ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 12 Nr kol. 244

LEON LASEK
Katedra Elektroniki Przemysłowej

WPŁYW PASMA CZĘSTOTLIWOŚCI IDEALNEGO WZMACNIACZA PRĄDU ZMIENNEGO NA WZMOCNIENIE CAŁKOWITE, WZMACNIACZA PRĄDU STAŁEGO Z PRZETWARZANIEM

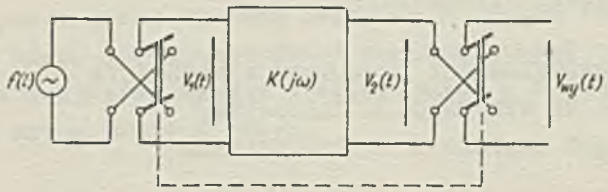
Streszczenie. W niniejszej pracy przeprowadzono analizę działania wzmacniacza prądu stałego z przetwarzaniem. Określono funkcję widmową sygnału wyjściowego dla pobudzenia sinusoidalnego. Pozwala ona na określenie charakterystyki amplitudowo-fazowej wzmacniacza, a co za tym idzie określa jego własności dynamiczne. Główny jednak nacisk w pracy położono na określenie współczynnika wzmocnienia toru prądu stałego. Wykazano jak na ten współczynnik wpływa pasmo częstotliwości idealnego wzmacniacza prądu zmiennego oraz współczynnik przetwarzania.

1. Wstęp

W technice pomiarowej ważną rolę odgrywają wzmacniacze prądu stałego, których zadaniem jest wzmacnianie bardzo małych sygnałów napięcia lub prądu stałego. Podstawową wadą tych wzmacniaczy jest niestałość zera, którą zmniejsza się przez stosowanie układów z przetwarzaniem. Należy zaznaczyć, że jeszcze obecnie buduje się najlepsze wzmacniacze na elementach dyskretnych, które pod wieloma względami przewyższają wzmacniacze budowane na obwodach scalonych (1).

Zasadę działania wzmacniacza z przetwarzaniem przedstawiono na rysunku 1. Sygnał f(t) wchodzi na modulator oparty na działaniu klucza K_1. W wyniku modulacji otrzymujemy sygnał $V_1(t)$ który jest już sygnałem prądu zmiennego. Ten sygnał wzmocniony przez wzmacniacz prądu zmiennego, oznaczono na rys. 1 przez $V_2(t)$. Sygnał $V_2(t)$ wchodzi na demodulator zbudowany w oparciu o działanie klucza K_2. Klucze K_1 i K_2 pracują synchronicznie. W wyniku demodulacji otrzymujemy sygnał $V_{wy}(t)$, z którego

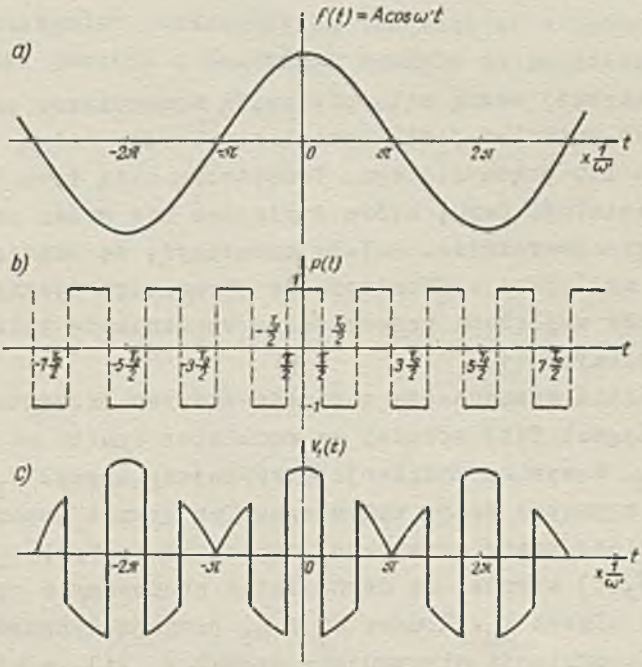
po odfiltrowaniu odzyskujemy sygnał prądu stałego ale już odpowiednio wzmocniony.



Rys. 1. Wzmacniacz prądu stałego z przetwarzaniem

2. Analiza pracy wzmacniacza prądu stałego z przetwarzaniem

W niniejszej pracy zająłem się analizą wpływu pasma przenoszenia idealnego wzmacniacza prądu zmiennego na wzmocnienie głównego toru prądu stałego.



