ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968
Seria: AUTOMATYKA z. 9 Nr kol. 216

MACIEJ BARGIELSKI

Katedra Teorii Regulacji

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO DO SYNTEZY STRUKTUR WIELKICH SYSTEMÓW

Streszczenie: W pracy podano pewną propozycję odnośnie zapisu struktur wielkich systemów umożliwiającą operowanie rachunkiem czysto matematycznym przy syntezie tych struktur. Po przedstawieniu jednego ze sposobów rozwiązania tzw. zagadnienia transportowego będącego szczególnym przypadkiem programowania liniowego pokazano szereg przykładów wielkich systemów,do syntezy optymalnych struktur których można zastosować przedstawioną metodę. Na koniec podano pewien szczególny przypadek optymalizacji oraz twierdzenie podające warunki optymalności wszystkich rozwiązań.

1. Wstęp

Automatyzacja procesów przemysłowych obecnie zaczyna przekraczać ramy jednostkowych, prostych obiektów. Zaczyna ona ingerować w coraz szerszy krąg zagadnień związanych z kierowaniem całymi kompleksami obiektów - wielkimi systemami. Przykładami wielkich systemów mogą być: system energetyczny okręgu, system transportowo-zaopatrzeniowy przedsiębiorstwa, zespół ludzi i maszyn uczestniczących w procesie technologicznym. Dla poznania występujących w systemach kompleksowych zagadnień trzeba wprzód poznać ich ogólną strukturę i elementy składowe oraz postawić im wymagania w celu umżliwienia sterowania systemem.

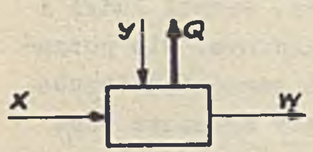
Teoria sterowania wielkimi systemami - nowy, powstały w ostatnich latach kierunek nauki o sterowaniu jest konsekwencją coraz szybszego rozwoju cybernetyki i coraz szerszej jej ingerencji we wszelakie dziedziny ludzkiej działalności. Dotychczasowe wysiłki podejmowane w kierunku sformułowania dokładnego określenia pojęcia "wielki system" nie doprowadziły na razie do zadawalającego rezultatu. Niemniej jednak można wskazać

charakterystyczne cechy, które z reguły obserwuje się w wielkich systemach:
- możność wydzielenia pewnych części - podsystemów,
- istnienie celu działania dla każdego podsystemu,
- istnienie ogólnego celu działania wielkiego systemu i możność oceny efektywności jego działania,
- współudział ludzi, maszyn i oddziaływującego środowiska,
- istnienie wielkiej liczby sprzężeń wewnątrz każdego podsystemu i między podsystemami,
- istnienie rozgałęzionej sieci informacyjnej zapewniającej funkcjonowanie systemu i optymalizację jego działania.

Podstawowym zadaniem teorii sterowania wielkimi systemami jest opracowanie naukowych metod organizacji sterowania złożonymi kompleksami. Do problemów tych należy dołączyć takie zadania, jak wybór struktury układu sterowania, ustalenie celu sterowania dla każdego obwodu na wszystkich poziomach hierarchii.

2. Struktury wielkich systemów

Jak było powiedziane uprzednio każdy wielki system można podzielić na części składowe zwane agregatami rozumiejąc pod tym mianem zorganizowany zespół sił i środków realizujących określone zadania potrzebne do realizacji celu całego systemu [1]. Schemat agregatu można przedstawić jak na poniższym rysunku,



Rys. 1. Schemat agregatu

gdzie:

X - zespół wielkości wejściowych,

Y - wielkości wpływające na sposób działania agregatu tzn. na sposób przetwarzania produktu wejściowego i wielkości wewnętrznych na produkt wyjściowy,

W - zespół wielkości wyjściowych,

Q - informacja zwrotna o pracy agregatu.

Dla agregatu precyzuje się cel działania, będący funkcją wielkości wejściowych, wyjściowych oraz wewnętrznych własności agregatu określających jego stan. Agregat winien wytworzyć wielkości wyjściowe, spełniające szereg z góry narzuconych warunków.

