 - X_2B_3 = 0 \quad \text{czyli} \quad R_2G_3 = X_2B_3$$

skąd

$$\frac{R_2}{B_3} = \frac{X_2}{G_3} \tag{37}$$

lub

$$\frac{R_2}{X_2} = \frac{B_3}{G_3} . \tag{38}$$

Z wyrażenia (30) i (37) wynika, że:

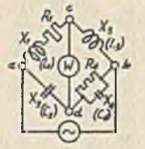
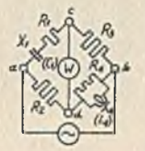
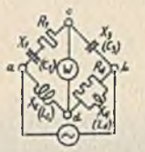
$$\beta = \frac{R_2}{B_3} = \frac{X_2}{G_3} = \frac{R_2B_3 + G_3X_2}{G_3^2 + B_3^2} , \tag{39}$$

natomiast z wyrażenia (38):

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}(\pm 90^\circ - \varphi_2)$$

czyli

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \pm \frac{\pi}{2} . \tag{40}$$

TABL. II		MOSTKI LINIOWE				MOSTKI NIELINIOWE	
	UKŁAD	WIELKOŚCI MIERZONE		WIELKOŚCI RÓWNOWAŻĄCE Z NIEZALEŻNYM ODCZYTEM		WIELKOŚCI RÓWNOWAŻĄCE Z NIEZALEŻNYM ODCZYTEM	
		WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE	WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE	WYRAŻENIE OGÓLNE	WYRAŻENIE SZCZEGÓŁOWE
	II a MOSTKI ZE STAŁĄ SUMĄ FAZ : $\varphi_2 + \varphi_3 = 0$						
1		$R_1 = G_4 \frac{R_2}{G_3}$ $X_1 = -B_4 \frac{R_2}{G_3}$	$R_1 = \frac{1}{R_4} R_2 R_3$ $L_1 = C_4 R_2 R_3$	$G_4 = R_1 \frac{G_3}{R_2}$ $B_4 = -X_1 \frac{G_3}{R_2}$	$R_4 = \frac{1}{R_1} R_2 R_3$ $C_4 = L_1 \frac{1}{R_2 R_3}$	$G_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{G_3}{R_2} - G_2$ $B_4 = -\frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{G_3}{R_2}$	$R_4 = \frac{1}{\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{1}{R_2 R_3} - \frac{1}{R_2}}$ $C_4 = \frac{U}{J_1'} \frac{\sin\Pi_1'}{\omega R_2 R_3}$
2		$R_1 = -G_4 \frac{X_2}{B_3}$ $X_1 = B_4 \frac{X_2}{B_3}$	$R_1 = \frac{1}{R_4} \frac{L_3}{L_2}$ $L_1 = C_4 \frac{L_3}{L_2}$	$G_4 = -R_1 \frac{B_3}{X_2}$ $B_4 = X_1 \frac{B_3}{X_2}$	$R_4 = R_1 \frac{L_3}{C_2}$ $C_4 = L_1 \frac{C_2}{L_3}$	$G_4 = -\frac{U}{J_1'} \cos\Pi' \frac{B_3}{X_2}$ $B_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi' \frac{B_3}{X_2} - B_2$	$R_4 = \frac{J_1'}{U} \frac{L_3}{\cos\Pi_1' C_2}$ $C_4 = \frac{U}{\omega J_1'} \sin\Pi_1' \frac{C_2}{L_3} - C_2$
3		$R_1 = G_4 \frac{R_2}{G_3}$ $X_1 = -B_4 \frac{R_2}{G_3}$	$R_1 = \frac{1}{R_4} R_2 R_3$ $C_1 = L_4 \frac{1}{R_2 R_3}$	$G_4 = R_1 \frac{G_3}{R_2}$ $B_4 = -X_1 \frac{G_3}{R_2}$	$R_4 = \frac{1}{R_1} R_2 R_3$ $L_4 = C_1 R_2 R_3$	$G_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{G_3}{R_2} - G_2$ $B_4 = -\frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{G_3}{R_2}$	$R_4 = \frac{1}{\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{1}{R_2 R_3} - \frac{1}{R_2}}$ $L_4 = -\frac{J_1' R_2 R_3}{\omega U \cdot \sin\Pi_1'}$
