

ENERGETYKA z. 20



STANISŁAW JERZY GDULA

P. 3349 | 65

PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH PRYZMATYCZNYCH I ŻEBRACH

P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 143 – GLIWICE 1965

SPIS TREŚCI

	str.
PRZEDMOWA	3
1. WSTĘP	4
2. OGÓLNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I METODY ROZWIĄZYWANIA	6
2. 1. Równanie Fouriera-Kirchhoffa	7
2. 2. Warunki brzegowe i warunek początkowy	8
2. 3. Wielkości poszukiwane (wynikowe)	11
2. 4. Wielkości zredukowane i równania kryterialne	12
2. 5. Transformacja całkowa w obszarze skończonym	18
2. 5. 1. Obszar płaski — przekrój poprzeczny żebra płaskiego	24
2. 5. 2. Obszar kołowy — przekrój poprzeczny okrągłego pręta	26
2. 5. 3. Obszar płaski — płaszczyzna żebra prostego	27
3. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH PRY- ZMATYCZNYCH I ŻEBRACH	29
3. 1. Pręt pryzmatyczny o skończonej długości	29
3. 2. Nieskończone długie pręty pryzmatyczne	31
3. 3. Szczególne wypadki pręta	34
3. 3. 1. Pręt okrągły	34
3. 3. 2. Płaskie żebro proste	34
3. 4. Okrągłe żebro płaskie	34
3. 5. Wpływ nierównomiernego rozkładu temperatury u nasady żebra (pręta)	41
3. 6. Krytyczna liczba Biota	50
3. 7. Porównanie z teorią klasyczną	51
3. 7. 1. Pręt pryzmatyczny	51
3. 7. 2. Okrągłe żebro płaskie	54
3. 7. 3. Wnioski	55
3. 8. Ustalone przewodzenie ciepła w pryzmatycznych prętach z wewnętrznymi źródłami ciepła	57
4. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH PRY- ZMATYCZNYCH I ŻEBRACH	63
4. 1. Pręt pryzmatyczny i płaskie żebro proste, o skończonej długości	65
4. 2. Pręt pryzmatyczny i płaskie żebro proste o nieskończonej długości	73
4. 3. Wzory przybliżone dla małych liczb Biota	80
5. NIEKTÓRE ZAGADNIENIA NUMERYCZNE	81
LITERATURA	86
STRESZCZENIE W JĘZYKU POLSKIM	88
STRESZCZENIE W JĘZYKU ROSYJSKIM	89
STRESZCZENIE W JĘZYKU ANGIELSKIM	90

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 143



STANISŁAW JERZY GDULA

P. 3349 / 65

**PRZEWODZENIE CIEPŁA
W PRĘTACH PRYZMATYCZNYCH I ŻEBRACH**

PRACA HABILITACYJNA Nr 46

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 21. VI. 1965 r.

GLIWICE 1965

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Petela

SEKRETARZ REDAKCJI

Tadeusz Matula

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

P 3m 124/66

Nakł. 100+170 egz. Ark. wyd. 3,72 Ark druk. 5,75 Papier offsetowy kl. V. 70x100 70 g
Oddano do druku 7. 7. 1965 Podpis. do druku 22. 8. 1965 Druk ukończ. we wrześniu 1965
Zam. 1186 13. 7. 1965 F-18 Cena zł 4.70

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PRZEDMOWA

Teoria przewodzenia ciepła w ciałach stałych jest jednym z najwcześniejszych powstałych działów termodynamiki. Wprawdzie właściwe swe miejsce w termodynamice znalazła ona dopiero w latach trzydziestych bieżącego stulecia, po ostatecznym skryształizowaniu się ogólnej teorii procesów nieodwracalnych (tzw. IV zasady termodynamiki), jednak podstawowe jej prawa zostały sformułowane już w pierwszej połowie XIX w., a więc wcześniej niż fundamentalne I i II zasady termodynamiki. W tym okresie datuje się też rozwiązanie pierwszych konkretnych problemów z tej dziedziny.

Mimo swego niemłodego wieku teoria przewodzenia ciepła jest dziedziną stale rozwijającą się. Z jednej strony burzliwy rozwój techniki nasuwa stale nowe problemy wymagające rozwiązania, z drugiej strony matematyka dostarcza coraz to nowych metod, rozszerzających klasę zagadnień dających się rozwiązać analitycznie.

W wypadku, gdy metody analityczne zawodzą stosowane są z powodzeniem przybliżone (numeryczne i analogowe) metody rozwiązywania równań różniczkowych przewodzenia ciepła. Metody numeryczne weszły w stadium intensywnego rozwoju dopiero w ostatnich latach, gdy prymitywne narzędzia liczenia ustąpiły miejsca szybkim i sprawnym elektronicznym maszynom cyfrowym. Rozwój elektroniki wpłynął również na wzrost zainteresowania metodami analogowymi.

Wbrew pozorom rozwój metod przybliżonych nie zahamował badań analitycznych, zarówno w poszukiwaniu nowych rozwiązań analitycznych różnych problemów, jak i w poszukiwaniu nowych metod matematycznych. Większy trud włożony w rozwiązanie analityczne w stosunku do przybliżonego (numerycznego lub analogowego) zawsze się opłaca, gdyż rozwiązanie to ma większą wartość.

Nowym narzędziem matematycznym, sformułowanym przed kilkunastoma laty i rozwiniętym w ostatnich latach są skończone transformacje całkowe (transformacje całkowe w obszarze

skończonym). Podobnie jak transformacje Laplace'a metoda ta umożliwia uzyskanie na innej (niekiedy wygodniejszej) drodze rozwiązań dających się wyprowadzić klasycznym sposobem rozdzielania zmiennych, w wielu jednak wypadkach otwiera nowe możliwości.

W niniejszej pracy podano analityczne rozwiązania zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w pryzmatycznych prętach i żebrach. Posłużono się przy tym głównie metodą skończonych transformacji całkowych. Maszynę cyfrową wykorzystano jedynie do tablicowania funkcji uzyskanych na drodze analitycznej.

Panu prof. dr inż. Stanisławowi Ochęduszcze, który zawsze chętnie służył mi swą wiedzą i doświadczeniem oraz okazał wiele życzliwości i zainteresowania przy wykonywaniu niniejszej pracy, składam tą drogą gorące słowa podziękowania. Atmosfera naukowa gliwickiego środowiska termodynamicznego, którego jest założycielem, odciśnęła na pracy tej swe wyraźne piętno.

Kierownictwu i pracownikom Ośrodka Maszyn Matematycznych przy Biurze Projektów Syntezy Chemicznej w Gliwicach, a w szczególności pp. mgr inż. Juliuszowi Kardaszowi i mgr Franciszkowi Kernowi serdecznie dziękuję za umożliwienie mi wykonania obliczeń na maszynie cyfrowej oraz za radę i pomoc przy opracowaniu programów obliczeń.

1. WSTĘP

Do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła w utwierdzonych prętach i żebrach stosuje się powszechnie przybliżoną teorię, opartą na założeniu wyrównanej temperatury w przekroju poprzecznym pręta lub żebra.

Brak ścisłych rozwiązań, choćby dla niektórych typów prętów i żeber, uniemożliwia prawidłową ocenę błędu i zakresu stosowania teorii przybliżonej. Można tylko jakościowo stwierdzić, że założenie wyrównanej temperatury w przekroju poprzecznym spełnia się tym lepiej, im mniejsza jest liczba Biota obliczona przy użyciu rozmiaru charakterystycznego przekroju poprzecznego, tzn, im pręt lub żebro są cieńsze, wykonane z materiału lepiej przewodzą-

cego ciepło i im mniejszy jest współczynnik wnikania ciepła na powierzchni pręta (żebra).

Zaletą metody przybliżonej jest możliwość rozwiązywania zagadnień dla dowolnych kształtów przekrojów poprzecznych prętów, a także dla prętów i żeber o zmiennym przekroju. Natomiast argument, że metoda ta doprowadza do prostszych wynikowych wzorów nie wydaje się przekonywający przy obecnym stanie techniki obliczeniowej. Dla niektórych wypadków zresztą, wzory uzyskane metodą przybliżoną są na tyle złożone, że nie nadają się do bezpośredniego wykorzystania przy pomocy klasycznych metod liczenia.

W pracy rozwiązano analitycznie zagadnienia ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w prętach przyrównanych i żebrach. Dla zagadnień ustalonych rozpatrzono również działanie wewnętrznych źródeł ciepła. Wyniki doprowadzono do efektywnej końcowej postaci dla takich wypadków, jak okrągły pręt utwierdzony, płaskie żebro proste, płaskie żebro okrągłe. Zastosowana metoda rozwiązywania pozwala jednak na rozszerzenie uzyskanych wyników ogólnych na szerszą klasę zagadnień.

Praca jest rozwiązaniem kilku, w zasadzie niezależnych zagadnień. Zagadnienia te mają jednak, z punktu widzenia fizycznego i matematycznego, wiele elementów wspólnych. Te wspólne elementy wyłożono w rozdziale 2 pracy. Rozdziały 3 i 4 są poświęcone kolejno rozwiązaniu zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w prętach i żebrach. W rozdziale 5 omówiono niektóre problemy numeryczne, związane z doprowadzeniem uzyskanych wyników do postaci liczbowej.

Istniejące rozwiązania omawianych zagadnień, oparte na założeniu wyrównanej temperatury w przekroju poprzecznym, są omawiane równoległe z rozwiązaniami uzyskanymi przez autora (są one ich granicznym przypadkiem, przy $Bi \rightarrow 0$).

W pracy nie wprowadzono w zasadzie nowych wielkości i pojęć. Niektórym tylko wielkościom nadano sens wielkości zredukowanych (kryteriów podobieństwa), choć w gruncie rzeczy w tym sensie, może tylko niedostatecznie podkreślają, były dotychczas stosowane.

Podane w pracy rozwiązania są nowymi, bądź też uściślonymi rozwiązaniami znanych zagadnień. Stąd też nie wydaje się celowe omawianie ich zastosowań. Zastosowała teorii przewodzenia ciepła w prętach i żebrach do obliczeń

przepływu ciepła przez powierzchnie ożebrowane, do pomiaru temperatury pewnymi typami czujników termometrycznych są szeroko omawiane w literaturze.

2. OGÓLNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I METODY ROZWIĄZYWANIA

Pod nazwą żeber rozumie się odpowiednio ukształtowane elementy powierzchni wymieniającej ciepło z płynem, mające na celu intensyfikację wymiany ciepła. Istnieje duża różnorodność kształtów żeber, najczęściej jednak stosuje się żebrą płaskie w kształcie płytek o stałej grubości, umocowanych prostopadle do powierzchni. Ze względu na kształt powierzchni, do której jest przytwierdzone zebro, żebra podzielimy na proste i okrągłe. Żebrem prostym nazywamy zebro umocowane na powierzchni płaskiej, natomiast żebrem okrągłym zebro umocowane na powierzchni walcowej i o zewnętrznym obrysie będącym kołem (na powierzchni walcowej może się niekiedy inne żebra, których zewnętrzny obrys jest kwadratem).

Szerszym pojęciem od żeber są utwierdzone pręty wystające. Charakterystyczne dla prętów jest utrzymywanie stałej temperatury na jednym z jego końców i konwekcyjna wymiana ciepła z płynem o innej temperaturze na pozostałej powierzchni. Przewodzenie ciepła w pręcie, będące w wypadku żebra efektem zamierzonym, w niektórych wypadkach prętów jest zjawiskiem niepożądanym, niemniej jednak wymagającym uwzględnienia. Przykładem może być tulejka termometryczna, w przypadku której przewodzenie ciepła jest źródłem błędu pomiaru temperatury. Pręt przyzmatyczny jest szczególnym przypadkiem pręta, charakteryzującym się stałością przekroju poprzecznego.

Z punktu widzenia powyższej klasyfikacji płaskie zebro proste jest prętem przyzmatycznym o przekroju będącym wydłużonym prostokątem.

2.1. Równanie Fouriera-Kirchhoffa

W rozważaniach naszych przyjmiemy, że pręt (żebro) są wykonane z jednorodnego, izotropowego materiału, dla którego w rozpatrywanym zakresie temperatur współczynnik przewodzenia ciepła λ gęstość ρ i ciepło właściwe c można traktować jako niezienne. Upoważnia to do napisania równania Fouriera - Kirchhoffa w postaci

$$c \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 \psi + \dot{q}_v, \quad (2.1)$$

gdzie ψ - temperatura pręta, τ - czas.

Równanie to uwzględnia obecność w rozpatrywanym ciele stałym równomiernie rozłożonych wewnętrznych źródeł ciepła o objętościowym natężeniu \dot{q}_v . Równanie (2.1) stosuje się zarówno do nieustalonego jak i ustalonego przewodzenia ciepła. W

tym drugim wypadku $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$.

rostac laplasjanu ∇^2 zależy od przyjętego układu współrzędnych, dostosowanego do geometrii badanego układu. W wypadku prętów pryzmatycznych i żeber płaskich, trójwymiarowy laplasjan da się przedstawić w postaci sumy dwóch laplasjanów dwu-i jednowymiarowych.

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \nabla_z^2. \quad (2.2)$$

Operator ∇_z^2 działa w płaszczyźnie żebra, lub wzdłuż osi pręta pryzmatycznego, natomiast operator ∇_r^2 w płaszczyźnie prostopadłej. W szczególnych wypadkach oba operatory jednocześnie mogą być jednowymiarowe.

2.1.1. Pręt pryzmatyczny

Operator ∇_z^2 dla pręta pryzmatycznego ma postać

$$\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.3)$$

natomiast postać laplasjanu ∇_r^2 (w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta) zależy od kształtu przekroju pręta. W dalszych częściach pracy będą przeprowadzone ogólne rozważania, słuszne dla dowolnego kształtu przekroju pręta. Uzyskane wyniki zostaną skonkretyzowane dla dwóch wypadków:

a) okrągły pręt, przy symetrii osiowej pola temperatur

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.4)$$

b) płaskie żebro proste, o symetrii wzdłużnej pola temperatur

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

2.1.2. Płaskie żebro okrągłe

Jeżeli pole temperatur w zębrze jest osiowo symetryczne, to w płaszczyźnie żebra

$$\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.6)$$

natomiast wzdłuż osi x prostopadłej do płaszczyzny żebra

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.7)$$

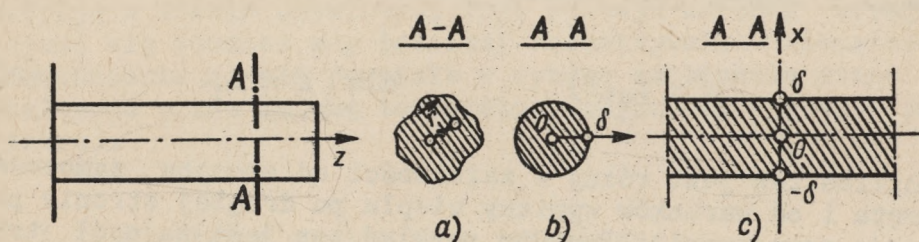
2.2. Warunki brzegowe i warunek początkowy

Równanie różniczkowe (2.1) uzupełniają warunki brzegowe, a dla wypadku nieustalonego przewodzenia ciepła również i warunek początkowy. Zespół tych równań jednoznacznie opisuje zagadnienie i pozwala na wyznaczenie poszukiwanego rozkładu temperatur. Warunki brzegowe na powierzchniach styku żebra lub pręta z omywającym go płynem wynikają z za-

chodzącej tam konwekcyjnej wymiany ciepła. Przyjmujemy do rozważań przypadki, dla których współczynnik wnikania ciepła można uważać za stały i będziemy co najwyżej uwzględniać różne współczynniki wnikania ciepła na powierzchni bocznej α i na powierzchni czołowej α' . I tak dla przekroju poprzecznego pryzmatycznego pręta, tzn. dla współrzędnych wchodzących w skład laplasjanu ∇_r^2 , warunek brzegowy ma ogólną postać

$$-\lambda \frac{\partial v(\bar{r}, z, \tau)}{\partial n} = \alpha [v(\bar{r}, z, \tau) - t_0] \quad \text{dla } \bar{r} \in k, \quad (2.8)$$

gdzie k - kontur przekroju poprzecznego pręta, n - normalna zewnętrzna do tego konturu, t_0 - temperatura płynu omijającego pręt (żebro).



Rys.1. Pręt pryzmatyczny. Przekroje dla: a) pręta o dowolnym przekroju, b) pręta okrągłego, c) płaskiego żebra prostego

Dla płaskiego żebra prostego i okrągłego o grubości 2δ , oraz dla okrągłego pręta o promieniu δ (rys.1) warunek(2.8) konkretyzuje się do postaci

$$\pm \lambda \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha (v - t_0) \quad \text{dla } x = \pm \delta. \quad (2.9)$$

Jeżeli rozkład temperatury w zamocowaniu jest symetryczny (w szczególnym wypadku wyrównany), to w stanie ustalonym będzie zachodziła symetria $\psi(x, z) = \psi(-x, z)$. Wobec tego w miejsce warunku (2.9) można napisać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 & \text{dla } x = 0, \\ -\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \alpha (\psi - t_0) & \text{dla } x = \delta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

W przypadku nieustalonego przewodzenia ciepła symetria jest dodatkowo uwarunkowana symetrią początkowego rozkładu temperatur w całym przecie (żebrze).

Dla współrzędnej z warunki brzegowe określone są u nasady żebra lub pręta i na jego końcu (na powierzchni czołowej). U nasady jest zadany rozkład temperatury

$$\psi = t_1(\bar{r}) \quad \text{dla } z = z_1. \quad (2.11)$$

Rozkład ten jest różny w zależności od sposobu zamocowania pręta i od warunków wymiany ciepła po drugiej stronie przekroju zamocowania. Ponadto rozkład ten jest na ogół trudny do wyznaczenia. Z powyższych względów praktyczną wartość mają rozwiązania przyjmujące wyrównaną temperaturę w przekroju początkowym

$$\psi = t_1 = \text{idem} \quad \text{dla } z = z_1. \quad (2.11a)$$

Na powierzchni czołowej odbywa się konwekcyjna wymiana ciepła skąd wynika równanie

$$\pm \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} = \alpha' (\psi - t_0) \quad \text{dla } z = z_2, \quad (2.12)$$

przy czym o wyborze znaku po lewej stronie równania decyduje przyjęty zwrot osi z . Współczynnik wnikania ciepła $\alpha \neq \alpha'$

W wypadku, gdy wpływ wymiany ciepła na powierzchni czołowej da się pominąć, równanie (2.12) upraszcza się do postaci

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = z_2.$$

Warunek początkowy określa rozkład temperatur w pręcie, lub żebrze w chwili początkowej

$$\psi = \psi_p(\bar{r}, z) \quad \text{dla } \tau = 0. \quad (2.13)$$

W szczególnym wypadku może to być również temperatura wyrównana. Z różnych możliwych przestrzennych początkowych rozkładów temperatur praktyczne znaczenie mają te, które występują w stanie ustalonym. Tego rodzaju warunek brzegowy pojawi się wówczas, gdy będziemy rozpatrywali nieustalone przewodzenie ciepła powstałe w wyniku zakłócenia stanu ustalonego przez zmianę temperatury płynu omywającego pręt (żebro).

2.3. Wielkości poszukiwane (wynikowe)

W wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego określonego w podrozdziale 2.1 i 2.2, uzyskamy funkcję $\psi(\bar{r}, z, \tau)$ określającą zależność temperatury w dowolnym punkcie pręta lub żebra od położenia punktu i od czasu. Dla zagadnień ustalonych znika zależność od czasu.

W odniesieniu do żeber, których celem jest intensyfikacja wymiany ciepła na powierzchni, interesującą jest przede wszystkim ilość ciepła przeprowadzonego przez żebro. Jest to ilość ciepła przewodzonego przez płaszczyznę podstawy żebra. Po wyznaczeniu pola temperatur, elementarna ilość ciepła przepływającego przez element ds powierzchni podstawy żebra oblicza się z prawa Fouriera

$$d\dot{Q} = \pm \lambda ds \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=z_1}$$

gdzie znak zależy od zwrotu osi z . Całkowite natężenie przepływu ciepła przez podstawę żebra uzyskujemy po scałkowaniu powyższego równania w granicach całej powierzchni przekroju początkowego żebra (pręta)

$$\dot{Q} = \iint_S d\dot{Q} = \pm \lambda \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=z_1} ds.$$

Jeżeli wprowadzimy pojęcie średniej w przekroju poprzecznym temperatury

$$v_m = v_m(z, \tau) = \frac{1}{S} \iint_S v(\bar{r}, z, \tau) ds, \quad (2.14)$$

to natężenie przepływu ciepła przez podstawę żebra wyrazi się równaniem

$$\dot{Q} = \pm \lambda S \left(\frac{\partial v_m}{\partial z} \right)_{z=z_1} \quad (2.15)$$

Dla zagadnień nieustalonych $\dot{Q} = \dot{Q}(\tau)$, a dla zagadnień ustalonych $\dot{Q} = \text{idem}$.