W formie analitycznej cel działania agregatu często można przedstawić przy pomocy warunków

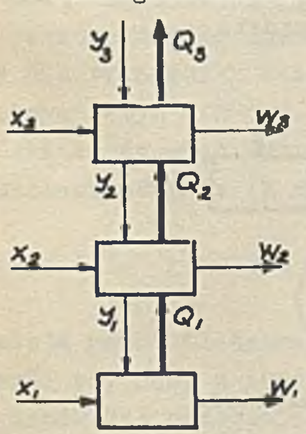
$$F_i(X,W,Y,Q) \leqslant 0 \qquad i = 1,2,...$$

$$S = \min F_0(X,W,Y,Q)\,.$$

Ogólnie biorąc agregat otrzymuje strumień produktów (informacji)wejściowych i w wyniku realizacji postawionego celu daje na zewnątrz strumień produktów wyjściowych spełniających określone wymagania oraz określoną informację zwrotną.

Odpowiednie połączenie agregatów w cały system określa jego strukturę i tak np. autorzy [1] wyróżniają następujące struktury:

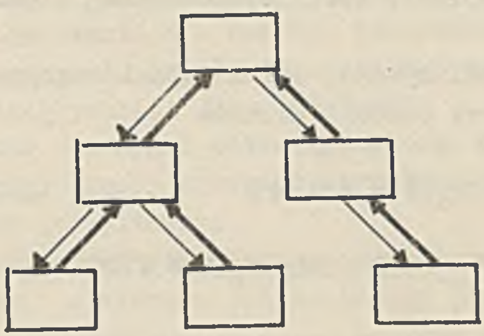
- hierarchiczną prostą,
- hierarchiczną rozgałęzioną,
- szeregową prostą,
- szeregową rozgałęzioną,
- szeregowo-hierarchiczną.



Rys. 2. Struktura hierarchiczna prosta

Cechą charakterystyczną struktury hierarchicznej prostej jest to, że wielkości reprezentujące część produktu wejściowego oraz wielkości "ustawiające" działanie agregatu pochodzą z agregatu stojącego bezpośrednio wyżej w hierarchii. Do niego też kierowana jest informacja zwrotna.

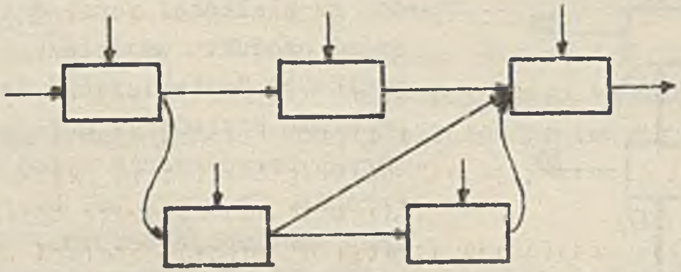
Struktura hierarchiczna rozgałęziona tym różni się od prostej, że agregatowi wyższego szczebla podlega co najmniej jeden agregat szczebla niższego.



Rys. 3. Struktura hierarchiczna rozgałęziona

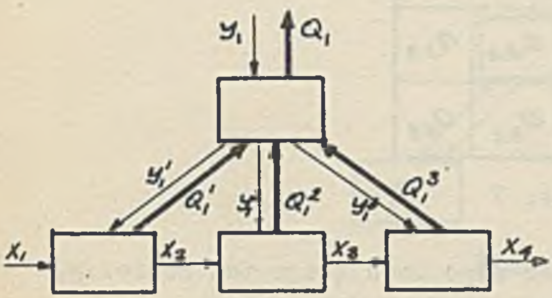
W strukturze szeregowej prostej wielkości wyjściowe każdego agregatu są zarazem wielkościami wejściowymi agregatu następnego.

Rys. 4. Struktura szeregowa prosta



Rys. 5. Struktura szeregowa rozgałęziona

W strukturze szeregowej rozgałęzionej istnieją rozgałęzione wyjścia niektórych agregatów, czyli, inaczej mówiąc, wielkości wyjściowe każdego agregatu są zarazem wielkościami wejściowymi co najmniej jednego agregatu.



Rys. 6. Struktura szeregowo hierarchiczna

Wreszcie struktura szeregowo-hierarchiczna stanowi połączenie struktury szeregowej i hierarchicznej w jednym kompleksie. Agregat poziomu wyższego spełnia rolę układu kierującego systemem szeregowo połączonych agregatów niższego szczebla.

