ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968
Seria: AUTOMATYKA z. 9 Nr kol. 216

JERZY WITKOWSKI
Katedra Elektroniki Przemysłowej

ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCENIA FOURIERA DO ANALIZY SYGNAŁU WYJŚCIOWEGO GENERATORA BARDZO MAŁEJ CZĘSTOTLIWOŚCI OPARTEGO NA TECHNICE PRÓBKOWANIA

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis działania i analizę pracy generatora b.m.cz. opartego na technice próbkowania. Korzystając z całkowego przekształcenia Fouriera wyprowadzono wzory na czasowy przebieg sygnału wyjściowego generatora w przypadku zastosowania w układzie ekstrapolatora rzędu zerowego oraz ekstrapolatora rzędu pierwszego; założono przy tym, że sygnał wejściowy jest sinusoidalny. Dla obu przypadków podano wzory określające zawartość harmonicznych w sygnale wyjściowym.

Spis oznaczeń

T - okres przebiegu periodycznego,
T_1, T_2 - czas opóźnienia,
t - czas bieżący,
f - częstotliwość przebiegu periodycznego,
$A(t)$ - sygnał zmienny o dowolnym kształcie,
A - amplituda,
ω - pulsacja,
τ - stała czasowa układu całkującego,
N - liczba impulsów próbkujących przypadających na jeden okres sygnału wyjściowego,
P - liczba okresów sygnału wejściowego,
m - stała,
k - liczba naturalna,
ε - różnica pomiędzy okresem próbkowania i okresem sygnału wejściowego,
h - zawartość harmonicznych w sygnale wyjściowym,
e - podstawa logarytmów naturalnych,
j - jednostka urojona.

indeksy:

we, i - odnoszący się do wejścia układu,
wy, o - odnoszący się do wyjścia układu,
p - odnoszący się do impulsu próbkującego,
e - odnoszący się do wejścia ekstrapolatora,
o - odnoszący się do układu z ekstrapolatorem zerowego rzędu,
1 - odnoszący się do układu z ekstrapolatorem pierwszego rzędu,
s - odnoszący się do sygnału przesuniętego w czasie.

1. Wstęp

Sygnały o bardzo małych częstotliwościach (b.m.cz.), tj. o częstotliwościach mniejszych od 10 c/s są często wykorzystywane do badania stabilności układów regulacji, do zdejmowania charakterystyk częstotliwościowych obiektów a także w innych dziedzinach techniki jak np. do badania rozkładu naprężeń mechanicznych w dużych elementach itp.

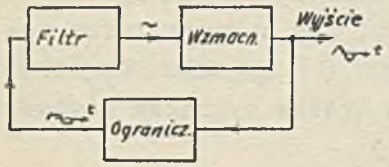
Istnieje wiele rozwiązań generatorów pozwalających na uzyskanie sygnału wyjściowego b.m.cz. o różnym kształcie fali (np. sinusoidalnym, trójkątnym, piłowym itp.). W praktyce znajdują zastosowanie najczęściej przebiegi sinusoidalne b.m.cz. i dlatego w dalszej części zajmiemy się głównie układami generatorów sygnałów sinusoidalnych b.m.cz.

Do generacji sygnałów sinusoidalnych o częstotliwościach akustycznych przeważnie stosowane są generatory RC (z mostkiem Wiena, przesuwnikiem fazowym itd.). Zastosowanie tych układów do generacji przebiegów sinusoidalnych b.m.cz. napotyka na trudności związane z:

a) ograniczoną, wartościami elementów układu sprzężenia zwrotnego, dolną częstotliwością drgań,

b) zjawiskami przejściowymi występującymi przy załączeniu generatora, zmianie częstotliwości i amplitudy drgań; zjawiska te wygasają po kilku okresach napięcia wyjściowego - w przypadku drgań o bardzo dużym okresie jest to dużą wadą układu,

c) uzyskaniem niezniekształconego sygnału wyjściowego o stałej amplitudzie. W konwencjonalnych generatorach RC dla uzyskania niezniekształconego sygnału wyjściowego o stałej amplitudzie stosuje się na ogół jeden z dwóch sposobów. Pierwszy z nich polega na zastosowaniu w generatorze układu automatycznej regulacji wzmocnienia wykorzystującego albo elementy o nieliniowych charakterystykach jak np. termistory, żarówki względnie nieliniową charakterystykę wzmacniacza (1).