Bez uciekania się do głębszej analizy zjawiska przewodzenia ciepła w żebrach można przypuszczać, że przy niekorzystnym doborze rozmiarów żebra może ono pogarszać przepływ ciepła, tzn. izolować powierzchnię, do której jest przytwierdzone. Konieczne więc jest określenie kryterium decydującego o celowości instalowania żeber na powierzchni wymierającej ciepło z płynem.

2.4. Wielkości zredukowane i równania kryterialne

Wprowadzenie bezwymiarowych wielkości zredukowanych wyraźnie upraszcza opis zjawiska, dzięki zmniejszeniu ilości zmiennych i parametrów. Uzyskane równania, zwane równaniami kryterialnymi, są bardziej zwarte i przejrzyste.

Zmniejszenie ilości zmiennych ułatwia nie tylko rozważania analityczne, ale również obliczenia numeryczne, których celem jest doprowadzenie uzyskanych funkcji do dogodnej dla praktycznych potrzeb postaci wykresów. Nie bez znaczenia jest również fakt, że uniezależniamy się przy tym od układów jednostek miar oraz że ograniczają się przedziały zmienności niektórych wielkości (w pewnych wypadkach nawet do przedziału $(0,1)$).

Dodatkową korzyścią ze sprowadzenia równań do postaci kryterialnej jest możliwość wyciągania wniosków odnośnie podobieństwa zjawisk.

Dla określenia bezwymiarowych wielkości zredukowanych należy przyjąć, charakterystyczny rozmiar liniowy l_0 rozpatrywanego układu. Wybór ten w zasadzie jest dowolny, korzystne jest jednak przyjęcie rozmiaru charakterystycznego związanego z przekrojem po przecznym pręta lub żebra. W dalszym ciągu pracy będziemy porównywać uzyskane wyniki z wynikami klasycznej (przybliżonej) teorii prętów i żeber. W teorii tej kształt poprzeczne go przekroju pręta jest zupełnie nieistotny, ponieważ zakłada się, że w całym przekroju temperatura jest wyrównana. Istotny jest tylko stosunek obwodu pręta k' do powierzchni jego przekroju s . Porównywalność uzyskanych wyników z wynikami teorii przybliżonej zapewnimy więc przyjmując rozmiar charakterystyczny l_0 związany z tym stosunkiem. Jednocześnie zapewnimy wzajemną porównywalność uzyskanych wyników dla różnych kształtów przekrojów poprzecznych prętów i żeber. Najwygodniej jest przyjąć jako rozmiar charakterystyczny tzw. promień hydrauliczny.

$$l_0 = \frac{2s}{k}. \quad (2.16)$$

dla najbardziej typowych kształtów przekrojów poprzecznych, jakimi są przekrój okrągły i przekrój płaski, rozmiarami charakterystycznymi wynikającymi z (2.16) są promień i grubość.

Przy obliczeniach dotyczących żeber płaskich wygodniej jest przyjmować jako rozmiar charakterystyczny połowę grubości żebra. Takie też przyjęcie będzie uczynione w dalszych częściach niniejszej pracy i jedynie końcowe wyniki

liczbowe, przedstawione w postaci wykresów, będą zawierały wielkości zredukowane obliczone przy użyciu całkowitej grubości żebra jako rozmiaru charakterystycznego.

Dla większej przejrzystości odpowiadające sobie wielkości bezwzględne i wielkości zredukowane będziemy, w miarę możliwości, oznaczali odpowiednio małymi i dużymi literami. Wyjątek będą stanowić wielkości posiadające już tradycyjne oznaczenia.

I tak w miejsce bezwzględnych współrzędnych \bar{r}, x, z, n (normalna zewnętrzna do powierzchni pręta), pojawią się odpowiadające im współrzędne zredukowane

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}}{l_0}, \quad X = \frac{x}{l_0}, \quad Z = \frac{z}{l_0}, \quad N = \frac{n}{l_0}, \quad (2.17)$$

w miejsce obwodu k i powierzchni s , zredukowane ich wartości

$$K = \frac{k}{l_0}, \quad S = \frac{s}{l_0^2}. \quad (2.18)$$

Podobnie operator Hamiltona ∇ , mający wymiar równy odwrotności wymiaru długości, zostanie zastąpiony operatorem zredukowanym

$$\nabla_{\text{red}} = l_0 \nabla. \quad (2.19)$$

W dalszym ciągu pracy nie będziemy odróżniać w oznaczeniach obu tych operatorów pamiętając, że jeżeli operator Hamiltona występuje w równaniu kryterialnym, to jest operatorem zredukowanym.

Dla zagadnień nieustalonych, w miejsce czasu pojawi się zredukowany czas zwany liczbą Fouriera

$$Fo = \frac{a \tau}{l_0^2}. \quad (2.20)$$

Występujące w warunkach brzegowych: współczynnik wnikania ciepła i współczynnik przewodzenia ciepła, wchodzą w skład bezwymiarowej liczby Biota

$$Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda}. \quad (2.21)$$

Zamiast tworzyć drugą liczbę Biota, zawierającą współczynnik wnikania ciepła α' na powierzchni czołowej pręta lub żebra, wprowadzamy liczbę kryterialną

$$K_{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (2.22)$$

będącą stosunkiem współczynnika wnikania ciepła na powierzchni czołowej i bocznej pręta (żebra).

Temperaturę w dowolnym punkcie ciała stałego ν zastąpi zredukowana temperatura θ będąca ułamkiem, którego licznik jest różnicą temperatur zawierającą temperaturę ν , a mianownik charakterystyczną dla danego zjawiska różnicą temperatur, a jeżeli takiej nie ma - inną wielkością, lub zespołem wielkości mającym wymiar temperatury. Sposób tworzenia zredukowanej temperatury θ jest podyktowany dążeniem do jak najprostszego zapisu kryterialnej postaci równania różniczkowego i warunków brzegowych i zależy od konkretnego zagadnienia brzegowego.

Zredukowany strumień ciepła przewodzonego przez pręt lub żebro utworzymy dzieląc strumień ciepła \dot{Q} przepływającego przez jego podstawę przez strumień ciepła stanowiący wielkość odniesienia. Jeżeli za wielkość tę przyjmiemy strumień ciepła \dot{Q}_0 , jaki przepływałby do płynu (lub od płynu) po usunięciu żebra (pręta) przez powierzchnię utwierdzenia, przy takim samym współczynniku wnikania ciepła, to otrzymamy tzw. e f e k t y w n o ś ć żebra (pręta)

$$z = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \frac{\dot{Q}}{\alpha s_1 (t_1 - t_0)}. \quad (2.23)$$

Niekiedy strumień ciepła odnosi się do maksymalnego strumienia \dot{Q}_{\max} , jaki przepływałoby przez żebro, gdyby było ono wykonane z doskonałego przewodnika ciepła ($\lambda = \infty$). Otrzymujemy wówczas tzw. **s p r a w n o ś ć** żebra (pręta)^{x)}

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}. \quad (2.24)$$

Jeżeli, jak poprzednio, przez s_1 oznaczymy pole powierzchni podstawy żebra (pręta), a przez f pole całkowitej jego powierzchni, to związek między \dot{Q}_0 i \dot{Q}_{\max} możemy zapisać w postaci

$$\dot{Q}_{\max} = \frac{f}{s_1} \dot{Q}_0, \quad (2.25)$$

z którego wynika zależność między efektywnością i sprawnością

$$\eta = \frac{s_1}{f} \chi. \quad (2.26)$$

W stanie ustalonym zredukowany strumień ciepła χ zależy tylko od liczby Biota i od zredukowanych rozmiarów geometrycznych, w stanie nieustalonym dochodzi dodatkowo zależność od liczby Fouriera.

Żebrowanie powierzchni jest celowe wówczas, gdy efektywność żebra w stanie ustalonym jest większa od jedności $\chi > 1$. Jeżeli $\chi < 1$ żebro staje się elementem izolującym powierzchnię, do której jest przytwierdzone.

Dla żeber geometrycznie podobnych (jednakowe rozmiary zredukowane) efektywność w stanie ustalonym zależy od liczby Biota. Wartość liczby Biota, przy której $\chi = 1$ nazywamy **k r y t y c z n ą** liczbą Biota Bi_{kr} . Jak wynika z powyższych rozważań, zależy ona od kształtu i rozmiarów geometrycznych żebra.

x) Niektórzy autorzy [7, 16] sprawność żebra nazywają efektywnością.

Po wprowadzeniu wyżej określonych wielkości zredukowanych równanie różniczkowe i warunki brzegowe przyjmują następującą postać

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla^2 \theta + K_q, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} + Bi \theta = 0 \quad \text{dla} \quad \vec{R} \in K, \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad \text{dla} \quad X = 0, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} + Bi \theta = 0 \quad \text{dla} \quad X = 1,$$

$$\theta = T_1(\vec{R}) \quad \text{dla} \quad Z = Z_1, \quad (2.11a)$$

$$\pm \frac{\partial \theta}{\partial Z} + K_\alpha Bi \theta = 0 \quad \text{dla} \quad Z = Z_2.$$

Po znalezieniu funkcji $\theta(\vec{R}, Z, Fo)$ zredukowaną średnią w przekroju temperaturę wyznaczymy z równania

$$\theta_m = \frac{1}{S} \iiint_S \theta \, dS \quad (2.14a)$$

będącego kryterialnym odpowiednikiem równania (2.14). Po sprowadzeniu do postaci kryterialnej równania (2.15) otrzymujemy

$$\alpha = \pm \frac{1}{Bi} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial Z} \right)_{Z=Z_1} \quad (2.15a)$$

W równaniu tym znak jest uzależniony od zwrotu osi Z (znak + jeżeli oś Z jest skierowana do płaszczyzny umocowania zębra).

2.5. Transformacja całkowa w obszarze skończonym

Dogodnym narzędziem rozwiązywania równań różniczkowych, a w tym i równań cząstkowych, są transformacje całkowe. Sprowadzają one operacje różniczkowania do operacji algebraicznych, dzięki czemu równanie różniczkowe zwyczajne zamienia się w równanie algebraiczne, a w równaniu cząstkowym uzyskuje się zmniejszenie ilości zmiennych niezależnych kosztem pojawienia się w nim pewnych parametrów.

Wybór odpowiedniej transformacji całkowej zależy od rodzaju operatora różniczkowego zmiennej niezależnej, która ma być transformowana, obszaru zmienności tej zmiennej oraz warunków na brzegach tego obszaru i wreszcie od właściwości funkcji, która jest zmienną zależną w danym równaniu różniczkowym.

Używanej w niniejszej pracy transformacji Laplace'a-Carsona nie będziemy omawiać, gdyż jest ona powszechnie znana i stosowana (por. np. [3, 19, 1, 10]). Omówimy natomiast transformację całkową w obszarze skończonym [18, 11, 15], gdyż jest ona mniej znana, a ponadto wymaga pewnej adaptacji do potrzeb rozwiązywanych w niniejszej pracy zagadnień.

Równanie Fouriera-Kirchhoffa (2.1a) można zapisać następująco

$$\nabla_R^2 \theta + L(\theta) = F, \quad (2.1b)$$

gdzie $\theta = \theta(\vec{R}, Z, F_0)$, operator ∇_R działa w płaszczyźnie zmiennej \vec{R} (płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta lub żebra), a operator L zawiera różniczkowanie względem zmiennej Z (współrzędna w kierunku wzdłużnym pręta lub żebra) i zmiennej F_0 (czas). F zależy od źródeł wewnętrznych ciepła. Na brzegu K obszaru S , w którym działa operator ∇_R , funkcja θ spełnia warunek brzegowy

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} + B_i \theta = 0 \quad \text{dla } \vec{R} \in K. \quad (2.8a)$$

W celu usunięcia z równania (2.1b) operacji różniczkowania $\nabla_{\vec{R}}$ zastosujemy transformację całkową względem zmiennej \vec{R}

$$\theta(p, Z, F_0) = \iint_S \theta(\vec{R}, Z, F_0) v(\vec{R}, p) dS. \quad (2.27)$$

Jądro $v(\vec{R}, p)$ transformacji należy dobrać w ten sposób, by transformacja laplasjanu funkcji θ w obszarze S , przy warunku brzegowym (2.8a) na brzegu tego obszaru wyrażała się liniowo przez transformatę funkcji

$$\iint_S (\nabla_{\vec{R}}^2 \theta) v(\vec{R}, p) dS = -p^2 \bar{\theta}, \quad (2.28)$$

co po uwzględnieniu (2.27) daje równość

$$\iint_S (\nabla_{\vec{R}}^2 \theta) v dS = -p^2 \iint_S \theta v dS. \quad (2.28a)$$

Zastosujemy w tym celu dla funkcji v i θ drugie twierdzenie Greena

$$\iint_S (v \nabla_{\vec{R}}^2 \theta - \theta \nabla_{\vec{R}}^2 v) dS = \oint_K (v \frac{\partial \theta}{\partial N} - \theta \frac{\partial v}{\partial N}) dK,$$

z którego wynika

$$\iint_S (\nabla_{\vec{R}}^2 \theta) v dS = \iint_S \theta \nabla_{\vec{R}}^2 v dS + \oint_K (v \frac{\partial \theta}{\partial N} - \theta \frac{\partial v}{\partial N}) dK.$$

Jeżeli na mocy warunku brzegowego (2.8a), podstawimy

$$\frac{\partial \theta}{\partial N} = -Bi\theta,$$

to otrzymamy

$$\iint_S (\nabla_R^2 \theta) v \, dS = \iint_S \theta \nabla_R^2 v \, dS - \oint_K \theta \left(\frac{\partial v}{\partial N} + B_i v \right) dK. \quad (2.29)$$

Aby było spełnione równanie (2.28a) muszą zachodzić następujące równości

$$\iint_S \theta \nabla_R^2 v \, dS = -p^2 \iint_S \theta v \, dS,$$

$$\oint_K \theta \left(\frac{\partial v}{\partial N} + B_i v \right) dK = 0,$$

lub inaczej

$$\iint_S \theta (\nabla_R^2 v + p^2 v) dS = 0,$$

$$\oint_K \theta \left(\frac{\partial v}{\partial N} + B_i v \right) dK = 0.$$

Całki powyższe będą identycznie równe zeru wówczas, gdy

$$\nabla_R^2 v + p^2 v = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial N} + B_i v = 0 \quad \text{dla } \vec{R} \in K. \quad (2.31)$$

Otrzymane równania formułują klasyczne zagadnienie Sturma-Liouville'a [2], które posiada nietrywialne rozwiązania

$$v_k = v_k(\vec{R}, \mu_k)$$

zwane funkcjami własnymi, dla pewnego zbioru wartości własnych $p = \mu_k$

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$$

Wartości własne zależą od parametru B tkwiącego w warunkach brzegowym (2.31).

Funkcje własne v_k tworzą w obszarze S układ ortogonalny, zupełny. Ortogonalność funkcji v_k wyraża się związkiem

$$\iint_S v_i v_k dS = \delta_{ik} N_k^2, \quad (2.32)$$

gdzie δ_{ik} jest symbolem Kroneckera, a N_k normą funkcji v_k . Ponieważ równania (2.30) i (2.31) określają v_k z dokładnością do stałego współczynnika, więc każdy otrzymany układ funkcji można unormować. W praktyce jednak, dążąc do jak najprostszego zapisu funkcji v_k operujemy funkcjami nieunormowanymi.

Ostatecznie więc definiowana transformacja całkowa w ograniczonym obszarze ma postać

$$\bar{\theta}(\mu_k, Z, F_0) = \iint_S \theta(\vec{R}, Z, F_0) v_k(\vec{R}, \mu_k) dS, \quad (2.33)$$

przy czym transformacja laplasjanu wyraża się następująco

$$\left(\nabla_R^2 \bar{\theta} \right) = - \mu_k^2 \bar{\theta}. \quad (2.34)$$

Zmienna stransformowana jest w tym wypadku (w odróżnieniu od innych transformacji całkowych) zmienną dyskretną.

Aby otrzymać równanie określające transformację odwrotną, rozwińmy funkcję $\theta(\vec{R}, Z, F_0)$ w obszarze S w szereg według ortogonalnego i zupełnego układu funkcji v_k^x

$$\theta(\vec{R}, Z, F_0) = \sum_k C_k v_k.$$

Po pomnożeniu powyższego równania przez funkcję v_k , po scałkowaniu obustronnym w granicach obszaru S i po uwzględnieniu równania (2.32), otrzymujemy

$$C_k = \frac{1}{N_k^2} \iint_S \theta(\vec{R}, Z, F_0) v_k(\vec{R}, \mu_k) dS.$$

Porównując uzyskane równanie z definicją transformacji (2.33) mamy

$$C_k = \frac{1}{N_k^2} \bar{\theta}.$$

Transformacja odwrotna względem transformacji (2.33) jest więc określona równaniem

$$\theta(\vec{R}, Z, F_0) = \sum_k \frac{1}{N_k^2} \bar{\theta}(\mu_k, Z, F_0) v_k(\vec{R}, \mu_k). \quad (2.35)$$

Transformowanie równań przebiega podobnie, jak przy innych transformacjach całkowych - należy transformowane równanie obustronnie pomnożyć przez jądro przekształcenia i wykonać całkowanie. Przy transformowaniu pochodnej względem innej zmiennej zamienia się kolejność różniczkowania i całkowania.

x) tu i w dalszej części pracy użyto skróconego zapisu $\sum_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty}$

Dla transformacji addytywnych stałych występujących w równaniach wystarczy znać transformację liczby 1. Transformowane stałe należy rozumieć jako funkcje zmiennej \vec{R} przyjmujące w obszarze S wartość stałą. W szczególnym wypadku, dla funkcji jednostkowej

$$u(\vec{R}) \equiv 1, \quad \text{dla } \vec{R} \in S. \quad (2.36)$$

Rozwińmy tę funkcję w szereg względem układu funkcji własnych

$$u(\vec{R}) \equiv 1 = \sum_k A_k v_k(\vec{R}, \mu_k). \quad (2.37)$$

Współczynniki szeregu, wyznaczone znanym sposobem, wyrażają się następująco

$$A_k = \frac{1}{N_k^2} \iint_S v_k(\vec{R}, \mu_k) dS. \quad (2.38)$$

Całka po prawej stronie jest transformatą funkcji jednostkowej

$$\bar{u}(\mu_k) = \iint_S u(\vec{R}) v(\vec{R}, \mu_k) dS = \iint_S v_k(\vec{R}, \mu_k) dS,$$

z równania (2.38) wynika więc

$$\bar{u}(\mu_k) = \bar{1} = N_k^2 A_k. \quad (2.39)$$

W dalszych rozważaniach niniejszej pracy wystąpi średnia w obszarze S wartość iloczynu $A_k v_k$

$$B_k = \frac{1}{S} \iint_S A_k v_k(\vec{R}, \mu_k) dS.$$

Ponieważ A_k nie zależy od \bar{R} , więc

$$B_k = A_k \frac{1}{S} \iint_S v_k(\bar{R}, \mu_k) dS. \quad (2.40)$$

Po obustronnym scałkowaniu równania (2.37) w obszarze S otrzymujemy związek

$$\sum_k B_k = 1. \quad (2.41)$$

Współczynniki A_k i B_k zależą od wartości własnych μ_k , a poprzez nie od liczby Biota

$$A_k = A_k(Bi), \quad B_k = B_k(Bi).$$

2.5.1. Obszar płaski - poprzeczny przekrój żebra płaskiego

Przekrój poprzeczny żebra płaskiego (prostego lub okrągłego) jest przekrojem płyty (rys. 1) o zredukowanej grubości równej 2 (połowa grubości stanowi rozmiar charakterystyczny).