Przedstawione wyżej różnorodne struktury wielkich systemów zapisane były w sposób graficzny. To samo można też przedstawić w inny, matematycznie sformalizowany sposób wykorzystując do tego celu zapis macierzowy.

Co bowiem decyduje w istocie o strukturze systemu kompleksowego? Można na to odpowiedzieć, że decyduje sposób realizacji połączeń informacyjnych i materiałowo-energetycznych między poszczególnymi agregatami. Czyli inaczej mówiąc, jakie kanały dla transportu materiałów i energii przewidujemy między dowolnym i-tym i k-tym agregatem systemu kompleksowego.

Zakładając więc system składający się z N agregatów zbudujmy macierz stopnia $[N \times N]$, której poszczególne elementy

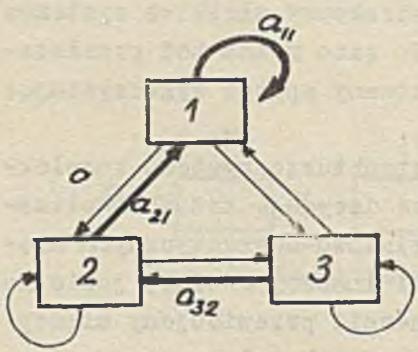
$$a_{ik}$$

obrazują pewną ilościową miarę kanału transportu informacji, energii czy masy z i-tego do k-tego agregatu. Zakładając dla przykładu N=3 otrzymujemy taką tablicę.

		1	2	3	NUMER AGREGATU ODBIORCZEGO
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	
NUMER AGREGATU NADAWCZEGO	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	

Rys. 7

Struktura wielkiego systemu odpowiadającego tej macierzy, a zapisana w postaci graficznej byłaby następująca:



Rys. 8

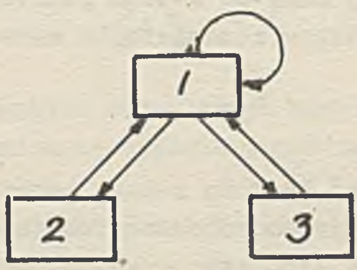
Ten sam system trzech agregatów w układzie struktury centralnej określony byłby poniższą macierzą.

	1	2	3
1	a_{11}	a_{12}	a_{12}
2	a_{21}	0	0
3	a_{31}	0	0

Rys. 9

Widać, że stają się tu równe zeru wszystkie elementy a_{ik} nie posiadające wskaźnika 1 - wskaźnika elementu centralnego. Strukturze tej odpowiada oczywisty schemat (rys. 10).

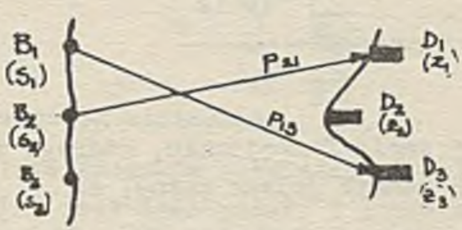
Podobne prawidłowości można zaobserwować dla wszystkich uprzednio przedstawionych typów struktur. Widać z powyższego, że różnorodne struktury systemów kompleksowych można w jednoznaczny sposób opisać przy pomocy macierzy strukturalnych o określonych prawidłowościach zerowania się elementów tych macierzy.



Rys. 10

3. Programowanie liniowe - zagadnienie transportowe

Początków problemu transportowego należy szukać w okresie wojennym, kiedy to z M baz zaopatrzeniowych $B_1, B_2, \ldots, B_M$ posiadających odpowiednio $s_1, s_2, \ldots, s_M$ jednostek sprzętu wojennego należało dostarczyć na front do N punktów odbioru $D_1, D_2, \ldots, D_N$ odpowiednio $z_1, z_2, \ldots, z_N$ materiałów i sprzętu.



Rys. 11

Wszystkim drogom pomiędzy bazami a punktami odbioru można przypisać rozmaite stopnie zagrożenia rozumiejąc przez to np. prawdopodobieństwo napotkania nieprzyjaciela na tej drodze.

Oznaczmy to zagrożenie przez

$$p_{ik}$$

rozumiejąc przez to prawdopodobieństwo napotkania nieprzyjaciela na drodze z i-tej bazy do k-tego punktu odbioru.