Rys. 1. Schemat blokowy generatora z elementem nieliniowym

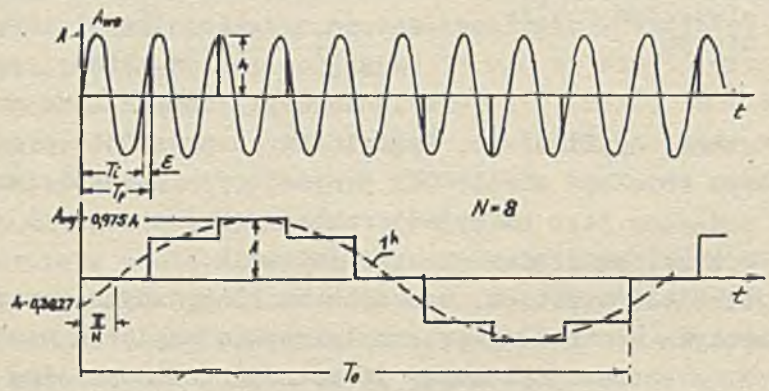
Drugi sposób (2), (3) polega na włączeniu w obwód generatora ogranicznika amplitudy sygnału - rys. 1, który sygnał sinusoidalny zamienia na prostokątny o stałej amplitudzie. Sygnał ten po przejściu przez filtr, (którym może być obwód CR decydujący o częstotliwości drgań) podawany jest na wyjście układu. Oba sposoby w generatorach b.m.cz. są trudne do zrealizowania.

Oprócz generatorów b.m.cz. opartych na klasycznych generatorach RC spotyka się układy przekształcające napięcie trójkątne b.m.cz. - które, posiadając dobre kondensatory można stosunkowo łatwo uzyskać - na napięcie sinusoidalne. Wykorzystują one w tym celu elementy o nieliniowej charakterystyce np. zbudowane z oporników i spolaryzowanych diod względnie bardziej rozbudowane układy ze sprzężeniem zwrotnym (4).

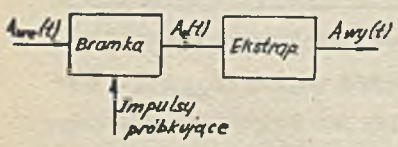
2. Analiza generatora b.m.cz. opartego na technice próbkowania

Do budowy generatorów b.m.cz. można wykorzystać proces próbkowania (5) sygnału okresowego o dowolnym kształcie $A_{we}(t)$. Zasadę działania generatora b.m.cz. opartego na technice próbkowania, w przypadku gdy sygnał wejściowy jest sinusoidalny, pokazano na rys. 2, na rysunku 3 przedstawiono schemat blokowy generatora.

Sygnał $A_{we}(t)$ o częstotliwości f_i doprowadzony jest na wejście bramki, która otwiera się natychmiast pod wpływem krótkiego impulsu próbkującego. Wartość sygnału $A_{we}(t)$ występująca w chwili próbkowania zostaje wprowadzona na wejście ekstrapolatora zatem w momentach próbkowania zachodzi równość $A_{we}(t) = A_e(t)$. Na wyjściu ekstrapolatora uzyskujemy sygnał $A_{wy}(t)$ o mniejszej niż f_i częstotliwości f_o (na rys. 2 - pokazano przebieg $A_{wy}(t)$ w przypadku, gdy w generatorze zastosowano ekstrapolator rzędu zerowego); z sygnału $A_{wy}(t)$ można wydzielić 1 harmoniczną, która będzie sygnałem użytecznym generatora.



Rys. 2. Zasada działania generatora z próbkowaniem



Rys. 3. Schemat blokowy generatora b.m.cz. z próbkowaniem sygnału wejściowego

Z rys. 2 - widać, że przebieg $A_{wy}(t)$ tym bardziej będzie zbliżony do sinusoidy im większe będzie N tj. liczba impulsów próbkujących przypadających na okres T_o.