Jeżeli dla żebra prostego zachodzi symetria wzdłużna, a dla żebra okrągłego symetria osiowa, to dwuwymiarowy laplasjan ∇_R^2 w tym obszarze upraszcza się do postaci

$$\nabla_R^2 = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Funkcje własne v_k spełniają zatem równanie

$$\frac{d^2 v_k}{dx^2} + \mu_k^2 v_k = 0, \quad (2.42)$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{dv_k}{dX} = 0 \quad \text{dla } X = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{dv_k}{dX} + Bi v_k = 0 \quad \text{dla } X = 1. \quad (2.44)$$

Z rozwiązania zagadnienia brzegowego (2.42) - (2.44) otrzymujemy

$$v_k = \cos \mu_k X, \quad (2.45)$$

przy czym wartości własne μ_k są dodatnimi pierwiastkami równania

$$Bi \operatorname{ctg} \mu = \mu. \quad (2.46)$$

Funkcja (2.45) jest nieunormowana, jej norma wynosi

$$N_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}}. \quad (2.47)$$

Współczynniki A_k i B_k szeregów wyrażają się równaniami [10]

$$A_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k}, \quad (2.48)$$

$$B_k = \frac{2 Bi^2}{\mu_k^2 (Bi^2 + Bi + \mu_k^2)}. \quad (2.49)$$

Funkcje własne (2.45) rozwiązują zagadnienie jedynie dla wypadków, gdy zachodzi symetria względem płaszczyzny środkowej żebra (por. podrozdz. 2.2). W przeciwnym wypadku funkcje te byłyby liniowymi kombinacjami sinusa i cosinusa, a wartości własne μ_k określałoby inne równanie przestępne.

2.5.2. Obszar kołowy - przekrój poprzeczny okrągłego pręta

Przekrojem poprzecznym okrągłego pręta jest koło o zredukowanym promieniu równym 1 (rys.1). Przy symetrii osiowej (uzależnionej od symetrii rozkładu temperatur w przekroju początkowym pręta i symetrii wnikania ciepła na powierzchni bocznej pręta) operator ∇_R^2 upraszcza się do jednowymiarowego

$$\nabla_R^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

Funkcje własne spełniają równanie

$$\frac{d^2 v_k}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv_k}{dx} + \mu_k^2 v_k = 0 \quad (2.50)$$

przy warunkach brzegowych (2.43) i (2.44). Są nimi funkcje

$$v_k = J_0(\mu_k x). \quad (2.51)$$

Wartości własne μ_k są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\text{Bi} \frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \mu. \quad (2.52)$$

Funkcja (2.51) jest nieunormowana, jej norma wynosi

$$N_k = \frac{Bi}{\mu_k} \sqrt{\frac{2}{\mu_k^2 + Bi^2}}. \quad (2.53)$$

Współczynniki A_k i B_k szeregów należy obliczać z równań [10]

$$A_k = \frac{2 Bi}{J_0(\mu_k) (\mu_k^2 + Bi^2)}, \quad (2.54)$$

$$B_k = \frac{4 Bi^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + Bi^2)}. \quad (2.55)$$

2.5.3. Obszar płaski - płaszczyzna żebra prostego

Jest to obszar ograniczony z jednej strony czołem żebra, z drugiej strony płaszczyzną jego utwierdzenia. Współrzędną Z mierzymy począwszy od czoła żebra w kierunku zamocowania (rys. 1). Zmienia się ona w zakresie $0 \leq Z \leq L$, gdzie $L = l/l_0$ jest zredukowaną długością żebra (lub pręta). W obszarze zmiennej Z działa operator ∇_Z^2 , który dla prostego żebra i pręta przyrzątecznego ma postać (2.3). Funkcje własne v_n spełniają zatem równanie

$$\frac{d^2 v_n}{dZ^2} + \nu_n^2 v_n = 0. \quad (2.56)$$

Warunki brzegowe wynikają z równań (2.11a), przy czym w tym wypadku $Z_1 = L$, $Z_2 = 0$. Jeżeli przyjmiemy wyrównany rozkład temperatury u nasady żebra $t_1(\bar{x}) = t_1$, to przy odpowiednim określeniu zredukowanej temperatury θ_1 (tak, by w liczniku znajdowała się różnica $\nu - t_1$) uzyskamy $\theta = T_1 = 0$ dla $Z = Z_1 = L$. Odpowiadający temu warunek brzegowy dla funkcji własnej v_n ma postać

$$v_n(Z) = 0 \quad \text{dla } Z = L. \quad (2.57)$$

Drugi warunek brzegowy wynika z wymiany ciepła na powierzchni czołowej żebra (pręta) i w ogólnym wypadku ma postać identyczną z analogicznym warunkiem dla funkcji θ (równ. (2.11a)).

W szczególności, gdy pominiemy wpływ wymiany ciepła na powierzchni czołowej, warunek ten upraszcza się do postaci

$$\frac{dv_n}{dz} = 0 \quad \text{dla } z = 0. \quad (2.58)$$

Przy tak sprecyzowanych warunkach brzegowych funkcja własna ma postać

$$v_n = \cos \nu_n z, \quad (2.59)$$

a wartości własne określa zależność

$$\nu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}. \quad (2.60)$$

Współczynniki A_n , potrzebne do transformacji stałych w przedziale $(0, L)$, wynikają z równania

$$A_n = \frac{1}{N_n^2} \int_0^L v_n(z) dz,$$

analogicznego do równania (2.38). Po obliczeniu normy N_n funkcji (2.59) i całki występującej w powyższym równaniu, otrzymujemy

$$A_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}. \quad (2.61)$$

Współczynniki B_n

$$B_n = A_n \frac{1}{L} \int_0^L v_n(z) dz,$$

pojawiające się przy uśrednianiu w przedziale $(0, L)$ funkcji rozwiniętych w szereg według v_n , należy obliczać z równania

$$B_n = \frac{8}{((2n - 1) \pi)^2}. \quad (2.62)$$

Współczynniki te spełniają również związek (2.41).

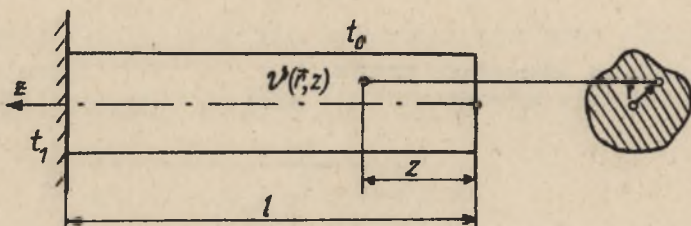
3. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH PRYZMATYCZNYCH I ŻEBRACH

3.1. Pręt pryzmatyczny o skończonej długości

Dla wypadku ustalonego przewodzenia ciepła bez źródeł we wewnętrznym równanie (2.1) upraszcza się do postaci

$$\nabla_r^2 v^* + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} = 0, \quad (3.1)$$

przy czym operator ∇_r^2 działa w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta. Początek osi z przyjmujemy na powierzchni czołowej pręta (rys.2).



Rys.2. Pręt pryzmatyczny

Na powierzchni bocznej i czołowej pręta odbywa się konwekcyjna wymiana ciepła z otaczającym środowiskiem o temperaturze t_0 , co wyraża się warunkami brzegowymi

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(\vec{r}, z)}{\partial n} = \alpha [\vartheta(\vec{r}, z) - t_0] \quad \text{dla } \vec{r} \in k, \quad (3.2)$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta(\vec{r}, 0)}{\partial z} = \alpha' [\vartheta(\vec{r}, 0) - t_0]. \quad (3.3)$$

Przyjmujemy, że w płaszczyźnie zamocowania pręta ($z = 1$) temperatura jest wyrównana i wynosi

$$\vartheta(\vec{r}, 1) = t_1. \quad (3.4)$$

Jak już nadmieniano w rozdz. 2.2. rzeczywisty początkowy rozkład temperatury nie jest wyrównany. Z podanych tam przyczyn nie wydaje się celowe uwzględnianie tego rozkładu w rozwiązaniu (choć z punktu widzenia matematycznego nie przedstawia to trudności) i wystarczy przyjąć, że wzięta do obliczeń temperatura t_1 jest średnią temperaturą w przekroju zamocowania pręta. W podrozdz. 3.5 zostanie omówiony wpływ tego uproszczenia na rozwiązanie zagadnienia.

Po wprowadzeniu wielkości zredukowanych (2.17), (2.18), (2.19), (2.21), (2.22) oraz zredukowanej temperatury

$$\theta = \frac{\vartheta - t_0}{t_1 - t_0} \quad (3.5)$$

i zredukowanej długości pręta

$$L = \frac{1}{l_0} \quad (3.6)$$

równania (3.1) - (3.4) przybierają postać

$$\nabla_R^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \theta(\vec{R}, Z)}{\partial N} + Bi \theta(\vec{R}, Z) = 0 \quad \text{dla } \vec{R} \in K, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \theta(\vec{R}, 0)}{\partial Z} - K_\alpha Bi \theta(\vec{R}, 0) = 0, \quad (3.3a)$$

$$\theta(\vec{R}, L) = 1. \quad (3.4a)$$

Do rozwiązania powyższego zagadnienia brzegowego zasto-
sujemy transformację całkową względem zmiennej \vec{R} , w ob-
szarze S (równ. (2.33)). Stransformowane równania mają
następującą postać

$$-\mu_k^2 \bar{\theta} + \frac{d^2 \bar{\theta}}{dZ^2} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dZ} - K_\alpha Bi \bar{\theta} = 0, \quad \text{dla } Z = 0, \quad (3.3b)$$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \quad \text{dla } Z = L \quad (3.4b)$$

(równanie (3.2a) zostało wykorzystane przy transformacji
laplasjanu).

Całka ogólna równania (3.1b) wyraża się równaniem

$$\theta = C_1 \operatorname{ch} \mu_k Z + C_2 \operatorname{sh} \mu_k Z. \quad (3.7)$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (3.3b) i (3.4b) otrzymujemy

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \frac{ch\mu_k Z + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k Z}{ch\mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k L} \quad (3.8)$$

Funkcję $\theta(\vec{R}, Z)$ przedstawiającą zredukowany rozkład temperatury w pryzmatycznym przecię o skończonej długości, otrzymamy z równania (3.8) po dokonaniu transformacji odwrotnej określonej równaniem (2.35)

$$\theta = \sum_k A_k v_k(\vec{R}) \frac{ch\mu_k Z + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k Z}{ch\mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k L} \quad (3.9)$$

Średnią w przekroju zredukowaną temperaturę pręta $\theta_m(Z)$ uzyskamy po zastosowaniu równania (2.14a) i wykorzystaniu zależności (2.40).

$$\theta_m = \sum_k B_k \frac{ch\mu_k Z + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k Z}{ch\mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k L} \quad (3.10)$$

W niektórych wypadkach interesująca jest temperatura w końcowym przekroju pręta (np. przy określaniu statycznego błędu pomiaru temperatury zanurzonym w płynie i umocowanym w ścianie termometrem). Zredukowaną temperaturę końca pręta otrzymuje się po podstawieniu $Z = 0$ w równaniu (3.9)

$$\theta_k = \sum_k \frac{A_k v_k(\vec{R})}{ch\mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} sh\mu_k L} \quad (3.11)$$

E f e k t y w n o ś ć pręta (zredukowaną ilość ciepła przewodzonego przez pręt) oblicza się z równania (2.15a), które dla tego wypadku ma postać

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \left(\frac{d\theta_m}{dz} \right)_{z=L} \quad (3.12)$$

Po zróżniczkowaniu równania (3.10) i po podstawieniu do równania (3.12) otrzymujemy ostatecznie

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \frac{\text{th} \mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k}}{1 + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} \text{th} \mu_k L} \quad (3.13)$$

Na podstawie równania (2.25) dochodzimy do związku pomiędzy efektywnością i sprawnością pręta

$$\eta = \frac{\alpha}{1 + 2L} \quad (3.14)$$

3.2. Nieskończenie długi pręt przyrząteczny

Równania określające rozkład temperatury w pręcie nieskończenie długim i efektywność tego pręta można uzyskać z równań (3.9) i (3.13) po zmianie zwrotu osi pręta (zamiana Z na $L-Z$, początek osi Z w płaszczyźnie zamocowania pręta) i po przejściu granicznym $L \rightarrow \infty$.

$$\theta = \sum_k A_k v_k(\bar{R}) \exp(-\mu_k Z) \quad (3.15)$$

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \quad (3.16)$$

3.3. Szczególne wypadki pręta

3.3.1. Pręt okrągły

W równaniach (3.9), (3.13), (3.15) i (3.16) należy użyć wartości własnych μ_k , będących pierwiastkami równania (2.52), oraz funkcji własnych v_k współczynników A_k i B_k określonych odpowiednio równaniami (2.51), (2.54) i (2.55).

Efektywność pręta okrągłego w funkcji liczby Biota i zredukowanej długości pręta, przedstawiono na rys.3.

3.3.2. Płaskie żebro proste

Wartości własne, funkcje własne oraz współczynniki szeregów występujące w równaniach (3.9), (3.13), (3.15) i (3.16) są dla tego wypadku określone równaniami (2.45) - (2.49).

Wykres zależności efektywności płaskiego żebra prostego od liczby Biota Bi i zredukowanej długości L , przy równych współczynnikach wnikania ciepła na powierzchni czołowej i bocznej ($K_\alpha = 1$), przedstawione na rys. 4. Rozmiarem charakterystycznym wchodzącym w skład zredukowanych wielkości Bi i L jest całkowita grubość żebra.

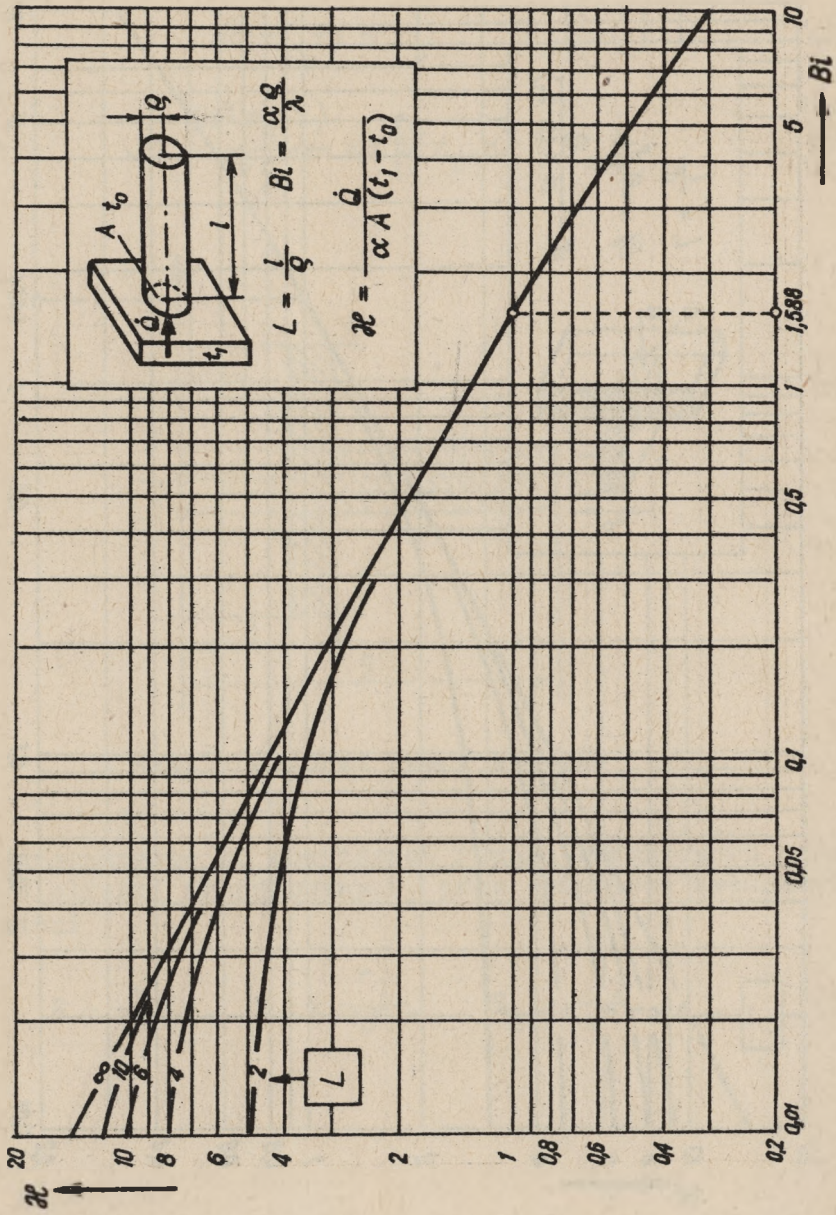
3.4. Okrągłe żebro płaskie

Przekrój okrągłego żebra płaskiego, z zaznaczeniem układu współrzędnych, przedstawiono na rys. 5.

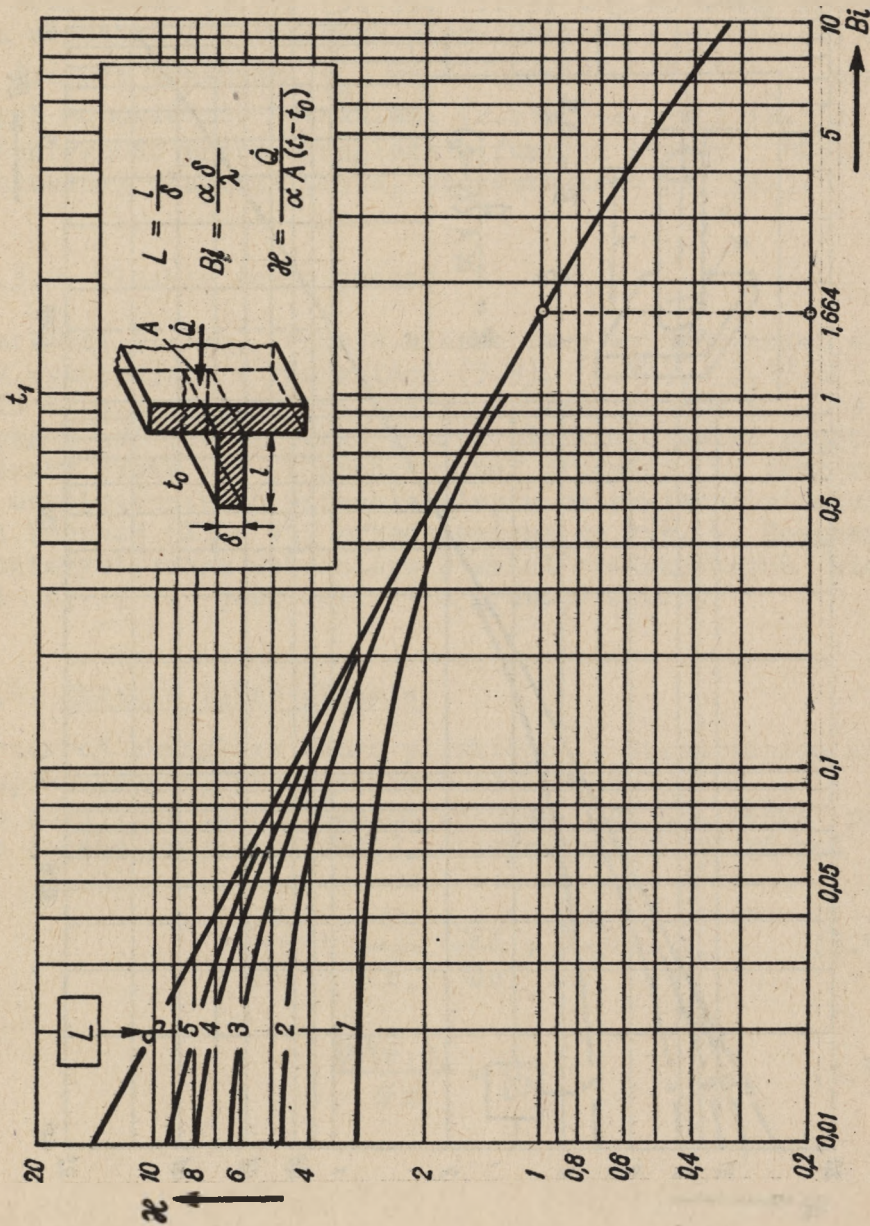
Po przyjęciu takich samych założeń, jak dla żebra prostego (pręta pryzmatycznego), otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v^*(r,0)}{\partial x} = 0, \quad (3.19)$$