Problem polegał na takim rozdzieleniu materiałów

$$m_{ik}$$

transportowanych z i-tej bazy do k-tego punktu odbioru, by zminimalizować średnie prawdopodobieństwo napotkania nieprzyjaciela przypadające na jednostkę transportowanego produktu.

Przesyłając do pewnego punktu odbioru m_1 materiałów po drodze o zagrożeniu p_1 i m_2 materiałów po drodze o zagrożeniu p_2, to średnie prawodpodobieństwo napotkania nieprzyjaciela przypadające na jednostkę transportowanego materiału jest

$$\frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1+m_2}.$$

Uogólniając otrzymany wzór

$$T = \frac{\sum\limits_{i,k} m_{ik}p_{ik}}{\sum\limits_{i,k} m_{ik}}$$

otrzymamy matematyczny zapis funkcjonału, którego wartość należy zminimalizować. Zauważyć jednak można, że

$$\sum_{i,k} m_{ik} = \text{const}$$

wobec czego zagadnienie powyższe można sprowadzić do minimalizacji innego funkcjonału

$$T^* = \sum_{i,k} m_{ik}p_{ik}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_i m_{ik} = z_k$$

$$\sum_k m_{ik} = s_i$$

będących wynikiem ściśle określonych zapotrzebowań poszczególnych punktów odbioru oraz ograniczonych zasobów zgromadzonych w każdej z baz.

Powyższy problem można przedstawić w ścisły, sformalizowany matematycznie sposób:

Dany jest zbiór $E(s_i)$ o mocy $\overline{\overline{E(s_i)}} = M$ i zbiór $E(z_k)$ o mocy $\overline{\overline{E(z_k)}} = N$. Należy znaleźć nieujemny zbiór $E(m_{ik})$ o mocy $\overline{\overline{E(m_{ik})}} = NM$, $m_{ik} \geqslant 0$ i taki, że

$$\sum_k m_{ik} = s_i$$

$$\sum_i m_{ik} = z_k$$

a pewien funkcjonał sumacyjny

$$T = \sum_{i,k} m_{ik} p_{ik}$$

przyjmuje wartość minimalną.

Istnieje wiele sposobów rozwiązania postawionego problemu. Jeden z nich [2] jest dość prosty i drogą nieskomplikowanych rachunków prowadzi do prawidłowego wyniku.

W celu rozwiązania zagadnienia rozważa się dowolny k-ty punkt odbioru. Maksymalne ryzyko związane z zaopatrzeniem tego punktu wynosi

$$z_k \max_i p_{ik}$$

a ryzyko minimalne odpowiednio

$$z_k \min_i p_{ik} .$$

Wobec tego maksymalne możliwe zmniejszenie ryzyka zaopatrzenia tego punktu jest

$$A_k = z_k(\max_i p_{ik} - \min_i p_{ik}).$$

Szeregując punkty odbioru według malejącej wartości A_k dokonujemy przydziału dla pierwszego punktu (o maksymalnej wartości A_k) z bazy o najmniejszym zagrożeniu transportu.

p_{ik}:

2	8	3
1	4	2
5	1	1

Rys. 12

Niech tym punktem odbioru będzie D_j, a odpowiednią bazą B_i. Mogą tu zaistnieć dwa przypadki:

1° zapotrzebowanie przekracza zasoby bazy

$$z_j > s_i$$

2° zapotrzebowanie nie przekracza zasobów

$$z_j \leqslant s_i .$$

W przypadku pierwszym całkowity zasób bazy B_i przesyłamy do D_j, w przypadku drugim pokrywamy całkowicie zapotrzebowanie punktu odbioru, a pozostałe w bazie materiały przesyłamy do innego, dowolnego punktu odbioru.

W obydwu przypadkach wypracowuje się pewną decyzję d_1 oraz nową sytuację. Opisane postępowanie stosujemy do tej nowej sytuacji wypracowując decyzję d_2 i następną sytuację.

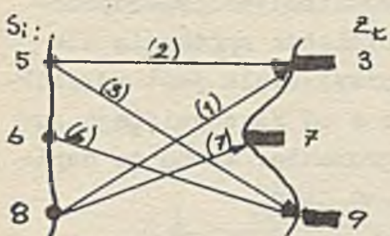
Zauważmy, że w każdym kroku eliminujemy jedną bazę, wobec czego postępowanie zakończy się po M krokach, otrzymując w wyniku pewien ciąg decyzji

$$d_1, d_2, \ldots, d_M .$$

Rozwiązaniem problemu jest suma tych decyzji

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_M$$

dająca pewną strategię przesyłu strumienia materiałowego odpowiednimi kanałami.