Na podstawie rys. 2 - można napisać

$$1/f_i + \varepsilon = 1/f_p$$

ale musi być także spełniona równość

$$N \cdot \varepsilon = T_i = 1/f_i,$$

zatem zależność pomiędzy f_i oraz f_p jest następująca:

$$\frac{1}{f_i}\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{f_p} \quad \text{lub} \quad \omega_p = \omega_i \frac{N}{N+1}. \tag{1}$$

Związek pomiędzy f_o i f_p można łatwo uzyskać korzystając z równości

$$NT_p = T_o,$$

zatem

$$f_o = f_p/N \quad \text{lub} \quad \omega_o = \frac{\omega_p}{N}. \tag{2}$$

Wstawiając równanie (1) do (2) otrzymujemy

$$\omega_o = \omega_i \frac{1}{N+1}. \tag{3}$$

Ze wzoru (3) widać, że częstotliwość sygnału $A_{wy}(t)$ generatora zależy od częstotliwości f_i i liczby N (a więc od ε).

Na rys. 2 - okres próbkowania T_p jest o ε większy od okresu sygnału wejściowego T_i; w ogólnym przypadku jeden impuls próbkujący może przypadać na P okresów sygnału wejściowego. Nie zmieni się przy tym kształt i zawartość harmonicznych w sygnale $A_{wy}(t)$ jeśli tylko liczba N będzie taka sama; zwiększy się jedynie okres sygnału wyjściowego T_o, bo z (1) po wprowadzeniu P i uwzględnieniu (2) mamy

$$T_o = (PN + 1)\, T_i. \tag{3'}$$

Ważnym elementem występującym w generatorze (rys. 3) jest ekstrapolator. Jeśli pracę ekstrapolatora opisuje równanie

$$A_{wyo}(t) = A_e(kT_p) \text{ dla } kT_p \leqslant t < (k+1)T_p, \tag{4}$$

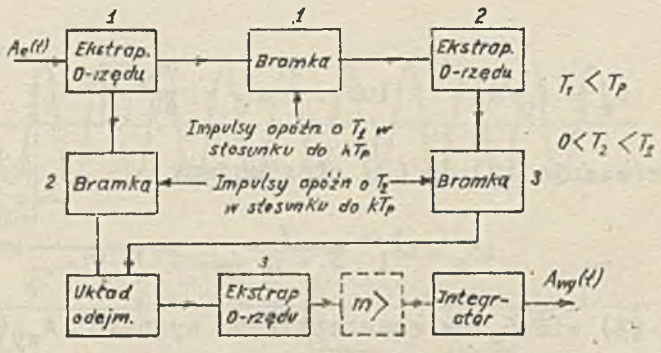
gdzie - k - liczba naturalna,

to nazywamy go ekstrapolatorem rzędu zerowego, natomiast ekstrapolator rzędu pierwszego opisany jest równaniem:

$$A_{wy1}(t) = \frac{1}{T_p}\left[A_e(kT_p + T_p) - A_e(kT_p)\right](t-kT_p) + A_e(kT_p) \qquad (5)$$

dla $kT_p \leq t < (k+1)T_p$.

Schemat blokowy ekstrapolatora rzędu pierwszego zbudowanego na ekstrapolatorach rzędu zerowego podany jest na rys. 4.



Rys. 4. Schemat blokowy ekstrapolatora pierwszego rzędu

Jeśli w układzie generatora (rys. 3) zastosujemy ekstrapolator rzędu pierwszego, to sygnał wyjściowy $A_{wy}(t)$ będzie bardziej zbliżony do sinusoidy, a zatem zawartość wyższych harmonicznych w sygnale wyjściowym będzie mniejsza.

Celem analizy, która zostanie przeprowadzona jest określenie zawartości harmonicznych w sygnale wyjściowym generatora w przypadku gdy zastosowano w nim

a) ekstrapolator rzędu zerowego,

b) ekstrapolator rzędu pierwszego.