Rys. 3. Efektywność okrągłego pręta

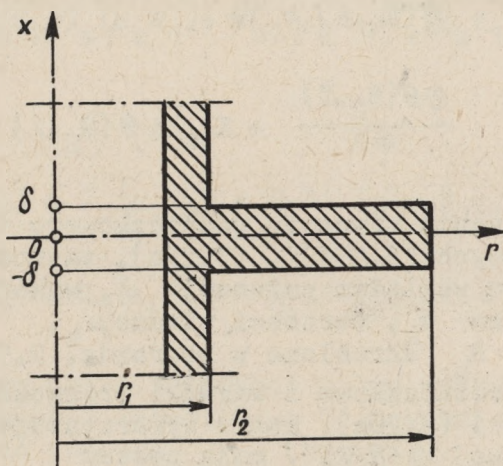


Rys. 7. Efektywność płaskiego żebra prostego

$$-\lambda \frac{\partial v(r, \delta)}{\partial x} = \alpha [v(r, \delta) - t_0], \quad (3.20)$$

$$v(r_1, x) = t_1, \quad (3.21)$$

$$-\lambda \frac{\partial v(r_2, x)}{\partial r} = \alpha [v(r_2, x) - t_0]. \quad (3.22)$$



Rys.5. Okrągłe żebro płaskie

Wprowadzenie do powyższych równań określonych uprzednio wielkości zredukowanych, oraz dodatkowo zredukowanych promieni

$$R = \frac{r}{\delta}, \quad R_1 = \frac{r_1}{\delta}, \quad R_2 = \frac{r_2}{\delta} \quad (3.23)$$

doprowadza do równań kryterialnych

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = 0, \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial \theta(R, 0)}{\partial X} = 0, \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial \theta(R, 1)}{\partial X} + Bi \theta(R, 1) = 0, \quad (3.20a)$$

$$\theta(R_1, X) = 1, \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial \theta(R_2, X)}{\partial R} + K_\alpha Bi \theta(R_2, X) = 0. \quad (3.22a)$$

W celu rozwiązania równania różniczkowego (3.18a) przy warunkach brzegowych (3.19a) - (3.22a), zastosujemy transformację całkową względem zmiennej X , wykorzystując przy tym funkcje własne v_k , wartości własne μ_k , współczynniki szeregów A_k i B_k określone w podrozdz. 2.5.1. Stransformowane równanie różniczkowe i warunki brzegowe (z wyjątkiem warunków (3.19a) i (3.20a), które wykorzystujemy przy transformacji pochodnej $\partial^2 \theta / \partial X^2$) mają postać

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d \bar{\theta}}{dR} - \mu_k^2 \bar{\theta} = 0, \quad (3.18b)$$

$$\bar{\theta}(R_1, \mu_k) = N_k^2 A_k, \quad (3.21b)$$

$$\frac{d \bar{\theta}(R_2, \mu_k)}{dR} + K_\alpha Bi \bar{\theta}(R_2, \mu_k) = 0 \quad (3.22b)$$

Całka ogólna równania (3.18b) wyraża się liniową kombinacją zmodyfikowanych funkcji Bessela

$$\bar{\theta} = C_1 I_0(\mu_k R) + C_2 K_0(\mu_k R). \quad (3.24)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych (3.21b) i (3.22b) otrzymując ostatecznie wyrażenie na transformate funkcji θ

$$\bar{\theta} = \frac{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R)}{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_1) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R_1)}, \quad (3.25)$$

gdzie

$$I_{01}(\mu_k R_2) = I_1(\mu_k R_2) + K_{\alpha} B_i I_0(\mu_k R_2), \quad (3.26)$$

$$K_{01}(\mu_k R_2) = K_1(\mu_k R_2) - K_{\alpha} B_i I_0(\mu_k R_2).$$

W wypadku, gdy można zaniedbać wpływ wymiany ciepła na powierzchni czołowej żebra ($K_{\alpha} = 0$) równania (3.26) upraszczają się do postaci

$$I_{01}(\mu_k R_2) = I_1(\mu_k R_2), \quad (3.26a)$$

$$K_{01}(\mu_k R_2) = K_1(\mu_k R_2).$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej uzyskujemy funkcję $\theta(R, X)$ przedstawiającą zredukowany rozkład temperatury okrągłego żebra prostego

$$\theta = \sum_k A_k v_k(X) \frac{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R)}{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_1) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R_1)} \quad (3.27)$$

Średnia w przekroju temperatura żebra wyraża się równaniem

$$\theta_m = \sum_k B_k \frac{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R)}{K_{01}(\mu_k R_2) I_0(\mu_k R_1) + I_{01}(\mu_k R_2) K_0(\mu_k R_1)}, \quad (3.28)$$

które otrzymuje się z równania (3.28) po zastosowaniu definicji (2.14a). Równanie (2.15a) ma tym wypadku postać

$$\alpha = - \frac{1}{Bi} \left(\frac{d\theta_m}{dR} \right)_{R=R_1}. \quad (3.29)$$

Po obliczeniu pochodnej z równania (3.28) otrzymujemy ostatecznie równanie wyrażające efektywność okrągłego żebra płaskiego

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \frac{K_1(\mu_k R_1) I_{01}(\mu_k R_2) - I_1(\mu_k R_1) K_{01}(\mu_k R_2)}{K_0(\mu_k R_1) I_{01}(\mu_k R_2) - I_0(\mu_k R_1) K_{01}(\mu_k R_2)} \quad (3.30)$$

przy czym funkcje K_{01} i I_{01} są określone równaniami (3.26).

Po wykorzystaniu równania (2.26) można otrzymać związek pomiędzy sprawnością i efektywnością okrągłego żebra płaskiego

$$\eta = \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1} + 1 \right) \alpha. \quad (3.31)$$

Dla żebra o dużej średnicy zewnętrznej ($R_2 \rightarrow \infty$) równanie (3.30) upraszcza się do postaci

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \frac{K_1(\mu_k R_1)}{K_0(\mu_k R_1)}. \quad (3.32)$$

Na rysunkach 6-8 przedstawiono wykresy funkcji $\alpha = \alpha(Bi, R_1, R_2) = \alpha(Bi, R_1, \bar{r}_2/r_1)$ określoną równaniem (3.30) przy $K\alpha = 1$ (jednakowy współczynnik wnikania ciepła na powierzchnię czołową i boczną żebra). Zmienne zredukowane są określone przy użyciu całkowitej grubości żebra, jako linio wego rozmiaru charakterystycznego.

3.5. Wpływ nierównomiernego rozkładu temperatury u nasady żebra (pręta)

Wpływ ten przeanalizujemy dla przypadku pręta pryzmatycznego, którego szczególnym wypadkiem jest płaskie żebro proste. Przy nierównomiernym rozkładzie temperatury u nasady żebra zachowują swą moc równanie różniczkowe (3.1) oraz warunki brzegowe (3.2) i (3.3). Natomiast w miejsce warunku brzegowego (3.4) pojawi się warunek bardziej ogólny, wyrażający rozkład temperatury u nasady żebra (pręta)

$$\psi(\vec{r}, 1) = t_1(\vec{r}). \quad (3.33)$$

Wprowadzamy pojęcie średniej temperatury u nasady żebra

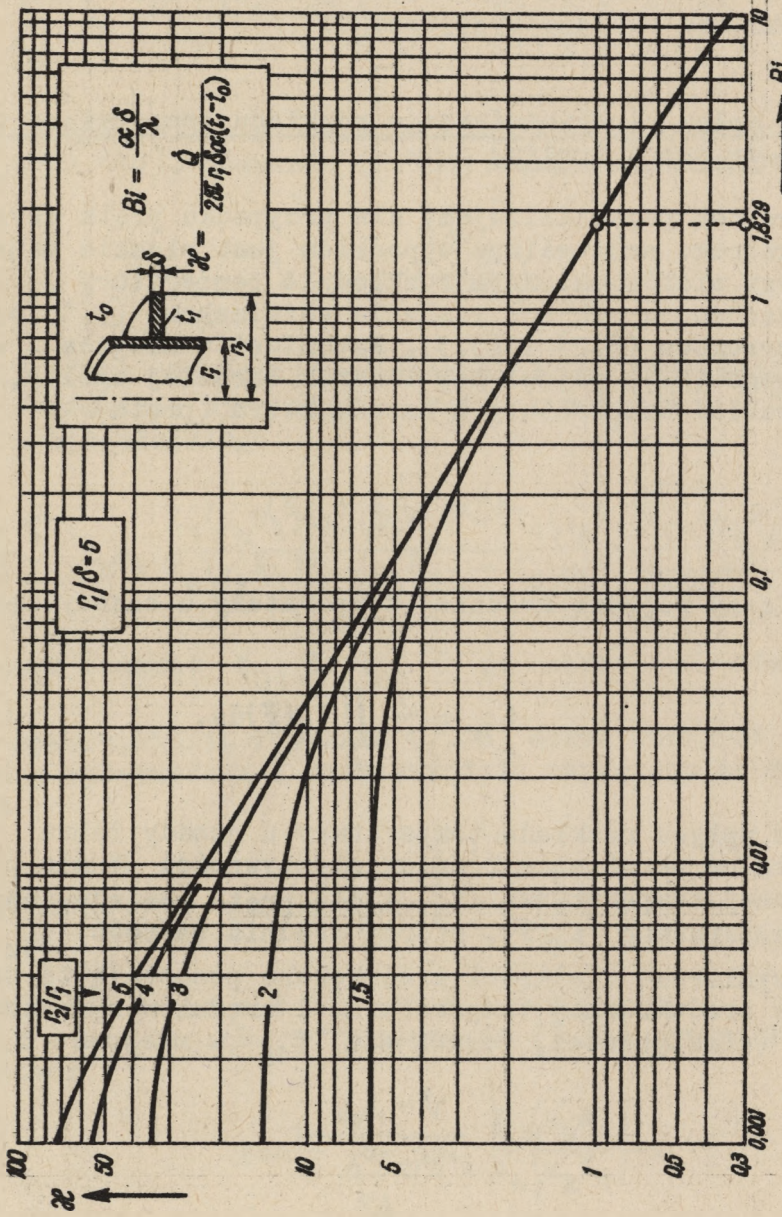
$$t_{1m} = \frac{1}{s} \iint_S t_1(\vec{r}) ds. \quad (3.34)$$

Badanie wpływu rozkładu temperatury u nasady żebra będzie polegało na określeniu różnicy efektywności α dla pręta o wyrównanej temperaturze t_1 i dla pręta posiadającego u nasady temperaturę $t_1(\vec{r})$, której średnia wartość $t_{1m} = t_1$.

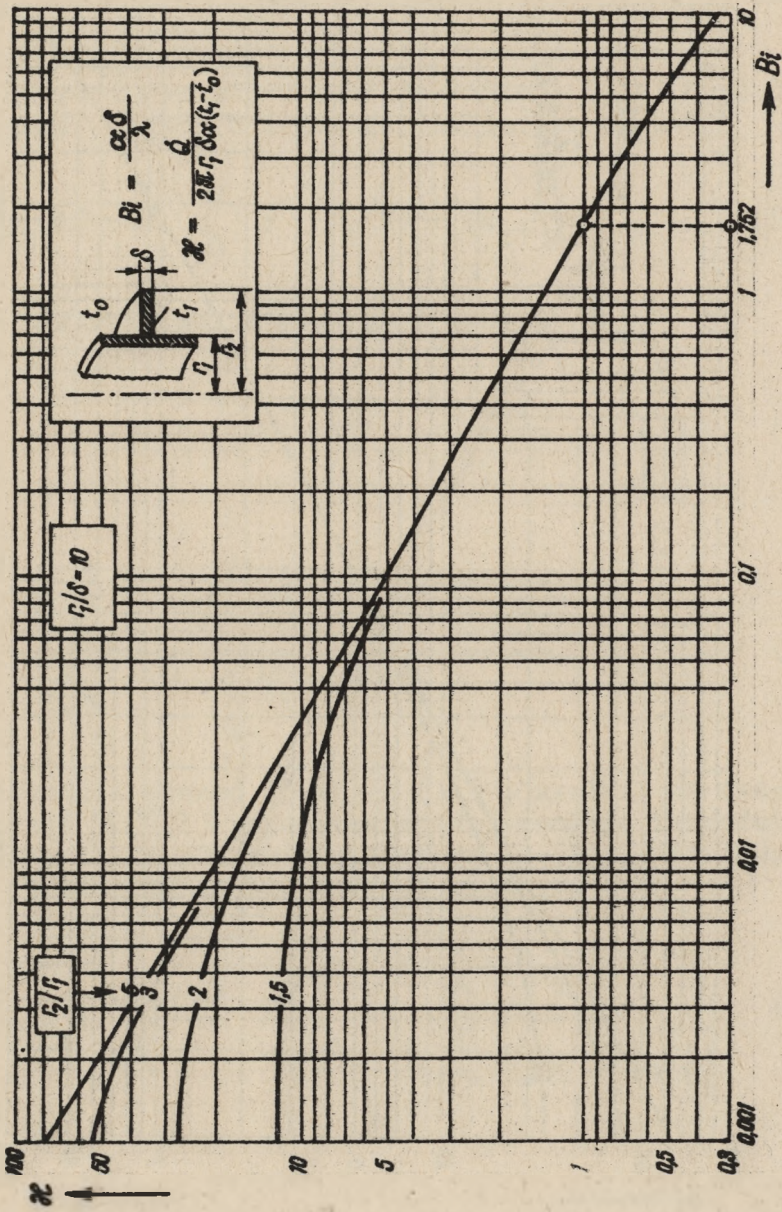
Bezwymiarowe wielkości zredukowane pozostają te same, je dynie w zredukowanej temperaturze i zredukowanym strumieniu ciepła (efektywności) pojawi się t_{1m} w miejsce t_1

$$\theta = \frac{\psi - t_0}{t_{1m} - t_0}, \quad (3.35)$$

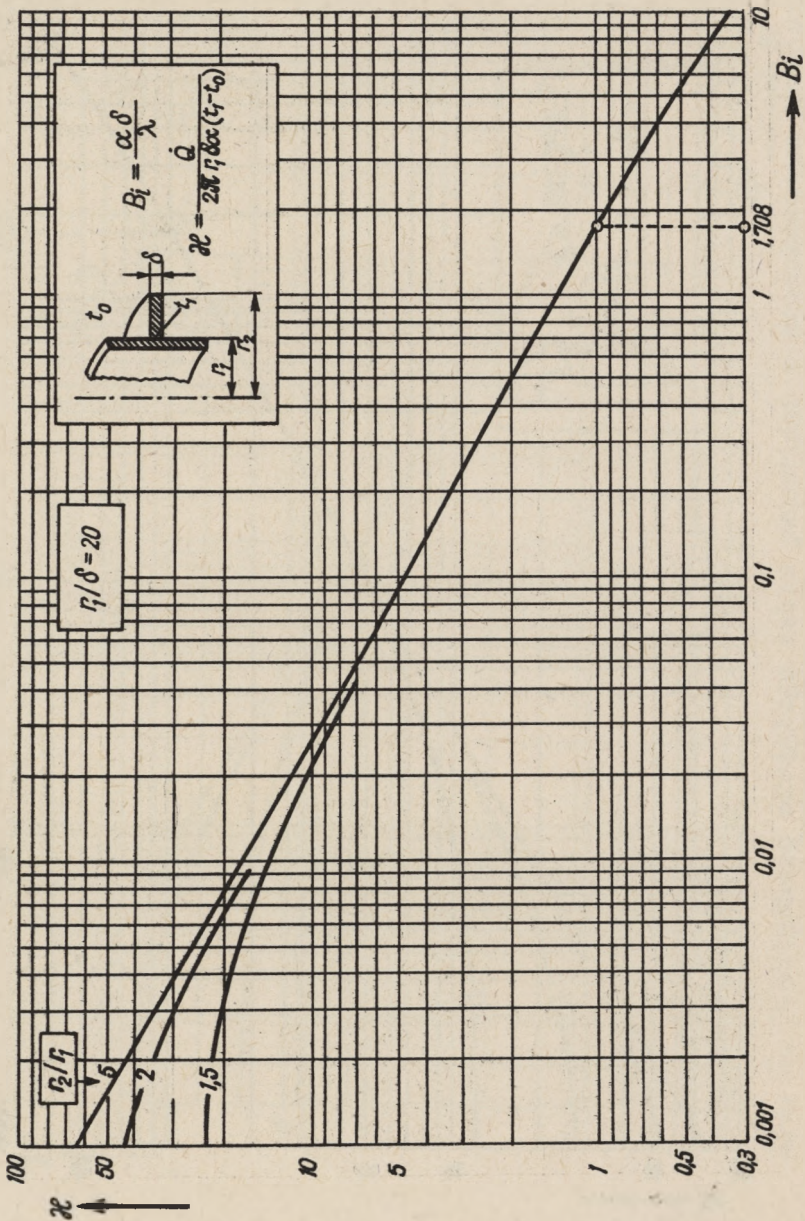
$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{\alpha s (t_{1m} - t_0)}. \quad (3.36)$$



Rys. 6. Efektywność okrągłego żebra płaskiego o zredukowanym promieniu wewnętrznym $R_1 = r_1/d = 5$



Rys. 7. Efektywność okrągłego żebra płaskiego o zredukowanym promieniu wewnętrznym $R_1 = r_1/\delta = 10$



Rys. 8. Efektywność okrągłego żebra płaskiego o zredukowanym promieniu wewnętrznym $R_1 = r_1/\delta = 20$

Obowiązują zatem równania bezwymiarowe (3.1a) - (3.3a), a tylko warunek brzegowy (3.4a) zostaje zastąpiony przez warunek

$$\theta(\vec{R}, L) = T_1(\vec{R}). \quad (3.33a)$$

To samo dotyczy równań stransformowanych (3.1b) i (3.3b), a transformata warunku brzegowego (3.33a) ma postać

$$\bar{\theta}(\mu_k, L) = \bar{T}_1(\mu_k) = \iint_S T_1(\vec{R}) v_k(\mu_k, \vec{R}) dS. \quad (3.33b)$$

Równanie powyższe można napisać w postaci

$$\bar{\theta}(\mu_k, L) = N_{kA_k}^2 \frac{\bar{T}_1(\mu_k)}{N_{kA_k}^2}, \quad (3.37)$$

gdzie

$$\frac{\bar{T}_1(\mu_k)}{N_{kA_k}^2} = \frac{\iint_S T_1(\vec{R}) v_k(\mu_k, \vec{R}) dS}{\iint_S v_k(\mu_k, \vec{R}) dS}. \quad (3.38)$$

Z porównania równań (3.4b) i (3.37) wynika, że transformata funkcji $\theta(\vec{R}, Z)$ przedstawiającej rozkład temperatury w pręcie wyrazi się równaniem podobnym do (3.8), różniącym się jedynie wyrażeniem stojącym przed ułamkiem

$$\bar{\theta} = N_{kA_k}^2 \frac{\bar{T}_1(\mu_k)}{N_{kA_k}^2} \frac{\text{ch}\mu_k Z + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} \text{sh}\mu_k Z}{\text{ch}\mu_k L + K\alpha \frac{Bi}{\mu_k} \text{sh}\mu_k L}, \quad (3.39)$$

a sama funkcja

$$\theta = \sum_k A_k v_k(\bar{R}) \frac{\bar{T}_1(\mu_k)}{N_k^2 A_k} \frac{\operatorname{ch} \mu_k Z + K \alpha \frac{\operatorname{Bi}}{\mu_k} \operatorname{sh} \mu_k Z}{\operatorname{ch} \mu_k L + K \alpha \frac{\operatorname{Bi}}{\mu_k} \operatorname{sh} \mu_k L}. \quad (3.40)$$

Wpływ nierównomiernego rozkładu temperatury u nasady pręta uwidacznia się więc poprzez czynnik (3.38), przez który są pomnożone poszczególne wyrazy szeregu (3.9). Ten sam czynnik pojawi się w równaniu na średnią w przekroju temperaturę pręta (3.10) i następnie w równaniu (3.13) na efektywność pręta

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{Bi}} \sum_k B_k \mu_k \frac{\bar{T}_1(\mu_k)}{N_k^2 A_k} \frac{\operatorname{th} \mu_k L + K \alpha \frac{\operatorname{Bi}}{\mu_k}}{1 + K \alpha \frac{\operatorname{Bi}}{\mu_k} \operatorname{th} \mu_k L}. \quad (3.41)$$

W wypadku wyrównanej temperatury u nasady żebra czynnik po prawej jest oczywiście równy 1, gdyż wówczas $T_1(\bar{R}) = 1$, $\bar{T}_1(\mu_k) = N_k^2 A_k$.