4		$R_1 = -G_4 \frac{X_2}{B_3}$ $X_1 = B_4 \frac{X_2}{B_3}$	$R_1 = \frac{1}{R_4} \frac{L_2}{C_3}$ $C_1 = L_4 \frac{C_3}{L_2}$	$G_4 = -R_1 \frac{B_3}{X_2}$ $B_4 = X_1 \frac{B_3}{X_2}$	$R_4 = \frac{1}{R_1} \frac{L_2}{C_3}$ $L_4 = C_1 \frac{L_2}{C_3}$	$G_4 = -\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{B_3}{X_2}$ $B_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{B_3}{X_2} - B_2$	$R_4 = \frac{J_1' L_2}{U \cos\Pi_1' C_3}$ $L_4 = -\frac{1}{\frac{\omega U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{C_3}{L_2} + \frac{1}{L_2}}$
	II b MOSTKI ZE STAŁĄ SUMĄ FAZ : $\varphi_2 + \varphi_3 = +\frac{\pi}{2}$						
5		$R_1 = B_4 \frac{R_2}{B_3}$ $X_1 = G_4 \frac{R_2}{B_3}$	$R_1 = \frac{1}{L_4} R_2 L_3$ $L_1 = \frac{1}{R_4} R_2 L_3$	$B_4 = R_1 \frac{B_3}{R_2}$ $G_4 = X_1 \frac{B_3}{R_2}$	$L_4 = \frac{1}{R_1} R_2 L_3$ $R_4 = \frac{1}{L_1} R_2 L_3$	$B_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{B_3}{R_2}$ $G_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{B_3}{R_2} - G_2$	$L_4 = \frac{J_1'}{U \cos\Pi_1'} R_2 L_3$ $R_4 = \frac{1}{\frac{U \sin\Pi_1'}{\omega J_1' R_2 L_3} - \frac{1}{R_2}}$
6		$R_1 = B_4 \frac{X_2}{G_3}$ $X_1 = G_4 \frac{X_2}{G_3}$	$R_1 = \frac{1}{L_4} L_2 R_3$ $L_1 = \frac{1}{R_4} L_2 R_3$	$B_4 = R_1 \frac{G_3}{X_2}$ $G_4 = X_1 \frac{G_3}{X_2}$	$L_4 = \frac{1}{R_1} L_2 R_3$ $R_4 = \frac{1}{L_1} L_2 R_3$	$B_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{G_3}{X_2} - B_2$ $G_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{G_3}{X_2}$	$L_4 = \frac{1}{\frac{U \cos\Pi_1'}{J_1'} \frac{1}{L_2 R_3} - \frac{1}{L_2}}$ $R_4 = \frac{J_1' \omega L_2 R_3}{U \sin\Pi_1'}$
	II c MOSTKI ZE STAŁĄ SUMĄ FAZ : $\varphi_2 + \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$						
7		$R_1 = B_4 \frac{X_2}{G_3}$ $X_1 = G_4 \frac{X_2}{G_3}$	$R_1 = C_4 \frac{R_3}{C_2}$ $C_1 = R_4 \frac{C_3}{R_3}$	$B_4 = R_1 \frac{G_3}{X_2}$ $G_4 = X_1 \frac{G_3}{X_2}$	$C_4 = R_1 \frac{C_3}{R_3}$ $R_4 = C_1 \frac{R_3}{C_2}$	$B_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{G_3}{X_2} - B_2$ $G_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{G_3}{X_2}$	$C_4 = -\frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{C_2}{R_3} + C_2$ $R_4 = -\frac{J_1' R_3}{\omega U \sin\Pi_1' C_2}$
8		$R_1 = B_4 \frac{R_2}{B_3}$ $X_1 = G_4 \frac{R_2}{B_3}$	$R_1 = C_4 \frac{R_2}{C_3}$ $C_1 = R_4 \frac{C_3}{R_2}$	$B_4 = R_1 \frac{B_3}{R_2}$ $G_4 = X_1 \frac{B_3}{R_2}$	$C_4 = R_1 \frac{C_3}{R_2}$ $R_4 = C_1 \frac{R_2}{C_3}$	$B_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{B_3}{R_2}$ $G_4 = \frac{U}{J_1'} \sin\Pi_1' \frac{B_3}{R_2} - G_2$	$C_4 = \frac{U}{J_1'} \cos\Pi_1' \frac{C_3}{R_2}$ $R_4 = -\frac{1}{\frac{\omega U \sin\Pi_1'}{J_1'} \frac{C_3}{R_2} + \frac{1}{R_2}}$