Rozważmy przypadek ogólny generatora b.m.cz. z rzeczywistym ekstrapolatorem rzędu pierwszego tj. takim, w którym występuje rzeczywisty, a nie idealny układ całkujący (rys. 4). W tym

przypadku w czasie $kT_p \leq t < (k+1)T_p$ sygnał wyjściowy generatora można wyrazić równaniem

$$A_{wy}(t) = m\left[A_e(kT_p+T_p) - A_e(kT_p)\right]\left[1-\exp\left(-\frac{t-kT_p}{\tau}\right)\right] + A_e(kT_p), \tag{6}$$

gdzie:

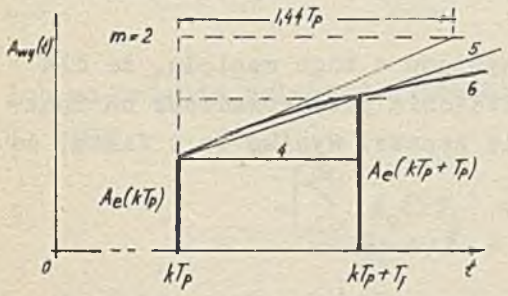
τ - stała czasowa układu całkującego,

m - wielkość stała.

Wielkość m wprowadzono do równania (6) dlatego, aby dla

$$t = kT_p + T_p \quad \text{wartość sygnału } A_{wy}(t) = A_e(kT_p+T_p) \tag{7}$$

tj. aby sygnał wyjściowy osiągał na krańcach przedziałów o czasie trwania T_p wartości odpowiadające próbkowanemu sygnałowi wejściowemu - rys. 5 (na rys. 5 - przedstawiono przebieg wyrażony równaniem (6) dla przypadku gdy m = 2). Wprowadzenie wielkości m do równania (6) oznacza, że w praktycznym układzie ekstrapolatora (rys. 4) zastosowano wzmacniacz o wzmocnieniu m (narysowano go linią przerywaną).



Rys. 5. Przebiegi na wyjściu generatora b.m.cz. przy różnych rodzajach ekstrapolatorów zastosowanych w układzie. Liczby oznaczają numery równań podanych w tekście i opisujących pracę ekstrapolatorów

Aby spełniony był związek (7) musi zachodzić, jak łatwo stwierdzić, następująca zależność pomiędzy stałą czasową τ układu całkującego a wzmocnieniem m wzmacniacza

$$\tau = \frac{T_p}{\ln \frac{m}{m-1}}. \tag{8}$$

Równanie (6) można sprowadzić do interesujących nas dwóch przypadków, gdy współczynnik m przybiera szczególne wartości. A mianowicie:

a) jeśli m = 1, wówczas zgodnie z (8) $\tau = 0$, a otrzymane z (6) równanie przedstawia sygnał wyjściowy generatora z ekstrapolatorem rzędu zerowego (z wyprzedzeniem o okres próbkowania);

b) jeśli $m = \infty$, wówczas zgodnie z (8) $\tau = mT_p \to \infty$, a otrzymane z (6) równanie daje analityczny zapis sygnału wyjściowego generatora z ekstrapolatorem pierwszego rzędu (idealnego).

Aby znaleźć widmo sygnału $A_{wy}(t)$ w przypadku gdy sygnał wejściowy jest sinusoidalny, a w czasie $kT_p \leq t < kT_p + T_p$ prawdziwa jest zależność (6), posłużymy się przekształceniem Fouriera.

Przekształcenie Fouriera wybrano z tego względu, że dla przebiegów sinusoidalnych obliczenia przeprowadzone na funkcjach widmowych są szczególnie proste. Wynika to z faktu, że (6)

$$F(e^{j\omega' t}) = \delta(\omega - \omega')$$

zatem dla

$$A(t) = A \sin\omega' t = \frac{A}{2j}\left(e^{j\omega' t} - e^{-j\omega' t}\right)$$

jest

$$F(A \sin\omega' t) = \frac{A}{2j}\left[\delta(\omega - \omega') - \delta(\omega + \omega')\right]. \tag{9}$$

Sygnał $A_{wy}(t)$ dla dowolnego momentu czasu można przedstawić w postaci sumy:

$$A_{wy}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{m\left[A_e(kT_p + T_p) - A_e(kT_p)\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{t - kT_p}{\tau}\right)\right] + A_e(kT_p)\right\} \cdot$$

$$\cdot\, n(t - kT_p), \tag{10}$$

gdzie:

funkcja $n(t-kT_p) = 1(t-kT_p) - 1(t-kT_p-T_p)$.