Na wartość sumy szeregu (3.41) decydujący wpływ na pierwszy jego wyraz. Wpływ ten jest tym większy, im mniejsza jest liczba Biota, gdyż

$$\lim_{\operatorname{Bi} \rightarrow 0} B_k(\operatorname{Bi}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1 \\ 0 & \text{dla } k > 1. \end{cases}$$

Jednocześnie, ze wzrostem k (a więc i μ_k) $\operatorname{th} \mu_k L \rightarrow 1$ i od pewnego wyrazu szeregu (nieraz już od drugiego) cały ułamek zawierający tę funkcję jest bliski jedności. Np. dla $\operatorname{Bi} = 0,6$, a więc już bardzo blisko górnego kresu liczb Biota stosowanych w żebrach, $B_1 = 0,9983$, $B_2 = 0,0016$, $B_1 \mu_1 = 0,5209$, $B_2 \mu_2 = 0,0051$.

Przyjmując więc dla oceny wpływu rozkładu temperatury u nasady żebra przybliżenie sumy szeregu pierwszym wyrazem otrzymujemy

$$\alpha \approx \frac{1}{Bi} B_1 \mu_1 \frac{\bar{T}_1(\mu_1)}{N_1^2 A_1} \frac{th(\mu_1 L) + K\alpha \frac{Bi}{\mu_1}}{1 + K\alpha \frac{Bi}{\mu_1} th(\mu_1 L)}$$

dla nierównomiernego rozkładu temperatury u nasady żebra i

$$\alpha' \approx \frac{1}{Bi} B_1 \mu_1 \frac{th(\mu_1 L) + K\alpha \frac{Bi}{\mu_1}}{1 + K\alpha \frac{Bi}{\mu_1} th(\mu_1 L)}$$

dla równomiernego rozkładu temperatury u nasady żebra.

Względny błąd efektywności pręta (zebra), spowodowany nieuwzględnieniem początkowego rozkładu temperatury, wynosi więc

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha} = 1 - \frac{N_1^2 A_1}{\bar{T}_1(\mu_1)} \quad (3.42)$$

Dla przykładu rozpatrzmy płaskie zebro proste, u nasady którego rozkład temperatury jest paraboliczny. Niech różnica maksymalnej $t_{1\max}$ i minimalnej $t_{1\min}$ temperatury u nasady będzie pewną częścią różnicy średniej temperatury w tym miejscu t_{1m} i temperatury płynu omywającego pręt (zebro) t_0 .

$$t_{1\max} - t_{1\min} = k_t (t_{1m} - t_0). \quad (3.43)$$

Parabola przedstawiająca rozkład temperatury u nasady żebra jest symetryczna względem płaszczyzny środkowej żebra ($x = 0$) i wygięta w ten sposób, by na powierzchni ($x = \delta$) temperatura była bliższa temperatury t_0 . Nietrudno wykazać, że równanie tej paraboli ma postać

$$t_1 = t_0 + (t_{1m} - t_0) \left[1 + k_t \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right) \right],$$

lub w postaci zredukowanej

$$T_1 = 1 + k_t \left(\frac{1}{3} - X^2 \right). \quad (3.44)$$

Równanie to spełnia wszystkie żądane warunki: parabola jest symetryczna względem osi X (funkcja T_1 jest parzystą), zredukowana temperatura na powierzchni ($X = 1$) jest mniejsza od tejże w płaszczyźnie środkowej ($X = 0$), a więc jest bliższa zredukowanej temperaturze płynu $T_0 = 0$ ^{x)}, średnia wartość zredukowanej temperatury u nasady żebra $T_{1m} = 1$.

W celu obliczenia błędu (3.42) należy wyznaczyć wartość wyrażenia (3.38) przy $k=1$. Dla przypadku żebra płaskiego (por. podrozdz. 2.5.1) wyrażenie to konkretyzuje się do postaci

$$\frac{\bar{T}_1(\mu_1)}{N_1^2 A_1} = \frac{\int_0^1 T_1(X) \cos \mu_1 X \, dX}{\int_0^1 \cos \mu_1 X \, dX}.$$

^{x)} zredukowane temperatury są nieujemne.

Po podstawieniu do powyższego równania funkcji (3.44) i po wykonaniu całkowania, otrzymujemy

$$\frac{\bar{T}_1(\mu_1)}{N_1^2 A_1} = 1 + 2 k_t \left(\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{\operatorname{ctg} \mu_1}{\mu_1} - \frac{1}{3} \right). \quad (3.45)$$

Ponieważ $0 < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$, funkcję $\operatorname{ctg} \mu_1$ można rozwinąć w szereg potęgowy, dzięki czemu równanie (3.45) przekształca się do postaci

$$\frac{\bar{T}_1(\mu_1)}{N_1^2 A_1} = 1 + 2k_t \mu_1^2 \left(\frac{1}{45} + \frac{2\mu_1^2}{945} + \frac{\mu_1^4}{4725} + \dots \right). \quad (3.46)$$

Równanie (3.46) wskazuje na to, że współczynnik uwzględniający nierównomierność rozkładu temperatury u podstawy żebra rośnie wraz z μ_1 , a więc i z liczbą Biota. Dla $Bi = \infty$ $\mu_{1\max} = \frac{\pi}{2}$

$$\left[\frac{\bar{T}_1(\mu_1)}{N_1^2 A_1} \right]_{\max} = 1 + 0,1498 k_t.$$

Podstawiając powyższe do równania (3.42) otrzymujemy

$$\varepsilon_{\mathcal{H} \max} = \frac{0,1493 k_t}{1 + 0,1493 k_t}. \quad (3.47)$$

Przyjmując, raczej z nadmiarem, $k_t = 0,1$ otrzymujemy

$$\varepsilon_{\mathcal{H} \max} = 0,0142 = 1,42\%.$$

Uzyskany wynik potwierdza słuszność założenia polegającego na przyjmowaniu równomiernego rozkładu temperatury u nasa-

dy żebra. Rzeczywisty rozkład temperatury jest trudny do określenia, uwzględnienie go komplikuje rozwiązanie, a dokładność zwiększa się przy tym w skrajnym wypadku tylko o 1%.

3.6. Krytyczna liczba Biota

Krytyczna liczba Biota odgranicza żebra (pręty) intensyfikujące wymianę ciepła na powierzchni, do której są przytwierdzone ($\alpha > 1$) od żeber izolujących ($\alpha < 1$). Żebro jest efektywne wówczas, gdy $Bi < Bi_{kr}$. Krytyczna liczba Biota zależy od kształtu żebra (pręta) i od jego zredukowanych rozmiarów geometrycznych. Dla żeber geometrycznie podobnych krytyczne liczby Biota są równe.

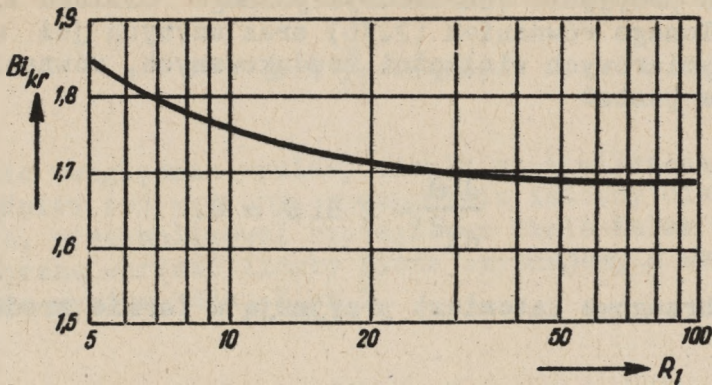
Dla prętów przyrównanych i płaskiego żebra prostego krytyczna liczba Biota zależy od zredukowanej długości $L = l/l_0$. Zależność ta leży jednak poza zasięgiem potrzebnej dokładności obliczeń i dlatego można przyjąć stałą wartość Bi_{kr} . I tak dla okrągłego pręta

$$Bi_{kr} = 1,558, \quad (3.48)$$

a dla płaskiego żebra prostego

$$Bi_{kr} = 1,664. \quad (3.49)$$

Krytyczna liczba Biota dla okrągłego żebra płaskiego jest funkcją zredukowanych promieni R_1 i R_2 . Decydujący wpływ ma jednak tylko zredukowany wewnętrzny promień $R_1 = r_1/\delta$. Rozmiar charakterystyczny $l_0 = \delta$ (który wchodzi również do liczby Biota) oznacza całkowitą grubość żebra. Zależność $Bi_{kr} = f(R_1)$ przedstawiono na rys. 9. Graniczną wartością dla dużych promieni krzywizny R_1 jest krytyczna liczba Biota dla płaskiego żebra prostego (3.49).



Rys.9. Krytyczna liczba Biota dla okrągłego żebra płaskiego

3.7. Porównanie z teorią klasyczną

W klasycznej teorii prętów i żeber przewodzących ciepło nie uwzględnia się zmienności temperatury w przekroju poprzecznym. Bez uciekania się do analizy matematycznej tego założenia można stwierdzić, że jest ono spełnione tym lepiej, im większy jest współczynnik przewodzenia ciepła λ materiału pręta (zębra), im mniejszy jest poprzeczny rozmiar liniowy pręta (grubość żebra) l_0 i im mniejszy jest współczynnik wnikania ciepła na powierzchni pręta (zębra). Te trzy czynniki działają wspólnie poprzez liczbę Biota $Bi = \alpha l_0 / \lambda$. Założenie płaskości izotermy w przekroju poprzecznym jest więc tym lepiej spełnione, im mniejsza jest liczba Biota.

3.7.1. Pręt pryzmatyczny

W miejsce równania (3.1) otrzymujemy równanie^{x)}

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{k \alpha}{s \lambda} (\theta - t_0) = 0, \quad (3.50)$$

^{x)} Wyprowadzenie tego równania jest podane w każdym podręczniku z wymiany ciepła. Madejski [12] wyprowadza równanie (3.50) wychodząc ze ścisłego równania różniczkowego (3.1), poprzez uśrednienie temperatury w przekroju poprzecznym.

które jest spełnione wraz z warunkami brzegowymi (3.3) i (3.4). Po przyjęciu charakterystycznego rozmiaru liniowego określonego równaniem (2.16) oraz użytych już uprzednio bezwymiarowych wielkości zredukowanych, równanie (3.50) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - 2 \text{Bi} \theta = 0. \quad (3.50a)$$

Warunki brzegowe natomiast przyjmują w formie zredukowanej postać

$$\frac{d\theta}{dz} = K_\alpha \text{Bi} \theta \quad \text{dla } z = 0, \quad (3.51)$$

$$\theta = 1 \quad \text{dla } z = L. \quad (3.52)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\beta = \sqrt{2 \text{Bi}}$$

poszukiwana funkcja wyrazi się równaniem

$$\theta = \frac{\text{ch}\beta z + K_\alpha \frac{\text{Bi}}{\beta} \text{sh}\beta z}{\text{ch}\beta L + K_\alpha \frac{\text{Bi}}{\beta} \text{sh}\beta L}. \quad (3.53)$$

Ponieważ temperatura w każdym przekroju pręta jest wyrównana, więc równanie (3.53) wyraża również średnią w przekroju temperaturę. Po zróżniczkowaniu równania (3.53) i po podstawieniu do równania (3.12) uzyskujemy zredukowaną ilość ciepła przewodzonego przez pręt (efektywność pręta)

$$\mathcal{H} = \frac{\beta}{\text{Bi}} \frac{\text{th}\beta L + K_\alpha \frac{\text{Bi}}{\beta}}{1 + K_\alpha \frac{\text{Bi}}{\beta} \text{th}\beta L}. \quad (3.54)$$

W literaturze podawane jest najczęściej równanie

$$\chi = \frac{\beta}{Bi} \operatorname{th} \beta L,$$

które nie uwzględnia wymiany ciepła na powierzchni czołowej pręta. Wpływ tej wymiany, szczególnie istotny dla prętów krótkich, przeanalizował szczegółowo Około-Kulak [14].

Krytyczną wartość liczby Biota uzyskujemy z warunku $\chi = 1$ z którego wynika, dla $K_{\alpha} = 1$

$$Bi_{kr} = 2. \quad (3.55)$$

Dla pręta nieskończenie długiego zredukowana temperatura i efektywność wyrażają się równaniami:

$$\theta = \exp(-\beta Z), \quad (3.56)$$

$$\chi = \frac{\beta}{Bi}. \quad (3.57)$$

Równania (3.53), (3.54), (3.56) i (3.57) można uzyskać z wyprowadzonych uprzednio równań (3.10), (3.13), (3.15) i (3.16), uwzględniających poprzeczny rozkład temperatury, przez przejście graniczne $Bi \rightarrow 0$. Wystarczy w tym celu uwzględnić następujące zależności [10]

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} B_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1 \\ 0 & \text{dla } k > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} \mu_1 = \sqrt{2 Bi} = \beta^x \quad (3.59)$$

^x) Nie jest to granica sensu stricto. Równanie (3.59) należy rozumieć jako zapis asymptotycznej równości μ_1 i $\sqrt{2Bi}$. Ścisłejszy zapis w formie granicy jest następujący

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} \frac{\mu_1}{\sqrt{2Bi}} = 1.$$

Zależność (3.59) uzyskuje się z równań (2.46) i (2.52) po rozwinięciu występujących w nich funkcji w szeregi potęgowe. Należy przy tym pamiętać, że w podrozdz. 2.5.1 α użyto liczby Biota odniesionej do połowy grubości żebra, a jedno lity dla wszystkich prętów pryzmatycznych charakterystyczny rozmiar liniowy (2.16) sprowadza się dla płaskiego żebra prostego do całej jego grubości, Użyta tam liczbę Biota należy więc podwoić.

3.7.2. Okrągłe żebro płaskie

Odpowiednikiem równania (3.18) jest w teorii klasycznej równanie [17]

$$\frac{d^2 v^h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv^h}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda \delta} (v^h - t_0) = 0, \quad (3.60)$$

które jest spełnione wraz z warunkami brzegowymi (3.21) i (3.22). W równaniu tym δ jest grubością żebra. Po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej równanie to, oraz towarzyszące mu warunki brzegowe przedstawiają się następująco

$$\frac{d^2 \theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} - 2 \text{Bi} \theta = 0, \quad (3.60a)$$

$$\theta = 1 \quad \text{dla} \quad R = R_1, \quad (3.61)$$

$$\frac{d\theta}{dR} + K_\alpha \text{Bi} \theta = 0 \quad \text{dla} \quad R = R_2, \quad (3.62)$$

W wyniku rozwiązania uzyskujemy wyrażenie dla zredukowanej temperatury

$$\theta = \frac{K_{01}(\beta R_2) I_0(\beta R) + I_{01}(\beta R_2) K_0(\beta R)}{K_{01}(\beta R_2) I_0(\beta R_1) + I_{01}(\beta R_2) K_0(\beta R_1)}, \quad (3.63)$$

a stąd

$$\alpha = \frac{\beta}{Bi} \frac{K_1(\beta R_1) I_{01}(\beta R_2) - I_1(\beta R_1) K_{01}(\beta R_2)}{K_0(\beta R_1) I_{01}(\beta R_2) + I_0(\beta R_1) K_{01}(\beta R_2)}. \quad (3.64)$$

W równaniach tych I_{01} i K_{01} oznaczają funkcje wyrażone równaniami (3.26), a $\beta = \sqrt{2 Bi}$. Dla żebra o nieskończenie dużej średnicy zewnętrznej

$$\alpha = \frac{\beta}{Bi} \frac{K_1(\beta R_1)}{K_0(\beta R_1)}. \quad (3.65)$$

Podobnie jak dla pręta pryzmatycznego, równania (3.63), (3.64) i (3.65) można uzyskać z równań (3.28), (3.30) i (3.32) po przejściu granicznym $Bi \rightarrow 0$, przy uwzględnieniu zależności (3.58) i (3.59).

3.7.3. Wnioski

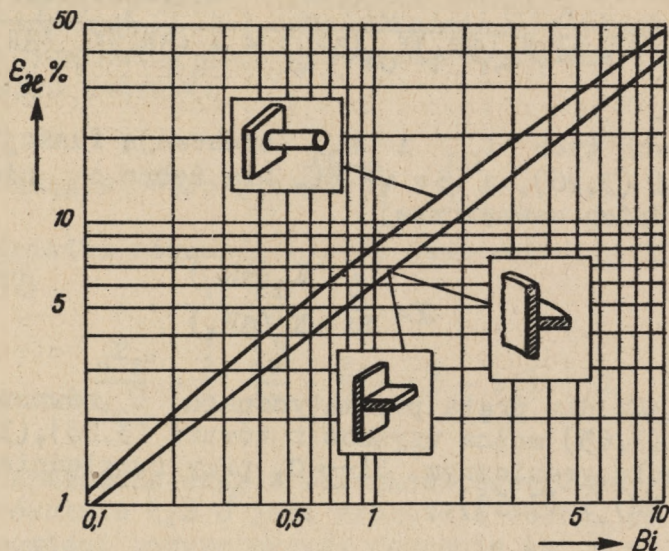
Przytoczone wywody potwierdzają przyjmowaną raczej intuicyjnie tezę, że założenie płaskości izoterm w przekroju poprzecznym pręta lub żebra sprawdza się tym lepiej, im mniejsza jest liczba Biota. Równania uwzględniające poprzeczny rozkład temperatury przechodzą przy $Bi \rightarrow 0$ w równania klasyczne.

W rzeczywistości jednak zawsze $Bi > 0$, interesujące jest więc jak zależy błąd wynikły ze stosowania wspomnianego uproszczenia od liczby Biota, gdyż rzutuje to na zakres stosowania teorii klasycznej.

Podstawową wielkością charakteryzującą żebro (pręt) jest jego efektywność α (zredukowana ilość przewodzonego ciepła). Na rys. 10 przedstawiono zależność względnego błędu efektywności od liczby Biota dla płaskiego żebra prostego i okrągłego oraz okrągłego pręta.* Błąd ten zależy również w mi-

* Wartości liczbowe α dla płaskiego żebra prostego różnią się nieco od wartości podanych w opublikowanej wcześniej przez autora pracy [20]. Różnica wynika stąd, że przy obliczeniach wykonanych do cytowanej pracy popełniono pewien systematyczny błąd.

nimalnym stopniu od zredukowanych rozmiarów geometrycznych; podane na wykresie wartości są wartościami maksymalnymi.



Rys.10. Względny błąd efektywności prętów i żeber obliczonej według teorii klasycznej

Teoria klasyczna daje dla efektywności wyniki zawyżone (błąd ϵ_{ϵ} jest dodatni). Przyjęcie płaskości izoterm w przekroju poprzecznym sprowadza się bowiem do myślowego "ulepszenia" materiału żebra (pręta) - w miejsce rzeczywistego materiału izotropowego, o współczynniku przewodzenia ciepła jednakowym we wszystkich kierunkach, wprowadza się do obliczeń model materiału o specyficznej anizotropowości, polegającej na pozostawieniu rzeczywistej wartości λ w kierunku wzdłuż osi pręta i przyjęciu $\lambda = \infty$ w kierunku prostopadłym. Tego rodzaju ulepszenie powoduje oczywiście wzrost ilości ciepła przewodzonego przez pręt.

Teoria klasyczna daje ponadto zawyżoną wartość krytycznej liczby Biota. Dla prętów pryzmatycznych wartość ta nie zależy od kształtu przekroju poprzecznego.

3.8. Ustalone przewodzenie ciepła w pryzmatycznych prętach z wewnętrznymi źródłami ciepła

Przykładem pręta pryzmatycznego z wewnętrznymi źródłami ciepła są elektrody w wannach elektrolitycznych. Wewnętrznym źródłem ciepła jest ciepło Joule'a wydzielające się w elektrodzie. Jeżeli przez i oznaczymy natężenie prądu, a przez q oporność właściwą materiału elektrody, to objętościowa wydajność źródła wyrazi się równaniem

$$\dot{q}_V = \frac{i^2 q}{s}.$$

Zwykle przyjmuje się, że źródło jest rozłożone równomiernie [9], zaniedbując jego zmiany wywołane zmiennością q w zależności od temperatury oraz niejednakową gęstością prądu.