Równość $\alpha = 0$ będzie spełniona wówczas, gdy jako $\hat{Z}_2$ i $\hat{Z}_3$ zastosujemy czystą rezystancję z czystą indukcyjnością lub czystą pojemnością.
Warunek równowagi w oparciu o (7) i (28) oraz przy założeniu $\alpha = 0$ przyjmie wygląd:

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1 = j\beta(G_4 - jB_4) = \beta B_4 + j\beta G_4$$

skąd

$$R_1 = \beta B_4 = B_4 \frac{R_2}{B_3} = B_4 \frac{X_2}{G_3} \tag{41}$$

$$X_1 = \beta G_4 = G_4 \frac{R_2}{B_3} = G_4 \frac{X_2}{G_3} . \tag{42}$$

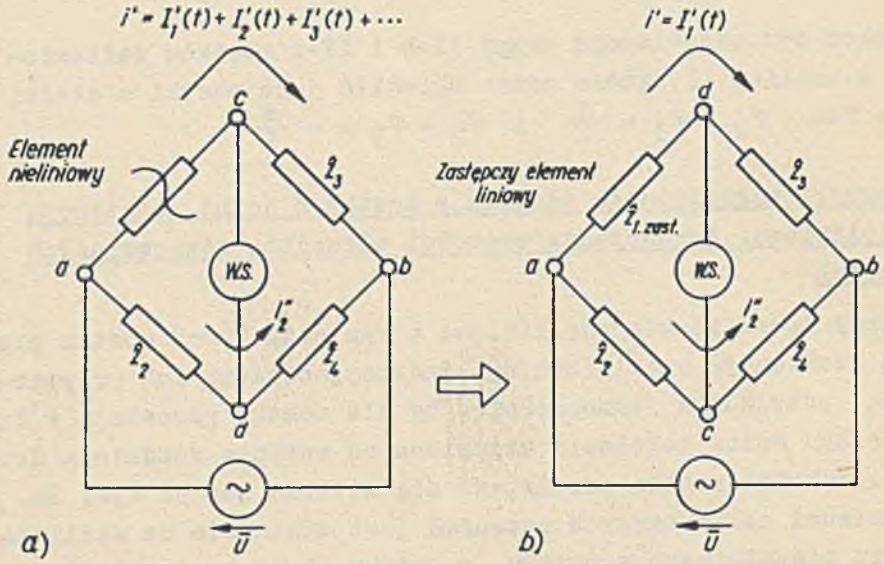
Warunkom tym odpowiadają grupy II-b i II-c mostków zestawionych w tablicy II, które można określić jako mostki o stałej sumie faz $\varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ i $\varphi_2 + \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$.

3. Warunki niezależnego odczytu w mostku z jedną reaktancją nieliniową. Wyznaczanie wartości elementów równoważących mostek

Zastąpmy teraz reaktancję liniową w ramieniu "a-c" mostka przez pewną reaktancję nieliniową np. indukcyjnościową lub pojemnościową, przyjmując jednocześnie, że dla mostka pozostają w dalszym ciągu ważne założenia uczynione na wstępie rozdziału drugiego. Schemat mostka przedstawi się wówczas jak na rys. 2a.

Ponieważ celem naszych rozważań jest wskazanie na możliwość odczytu niezależnego w mostku z jednym elementem nieliniowym jak również wskazanie sposobu rachunkowego wyznaczania wartości elementów równoważących mostek nieliniowy, warto wspomnieć na czym będzie polegać w swej istocie fizykalnej proces równoważenia i niezależnego odczytu w takim mostku. Pozwoli to jednocześnie, w dalszym ciągu na wskazanie na ewentualne zalety wyznaczania wartości wspomnianych elementów na drodze rachunkowej, a nie np. graficznej lub doświadczalnej.