Dokonując przekształcenia Fouriera na funkcji (10) mamy

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_{wy}(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\frac{m}{2\pi}\left[\frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega}+\frac{e^{-(j\omega+\frac{1}{\tau})T_p}-1}{j\omega+1/\tau}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[A_e(kT_p+T_p)-A_e(kT_p)\right]e^{-j\omega kT_p}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p)e^{-j\omega kT_p} \tag{11}$$

Ale

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p+T_p)e^{-j\omega kT_p}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p+T_p)\,e^{-j\omega(kT_p+T_p)}\,e^{j\omega T_p}=$$

lub po zmianie zmiennej sumowania i zastąpieniu jej znów przez k mamy

$$=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p)\,e^{-j\omega kT_p}\right]e^{j\omega T_p}.$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (11) otrzymamy

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{m\left[\frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega}+\frac{e^{-(j\omega+\frac{1}{\tau})T_p}-1}{j\omega+1/\tau}\right](e^{j\omega T_p}-1)+\frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega}\right\}\cdot$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p)e^{-j\omega kT_p}. \tag{12}$$

Wyrażenie $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p)\,e^{-j\omega kT_p}$ odpowiada - jak łatwo sprawdzić - funkcji czasu o następującej postaci

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_e(kT_p)\,\delta(t-kT_p). \tag{13}$$

Funkcję widmową sumy (13) można przedstawić jako (7)

$$\frac{1}{T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_p}\right), \tag{14}$$

przy czym $F_{we}(\omega) = F\left[A_{we}(t)\right] \triangleq A_{we}(t) = A \sin \omega_i t$.

Wstawiając równanie (14) do (12) otrzymamy wyrażenie dla funkcji widmowej sygnału wyrażonego przez związek (10).

Wyrażenie to upraszcza się znacznie dla wypadków szczególnych o których wspomniano wyżej.

Dla przypadku

a) gdy $m = 1$, $\tau = 0$ mamy:

$$F_{os}(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega} e^{j\omega T_p} \cdot \frac{1}{T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p). \tag{15}$$

Czynnik $e^{j\omega T_p}$ występujący w równaniu (15) świadczy o przesunięciu funkcji czasowej odpowiadającej wyrażeniu

$$F_o(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p) \tag{16}$$

o czas T_p w lewo. Równanie (16) przedstawia więc funkcję widmową sygnału wyjściowego generatora z ekstrapolatorem opisanym równaniem (4).

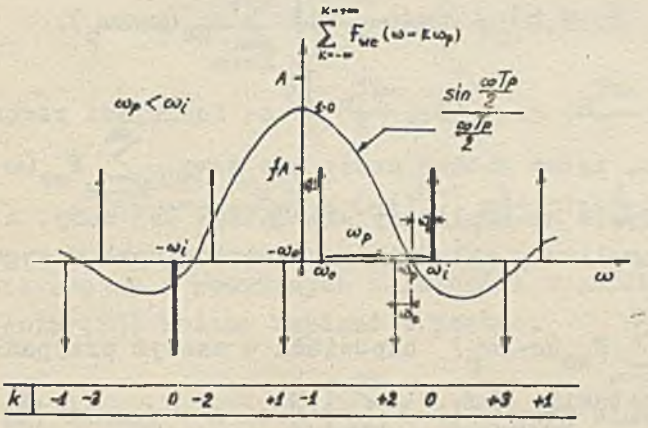
b) gdy $m = \infty$, $\tau = mT_p$ mamy

$$F_1(\omega) = (1-e^{-j\omega T_p})\,(e^{j\omega T_p - 1})\,\frac{1}{(j\omega T_p)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p). \tag{17}$$

Wyprowadzenie wzoru (17) podano w dodatku A.

Ze wzorów (16) i (17) widać, że w obu przypadkach funkcję widmową sygnału $A_{wy}(t)$ otrzymujemy przez przemnożenie sumy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p)$ przez wyrażenie, które jest funkcją pulsacji ω.

Wynika stąd, że wystąpienie tej sumy w funkcji widmowej związane jest z procesem próbkowania, natomiast postać wyrażenia stojącego przed sumą zależy od rodzaju ekstrapolacji. Dla rozpatrywanego generatora suma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega-k\omega_p)$ przedstawia przesunięte o $k\omega_p$ funkcje widmowe sygnału wejściowego $A_{we}(t)=$ $= A \sin \omega_i t$, czyli zgodnie z (9) wykresem przedstawiającym tą sumę będzie nieskończenie dużo impulsów Diraca o powierzchni A/2 rys. 6.