Po przyjęciu układu współrzędnych jak na rys.2, równanie różniczkowe przewodzenia ciepła przyjmuje postać

$$\nabla_r^2 \vartheta + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_V}{\lambda} = 0. \quad (3.66)$$

Zagadnienie przewodzenia ciepła w pręcie ze źródłami rozwiążemy dla tych samych co uprzednio warunków brzegowych, tzn. dla stałej temperatury w zamocowaniu pręta i przy konwekcyjnej wymianie ciepła na powierzchni bocznej i czołowej pręta. Warunki te ujmują równania (3.2) - (3.3).

W opisywanym zagadnieniu pojawia się dodatkowa wielkość \dot{q}_V (objętościowa wydajność wewnętrznego źródła ciepła). Ponieważ jednocześnie ilość podstawowych wielkości wymiarowych nie ulega zmianie, więc zgodnie z podstawowym twierdzeniem teorii podobieństwa ilość bezwymiarowych wielkości zredukowanych opisujących zjawisko wzrośnie o 1. Pojawienie się tej dodatkowej zmiennej zredukowanej uniemożliwiłoby przedstawienie wynikowej funkcji na jednym wykresie. Aby temu zapobiec, można wyrazić temperaturę pręta $\vartheta(\vec{r}, z)$ jako sumę dwóch wielkości

$$\vartheta = \vartheta' + \vartheta''. \quad (3.67)$$

Funkcja v' wyraża rozkład temperatury w pręcie bez wewnętrznych źródeł ciepła i spełnia równania (3.1) - (3.4). Natomiast funkcja v'' wyraża rozkład temperatury w pręcie ze źródłami wewnętrznymi, ale przy równych temperaturach zamocowania pręta t_1 i płynu t_0 . Jeżeli temperaturę v'' potraktuje się jako nadwyżkę ponad tę wspólną temperaturę to można przyjąć $t_1 = t_0 = 0$. Funkcja v'' spełnia zatem równanie różniczkowe

$$\nabla_r^2 v'' + \frac{\partial^2 v''}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0 \quad (3.68)$$

i warunki brzegowe

$$-\lambda \frac{\partial v''(\vec{r}, z)}{\partial n} = \alpha v''(\vec{r}, z) \quad \text{dla } \vec{r} \in k, \quad (3.69)$$

$$\lambda \frac{\partial v''(\vec{r}, 0)}{\partial z} = \alpha' v''(\vec{r}, 0), \quad (3.70)$$

$$v''(r, l) = 0. \quad (3.71)$$

Zastosowana wyżej superpozycja jest uzasadniona liniowością równania różniczkowego przewodzenia ciepła i równań warunków brzegowych.

Z równania (3.67) wynika, że średnia w przekroju temperatura v''_m , obliczona z definicji (2.14), wyraża się również sumą dwóch składników.

$$v''_m = v'''_m + v''''_m \quad (3.72)$$

Podobnie strumień ciepła \dot{Q} przewodzonego przez płaszczynę nasady pręta składa się z dwóch części

$$\dot{Q} = \dot{Q}' - \dot{Q}'' \quad (3.73)$$

\dot{Q}' wyraża ciepło przewodzone wskutek istnienia różnicy temperatur nasady pręta i płynu omywającego pręt, przy czym jak poprzednio za dodatnie uważamy ciepło przepływające do płynu. \dot{Q}'' wyraża ciepło przewodzone wskutek istnienia w pręcie źródeł wewnętrznych. Ciepło to przepływa zawsze w kierunku przeciwnym do dodatniego kierunku pierwszego składnika. Stąd też

$$\dot{Q}' = \lambda s \left(\frac{dv''}{dz} \right)_{z=1}, \quad (3.74)$$

$$\dot{Q}'' = - \lambda s \left(\frac{dv''}{dz} \right)_{z=1}. \quad (3.75)$$

Funkcje v', v'' , \dot{Q}' wyznaczono w postaci zredukowanej θ' , θ'' i χ' w podrozdz. 3.1 (równania (3.9), (3.10), i (3.13)) Dla wyznaczenia analogicznych funkcji stanowiących drugi składnik rozwiązania, sprowadzimy równania (3.68) - - (3.71) do postaci bezwymiarowej. W tym celu użyjemy wprowadzonych uprzednio wielkości zredukowanych z wyjątkiem zredukowanej temperatury, którą w tym wypadku określimy następująco

$$\theta'' = \frac{v'' \lambda}{\dot{q}_v l^2}. \quad (3.76)$$

Zredukowane równania mają postać

$$\nabla_R^2 \theta'' + \frac{\partial^2 \theta''}{\partial Z^2} + 1 = 0, \quad (3.68a)$$

$$\frac{\partial \theta''(\vec{R}, Z)}{\partial N} + Bi \theta''(\vec{R}, Z) = 0, \quad \vec{R} \in K, \quad (3.69a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}(\bar{R}, 0)}{\partial Z} = K_{\alpha} Bi \bar{\theta}''(\bar{R}, 0), \quad (3.70a)$$

$$\bar{\theta}''(\bar{R}, L) = 0. \quad (3.71a)$$

Do rozwiązania powyższego zagadnienia brzegowego zastosujemy transformację całkową względem zmiennej \bar{R} , w obszarze S (równanie (2.33)). Stransformowane równania mają następującą postać

$$-\mu_k^2 \bar{\theta}'' + \frac{d^2 \bar{\theta}''}{dZ^2} + N_{kA_k}^2 = 0, \quad (3.68b)$$

$$\frac{d\bar{\theta}''}{dZ} - K_{\alpha} Bi \bar{\theta}'' = 0 \quad \text{dla } Z = 0, \quad (3.70b)$$

$$\bar{\theta}'' = N_{kA_k}^2 \quad \text{dla } Z = L. \quad (3.71b)$$

Równanie (3.69a) zostało wykorzystane przy transformacji laplasjanu.

Całka ogólna równania różniczkowego (3.68b) ma postać

$$\bar{\theta}'' = \frac{N_{kA_k}^2}{\mu_k^2} + M \operatorname{ch} \mu_k Z + N \operatorname{sh} \mu_k Z.$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (3.70b) i (3.71b) otrzymujemy

$$\bar{\theta}'' = \frac{N_{kA_k}^2}{\mu_k^2} - \frac{N_{kA_k}^2}{\mu_k^2} \frac{\left(\frac{\mu_k}{K_{\alpha} Bi} + \operatorname{sh} \mu_k L \right) \operatorname{ch} \mu_k Z - \left(\operatorname{ch} \mu_k L - 1 \right) \operatorname{sh} \mu_k Z}{\operatorname{sh} \mu_k L + \frac{\mu_k}{K_{\alpha} Bi} \operatorname{ch} \mu_k L}$$

a po zastosowaniu transformacji odwrotnej (2.35)

$$\theta'' = \sum_k \frac{A_k v_k(\bar{R})}{\mu_k^2} -$$

$$- \sum_k \frac{A_k v_k(\bar{R})}{\mu_k^2} \frac{\frac{\mu_k}{K_\alpha Bi} + \text{sh} \mu_k L \text{ch} \mu_k Z - (\text{oh} \mu_k^{L-1}) \text{sh} \mu_k Z}{\text{sh} \mu_k L + \frac{\mu_k}{K_\alpha Bi} \text{ch} \mu_k L} \quad (3.77)$$

Pierwszy człon równania (3.77) jest funkcją tylko \bar{R}

$$\sum_k \frac{A_k v_k(\bar{R})}{\mu_k^2} = f(\bar{R})$$

i da się przedstawić w postaci skończonej. Można wykazać, że funkcja ta wyraża zredukowany rozkład temperatury w nieskończenie długim pręcie swobodnym ze źródłami wewnętrznymi, przy ustalonym przewodzeniu ciepła. Funkcja ta spełnia równanie różniczkowe

$$\nabla_R^2 f + 1 = 0$$

i warunek brzegowy

$$\frac{\partial f}{\partial n} + Bi f = 0 \quad \text{dla } \bar{R} \in K.$$

Dla płaskiego zebra prostego, którego odpowiednikiem w postaci pręta swobodnego jest rozległa płyta

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} - x^2 \right), \quad (3.78)$$

a dla pręta okrągłego

$$f(R) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{Bi} - R^2 \right) \quad (3.79)$$

Średnią w przekroju poprzecznym zredukowaną nadwyżkę θ''_m otrzymujemy z równania (3.77) po zastosowaniu równania (2.14a). Wyraża się ona funkcją podobną do (3.77), różniącą się jedynie tym, że w miejsce iloczynu $A_k v_k(R)$ pojawiają się współczynniki B_k . Znając θ''_m , z równania

$$\mathcal{X}'' = \frac{\dot{Q}''}{sl_0 \dot{q}_v} = - \left(\frac{d\theta''_m}{dz} \right)_{Z=L} \quad (3.75a)$$

wynikającego z (3.75), wyznaczamy zredukowaną nadwyżkę strumienia ciepła

$$\mathcal{X}'' = \sum_k \frac{B_k}{\mu_k} \frac{\frac{\mu_k}{K_\alpha Bi} \operatorname{sh} \mu_k L + \operatorname{ch} \mu_k L - 1}{\operatorname{sh} \mu_k L + \frac{\mu_k}{K_\alpha Bi} \operatorname{ch} \mu_k L} \quad (3.80)$$

Po wyznaczeniu z równań (3.77) i (3.80) wielkości θ'' i \mathcal{X}'' , a z równań (3.9) i (3.13) wielkości θ' i \mathcal{X}' , temperaturę w dowolnym punkcie pręta i strumień ciepła przewodzonego przez nasadę pręta obliczymy następująco

$$\vartheta = t_0 + \theta'(t_1 - t_0) + \theta'' \frac{\dot{q}_v l_0^2}{\lambda}, \quad (3.81)$$

$$\dot{Q} = \mathcal{X}' \alpha s (t_1 - t_0) - \mathcal{X}'' sl_0 \dot{q}_v. \quad (3.82)$$

Równania te wynikają z równań (3.72) i (3.73) oraz z definicji wielkości zredukowanych (3.5), (3.76), (3.12) i (3.75a).

4. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH PRYZMATYCZNYCH I ŻEBRACH

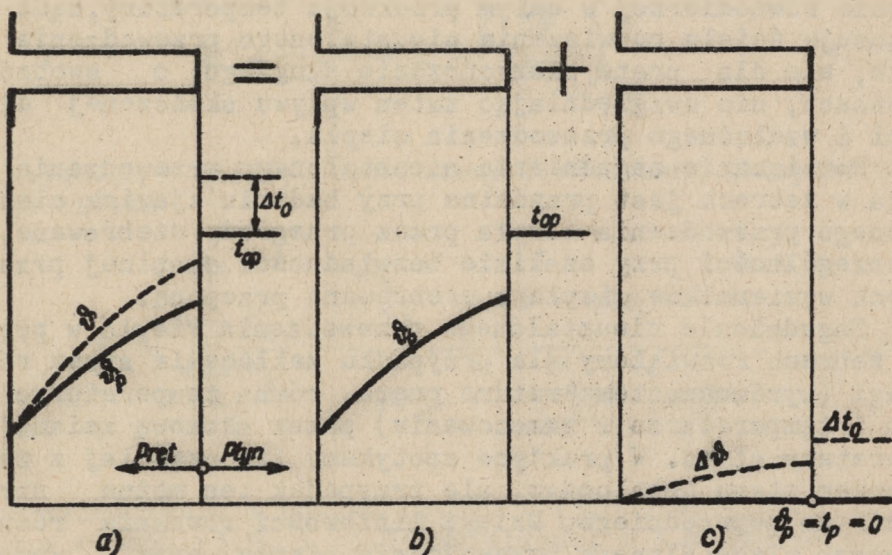
Zjawisko nieustalonego przewodzenia ciepła w utwierdzonych prętach występuje przy pomiarach zmiennych w czasie temperatur płynów za pomocą czujników termometrycznych zamurzonych w tym płynie i umocowanych w ścianie ograniczającej płyn. Zwykle przyjmuje się wówczas, że temperatura w zamocowaniu jest stała. Istniejące rozwiązania tego zagadnienia (por. np. [5, 6, 8]) bądź stosują uproszczenie polegające na tzw. skupieniu stałych, sprowadzające się do przyjęcia równomiernej w całym przekroju temperatury, bądź też stosują ściśle rozwiązania nieustalonego przewodzenia ciepła, ale dla pręta nieskończenie długiego, o swobodnych końcach, nie uwzględniając zatem wpływu skończonej długości i wzdluznego przewodzenia ciepła.

Rozwiązanie zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła w żebrach jest przydatne przy badaniu zjawisk nieustalonego przewodzenia ciepła przez przegrody uzebrowane, a w szczególności przy analizie bezwładności cieplnej przepono wych wymienników ciepła z uzebrowaną przeponą.

Zagadnienie nieustalonego przewodzenia ciepła w prętach i żebrach rozwiążemy dla przypadku zakłócenia stanu równowagi (wyrównana temperatura pręta, równa temperaturze płynu i temperaturze w zamocowaniu) przez skokową zmianę temperatury płynu. W praktyce spotykamy się częściej z zakłóceniem stanu ustalonego, ale przypadek ten można sprowadzić do poprzedniego. Dzięki liniowości równania różniczkowego nieustalonego przewodzenia ciepła, oraz warunków brzegowych, nieustalone pole temperatury przy zakłóceniu stanu ustalonego można przedstawić jako sumę pola temperatury w początkowym stanie ustalonym i pewnej, zmiennej w czasie, nadwyżki opisującej zakłócenie stanu równowagi określonego zerową temperaturą początkową. Powyższą superpozycję ilustruje rys. 11. Linia ciągła na rys. 11a przedstawia rozkład temperatury w pręcie w początkowym stanie ustalonym θ_0 , przy temperaturze płynu t_0 . Ten sam rozkład ilustruje rys. 11b. Wskutek skokowej zmiany temperatury płynu o wartość Δt_0 w pręcie następuje nieustalone przewodzenie ciepła. Chwilowy rozkład temperatury pręta przedsta-

wia linia przerywana, przy czym na rys. 11c wyraża ona nadwyżkę ponad początkowy stan ustalony.

Znajomość rozwiązania zagadnienia przy skokowej zmianie temperatury płynu umożliwia uzyskanie rozwiązania nieustalonego przewodzenia ciepła w pręcie (lub żebrze) przy dowolnej zmienności temperatury płynu. Funkcja przedstawiająca przebieg temperatury pręta przy dowolnej zmienności temperatury płynu jest splotem funkcji wyrażającej zmienność temperatury płynu i funkcji przedstawiającej przebieg temperatury pręta przy skokowej zmianie temperatury płynu.



Rys.11. Superpozycja pól temperatury przy nieustalonym przewodzeniu ciepła w pręcie

4.1. Pręt pryzmatyczny i płaskie żebro proste, o skończonej długości

Pręt pryzmatyczny (którego szczególnym wypadkiem jest płaskie żebro proste) posiadał wyrównaną temperaturę t_1 . W chwili początkowej $\tau = 0$ temperatura płynu zmienia się skokowo, osiągając wartość t_0 . Od tego momentu następuje w pręcie nieustalone przewodzenie ciepła, przy czym temperatura u nasady pręta nie zmienia się i wynosi t_1 . Na powierzchni pręta odbywa się konwekcyjna wymiana ciepła między prętem i płynem, przy niezmiennym współczynniku wnikania ciepła α . Dla uproszczenia rozważań zaniedbujemy wymianę ciepła na powierzchni czołowej pręta.

Po przyjęciu układu współrzędnych jak na rys. 2 równanie różniczkowe Fouriera-Kirchhoffa, warunki brzegowe oraz warunek początkowy przyjmują postać

$$\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \nabla_r^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (4.1)$$

$$-\lambda \frac{\partial v(\vec{r}, z, \tau)}{\partial n} = \alpha [v(\vec{r}, z, \tau) - t_0] \text{ dla } \vec{r} \in k, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v(\vec{r}, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

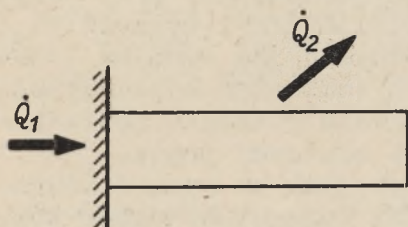
$$v(\vec{r}, 1, \tau) = t_1, \quad (4.4)$$

$$v(\vec{r}, z, 0) = t_1. \quad (4.5)$$

Podobnie jak dla zagadnień ustalonych, wprowadzamy średnią w przekroju temperaturę pręta

$$v_m(z, \tau) = \frac{1}{s} \iint_S v(\vec{r}, z, \tau) ds \quad (4.6)$$

przydatną dla określenia strumieni ciepła przewodzonego w przecie.



Rys. 12. Strumienie ciepła

\dot{Q}_1 i \dot{Q}_2

Interesujące są dwa strumienie ciepła - strumień przepływający u nasady żebra \dot{Q}_1 i strumień ciepła wymienianego na drodze konwekcji z płynem \dot{Q}_2 . Po przyjęciu za dodatnie strumieni skierowanych jak na rys. 12, otrzymujemy

$$\dot{Q}_1 = \lambda s \left(\frac{\partial \vartheta_m}{\partial z} \right)_{z=1} \quad (4.7)$$

Ciepło oddawane na drodze konwekcji do płynu można wyznaczyć z równania Newtona

$$\dot{Q}_2 = \int_0^1 \oint_k \alpha [\vartheta(\vec{r}, z, \tau) - t_0] dz dk,$$

wygodniej jednak określić je z bilansu energetycznego

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 - c \rho s \int_0^1 \frac{\partial \vartheta_m(z, \tau)}{\partial \tau} dz. \quad (4.8)$$

Po wprowadzeniu wielkości zredukowanych (2.17) - (2.21), (2.23) oraz zredukowanej temperatury

$$\theta = \frac{\vartheta - t_0}{t_1 - t_0} \quad (4.9)$$

równania definiujące rozpatrywany problem otrzymują postać bezwymiarową

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla_R^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \theta(\vec{R}, Z, Fo)}{\partial N} + Bi \theta(\vec{R}, Z, Fo) = 0, \quad \vec{R} \in K, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial \theta(\vec{R}, 0, Fo)}{\partial Z} = 0, \quad (4.3a)$$

$$\theta(\vec{R}, L, Fo) = 1, \quad (4.4a)$$

$$\theta(\vec{R}, Z, 0) = 1, \quad (4.5a)$$

$$\theta_m(Z, Fo) = \frac{1}{S} \iint_S \theta(\vec{R}, Z, Fo) dS, \quad (4.6a)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{Bi} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial Z} \right)_{Z=L}, \quad (4.7a)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{1}{Bi} \int_0^L \frac{\partial \theta_m}{\partial Fo} dZ = \alpha_1 - \frac{1}{Bi} \frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^L \theta_m dZ. \quad (4.8a)$$

W celu rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.1a)-(4.5a) zastosujemy transformację całkową względem zmiennej \vec{R} (równanie (2.33)). Stransformowane równania mają następującą postać

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = -\mu_k^2 \bar{\theta} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial Z^2}, \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Z} = 0 \quad \text{dla } Z = 0, \quad (4.3b)$$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \quad \text{dla } Z = L, \quad (4.4b)$$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \quad \text{dla } Fo = 0. \quad (4.5b)$$

Następnym etapem jest transformacja całkowa względem zmiennej Z . Przedtem jednak wygodnie jest wprowadzić pomocniczą funkcję

$$f(Z, Fo) = \bar{\theta} - N_k^2 A_k,$$

użycie której doprowadza do równań

$$\frac{\partial f}{\partial Fo} = -\mu_k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} - \mu_k^2 N_k^2 A_k, \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \quad \text{dla } Z = 0, \quad (4.3c)$$

$$f = 0 \quad \text{dla } Z = L, \quad (4.4c)$$

$$f = 0 \quad \text{dla } Fo = 0, \quad (4.5c)$$

Funkcja f spełnia takie same warunki brzegowe na granicach przedziału zmiennej Z co funkcja $v_n(Z)$ (podrozdz. 2.5.3), możemy zatem zastosować transformację całkową z jądrem $v_n(v_n, Z)$. Dla odróżnienia od poprzedniej transformacji, transformaty oznaczymy gwiazdką. Stransformowane równania mają postać

$$\frac{df^*}{dFo} = -\mu_k^2 f^* - v_n^2 f^* - \mu_k^2 N_k^2 A_k N_n^2 A_n, \quad (4.1d)$$

$$f^* = 0 \quad \text{dla } F = 0. \quad (4.5d)$$

Jak zwykle, warunki brzegowe względem zmiennej transformowanej zostały użyte przy transformacji występującej w równaniu różniczkowym pochodnej względem tej zmiennej.