W wyniku wprowadzenia w gałąź nieparzystą mostka elementu nieliniowego, zostaną w niej generowane również wyższe harmoniczne prądu. Suma tych prądów harmonicznych daje na poszczególnych elementach tej gałęzi odpowiednie spadki napięć, stanowiące również pewną sumę harmonicznych. Ponieważ dla zrównoważenia składowych wyższych harmonicznych napięcia w gałęzi nieparzystej - brak odpowiednich składowych w gałęzi parzystej - mostek da się zrównoważyć tylko dla częstotliwości podstawowej. Wskaźnikiem równowagi musi być oczywiście w takim przypadku odpowiedni wskaźnik selektywny.



Rys. 2. Mostek prądu zmiennego z jednym elementem nieliniowym a) układ rzeczywisty, b) układ zastępczy mostka w warunkach równowagi dla częstotliwości podstawowej (WS-selektywny wskaźnik równowagi mostka)

Jak wynika z powyższych rozważań sytuacja jest zbliżona do przypadku zachodzącego przy równoważeniu mostka liniowego, z

tym że w przypadku mostka nieliniowego element nieliniowy może być w warunkach równowagi zastąpiony pewnym zastępczym, biernym elementem liniowym, dla którego w obecności pierwszej harmonicznej prądu w gałęzi nieparzystej następuje równowaga mostka. Wartość liczbowa tego zastępczego elementu biernego zostaje odczytana na jednym z liniowych elementów równoważących mostek. W ten sposób nieliniowy mostek przedstawiony na rys. 2a może być zastąpiony pewnym zastępczym mostkiem liniowym, w którego gałęzi nieparzystej płynie pierwsza harmoniczna odkształconego prądu (rys. 2b).

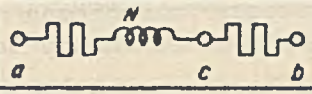
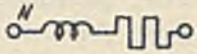
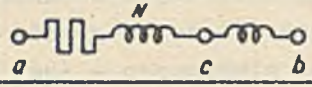
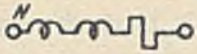
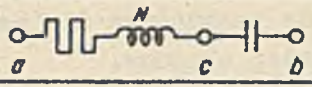
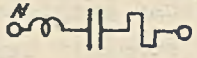
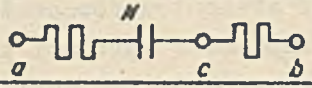
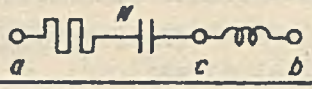
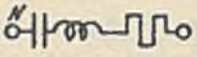
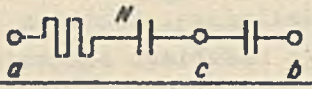
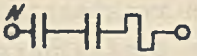
O ile rachunkowe wyznaczenie wartości liczbowych wielkości R,L,C równoważących mostek liniowy - przy założeniu granic w jakich mogą się zawierać zmiany elementu mierzonego - jest zupełnie proste, o tyle podobne wyznaczenie rachunkowe dla mostka nieliniowego staje się znacznie bardziej złożone.

Dla rachunkowego wyznaczenia wartości elementów równoważących mostek nieliniowy, konieczna jest znajomość wartości pierwszej harmonicznej prądu i jego początkowego kąta fazowego, w gałęzi nieparzystej mostka. Zadanie to jest skomplikowane obecnością szeregowych rezystancji o niepomijalnej wartości, w nieparzystej gałęzi mostka z reaktancją nieliniową. Skutkiem tego mimo założenia napięcia zasilającego o przebiegu sinusoidalnym, nie tylko prąd, ale jak już wspomniano - także spadki napięć na poszczególnych elementach tej gałęzi będą odkształcone. Ponieważ z reguły nie ma danej w sposób jednoznaczny i analityczny zależności między napięciem i prądem dla elementu nieliniowego (zależność ta dana jest zwykle w postaci wykresu), prąd w gałęzi nieparzystej może być obliczony tylko za pomocą metod przybliżonych, po wprowadzeniu pewnej aproksymacji zależności $I' = f(U)$.

Dodatkową trudność może stanowić konieczność ewentualnego uwzględnienia histerezy w elemencie nieliniowym, ze względu na potrzebę dodatkowej aproksymacji.