Rys. 6. Funkcje widmowe dla generatora z ekstrapolatorem zerowego rzędu

Z rys. 6 widać, że w wyniku próbkowania sygnału sinusoidalnego o pulsacji ω_i powstaje nieskończenie wiele par impulsów Diraca odpowiadających przebiegom sinusoidalnym. M.in. jedna z nich powstaje przy $\omega_o = \pm|\omega_i - \omega_p|$. Jeśli $\omega_i \approx \omega_p$, to różnica $\omega_i - \omega_p \approx 0$, a zatem $\omega_o \approx 0$, czyli uzyskujemy składową sygnału $A_{wy}(t)$ o bardzo małej częstotliwości. Odpowiedni układ ekstrapolatora ma zapewnić wyeksponowanie sygnału o m.cz. a stłumienie sygnałów o innych częstotliwościach, traktowanych jako niepożądane, wyższe harmoniczne sygnału wyjściowego generatora.

Równanie (16) możemy przepisać w postaci

$$F_0(\omega) = \left[Sa(\frac{\omega T_p}{2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p)\right] e^{\frac{-j\omega T_p}{2}} \tag{18}$$

przy czym $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$,

zaś równanie (17) przepiszemy jako

$$F_1(\omega) = \left[Sa(\frac{\omega T_p}{2})\right]^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p). \tag{19}$$

Funkcje $Sa(\frac{\omega T_p}{2})$ oraz $\left[Sa(\frac{\omega T_p}{2})\right]^2$ są funkcjami rzeczywistymi i parzystymi, zatem mnożąc przez nie sumy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p)$ wpływamy jedynie na amplitudy składników tej sumy, a więc w efekcie na amplitudy składników sinusoidalnych w sygnale $A_{wy}(t)$ generatora.

Sumie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p)$ odpowiada w naszym przypadku funkcja czasowa w postaci

$$A \sin\omega_0 t + A \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin(Nk+1)\omega_0 t - \sin(Nk-1)\omega_0 t\right]. \tag{20}$$

Wyprowadzenie funkcji czasowej (20) podano w dodatku B. Aby znaleźć rozkład widmowy sygnału $A_{wy}(t)$ generatora z ekstrapolatorem zerowego rzędu powróćmy do równania (18). Zgodnie z twierdzeniem o przesunięciu dla przekształcenia Fouriera równaniu (18) odpowiada funkcja czasowa, która jest przesuniętą o czas $\frac{T_p}{2}$ transformatą odwrotną wyrażenia

$$Sa(\frac{\omega T_p}{2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p). \tag{21}$$

Znajdziemy ją w oparciu o zależność (20):

$$A\,Sa\left(\frac{\omega_o T_p}{2}\right)\sin\omega_o t + A\sum_{k=1}^{\infty} Sa\left[\frac{(Nk+1)\omega_o T_p}{2}\right]\sin(Nk+1)\omega_o t -$$

$$- A\sum_{k-1}^{\infty} Sa\left[\frac{(Nk-1)\omega_o T_p}{2}\right]\sin(Nk-1)\omega_o t.$$

Wyrażenie to można przedstawić w prostszej postaci, gdyż jak wynika z (2) $\omega_o T_p/2 = \frac{\pi}{N}$, a więc

$$Sa\,\frac{(Nk+1)\omega_o T_p}{2} = (-1)^k\,\frac{1}{Nk+1}\,Sa\left(\frac{\pi}{N}\right),$$

oraz

$$Sa\,\frac{(Nk-1)\omega_o T_p}{2} = (-1)^{k-1}\,\frac{1}{Nk-1}\,Sa\left(\frac{\pi}{N}\right).$$

Korzystając z powyższych zależności transformatę odwrotną wyrażenia (21) możemy napisać w postaci

$$A\,Sa\left(\frac{\pi}{N}\right)\sin\omega_o t + A\,Sa\left(\frac{\pi}{N}\right)\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{Nk+1}\sin(Nk+1)\omega_o t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{Nk-1}\sin(Nk-1)\omega_o t\right]\right\}. \qquad (22)$$