Rozwiązaniem otrzymanego równania różniczkowego zwyczajnego (4.1d) przy warunku brzegowym (4.5d) jest funkcja

$$f^* = \frac{\mu_k^2 N_k^2 A_k N_n^2 A_n}{\mu_k^2 + \nu_n^2} \left[\exp(-(\mu_k^2 + \nu_n^2)F_0) - 1 \right].$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej

$$f = \sum_n A_n \nu_n(Z) \frac{N_k^2 A_k \mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_n^2} \left[\exp(-(\mu_k^2 + \nu_n^2)F_0) - 1 \right].$$

Powracając do funkcji $\bar{\theta}$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k + N_k^2 A_k \sum_n A_n \nu_n(Z) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_n^2} \left[\exp(-(\mu_k^2 + \nu_n^2)F_0) - 1 \right]$$

i dokonując transformacji odwrotnej, otrzymujemy

$$\theta = 1 + \sum_k \sum_n A_k A_n \nu_k(\vec{R}) \nu_n(Z) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_n^2} \left[\exp(-(\mu_k^2 + \nu_n^2)F_0) - 1 \right] \quad (4.10)$$

W celu uproszczenia powyższego równania zauważmy, że po czasie nieskończenie długim, tzn. dla $F_0 \rightarrow \infty$, uzyskujemy ustalone pole temperatury $\theta(\vec{R}, Z, F_0) \rightarrow \theta_s(\vec{R}, Z)$

$$\theta_s = 1 - \sum_k \sum_n A_k A_n \nu_k(\vec{R}) \nu_n(Z) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + \nu_n^2}. \quad (4.11)$$

Funkcja θ_s może być wyznaczona z równania (3.9), po uwzględnieniu przyjętego w niniejszym rozdziale założenia $K_{\alpha} = 0$ (brak wymiany ciepła na powierzchni czołowej)

$$\theta_s = \sum_k A_k v_k(\vec{R}) \frac{ch\mu_k Z}{ch\mu_k L}. \quad (4.12)$$

Równania (4.11) i (4.12) są oczywiście równoważne. Pierwsze z nich można uzyskać z drugiego po rozwinięciu funkcji $ch\mu_k Z$ w szereg względem układu funkcji $v_n(Z)$.

Wykorzystując (4.11) możemy równanie (4.10) przedstawić w postaci

$$\theta = \theta_s + \sum_k \sum_n A_k A_n v_k(\vec{R}) v_n(Z) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + v_n^2} \exp(-(\mu_k^2 + v_n^2)Fo). \quad (4.13)$$

Równanie (4.13) pozwala na wyznaczenie chwilowej temperatury w dowolnym punkcie pręta (żebra). Z równania tego można uzyskać funkcję przedstawiającą zmienność w czasie średniej w przekroju temperatury pręta. W tym celu należy użyć równania (4.6a)

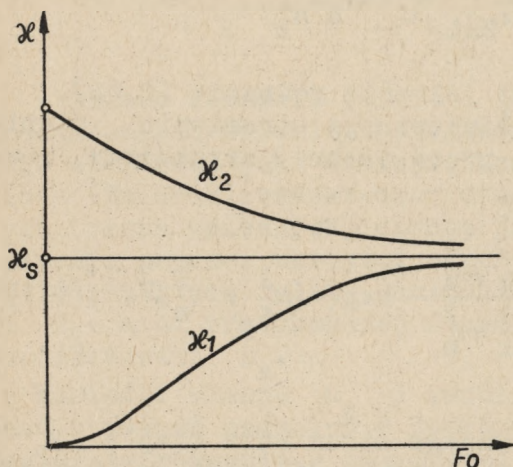
$$\theta_m = \theta_{sm} + \sum_k \sum_n B_k A_n v_n(Z) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + v_n^2} \exp(-(\mu_k^2 + v_n^2)Fo), \quad (4.14)$$

przy czym θ_{sm} przedstawia zredukowaną, średnią w przekroju temperaturę pręta w stanie ustalonym. Z równania (4.12) wynika, że

$$\theta_{sm} = \sum_k B_k \frac{ch\mu_k Z}{ch\mu_k L}. \quad (4.15)$$

Srednia w przekroju temperatura jest wielkością pomocniczą, służącą do wyznaczenia zredukowanych strumieni cie

pla. Podobnie jak zredukowane temperatury θ i θ_m , zredukowane strumienie będą sumą zredukowanego strumienia w stanie ustalonym α_s i pewnej nadwyżki znikającej przy $Fo \rightarrow \infty$ (rys. 13).



Przy wyznaczaniu zredukowanych strumieni α_1 i α_2 posłużymy się równaniami (4.7a) i (4.8a). Przy obliczaniu pochodnej występującej w równaniu (4.7a) otrzymamy z pierwszego członu równania (4.14) zredukowany strumień ciepła w stanie ustalonym

Rys.13. Zredukowane strumienie ciepła jako funkcje liczby Fouriera

$$\alpha_s = \frac{1}{Bi} \left(\frac{d\theta_{sm}}{dZ} \right)_{Z=L} = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \text{th} \mu_k L. \quad (4.16)$$

Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania (3.13), przy $K_{\alpha} = 0$ (brak wymiany ciepła na powierzchni czołowej pręta).

Dla zróżniczkowania drugiego członu równania (4.14) należy obliczyć pochodną funkcji $v_n(Z)$ (równ. (2.59))

$$\left(\frac{dv_n}{dZ} \right)_{Z=L} = \left(\frac{d(\cos v_n Z)}{dZ} \right)_{Z=L} = -v_n \sin v_n L.$$

Łącząc tę pochodną ze współczynnikiem A_n (równ. (2.61)) otrzymujemy

$$A_n \left(\frac{dv_n}{dz} \right)_{z=L} = L B_n v_n^2,$$

przy czym współczynniki B_n określa równanie (2.62).

Ostatecznie więc dla zredukowanego strumienia ciepła przewodzonego przez nasadę pręta (żebra) uzyskujemy równanie

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_s - \frac{L}{Bi} \sum_k \sum_n B_k B_n \frac{\mu_k^2 \mu_n^2}{\mu_k^2 + \mu_n^2} \exp(-(\mu_k^2 + \mu_n^2)Fo). \quad (4.17)$$

Dla wyznaczenia zredukowanego strumienia ciepła \mathcal{X}_2 z równania (4.8a) należy obliczyć całkę funkcji θ_m i w tym celu wystarczy scałkować funkcję $v_n(z)$. Korzystając z równania (2.62) otrzymujemy

$$A_n \int_0^L v_n(z) dz = L B_n.$$

Otrzymałą całkę funkcji θ_m należy następnie zróżniczkować względem zredukowanego czasu Fo , w wyniku czego otrzymamy

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 + \frac{L}{Bi} \sum_k \sum_n B_k B_n \mu_k^2 \exp(-(\mu_k^2 + \mu_n^2)Fo).$$

Po podstawieniu x_1 z równania (4.17) i po przekształceniach otrzymujemy ostatecznie

$$x_2 = x_s + \frac{L}{Bi} \sum_k \sum_n B_k B_n \frac{\mu_k^4}{\mu_k^2 + \nu_n^2} \exp(-(\mu_k^2 + \nu_n^2)Fo). \quad (4.18)$$

Uzyskane równania (4.17) i (4.18) wyrażając zależność zredukowanych strumieni ciepła: dopływającego i odpływającego od żebra, jako funkcji liczby Fouriera Fo , liczby Biota Bi oraz zredukowanej długości L . Dwie ostatnie z tych trzech zmiennych, oprócz jawnej postaci w równaniach, wpływają poprzez wartości własne i współczynniki szeregu - od liczby Biota zależą wartości własne μ_k i współczynniki B_k - a od zredukowanej długości wartości własne ν_n i współczynniki B_n .

Wartości własne μ_k i współczynniki B_k należy obliczać z równań podanych w podrozdziale 2.5, wybierając odpowiednie równanie w zależności od kształtu przekroju poprzecznego pręta. W szczególności dla płaskiego żebra prostego należy posłużyć się równaniami (2.46) i (2.49).

Wartości własne ν_n i współczynniki B_n wyznacza się zawsze z równań (2.60) i (2.62).

4.2. Pręt przyzmatyczny i płaskie żebro proste o nieskończonej długości

Rzeczywisty pręt (lub żebro) może być traktowany jako nieskończenie długi wówczas, gdy jego długość jest wielokrotnie większa od poprzecznego rozmiaru liniowego. Dobroć tego przybliżenia zależy ponadto od liczby Biota - im mniejsza liczba Biota, tym dłuższy musi być pręt, by mógł być traktowany jako nieskończenie długi. O zakresie stosowania tego przybliżenia można zorientować się na podstawie wykresów przedstawiających zależność efektywności w stanie ustalonym od liczby Biota i zredukowanej długości (rys. 3 i 4).

Dla zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła zastąpienie rzeczywistego pręta prętem nieskończenie długim daje dobre przybliżenie dla strumienia ciepła przepływające-

go przez płaszczyznę nasady pręta \dot{Q}_1 (w postaci zredukowanej x_1). Natomiast wskutek wydłużenia pręta do nieskończoności, strumień ciepła oddawanego do płynu \dot{Q}_2 osiąga wartość równą nieskończoności (por. drugi człon równ. (4.8)) przedstawiający szybkość zmiany energii wewnętrznej pręta). Wartość skończoną strumień ten osiąga dopiero po czasie nieskończenie długim (w stanie ustalonym). Dla wyznaczenia strumienia \dot{Q}_2 należy więc zawsze traktować pręt jako pręt o skończonej długości.

W opisie matematycznym nieustalonego przewodzenia ciepła w pręcie nieskończenie długim pozostają te same równania, co dla pręta o skończonej długości, należy jedynie zmienić zwrot osi Z i przyjąć jej początek w płaszczyźnie zamocowania pręta. Po wprowadzeniu tych samych bezwymiarowych wielkości zredukowanych otrzymujemy równania kryterialne

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla_R^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \theta(\bar{R}, Z, Fo)}{\partial N} + Bi \theta(\bar{R}, Z, Fo) = 0, \quad \bar{R} \in K, \quad (4.20)$$

$$\theta(\bar{R}, 0, Fo) = 1, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \theta(\bar{R}, \infty, Fo)}{\partial Z} = 0, \quad (4.22)$$

$$\theta(\bar{R}, Z, 0) = 1, \quad (4.23)$$

$$\theta_m(Z, Fo) = \frac{1}{S} \iint_S \theta_m(\bar{R}, Z, Fo) dS, \quad (4.24)$$

$$x_1 = \frac{1}{Bi} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial Z} \right)_{Z=0}. \quad (4.25)$$

Dla rozwiązania równania różniczkowego (4.19) przy warunkach brzegowych i początkowych (4.20) - (4.23) zastosujemy w pierw transformację całkową względem zmiennej \bar{R} , w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta. Stransformowane równania mają postać

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = -\mu_k^2 \bar{\theta} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial Z^2}, \quad (4.19a)$$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \quad \text{dla } Z = 0, \quad (4.21a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Z} = 0 \quad \text{dla } Z = \infty, \quad (4.22a)$$

$$\bar{\theta} = N_k^2 A_k \quad \text{dla } Fo = 0. \quad (4.23a)$$

Następnie wprowadzamy pomocniczą funkcję

$$f(Z, Fo) = \bar{\theta} - N_k^2 A_k, \quad (4.26)$$

uzyskując równania

$$\frac{\partial f}{\partial Fo} = -\mu_k^2 f + \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} - \mu_k^2 N_k^2 A_k, \quad (4.19b)$$

$$f = 0 \quad \text{dla } Z = 0, \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \quad \text{dla } Z = \infty, \quad (4.22b)$$

$$f = 0 \quad \text{dla } Fo = 0. \quad (4.23b)$$

Dla funkcji f zastosujemy transformację Laplace'a-Carsona względem zmiennej F_0

$$f^*(Z, p) = p \int_0^{\infty} f(Z, F_0) e^{-p F_0} d F_0. \quad (4.27)$$

Stransformowane równania (4.19b) - (4.23b) są następujące

$$\frac{d^2 f^*}{dZ^2} - (p + \mu_k^2) f^* = \mu_k^2 N_k^2 A_k, \quad (4.19c)$$

$$f^* = 0 \quad \text{dla } Z = 0, \quad (4.21c)$$

$$\frac{df^*}{dZ} = 0 \quad \text{dla } Z = \infty. \quad (4.22c)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, przy towarzyszących mu warunkach brzegowych doprowadza do funkcji

$$f^* = N_k^2 A_k \frac{\mu_k^2}{p + \mu_k^2} \left[\exp(-Z \sqrt{p + \mu_k^2}) - 1 \right]. \quad (4.28)$$

W celu uzyskania funkcji $\theta(\vec{R}, Z, F_0)$, przedstawiającej rozkład temperatury w nieskończenie długim pręcie, należy dokonać dla funkcji f^* odwrotnej transformacji Laplace'a - Carsona, powrócić do funkcji θ i dla tej funkcji dokonać transformacji odwrotnej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta. Ponieważ jednak zależy nam głównie na wyznaczeniu zredukowanego strumienia ciepła α_1 , więc można uprościć ten proceder szukając od razu pochodnej $(\partial \theta / \partial Z)_{Z=0}$, potrzebnej dla wyznaczenia α_1 . W tym celu wyznaczamy pochodną

$$\left(\frac{df^*}{dZ} \right)_{Z=0} = - N_k^2 A_k \frac{\mu_k^2}{\sqrt{p + \mu_k^2}}. \quad (4.29)$$

Korzystając z tablic transformat funkcji (por. np. [19, str. 622]) otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=0} = - N_k^2 A_k \mu_k \operatorname{erf}(\mu_k \sqrt{Fo}).$$

Z równania (4.26) wynika, że

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Z},$$

a więc

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Z}\right)_{Z=0} = - N_k^2 A_k \mu_k \operatorname{erf}(\mu_k \sqrt{Fo}). \quad (4.30)$$

Dokonując na równaniu (4.30) transformacji odwrotnej (równ. (2.35)) otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial Z}\right)_{Z=0} = - \sum_k A_k v_k(\bar{R}) \mu_k \operatorname{erf}(\mu_k \sqrt{Fo}). \quad (4.31)$$

Dokonując uśrednienia (4.24) w płaszczyźnie przekroju poprzecznego i wykorzystując przy tym związek (2.40), dochodzimy do równania

$$\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial Z}\right)_{Z=0} = - \sum_k B_k \mu_k \operatorname{erf}(\mu_k \sqrt{Fo}), \quad (4.32)$$

które po połączeniu z równaniem (4.25) daje

$$\alpha_1 = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k \operatorname{erf}(\mu_k \sqrt{Fo}). \quad (4.33)$$

W chwili początkowej zredukowany strumień ciepła α_1 jest równy zeru

$$\alpha_1(0) = 0,$$

a po czasie nieskończenie długim osiąga wartość dla stanu ustalonego

$$\lim_{Fo \rightarrow \infty} \alpha_1 = \alpha_s = \frac{1}{Bi} \sum_k B_k \mu_k,$$

co jest zgodne z równaniem (3.16). Zredukowany strumień ciepła zmienia się zatem w zakresie

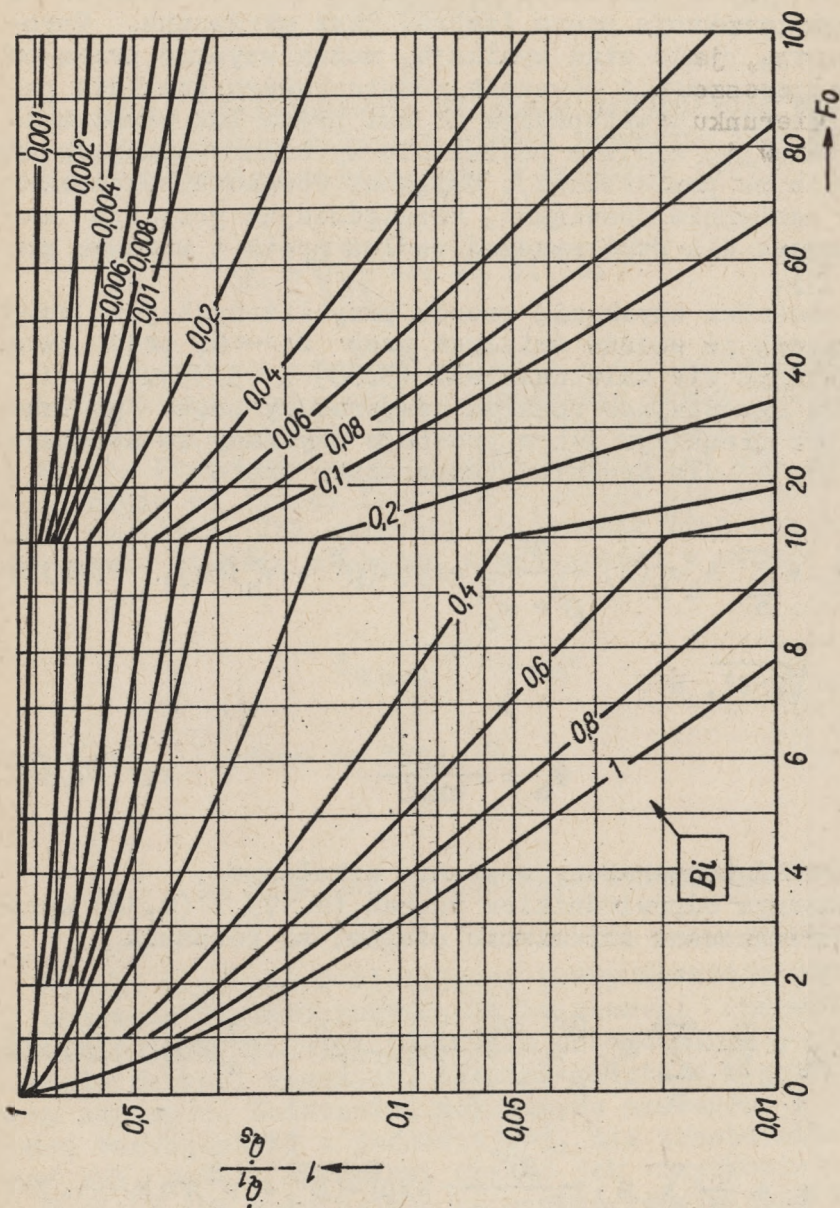
$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_s$$

Zredukowany strumień ciepła α_1 jest, w myśl równania (2.23), stosunkiem strumienia ciepła \dot{Q}_1 przewodzonego przez nasadę pręta do strumienia ciepła \dot{Q}_0 , jakie przepływałoby przez płaszczyznę zamocowania po usunięciu pręta. Odnosząc strumień ciepła \dot{Q}_1 do jego wartości w stanie ustalonym \dot{Q}_s , otrzymujemy wielkość zredukowaną

$$\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_s} = \frac{\alpha_1}{\alpha_s}, \quad (4.34)$$

która zmienia się w przedziale (0,1).

Na rys. 14 przedstawiono wykres zależności zredukowanego strumienia ciepła \dot{Q}_1/\dot{Q}_s od liczby Fouriera, przy różnych liczbach Biota, dla płaskiego żebra prostego.



Rys. 14. Zredukowany strumień ciepła przepływającego w stanie nieustalonym przez nasadę nieskończenie długiego płaskiego żebra prostego

4.3. Wzory przybliżone dla małych liczb Biota

Podobnie jak dla ustalonego przewodzenia ciepła można przyjąć, że gdy liczba Biota jest mała, to temperatura w poprzecznym przekroju pręta (żebra) jest wyrównana. Uproszczone wzory, jakie stąd wynikają, można uzyskać przez od powiednie uproszczenie równania różniczkowego (zniknie pochodna w kierunku prostopadłym do osi pręta lub płaszczyzny żebra, a w jej miejsce pojawi się wyrażenie ujmujące wymianę ciepła na powierzchni). Uzyskane równanie różniczkowe należy następnie rozwiązać, uwzględniając przy tym warunki brzegowe dla współrzędnej wzdłuż pręta i warunek początkowy [1].