Rys. 2. Przebiegi czasowe

Rysunek 2 ilustruje pracę wzmacniacza prądu stałego z przetwarzaniem. Niech sygnał wejściowy f(t) będzie sinusoidalny i równy

$$f(t) = A \cos \omega' t$$

pracę modulatora o działaniu omówionym powyżej możemy opisać funkcją p(t) (rys. 2b). Jeżeli obecnie przez p(t) pomnożymy sygnał wejściowy f(t) to w wyniku tego otrzymamy sygnał $V_1(t)$ (rys. 2c). A więc

$$V_1(t) = f(t)\, p(t)$$

Przedstawiamy funkcję P(t) w postaci szeregu Fouriera

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp\left(jk2\pi \frac{t}{T_0}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\,\omega_0 t)$$

gdzie:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ – oznacza częstotliwość przetwarzania sygnału f(t).

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(t).\exp(-jk\,\omega_0 t)\, dt = \frac{2}{k\pi} \sin k\pi\gamma & \text{dla } k \neq 0 \\ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(t).dt = (2\gamma - 1) & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

A wartość $V_1(t)$ przyjmie postać

$$V_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k\, f(t).\exp(jk\,\omega_0 t)$$

Znajdziemy obecnie transformację Fouriera dla wyrażania $V_1(t)$

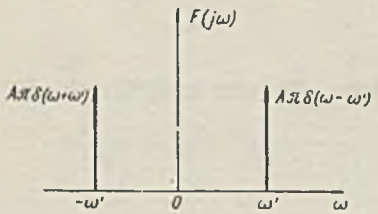
$$V_1(j\omega) = \mathcal{F}\left[V_1(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(t).\exp(-j\omega t).dt =$$

$$= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.f(t).\exp(jk\,\omega_0 t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left\{\mathcal{F}\left[f(t).\exp(jk\,\omega_0 t)\right]\right\} \quad (1)$$

Transformacja Fouriera funkcji (f(t) jest równa następującemu wyrażeniu

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right] = A\,\pi\left[\delta(\omega-\omega') + \delta(\omega+\omega')\right]$$

Wielkość ta jest sumą dwóch funkcji Diraca przesuniętych względem osi $F(j\omega)$ o częstotliwości ω' i $-\omega'$, patrz rysunek 3.



Rys. 3. Funkcja widmowa sygnału $f(t) = A\cos\omega t$

Mając daną transformację funkcji f(t) i korzystając z twierdzenia o przesunięciu możemy napisać że funkcja widmowa $V_1(j\omega)$ będzie miała postać

$$V_1(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, A\,\pi\left[\delta(\omega - k\,\omega_0 - \omega') + \delta(\omega - k\,\omega_0 + \omega')\right]$$

gdzie:

$\gamma = \frac{\tau}{T_0}$ – współczynnik przetwarzania sygnału wejściowego

τ – czas który chopper znajduje się w jednym z swoich możliwych położeń w okresie T_0 (rys. 2b).

Mając dane $V_1(j\omega)$ możemy łatwo wyznaczyć $V_2(j\omega)$, przez którą to wielkość oznaczamy transformację Fouriera sygnału $V_2(t)$. A więc

$$V_2(j\omega) = \left[V_2(t)\right]$$

Wartość $V_2(j\omega)$ można otrzymać z zależności

$$V_2(j\omega) = K(j\omega).V_1(j\omega) =$$

$$= K(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A \pi\left[\delta(\omega - k\omega_0 - \omega') + \delta(\omega - k\omega_0 + \omega')\right] \quad (2)$$

Analitycznie problem demodulacji polega na pomnożeniu funkcji $V_2(t)$ przez $p(t)$ w wyniku czego otrzymamy sygnał wyjściowy $V_{wy}(t)$

$$V_{wy}(t) = V_2(t).p(t)$$

lub po wykonaniu transformacji Fouriera z powyższego wyrażenia otrzymamy

$$V_{wy}(j\omega) = \mathcal{F}\left[V_2(t)\ p(t)\right]$$

Korzystając z twierdzenia o splocie w obszarze częstotliwości możemy napisać że

$$V_{wy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_2(jx).P(j\omega - jx).dx$$

gdzie

$$P(j\omega) = \mathcal{F}\left[p(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

oraz

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi\gamma & \text{dla } n \neq 0 \\ (2\gamma - 1) & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