Szukaną funkcję $A_{wyo}(t)$ otrzymujemy podstawiając do (22) w miejsce t różnicy $(t - \frac{T_p}{2})$. Po podstawieniu i wykonaniu prostych przekształceń (korzystając z (2) otrzymamy ostatecznie:

$$A_{wyo}(t) = A\,Sa\left(\frac{\pi}{N}\right)\left\{\sin\left(\omega_o t - \frac{\pi}{N}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{Nk+1}\sin\left[(Nk+1)\omega_o t - \frac{\pi}{N}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{Nk-1}\sin\left[(Nk-1)\omega_o t + \frac{\pi}{N}\right]\right\}. \qquad (23)$$

Postępując podobnie z wyrażeniem (19) możemy znaleźć przebieg czasowy sygnału wyjściowego generatora z ekstrapolatorem pierwszego rzędu w postaci:

$$A_{wy1}(t) = A\left[Sa(\tfrac{\pi}{N})\right]^2\left\{\sin\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(Nk+1)^2}\sin(Nk+1)\omega_0 t - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(Nk-1)^2}\sin(Nk-1)\omega_0 t.\right\}. \qquad (24)$$

Ze wzorów (23) i (24) wynika, że zastosowanie w generatorze ekstrapolatora pierwszego rzędu daje lepszy rezultat, gdyż amplitudy wyższych harmonicznych zawartych w sygnale wyjściowym maleją z kwadratem wyrażeń (Nk+1) i (Nk-1). Otrzymane wyniki pozwalają sądzić, że zawartość harmonicznych w sygnale $A_{wy}(t)$ będzie mała jeśli liczba N będzie duża.

Rzeczywiście, korzystając z zależności (23) i (24) można obliczyć zawartość harmonicznych w sygnale wyjściowym generatora dla obu przypadków.

Dla generatora z ekstrapolatorem rzędu zerowego mamy zakładając, że $kN \gg 1$

$$h_0 \approx \frac{\sqrt{2}}{N}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} \cdot 100 = \frac{\pi}{N\sqrt{3}} \cdot 100 = \frac{181,4}{N}\ [\%] \qquad (25)$$

zaś dla generatora z ekstrapolatorem rzędu pierwszego

$$h_1 \approx \frac{\sqrt{2}}{N^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}} \cdot 100 = \frac{\pi^2}{N^2\sqrt{45}} \cdot 100 = \frac{147,1}{N^2}[\%]. \qquad (26)$$

Jeśli np. N=16, wówczas $h_{0,16} = 11,34\%$ zaś $h_{1,16} = 0,575\%$ - widać stąd, że zastosowanie w generatorze b.m.cz. ekstrapolatora rzędu pierwszego pozwala na uzyskanie sygnału wyjściowego o znacznie mniejszej zawartości harmonicznych.

3. Wnioski

Generator drgań sinusoidalnych b.m.cz. działający w oparciu o technikę próbkowania ma kilka ważnych zalet w porównaniu z konwencjonalnymi generatorami RC. Zaliczyć do nich można m.in. łatwość uzyskania kilku napięć równocześnie o różnych przesunięciach fazowych i brak zjawisk przejściowych, przy zmianie częstotliwości drgań itp. Zalety te wynikają wprost z zasady działania generatora.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w przypadku zastosowania w układzie generatora b.m.cz. ekstrapolatora rzędu pierwszego zawartość harmonicznych w sygnale wyjściowym jest stosunkowo mała. Wartość tą można jeszcze zmniejszyć, gdyż przy dużym N częstotliwość najniższej harmonicznej powstającej w wyniku procesu próbkowania wynosi $(N-1)f_0$, co pozwala na zastosowanie filtrów o częstotliwości granicznej znacznie większej niż f_0.

LITERATURA

[1] Seymour R.A., Smith J.S.: Electronic Engng. 1955 str. 380.
[2] Young J.F.: Electronic Engng. 1959 str. 218.
[3] Good E.F.: Electronic Engng. 1957 str. 164, 210.
[4] Klein G., den Hertog J.M.: Electronic Engng. 1959 str.320.
[5] Fulford J.F.: Proc. IEE 1964 str. 1993.
[6] Doetsch G.: "Praktyka przekształcenia Laplace'a" PWN W-wa 1964 str. 21
[7] Kuzin L.T.: "Analiza i synteza dyskretnych układów sterowania" WNT W-wa 1965 str. 56.