Rys. 13

Należy teraz sprawdzić optymalność otrzymanej strategii i ewentualnie (w przypadku negatywnym) poprawić ją. Otrzymana strategia informuje o ilości materiałów m_{ik} przesyłanych z i-tej bazy do k-tego punktu odbioru. Można ją napisać w postaci macierzy stopnia $[M \times N]$. Wiersze tej macierzy odpowiadają poszczególnym bazom, a kolumny - punktom odbioru. Pewne jej elementy są równe zeru, co obrazuje brak przepływu materiałów z odpowiedniej bazy do punktu odbioru.

Utwórzmy macierz fikcyjnych prawdopodobieństw napotkania nieprzyjaciela H również stopnia $[M \times N]$ w sposób następujący:

1) elementy h_{ik} odpowiadające niezerowym m_{ik} czynimy równe p_{ik},

$$h_{ik} = p_{ik}$$

2) dołączamy wiersz **R** i kolumnę **C** i umieszczając zero (jako pewnego rodzaju warunek początkowy) w dowolnym miejscu **R** lub **C** wypełniamy macierze $\mathbf{R} = [r_k]$ i $\mathbf{C} = [c_i]$ według schematu

$$c_i + r_k = p_{ik},$$

3) pozostałe elementy **H** obliczamy według tego samego wzoru. Jest rzeczą oczywistą, że w przypadku rozwiązania optymalnego to fikcyjne prawdopodobieństwo spotkania nieprzyjaciela jest niewiększe od rzeczywistego zagrożenia. Można to napisać jako

$$\mathbf{H} \leqslant \mathbf{P}$$

m_{ik}:

2		3
		6
1	7	

H:

2	-2	3
1	-3	2
5	1	6

C:

-2
-3
1

R:

4	0	5

Rys. 14

L:

*	–	*
0	–	*
*	*	5

Rys. 15

rozumiejąc ten zapis jako

$$\mathbf{L} \leqslant 0 ,$$

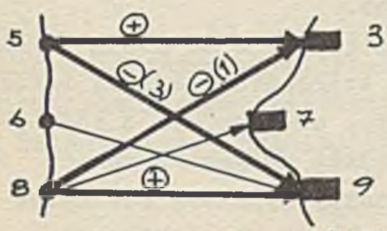
gdzie:

$$\mathbf{L} = \mathbf{H} - \mathbf{P}.$$

Jeśli więc wszystkie elementy **L** są niedodatnie, to otrzymane rozwiązanie jest optymalne. W przeciwnym przypadku rozwiązanie to można poprawić.

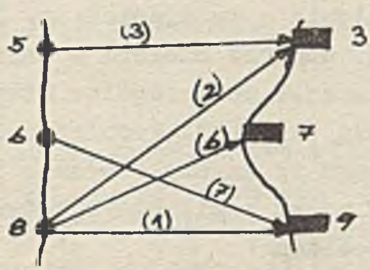
W celu poprawienia rozwiązania wybieramy dodatkowo dotychczas nieistniejącą drogę odpowiadającą maksymalnemu elementowi macierzy **L** i przesyłamy nią pewną, nieznaną jeszcze ilość materiałów. Aby nie naruszyć równowagi materiałowej w bazie, z której wychodzi ta droga musimy inną drogą wychodzącą z tejże bazy przesłać tę samą ilość materiałów mniej. Lecz teraz pewien punkt odbioru otrzyma mniej materiałów, więc w celu pokrycia zapotrzebowania należy mu inną drogą, z innej bazy przesłać tę ilość materiałów, Postępowanie powyższe kontynuujemy aż do zamknięcia cyklu.

Ilość materiałów, jaką należy przesłać nową drogą wyznaczamy jako minimalną z ilości materiałów przesyłanych drogami, na których zmniejszamy transport. W ten sposób, dodając nową drogę, likwidujemy równocześnie inną tak, że ogólna ilość dróg wykorzystywanych do transportu nie ulega zmianie.



$m = \min(1,3) = 1$

Rys. 16



L:

*	O	*
O	—	*
—	*	*

Rys. 17

Otrzymaną w ten sposób nową strategię transportu trzeba ponownie sprawdzić na optymalność i ewentualnie, ponownie poprawić.