Przekształćmy obecnie wyrażenie na $V_2(j\omega)$ wykonując operację mnożenia $K(j\omega)$ przez poszczególne wyrazy sumy nieskończonej. W wyniku otrzymamy

$$V_2(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A \pi \left[\hat{a}'_k \, \delta(\omega - k\omega_0 - \omega') + \hat{a}''_k \, \delta(\omega - k\omega_0 + \omega')\right]$$

gdzie

$$\hat{a}'_k = \left|K(k\omega_0 + \omega')\right| \exp\left[j\,\varphi'_k(k\omega_0 + \omega')\right]$$

$$\hat{a}''_k = \left|K(k\omega_0 - \omega')\right| \exp\left[j\,\varphi''_k(k\omega_0 - \omega')\right]$$

a wyrażenie na $V_{wy}(j\omega)$ przyjmie obecnie postać

$$V_{wy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A \pi \left[\hat{a}'_k \, \delta(x - k\omega_0 - \omega') + \hat{a}''_k \, \delta(x - k\omega_0 + \omega')\right] \times \right.$$

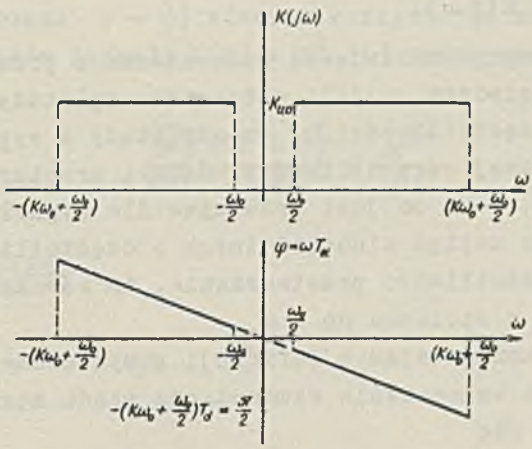
$$\left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, 2\pi\delta(\omega - x - n\omega_0)\right\}$$

Korzystając z wyprowadzonego w dodatku wzoru na splot dwóch funkcji Diraca możemy napisać że ostatecznie wyrażenie na $V_{wy}(j\omega)$ przyjmie postać

$$V_{wy}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k a_n A\pi \left\{ \hat{a}'_k \delta(\omega - (n+k)\omega_0 - \omega') + \right.$$

$$\left. + \hat{a}''_k \delta(\omega - (n+k)\omega_0 + \omega') \right\} \qquad (3)$$

Wzór 3 opisuje nam funkcję widmową sygnału wyjściowego jaką otrzymamy w wzmacniaczu prądu stałego z przetwarzaniem, przy pobudzeniu go napięciem stałym ($\omega' = 0$) lub sinusoidalnym o częstotliwości ω'.



Rys. 4. Charakterystyka K(j) idealnego wzmacniacza prądu zmiennego

Obecnie założymy że wzmacniacz prądu zmiennego jest wzmacniaczem idealnym o ograniczonym paśmie częstotliwości (rys. 4).

Wówczas funkcja widmowa sygnału wyjściowego przyjmie postać

$$V_{wy}(j\omega) = \sum_{k=K}^{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k a_n A \pi K_{uo} \left\{ \exp\left[-j(k\,\omega_o + \omega')T_d\right] \delta(\omega-(n+k)\,\omega_o-\omega') \right.$$

$$\left. + \exp\left[-j(k\,\omega_o - \omega')T_d\right] \delta(\omega-(n+k)\,\omega_o+\omega') \right\}$$

gdzie

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{dla} \quad k \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad k = 0 \end{cases}$$

k - oznacza ile harmonicznych sygnału $V_1(j\omega)$ o częstotliwościach $(k\,\omega_o \pm \omega')$ przejdzie przez wzmacniacz prądu zmiennego $K(j\omega)$.