Wybór metody obliczenia prądu w obwodzie jest uzależniony od rodzaju zależności $I' = f(U)$ dla elementu nieliniowego (krzywa cienka lub pętla) i od żądanej dokładności rozwiązania.

Rozpatrzmy najbardziej typowe przypadki połączenia elementów mogące mieć miejsce w gałęzi nieparzystej mostka nieliniowego. Przedstawiono je schematycznie w zestawieniu na rys. 3.

	Gałąź nieparzysta	Układ zastępczy	Tabl. I	Tabl. II
			L.p. mostka	L.p. mostka
A			1;8	1;6
B			2;7	2;5
C			3	-
D			4;9	3;7
E			5	-
F			6;10	4;8

Rys. 3. Typowe przypadki połączenia elementów w gałęzi nieparzystej mostka nieliniowego
(N - element nieliniowy)

Jak wynika z tego zestawienia w omawianych mostkach nieliniowych będziemy mieć zawsze do czynienia z koniecznością aproksymacji zależności typu $I' = f(U)$ dla nieliniowej indukcyjności lub nieliniowej pojemności mieszczącej się w gałęzi nieparzystej mostka. Aproksymacja taka może być dokonana w rozmaity sposób, powinna jednak zawsze spełniać następujące kryteria:

a) ilość parametrów w wyrażeniu aproksymującym winna być wystarczająca dla uzyskania dostatecznie dobrego przybliżenia;

b) określenie parametrów w wyrażeniu analitycznym powinno być możliwie łatwe i nieskomplikowane;
c) podstawienie zmiennych w równanie różniczkowe powinno prowadzić do jego całkowalnej postaci.

Nieliniową indukcyjność i nieliniową pojemność najłatwiej można uwzględnić i wprowadzić w obliczenia aproksymując odpowiednie charakterystyki wielomianami skróconymi trzeciego stopnia, w których stałe współczynniki są określane z rzeczywistych, doświadczalnie zdjętych zależności np. przy pomocy metody najmniejszych kwadratów. Tak więc indukcyjność nieliniową w gałęzi nieparzystej (rys. 3 - grupy: A, B, C) otrzymywaną z reguły przez zastosowanie cewki z rdzeniem żelaznym, najwygodniej jest aproksymować - przy pomijalnej histerezie - zależnością między prądem magnesującym i indukcją [5]:

$$I' = a_1 B + a_3 B^3 . \tag{43}$$

Konieczność uwzględnienia histerezy wymaga wprowadzenia dodatkowego składnika aproksymującego [6].

W gałęzi nieparzystej mostka nieliniowego w szereg z nieliniową indukcyjnością włączona jest prawie zawsze rezystancja o znacznej wartości; całość zasilana jest ze źródła napięcia sinusoidalnego. Powstający na szeregowej rezystancji spadek napięcia od odkształconego prądu płynącego w obwodzie powoduje, że napięcie na cewce przestaje również być sinusoidalne, skutkiem czego przebieg czasowy indukcji w rdzeniu żelaznym będzie także funkcją niesinusoidalną. Można go przedstawić w postaci szeregu harmonicznego, w którym dla prostych obliczeń wystarczy zwykle uwzględnić tylko składowe pierwszej i trzeciej harmonicznej oraz ich początkowe kąty fazowe:

$$B(t) = \bar{B}_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \bar{B}_3 \sin(3\omega t + \psi_3), \tag{44}$$

gdzie:

$\bar{B}_1$ - amplituda składowej podstawowej indukcji magnetycznej;
$\bar{B}_3$ - amplituda trzeciej harmonicznej indukcji magnetycznej;

φ_1 - początkowy kąt fazowy przebiegu $B_1(t)$;

φ_3 - początkowy kąt fazowy przebiegu $B_3(t)$.

W powyższym szeregu nie założono z góry znaków odpowiednich kątów fazowych; znak kąta fazowego wynika z bezpośrednich, konkretnych wyliczeń.