Dodatek A

Wyprowadzenie zależności (17).

Jeśli $m \to \infty$ oraz $\tau = mT_p$, wówczas wartość wyrażenia

$$\frac{\dfrac{1-e^{-j\omega T_p}}{j\omega} - \dfrac{1-e^{-j\omega T_p}\, e^{-\frac{1}{m}}}{j\omega + \frac{1}{mT_p}}}{\frac{1}{m}} = \tag{27}$$

występującego we wzorze (12) można wyliczyć stosując regułę L'Hospitala, zatem:

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{T_p}(1-e^{-j\omega T_p}\, e^{-\frac{1}{m}}) - (j\omega + \frac{1}{mT_p}\, e^{-j\omega T_p}\, e^{-\frac{1}{m}}}{(j\omega + \frac{1}{mT_p})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega T_p} - j\omega T_p\, e^{-j\omega T_p}}{(j\omega)^2\, T_p}. \tag{28}$$

Wstawiając wyrażenie (28) w miejsce (27) we wzorze (12) oraz korzystając z zależności (14) uzyskujemy po prostych przekształceniach wzór (17).

Dodatek B

Wyprowadzenie zależności (20).

Zgodnie z (9) mamy (gdy $A_{we}(t) = A \sin\omega_i t$):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p) = \frac{A}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega-\omega_i-k\omega_p) - \delta(\omega+\omega_i-k\omega_p)\right]. \tag{29}$$

Wstawiając do (29) równości (2) oraz (3) i rozbijając sumę na trzy składniki otrzymujemy:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{we}(\omega - k\omega_p) = \frac{A}{2j}\left\{\delta\left[\omega-(N+1)\omega_o\right] - \delta\left[\omega+(N+1)\omega_o\right]\right\} +$$

$$+ \frac{A}{2j}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\delta\left[\omega-(Nk+N+1)\omega_o\right] - \delta\left[\omega+(Nk+N+1)\omega_o\right]\right\} -$$

$$- \frac{A}{2j}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\delta\left[\omega-(Nk-N-1)\omega_o\right] - \delta\left[\omega+(Nk-N-1)\omega_o\right]\right\}.$$

Poszczególne składniki tego wyrażenia stanowią funkcje widmowe sinusoid. Dokonując na powyższym wyrażeniu odwrotnego przekształcenia Fouriera otrzymujemy

$$A \sin\omega_o t + A\sum_{k=o}^{\infty} \sin\left[N(k+1)+1\right]\omega_o t - A\sum_{k=2}^{\infty} \sin\left[N(k-1)-1\right]\omega_o t. \tag{30}$$

Zmieniając w obu sumach wyrażenia (30) parametr sumowania i pisząc na powrót k otrzymujemy zależność (20).

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 18.I.1968 r.

АНАЛИЗ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ГЕНЕРАТОРА СВЕРХ МАЛОЙ ЧАСТОТЫ ОСНОВАННОГО НА ТЕХНИКЕ ВЫБОРОЧНОГО КВАНТОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Р е з ю м е

В статье представлено описание действия и анализ генератора сверх низкой частоты, основанного на технике выборочного квантования. Используя интегральное преобразование Фурье выведены формулы для выходного сигнала генератора в случае использования в системе экстраполяторов нульевого и первого порядков; при этом сделано допущение, что входной сигнал является синусоидальным. Для обоих случаев представлены формулы определяющие содержание гармонических составляющих в выходном сигнале.

APPLICATION OF FOURIER INTEGRALS METHOD TO THE ANALYSIS OF THE OUTPUT SIGNAL OF v.l.f. GENERATOR BASED ON THE SAMPLING TECHNIQUE

S u m m a r y

This article describes the performance and analysis of the output signal of v.l.f. generator based on the sampling technique. The analysis was developed with the application of Fourier integrals method and the sampling theorem. The expressions for harmonic content were obtained for the generator with two types of interpolators and with sine input signal.