Opisana powyżej metoda iteracyjna poprawiania strategii jest zbieżna do strategii optymalnej.

4. Zastosowanie metody transportowej do projektowania struktur systemów kompleksowych

Macierzowy zapis struktury wielkich systemów wydaje się być bardzo przydatny ze względu na możliwość zastosowania metody transportowej do projektowania tych struktur.

Otrzymane w metodzie transportowej rozwiązanie można bowiem zapisać w postaci macierzowej rozumiejąc, że każdy element tej macierzy jest pewną ilościową miarą kanału transportu materiałów.

$$M: \begin{array}{|c|c|c|} \hline m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ \hline m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ \hline m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ \hline \end{array}$$

Rys. 18

Spostrzeżenie to można uogólnić na transport energii, informacji itp. co, zgodnie z podanymi uprzednio uwagami w sposób jednoznaczny wyznacza strukturę danego systemu kompleksowego.

Jako możliwości zastosowania metody transportowej rozpatrzmy następujące przykłady.

Projekt instalacji sprężonego powietrza dla zakładu

Jest danych p punktów zasilania o wydajności s_i $[m^3/h]$ sprężonego powietrza oraz q punktów odbioru o zapotrzebowaniu d_k $[m^3/h]$. Odległości łączące poszczególne kompresory z punktami odbioru niech wynoszą c_{ik} [m]. Problem polega na takim zaprojektowaniu rurociągu to znaczy dobraniu przekrojów t_{ik} $[m^2]$ rur łączących i-ty punkt zasilania z k-tym punktem odbioru aby ogólny koszt rurociągu

$$T = \sum_{i,k} t_{ik} c_{ik}$$

był najmniejszy przy spełnieniu ograniczeń wynikających z określonych możliwości dostaw powietrza przez poszczególne punkty zasilania oraz zadanych zapotrzebowań we wszystkich punktach odbioru.

Zagadnienie to da się sformalizować matematycznie w sposób identyczny jak problem transportowy; do jego rozwiązania można więc stosować przedstawioną metodę.

Rozdział wody

W pewnym okręgu przemysłowym istnieją pewne skupione punkty zaopatrujące okręg w wodę (zbiorniki) o zasobie z_i $[m^3]$ oraz skupione punkty poboru wody o zapotrzebowaniu d_k $[m^3]$. Istnieje pewna sieć wodno-kanalizacyjna łącząca wszystkie zbiorniki i punkty poboru wody. Określając straty ponoszone przez układ jako proporcjonalne do ilości przesyłanej wody m_{ik} oraz odległości l_{ik} na jaką jest ona przesyłana, problem polega na takim każdorazowym rozdziale m_{ik} przy zmiennych zasobach zbiorników i zapotrzebowaniach, aby zminimalizować ogólne straty układu, czyli zminimalizować funkcjonał

$$T = \sum_{i,k} m_{ik}\, l_{ik}\,.$$

Jak i w poprzednim przypadku występują tu ograniczenia odnośnie realizacji zapotrzebowań oraz wykorzystania zasobów. Również i ten problem da się rozwiązać metodą zagadnienia transportowego ze względu na identyczny, sformalizowany zapis matematyczny tych problemów.

Komunikacja

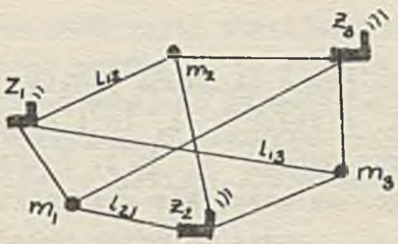
W pewnym regionie znajduje się kilka zakładów przemysłowych zatrudniających z_i pracowników każdy. W okolicy zakładów jest szereg skupisk ludności zamieszkiwanych odpowiednio przez m_k osób zawodowo czynnych mogących być zatrudnionymi w tych zakładach. Załóżmy równowagę podaży i popytu siły roboczej tzn.

$$\sum_i z_i = \sum_k m_k\,.$$

Poszczególne zakłady przemysłowe z osiedlami łączą drogi dojazdowe o długości odpowiednio l_{ik} [km]. Problem polega na takim wyznaczeniu ilości ludzi n_{ik} z k-tego osiedla zatrudnionych w i-tym zakładzie pracy, by sumaryczna ilość osobokilometrów

$$\sum_{i,k} n_{ik} l_{ik}$$

traconych codziennie na dojazdy była jak najmniejsza.