Przebieg czasowy aproksymowanego prądu w gałęzi nieparzystej można przedstawić jako

$$I'(t) = a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right] + $$
$$+ a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right]^3 . \quad (45)$$

Wyrażenie to da się przedstawić również w postaci sumy przebiegów czasowych prądów pierwszej i trzeciej harmonicznej, skąd z kolei łatwo już można wyznaczyć amplitudy i początkowe kąty fazowe poszczególnych harmonicznych. Wpierw jednak muszą być obliczone wielkości: $\bar{B}_1, \bar{B}_3, \varphi_1$ i φ_3. W tym celu układamy nieliniowe równanie różniczkowe dla naszego obwodu które dla mostków z nieliniową indukcyjnością i szeregową rezystancją w gałęzi nieparzystej (rys. 3 - grupa A) przyjmie postać:

$$z.S.10^{-8}\frac{d}{dt}\left\{\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right\} +$$
$$+ R\left\{a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right] +\right.$$
$$\left. + a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right]^3\right\} = \bar{U}\sin\omega t, \quad (46)$$

gdzie:

z - ilość zwojów cewki w reaktancji nieliniowej,

S - przekrój rdzenia cewki,

$\omega = 2\pi f$.

Po wykonaniu zaznaczonych działań uszeregowujemy poszczególne składniki równania (46) w wyrażenie o postaci:

$$M = M_1.\sin\omega t + M_2.\cos\omega t + M_3.\sin 3\omega t + M_4.\cos 3\omega t. \quad (47)$$

Mnożąc kolejno równanie (47) przez $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sin 3\omega t$ i $\cos 3\omega t$, całkujemy otrzymane wyrażenia w granicach od 0 do T i przyrównujemy je do zera, otrzymując w rezultacie cztery równania dla wyznaczenia czterech niewiadomych: $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$, ψ_1 i ψ_3.

Jeśli w gałęzi nieparzystej mostka znajduje się oprócz indukcyjności nieliniowej i rezystancji także indukcyjność liniowa L (rys. 3 - grupa B) wówczas równanie różniczkowe obwodu będzie mieć wygląd:

$$z.S.10^{-8}\frac{d}{dt}\left\{\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right\}+$$
$$+L\frac{d}{dt}\left\{a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]+\right.$$
$$\left.+a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]^3\right\}+$$
$$+R\left\{a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]+\right.$$
$$\left.+a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]^3\right\}=\bar{U}\sin\omega t. \quad (48)$$

W przypadku gdy w gałęzi nieparzystej znajduje się prócz indukcyjności nieliniowej i rezystancji również pojemność C (rys. 3- grupa C) równanie różniczkowe obwodu przyjmie postać:

$$z.S.10^{-8}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right\}+$$
$$+R\frac{d}{dt}\left\{a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]+\right.$$
$$\left.+a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]^3\right\}+$$
$$+\frac{1}{C}\left\{a_1\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]+\right.$$
$$\left.+a_3\left[\bar{B}_1\sin(\omega t+\psi_1)+\bar{B}_3\sin(3\omega t+\psi_3)\right]^3\right\}=\omega\bar{U}\cos\omega t. \quad (49)$$

Sposób rozwiązania równań (48) i (49) pozostaje taki sam jak równania (46).

Podobne rozważania można przeprowadzić dla przypadku gdy w gałęzi nieparzystej mostka w szereg z rezystancją włączona jest nieliniowa pojemność (rys. 3 - grupa D), ewentualnie dodatkowo z liniową indukcyjnością (grupa E) lub liniową pojemnością (grupa F).

Nieliniową pojemność najwygodniej jest aproksymować - przy pomijalnej histerezie - zależnością między napięciem i ładunkiem gromadzonym na tej pojemności [7]:

$$q' = a_1 U_c - a_3 U_c^3 . \tag{50}$$

Biorąc pod uwagę, np. dla pierwszego przypadku włączenia kondensatora nieliniowego (rys. 3 - grupa D), że

$$U_c(t) = U(t) - U_R(t)$$

oraz że prąd odkształcony płynący w obwodzie da się przedstawić w sposób przybliżony w postaci szeregu

$$I'(t) = \bar{I}'_1 \sin(\omega t + \Pi'_1) + \bar{I}'_3 \sin(3\omega t + \Pi'_3)$$

otrzymamy równanie różniczkowe zbliżone do równania (46). Podobnie postępujemy w pozostałych przypadkach, gdy w rozpatrywanej gałęzi nieparzystej oprócz kondensatora nieliniowego znajduje się również rezystancja i indukcyjność liniowa lub rezystancja i pojemność liniowa (rys. 3 - grupy: E i F).