Innym sposobem uzyskania wzorów przybliżonych jest przejście graniczne ze wzorów ścisłych przy $Bi \rightarrow 0$, przy czym należy posłużyć się zależnościami (3.58) i (3.59).

Równanie określające rozkład temperatury pręta pryzmatycznego lub płaskiego żebra prostego uzyskamy ze ścisłego równania (4.14) dla średniej temperatury pręta

$$\theta = \theta_s + \sum_n A_n v_n(z) \frac{\beta^2}{\beta^2 + \gamma_n^2} \exp(-(\beta^2 + \gamma_n^2)Fo), \quad (4.35)$$

gdzie $\beta = \sqrt{2 Bi}$, a

$$\theta_s = \frac{\text{ch}\beta Z}{\text{ch}\beta L} \quad (4.36)$$

wyraża rozkład temperatury w stanie ustalonym.

Uproszczonym odpowiednikiem równań (4.17) i (4.18) wyrażających zredukowane strumienie ciepła, są równania

$$\chi_1 = \chi_s - \frac{L}{Bi} \sum_n B_n \frac{\beta^2 \gamma_n^2}{\beta^2 + \gamma_n^2} \exp(-(\beta^2 + \gamma_n^2)Fo), \quad (4.37)$$

$$\chi_2 = \chi_s + \frac{L}{Bi} \sum_n B_n \frac{\beta^4}{\beta^2 + \gamma_n^2} \exp(-(\beta^2 + \gamma_n^2)Fo), \quad (4.38)$$

w których

$$\alpha_s = \frac{\beta}{Bi} \operatorname{th}\beta L. \quad (4.39)$$

Dla pręta nieskończenie długiego uproszczony wzór wyrażający zredukowany strumień ciepła przewodzonego przez nasadę żebra (pręta) otrzymujemy z równania (4.33).

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{Bi}} \operatorname{erf} \sqrt{2 Bi Fo}. \quad (4.40)$$

Błąd wynikły z nieuwzględnienia nierównomiernego rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym pręta (żebra) zależy od wartości kryteriów Bi i Fo . Decydujący wpływ ma liczba Biota. Przy ustalonej liczbie Biota błąd nie zależy monotonicznie od liczby Fouriera - osiąga dla pewnej jej wartości maksimum. Jak wykazały obliczenia błąd ten jest około dwukrotnie większy od błędu efektywności w stanie ustalonym

$$\varepsilon_{\alpha_{\max}} \approx 2 \varepsilon_{\alpha_s}$$

Wartości ε_{α_s} podano na rys. 10.

5. NIEKTÓRE ZAGADNIENIA NUMERYCZNE

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy wyrażają się w postaci szeregów nieskończonych. Są to szeregi przedstawiające rozwinięcie wynikowych funkcji w ortogonalnym i zupełnym układzie funkcji własnych, lub też powstałe z przekształcenia tych szeregów. Zbieżności uzyskanych szeregów i to zbieżności bezwzględnej i jednostajnej, nie trzeba więc udowadniać [2]. Należy natomiast zbadać jak szybkobieżne są te szeregi. W tym celu należy oszacować resztę powstałą z przybliżenia sumy nieskończonej szeregu sumą częściową (skoń-

czonej ilości początkowych wyrazów). Oszacowanie to jest konieczne przy numerycznym wyznaczaniu sumy szeregu z określoną dokładnością.

W pracy niniejszej doprowadzono do postaci liczbowej funkcje wyrażające zredukowane strumienie ciepła przewodzonego w prętach przyrmatycznych i żebrach (przy czym dla stanu nieustalonego funkcję tę stabelaryzowano jedynie dla wypadku płaskiego żebra prostego, nieskończenie długiego). Szeregi, za pomocą których wyrażają się te funkcje są zbudowane w ten sposób, że ich wyrazy są iloczynami wyrazów dwóch ciągów

$$\alpha = \frac{1}{Bi} \sum_k (B_k \mu_k) b_k. \quad (5.1)$$

Ciąg $\{B_k \mu_k\}$ jest zbudowany ze współczynników B_k i wartości własnych μ_k (por. podrozdz. 2.5). Dla płaskiego żebra (prostego i okrągłego)

$$B_k \mu_k = \frac{2 Bi^2}{\mu_k (Bi^2 + Bi + \mu_k^2)}, \quad (5.2)$$

dla okrągłego pręta

$$B_k \mu_k = \frac{4 Bi^2}{\mu_k (Bi^2 + \mu_k^2)}. \quad (5.3)$$

Ciąg $\{B_k \mu_k\}$ jest dodatni i malejący do zera. Pierwsze wyrazy tego ciągu dla niektórych wartości liczby Biota i dla wypadku płaskiego żebra podano w tablicy 1 (z dokładnością do 5 miejsc po przecinku).

Wyrazy ciągu $\{B_k \mu_k\}$ dla płaskiego żebra

B_i	$B_1 \mu_1$	$B_2 \mu_2$	$B_3 \mu_3$	$B_4 \mu_4$	$B_5 \mu_5$	$B_6 \mu_6$
0,001	0,02236	0,00000				
0,01	0,07065	0,00000				
0,1	0,22175	0,00016	0,00002	0,00001	0,00000	
1,0	0,65041	0,01310	0,00191	0,00058	0,00025	0,00013

Wyrazy ciągu b_k zawierają rozmiary geometryczne pręta (żebra), a dla nieustalonego przewodzenia ciepła dodatkowo zredukowany czas (liczbę Fouriera). Postać tych wyrazów, dla poszczególnych przypadków, można odczytać z równań (3.13), (3.30) i (4.33).

Ciąg b_k jest monotoniczny i ograniczony, a konkretnie, jest rosnący i dąży do 1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1. \tag{5.4}$$

Zatem dla dowolnie małego ε istnieje takie $K = K(\varepsilon)$, że dla $k > K$

$$1 - \varepsilon < b_k < 1 \tag{5.5}$$

co praktycznie oznacza, że przy określonej dokładności liczenia ε począwszy od $k = K$ można przyjmować $b_k = 1$.

Dla oszacowania reszty szeregu (5.1) wystarczy więc oszacować sumę szeregu

$$R_n = \frac{1}{B_i} \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \mu_k, \tag{5.6}$$

gdzie n oznacza numer wyrazu szeregu, na którym zakończono sumowanie, przy czym oczywiście dla $k = n + 1$ zachodzi (5.5). Dla oszacowania reszty (5.6) posłużymy się kryterium całkowym

$$R_n < \frac{1}{Bi} \int_n^{\infty} B(k) \mu(k) dk. \quad (5.7)$$

Dla przypadku płaskiego żebra, po wykorzystaniu równania (5.2) otrzymujemy

$$R_n < 2 Bi \int_n^{\infty} \frac{dk}{\mu(k) [\mu(k)^2 + Bi^2 + Bi]}.$$

Wartości własne μ_k dla tego przypadku leżą w przedziałach ograniczonych kolejnymi wielokrotnościami liczby π . Zachodzi zatem nierówność

$$\mu_k > (k - 1)\pi. \quad (5.8)$$

z której wynika

$$R_n < 2Bi \int_n^{\infty} \frac{dk}{(k-1)\pi [(k-1)^2\pi^2 + Bi^2 + Bi]}.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy ostatecznie

$$R_n < \frac{1}{\pi(Bi+1)} \left[\ln \left(1 + \frac{Bi^2 + Bi}{(n-1)^2\pi^2} \right) \right] \quad (5.9)$$

Podobne oszacowanie można przeprowadzić dla okrągłego pręta. I w tym wypadku obowiązuje nierówność (5.8), ponieważ wartości własne leżą w przedziałach ograniczonych kolejnymi-

mi miejscami zerowymi funkcji $J_1(\mu)$, a te są większe od odpowiednich wielokrotności liczby π . Po obliczeniu całki otrzymamy

$$R_n < \frac{2}{\pi Bi} \left[\ln \left[1 + \left(\frac{Bi}{(n-1)\pi} \right)^2 \right] \right]. \quad (5.10)$$

Wyprowadzone wzory (5.9) i (5.10) nadają się do szacowania reszty szeregu przy przybliżeniu jego sumy sumą co najmniej dwóch pierwszych wyrazów.

Sumowanie wynikowych szeregów wymaga znajomości wartości własnych μ_k dla rozległej płyty i drugiego walca. Wykonując obliczenia za pomocą arytmometrów można posłużyć się gotowymi tablicami (podaje się np. Łykw [10]). Przy wykonywaniu obliczeń na maszynie cyfrowej wygodniej jest jednak zaprogramować obliczenie tych wartości własnych. W tym celu należy opracować algorytm numerycznego rozwiązywania równań przestępnych (2.46) i (2.52), których kolejnymi dodatnimi pierwiastkami są wartości własne. Najdogodniejsza do tego celu jest metoda stycznych Newtona. Przy metodzie tej bardzo istotny jest dobór startowej wartości pierwiastka (pierwsze przybliżenie do pierwszej iteracji). Nie przedstawia problemu określenia przedziału, w którym znajduje się szukany pierwiastek (o określonym wskaźniku k), gdyż pierwiastki równania (2.46) leżą w przedziałach ograniczonych kolejnymi wielokrotnościami liczby π , a pierwiastki równania (2.52) w przedziałach ograniczonych kolejnymi miejscami zerowymi funkcji $J_1(\mu)$. Z danego przedziału należy wybrać pierwsze przybliżenie pierwiastka w ten sposób, by w punkcie tym funkcja, mająca się dla pierwiastka wyzerować, miała ten sam znak co jej druga pochodna. Okazuje się, że warunek ten jest spełniony dla punktów leżących pomiędzy dolną granicą przedziału pierwiastkowego, pierwiastkiem

Zbieżność procesu iteracyjnego metody Newtona można zapewnić również wtedy, gdy wartość startowa będzie położona dość blisko poszukiwanego pierwiastka, a przy tym nie musi być spełniony wyżej omówiony warunek zgodności znaków. Zbliżenie się do poszukiwanego pierwiastka można uzyskać przez kolejne dzielenie na pół przedziału, w którym znajduje się pierwiastek. Z dwu przedziałów uzyskanych z poprzedniego

podziału należy wziąć do dalszego dzielenia ten, w którym znajduje się poszukiwany pierwiastek. Powyższy warunek wymaga jedynie badania znaku funkcji. Metoda ta może służyć do bezpośredniego wyznaczenia pierwiastka z dowolną dokładnością. Jeżeli jednak żądamy dużej dokładności ilość iteracji jest wielokrotnie większa niż przy metodzie stycznych.

W niektórych wynikowych wzorach pojawiają się zmodyfikowane funkcje Bessela I_0 , I_1 , K_0 i K_1 oraz funkcja błędów erf. Ponieważ maszyna cyfrowa ZAM-2, na której wykonano obliczenia, nie posiada ich ani wśród funkcji języka SAKO, ani też wśród podprogramów bibliotecznych, zaistniała konieczność opracowania dla tych funkcji podprogramów. W tym celu wykorzystano równania aproksymacyjne [4] powstałe z rozwinięcia tych funkcji w szeregi (dla małych wartości argumentu w szeregi potęgowe, dla dużych wartości w szeregi asymptotyczne). Dokładność tych przybliżeń mieści się w granicach 10^{-6} - 10^{-8} .

Wszystkie programy obliczeń zostały wykonane przez autora w języku SAKO. Obliczenia wykonane na maszynie cyfrowej ZAM-2. Na podstawie wyników obliczeń sporządzono zamieszczone w pracy wykresy wynikowych funkcji.

LITERATURA

- [1] Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of heat in solids - Oxford 1959.
- [2] Courant R., Hilbert D.: Methoden der Mathematischen Physik, - t. I - Berlin 1931.
- [3] Ditkin W.A., Prudnikow A.P.: Integralnyje preobrazowania i operacionnoje isczislenije - GIFML, Moskwa 1961.
- [4] Dymarskij J.S. i in.: Sprawocznik programista - GSISP, Leningrad 1963.

- [5] Gordow A.N.: Osnowy pirometrii - Izd. Metallurgija, 1964.
- [6] Haupt P.: Czujnik temperatury w pomiarach cieplnych i w obwodzie automatycznej regulacji - Zesz. Nauk. AGH, Kraków 1962.
- [7] Jakob M.: Heat transfer, t. I - New York 1956.
- [8] Kondratiew G.M.: Tiepłowyje izmierenija - Maszgiz, Moskwa - Leningrad 1957.
- [9] Kriworuczenko W.W., Korobow M.A.: Tiepłowyje i energeticeskije balansy elektrolizerow - Metallurgizdat, Moskwa 1963.
- [10] Łykw A.W.: Teorija tiepłoprowodnosti - GITTL, Moskwa 1952.
- [11] Łykw A.W., Iwanow A.W.: Koniecznyje integralnyje priobrazowanija i ich primienienije k rieszeniju zadacz tiepłoprowodnosti. Tiepło- i masseobmien w processach isparenija. Izd. Ak. Nauk SSSR, Moskwa 1958, str. 105-145.
- [12] Madejski J.: Teoria wymiany ciepła - PWN 1963.
- [13] Ochęduszek S.: Termodynamika stosowana - WNT 1964.
- [14] Około-Kuślak W.: Straty ciepła na rzecz otoczenia przez sworznie prądowe w elektrolizerach aluminium - Zesz. Nauk. Pol. SI. Energetyka z. 16, Gliwice 1964, str. 87-111.
- [15] Położij G.N.: Urawnienija matematycznej fizyki - Wysszaja Szkoła, Moskwa 1964.
- [16] Schneider P.J.: Conduction heat transfer - Addison Wesley, Cambridge Mass. 1955.

- [17] Staniszewski B.: Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne - PWN 1963.
- [18] Tranter C.J.: Integral transforms in mathematical physics - London - New York 1951.
- [19] Wagner K.W.: Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a (przekład z j. niem.) - PWN 1960.
- [20] Gdula S.J.: Ustalony przepływ ciepła w pryzmatycznych prętach wystających - Zesz. Nauk. Pol. Sl. Energetyka z. 16, Gliwice 1964, str. 39-66.

STRESZCZENIE

W pracy podano analityczne rozwiązania zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w prętach pryzmatycznych i żebrach. Rozwiązania te uwzględniają wpływ nierównomiernego rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym pręta lub żebra. Szczegółowe obliczenia wykonano dla okrągłego pręta oraz płaskiego żebra prostego i okrągłego. Dla wypadku pryzmatycznego pręta uwzględniono również obecność wewnętrznych źródeł ciepła.

Przeprowadzono porównanie uzyskanych wyników z wynikami teorii klasycznej opartej na założeniu wyrównanej temperatury w przekroju poprzecznym. Rozbieżność obu teorii jest tym większa, im większa jest liczba Biota $Bi = \alpha l_0 / \lambda$, gdzie l_0 jest charakterystycznym rozmiarem liniowym przekroju poprzecznego (grubość żebra, promień pręta). Natomiast przy $Bi \rightarrow 0$ uzyskane równania przechodzą w równania teorii klasycznej.

Do rozwiązania zastosowano skończone transformacje całkowe. Obliczenia numeryczne przeprowadzono przy użyciu maszyny cyfrowej ZAM-2.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ И РЕБРАХ

Резюме

В работе дано аналитическое решение задач стационарной и нестационарной теплопроводности в призматических стержнях и ребрах. Эти решения учитывают неравномерность распределения температуры в поперечном сечении. Сделано количественные расчеты для круглого стержня, прямоугольного и круглого ребра.

Сравнено полученные результаты с результатами классической теории, основанной на предположении равномерного распределения температуры в поперечном сечении стержня или ребра. Расхождение этих теорий тем больше, чем больший критерий Био $Bi = \alpha l_0 / \lambda$ где l_0 - характерный размер поперечного сечения (толщина ребра, радиус стержня). При $Bi \rightarrow 0$ полученные уравнения переходят в уравнения классической теории.

В работе использовано конечные интегральные преобразования. Численные расчеты сделано на электронной вычислительной машине ЗАМ-2.

Heat conduction in the prismatic rods and fins

S u m m a r y

In the paper description of the analytic solution of steady and unsteady state of heat conduction problems in the prismatic rods and fins is given. These solutions are considering the effect of uniform temperature distribution in the rod and fin cross section. Detailed calculations were worked out for circular rod or straight fin of rectangular profile and circular fin.

Comparison of obtained results with the classic theory results based on uniform temperature in the cross section assuming, has been discussed. The difference of both theories is as greater as greater is the Biot number $Bi = \alpha l_0 / \lambda$, where l_0 - characteristic length of cross section (fin thickness, rod radius). The obtained equations pass into equations of the classic theory at $Bi \rightarrow 0$. To obtain, a solution, the finite integral transformations were used. Numerical calculations were worked out by using ZAM-2 computer.



S.J. Gdula: Przewodzenie ciepła w prętach przyzmatycznych i żebrach

E r r a t a

Strona	Jest	Ma być
13 ¹⁸	porównywa	porównywać
17 równ. (2.14a)	$\theta_m = \frac{1}{S} \iiint_S \theta ds$	$\theta_m = \frac{1}{S} \iint_S \theta ds$
21 ⁷	funkcyj	funkcyj
27 ¹⁰	r nanie	równanie
36 rys.4	t_1 nad ramką rysunku	t_1 umieszczone nieco niżej końca strzałki strumienia ciepła \dot{Q}
38 ⁵	t_1	t_1
40 równ. (3.30)	znak "-" w mianowniku	znak "+"
40 równ. (3.31)	+ 1)	+ 1
46 ¹⁰	wpływ na	wpływ ma
49 ²	wykonania	wykonaniu
49 równ. (3.46)	neczytelny dolny wskaźnik przy literze μ	wskaźnik 1
59 ¹¹	i (3.13)	i (3.13)).
61 równ. (3.77)	brak	nawias otwierający w liczniku przed wyrażeniem $\frac{\mu_k}{K_\alpha Bi}$
63 ⁷	łyn	płyn

Strona	Jest	Ma być
81 ₁₂	$\varepsilon_{\kappa \max} \approx 2\varepsilon_{\kappa s}$	$\varepsilon_{\kappa \max} \approx 2\varepsilon_{\kappa s}$
83 ₁	$\sum_{k=n+1}$	$\sum_{k=n+1}^{\infty}$
84 równ.(5.9)	zbędne nawiasy prostokątne	
85 równ.(5.10)	$\frac{2}{\pi Bi} \left[\ln$	$\frac{2}{\pi Bi} \ln$
85 ₉	pierwiastkowego,	pierwiastkowego, a

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty z serii En.:

- Energetyka z. 1, 1956 r., s. 174, zł 26,—
- Energetyka z. 2, 1957 r., s. 118, zł 24,—
- Energetyka z. 3, 1959 r., s. 62, zł 7,—
- Energetyka z. 4, 1960 r., s. 113, zł 22,80
- Energetyka z. 5, 1961 r., s. 103, zł 16,25
- Energetyka z. 6, 1961 r., s. 55, zł 4,15
- Energetyka z. 7, 1961 r., s. 60, zł 5,50
- Energetyka z. 8, 1961 r., s. 50, zł 3,70
- Energetyka z. 9, 1962 r., s. 127, zł 9,55
- Energetyka z. 10, 1962 r., s. 73, zł 5,50
- Energetyka z. 11, 1963 r., s. 178, zł 9,30
- Energetyka z. 12, 1964 r., s. 89, zł 4,65
- Energetyka z. 13, 1964 r., s. 109, zł 8,10
- Energetyka z. 14, 1964 r., s. 104, zł 8,15
- Energetyka z. 15, 1964 r., s. 69, zł 4,65
- Energetyka z. 16, 1964 r., s. 149, zł 7,50
- Energetyka z. 17, 1964 r., s. 152, zł 7,10
- Energetyka z. 18, 1965 r., s. 128, zł 6,40
- Energetyka z. 19, 1965 r., s. 92, zł 6,—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P 3349 | 65

ok. Pol. SI. 1684.60.60.000