Rys. 19

Widać wyraźnie, że i ten problem ma zapis matematyczny identyczny z zapisem metody transportowej. Jego rozwiązanie można więc również uzyskać przedstawioną uprzednio metodą.

System informacyjny

Rozważmy taki na przykład meteorologiczny system informacyjny. W pewnych, ściśle określonych miejscach usytuowane są stacje pomiarowe mające przesłać do jednostek nadrzędnych s_i bitów informacji. Jest też kilka jednostek nadrzędnych o zdolności przetwórczej z_k bitów tej informacji, odległych o l_{ik} [km] od każdej ze stacji. Zakładając straty przesyłanej informacji jako proporcjonalne do odległości, na jaką jest ona przesyłana problem optymalizacji takiego systemu polega na takim rozdziale informacji przesyłanej do poszczególnych jednostek nadrzędnych b_{ik} bitów, aby zminimalizować ogólne straty informacji, Inaczej mówiąc, by zminimalizować funkcjonał

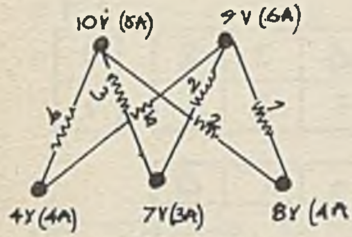
$$T = \sum_{i,k} l_{ik} b_{ik}$$

przy odpowiednich organiczeniach.

Podobnie, jak poprzednie i ten problem ma zapis matematyczny identyczny z zapisem zagadnienia transportowego, można go więc rozwiązać przedstawioną metodą.

5. Pewien szczególny przypadek optymalizacji

Zastanówmy się nad następującym problemem:



Rys. 20

Mamy dwa źródła napięcia 10V.5A i 9V.6A oraz trzy odbiorniki 4V.4A, 7V.3A, 8V.4A. Należy tak zaprojektować redukcyjną sieć oporową, by zminimalizować straty.

Spróbujmy problem ten rozwiązać metodą zagadnienia transportowego:

Dane – bazy 5A, 6A

punkty odbioru 4A, 3A, 4A

koszty – wymagane spadki napięć u_{kl} przedstawia poniższa tablica.

Należy znaleźć i_{kl} dla zapewnienia zasilania i minimalizacji strat

$$P = \sum_{k,l} i_{kl} u_{kl} .$$

u_{kl}:

5	6	3	2
6	5	2	1
	4	3	4

Rys. 21

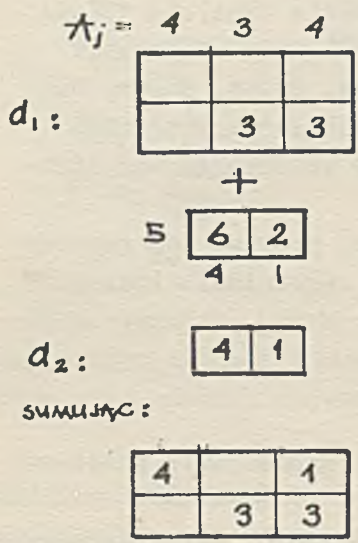
Rozwiązanie problemu jest następujące: (rys. 22)
Straty dla tego rozwiązania

$$P = \sum ui = 4.6 + 1.2 + 3.2 + 3.1 = 35W.$$

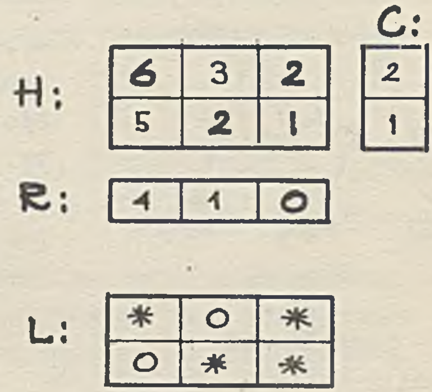
Sprawdzenie optymalności rozwiązania (rys. 23) daje wynik pozytywny – a więc otrzymane rozwiązanie jest optymalne.