Załóżmy teraz, że potrafimy już obliczyć wartość składowej pierwszej harmonicznej prądu w gałęzi nieparzystej mostka ($\bar{I}'_1$) i wartość odpowiadającego jej początkowego kąta fazowego (Π_1). Pozwoli to nam wówczas wyznaczyć wartości elementów równoważących mostek dla częstotliwości podstawowej. Tak więc na przykład dla mostka 1 w tablicy I, że stała różnica faz $\varphi_3 - \varphi_4 =$

= 0 i elementami stosunkowymi w postaci rezystancji R_3 i R_4, znajdujemy dla warunku równowagi kolejno:

$$\bar{I}'_1 R_3 = \bar{I}'' R_4 \qquad \text{lub} \qquad \frac{\bar{I}''}{\bar{I}'_1} = \frac{R_3}{R_4} \tag{51}$$

oraz

$$\Pi'_1 = \Pi''. \tag{52}$$

Wobec powyższego

$$\mathrm{tg}\,\Pi'_1 = \frac{X_2}{R_2 + R_4}; \tag{53}$$

z drugiej strony:

$$\bar{I}'' = \frac{\bar{U}}{X_2\sqrt{1 + \frac{(R_2 + R_4)^2}{X_2^2}}} = \frac{\bar{U}}{X_2}\sin\Pi'_1 =$$

$$= \frac{\bar{U}}{(R_2+R_4)\sqrt{1 + \frac{X_2^2}{(R_2 + R_4)^2}}} = \frac{\bar{U}}{R_2 + R_4}\cos\Pi'_1. \tag{54}$$

Z (51) i (54) otrzymujemy wartości elementów równoważących mostek nieliniowy na pierwszej harmonicznej i pozwalających jednocześnie na niezależny odczyt rezystancji i "składowej liniowej" reaktancji nieliniowej w ramieniu "a-c":

$$R_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{I}'_1}\cos\Pi'_1\frac{R_4}{R_3} - R_4 \tag{55}$$

$$X_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{I}'_1}\sin\Pi'_1\frac{R_4}{R_3}; \qquad L_2 = \frac{\bar{U}}{\omega\bar{I}'_1}\sin\Pi'_1\frac{R_4}{R_3}. \tag{56}$$

Postępując w podobny sposób dla wszystkich układów mostkowych wyszczególnionych w tablicach I i II i zastępując wartości maksymalne napięcia i prądu odpowiednimi wartościami skutecznymi otrzymamy kompletne warunki równowagi (wartości elementów równoważących) również dla mostków zawierających nieliniową indukcyjność lub pojemność w ramieniu "a-c".

4. Wnioski końcowe

Porównując wyrażenia otrzymane dla mostków liniowych i nieliniowych (z jedną nieliniową indukcyjnością lub pojemnością) widzimy, że zasada niezależnego odczytu w obu rodzajach mostków jest identyczna. W mostkach liniowych odczyt, dokonywany z czynnych i biernych elementów równoważących, daje w warunkach równowagi mostka wprost wartość rezystancji i reaktancji w ramieniu "a-c". W mostkach nieliniowych odczyt dokonywany w ten sam sposób, daje w warunkach równowagi mostka dla pierwszej harmonicznej wartość zastępczej reaktancji i rezystancji w ramieniu "a-c".

W mostkach liniowych znalezienie wartości liczbowych wielkości R,L lub C równoważących mostek - jest elementarnie proste. W mostkach nieliniowych zagadnienie to komplikuje się ponieważ w obecności elementów nieliniowych w mostku, równowaga jest uzależniona od wartości napięcia zasilającego; szukane rachunkowo wartości elementów równoważących są też funkcjami napięcia zasilającego. Do wyznaczenia wartości liczbowych tych elementów R,L lub C równoważących mostek nieliniowy dla częstotliwości podstawowej potrzebna jest znajomość dwóch wielkości określanych analitycznie: składowej podstawowej prądu płynącego przez gałąź zawierającą element nieliniowy i odpowiadającego jej początkowego kąta fazowego. Jak już wspomniano wielkości te mogą być wyznaczone stosunkowo najprościej w sposób analityczny, co przy użyciu maszyny cyfrowej lub nawet prostego kalkulatora elektrycznego nie przedstawia specjalnych kłopotów.

Warto wspomnieć, że do wyznaczenia szukanych wielkości można się posłużyć również metodami graficznymi lub wprost doświadczeniem. Metody graficzne są jednak nadzwyczaj żmudne i mało

dokładne; dążność do podwyższenia stopnia dokładności w tych metodach prowadzi z konieczności do zbyt dużych wykresów i rysunków. Pracochłonność jest przy tym bardzo duża zwłaszcza, że wyznaczanie szukanych wielkości przeprowadza się najczęściej metodą kolejnych przybliżeń.

W metodzie doświadczalnej odpada oczywiście kłopot wykonywania skomplikowanych obliczeń, droga ta jest jednak dostępna tylko w warunkach odpowiedniego wyposażenia laboratoryjnego i dla doświadczonego eksperymentatora. Przy braku doświadczenia będzie prawdopodobnie zachodzić konieczność wykonania przynajmniej przybliżonych obliczeń wartości granicznych elementów równoważących mostek dla uniknięcia poszukiwania "na ślepo".

Na zakończenie warto podkreślić, że niechęć do wykonywania pozornie skomplikowanych obliczeń jest często nieuzasadniona. Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że do wyznaczenia analitycznego elementów równoważących mostek nieliniowy w rodzaju mostków zamieszczonych w tabl. I i II, z wystarczającą dokładnością, przy użyciu kalkulatora elektrycznego (maszyna licząca z napędem elektrycznym) potrzeba 15-20 godzin pracy.

W tym miejscu pragnę jeszcze podziękować Panu prof. Edmundowi Romerowi za umożliwienie przedyskutowania problemów związanych z równoważeniem i niezależnym odczytem w mostkach nieliniowych.

LITERATURA

[1] NIESTIERENKO A.D.: Osnowy rasczota elektroizmieritielnych schiem urawnowiesziwanja - Kijów 1960.

[2] KARANDIEJEW K.B.: Mietody elektriczeskich izmierienij - Moskwa 1952.

[3] KARANDIEJEW K.B., SZTAMBERGIER G.A.: Obobszcziennaja tieoria mostowych schiem pieriemiennowo toka - Nowosybirsk 1961.

[4] FERGUSON J.G.: Classification of bridge methods of measuring impedances - Trns. Amer. I.E.E. vol. 52 1933 r. str. 861-868.

[5] BIESSONOW Ł.A.: Elektriczeskije ciepi so stalju - Moskwa 1948.

[6] MALZACHER S.: Mostek Maxwella o nieliniowych indukcyjnościach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - Automatyka - Nr 7, 1966 r., str. 75-100.

[7] ZIERNOW N.W., KARPOW W.G.: Tieoria radiotechniczeskich ciepiej. Moskva 1965.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 9.II.1966 r.

СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПОЛУЧЕНИЯ РАЗДЕЛЬНОГО ОТСЧЁТА В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ МОСТАХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Р е з ю м е

В статье представлено анализ цепей мостов переменного тока с линейными и нелинейными элементами, в которых возможно получить раздельный отсчёт вещественной и мнимой составляющих измеряемого комплексного сопротивления. Определено необходимые условия для такого рода раздельного отсчёта в случае существования линейных или нелинейных индуктивностей и емкостей в мосте. Обсуждено методы решения нелинейных уравнений для определения условий равновесия в мостах с нелинейными элементами. В заключении составлено результаты рассуждений в табелях.

COMPARISON OF CONDITIONS AND POSSIBILITIES OF OBTAINMENT OF INDEPENDENT READING AT LINEAR AND NONLINEAR a-c BRIDGES

S u m m a r y

The paper presents an analysis of a-c bridges with linear and nonlinear reactances in which there is a possibility to

obtain the independent reading of the activ and reactiv components of measuring impedances. The conditions for such independent reading in bridges with linear and nonlinear inductances and capacitances are given in the paper. There are shown in this paper too, some methods of solution of nonlinear equations for determining conditions for balance in nonlinear bridges. The results of considerations are given in tables.