Z drugiej strony wiadomo jednak, że w tym układzie moc tracona musi być równa różnicy mocy oddawanej i pobieranej niezależnie od rodzaju sieci redukcyjnej.

Zauważmy pewną szczególną właściwość macierzy kosztów - każde różnice dwóch liczb wziętych z tego samego wiersza są jednakowe we wszystkich kolumnach oraz każde różnice liczb



Rys. 22



Rys. 23

wziętych z tej samej kolumny są identyczne we wszystkich wierszach. Spostrzeżenie to można uogólnić wysnuwając następujące

T w i e r d z e n i e

Mamy dane dwa zbiory liczb $E(s_i)$ i $E(z_k)$ takie, że

$$\sum_i s_i = \sum_k z_k$$

i

$$\max_k z_k \leqslant \min_i s_i$$

oraz zbior $E(p_{ik})$ taki, że

$$\bigwedge_i \; p_{i,k} - p_{i,k+1} = \text{const}$$

i

$$\bigwedge_k \; p_{i,k} - p_{i+1,k} = \text{const}$$

dla dowolnych, ale dopuszczalnych 1. Wtedy każdy zbiór rozwiązań $E(m_{ik})$ minimalizujących funkcjonał

$$T = \sum_{i,k} m_{ik} p_{ik}$$

przy ograniczeniach

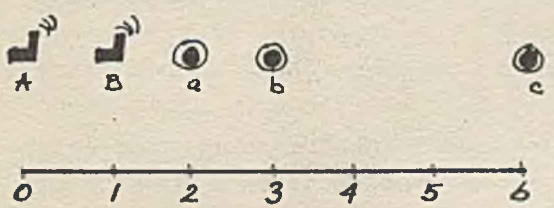
$$\sum_i m_{ik} = z_k$$

$$\sum_k m_{ik} = s_i$$

jest optymalny, to znaczy zapewnia minimum tego funkcjonału. Dowód tego powyższego twierdzenia wynika natychmiast ze sposobu otrzymywania rozwiązania tego problemu.

6. Zakończenie

Macierzowy zapis struktury systemów kompleksowych wydaje się być bardzo przydatny. Umożliwia on bowiem z jednej strony prosty i przejrzysty zapis wszystkich sprzężeń występujących w systemie, a z drugiej wynika z niego możliwość stosowania rozbudowanej dziedziny rachunku macierzowego do projektowania, analizy i syntezy struktur wielkich systemów. Przedstawiona metoda transportowa może również znaleźć zastosowanie do projektowania optymalnych pod pewnym względem struktur systemów kompleksowych.



Rys. 24

Ciekawe twierdzenie umożliwia ograniczenie niepotrzebnych obliczeń w przypadku optymalności wszystkich rozwiązań. Tak na przykład w przypadku poniższej lokalizacji zakładów przemysłowych i osiedli jest rzeczą całkowicie obojętną ile osób, z którego osiedla będzie zatrudnionych w każdym zakładzie przemysłowym. Sumaryczne koszty transportu i ich do pracy (proporcjonalne do osobokilometrów) będą i tak jednakowe.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 25.I.1968 r.

LITERATURA

[1] Problemy sterowania wielkimi systemami PAN Warszawa 1964.

[2] Goddard L.S.: Metody matematyczne w badniach operacyjnych PWN 1966.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАМИРОВАНИЯ К СИНТЕЗЕ СТРУКТУР БОЛЬШИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В этом труде показано некое предложение записи структур больших систем, позволяющее пользоваться чисто математическими методами при синтезе таких структур. После представления одного из способов решения так называемой транспортной проблемы, будущей исключительным случаем линейного программирования, показано ряд примеров больших систем. Представленным методом можно пользоваться по отношению к синтезе оптимальных структур. В конце работы показано один исключительный случай оптимализации а также теорему определяющую условия оптимальности всех решений.

LINEAR PROGRAMMING USING TO.SYNTHESIS OF STRUCTURES OF GREAT SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper, there is given a certain sugestion conceding the matter of taking down structures of great systems. It allows to use the only mathematical method by synthesis of these structures. After showing one of the methods solving the transport problem, which is the particular case of the linear programming, some examples of the great systems are given. The method mentioned above can be used in the synthesis optimum structures of this systems. Next there is given a particular case of optimization and a theorema shoving the optimum condition of all the solutions.