Z wzoru 4 wyznaczymy wzmocnienie wzmacniacza z przetwarzaniem. Za wzmocnienie będziemy uważali wstosunek amplitudy napięcia wzmocnionego o częstotliwości ω' do amplitudy A sygnału wejściowego o tej samej częstotliwości. Jeżeli zrobimy dodatkowo założenie że $\omega_o \gg \omega''$ co jest prawdziwe dla sygnału prądu stałego oraz dla napięć sinusoidalnych o częstotliwości mniejszej aniżeli częstotliwość przetwarzania, to wówczas będziemy mogli pominąć ω' w stosunku do $k\,\omega_o$.
Ze wzoru 4 oraz korzystając z definicji przytoczonej powyżej, możemy napisać że wzmocnienie wzmacniacza prądu stałego z przetwarzaniem równa się

$$K_u = K_{uo} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{\sin^2 k\pi\gamma}{k^2} \cos k\,\omega_o\,T_d$$

podzielimy obie strony równania przez K_{uo} i tą wartość względną będziemy uważali w dalszych rozważaniach za wzmocnienie

$$k_u^* = \frac{K_u}{K_{uo}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{\sin^2 k\pi\gamma}{k^2} \cos k\,\omega_o T_d \qquad (5)$$

Przypadkiem szczególnym wzoru 5 jest wzmocnienie dla układu wzmacniacza prądu stałego, w którym pasmo częstotliwości jest nieskończenie duże a przesunięcie fazowe $\varphi = 0$. Wówczas możemy napisać, że

$$k_u^* = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{\sin^2 k\pi\gamma}{k^2}$$

gdy dodatkowo założymy że chopper jest symetryczny (współczynnik przetwarzania $\gamma = \frac{1}{2}$) wówczas korzystając z rozwinięcia w szereg kosinusów funkcji $f(x) = x^2$ (4) można udowodnić że

$$\sum_{k=1} \frac{\sin^2 k\frac{\pi}{2}}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

a wówczas wartość

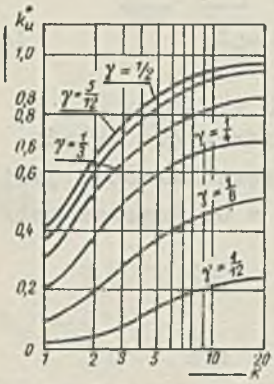
$$k_u^* = 1$$

3. Wnioski

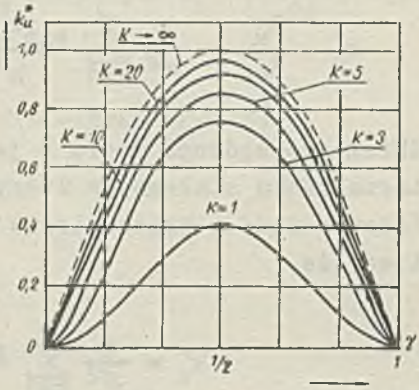
Na podstawie wzoru 3 możemy określić charakterystykę amplitudowo-fazową wzmacniacza prądu stałego z przetwarzaniem, a znając tę charakterystykę można odpowiedzieć na pytanie jak zachowa się układ wzmacniacza na dowolne wymuszenie. Wiadomo bowiem (2, 3) że odpowiedź czasowa i transmitancja widmowa są ze sobą jednoznacznie związane.

Na podstawie zależności 5 wykreślono wykresy rysunki 5 i 6. Wykres na rys. 5 przedstawia zależność pomiędzy wzmocnieniem

a szerokością pasma częstotliwości wzmacniacza prądu zmiennego K, dla kilku wartości współczynnika przetwarzania γ. Z wykre-



Rys. 5. Zależność wzmocnienia względnego od szerokości pasma częstotliwości K wzm.pr.zmienn.



Rys. 6. Zależność wzmocnienia względnego od współczynnika przetwarzania

su widać że na przykład 10% spadek wzmocnienia uzyskujemy jeżeli K = 8 przy $\gamma = \frac{1}{2}$. To znaczy, jeżeli chopper pracowałby na częstotliwości 50 Hz to wystarczy aby pasmo częstotliwości obejmowało swoim zasięgiem 400 Hz.

Na podstawie wykresu z rys. 6 widać że współczynnik przetwarzania γ w dosyć szerokim zakresie zmian nie wpływa istotnie na pracę wzmacniacza. Jednakże o ile byłby to dokładny wzmacniacz pomiarowy to utrzymanie stałego γ byłoby podstawą do utrzymania stałego współczynnika wzmocnienia.

Dodatek

Wzór na splot funkcji Diraca

Niech będą dane następujące dwie funkcje czasowe, dla których znajdujemy transformacje Fouriera

$$\mathcal{F}\left[\exp(j\,\omega_1 t)\right] = 2\pi\,\delta\left[\omega - \omega_1\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\exp(j\,\omega_2 t)\right] = 2\pi\,\delta\left[\omega - \omega_2\right]$$

Na podstawie twierdzenia o splocie możemy napisać że

$$\mathcal{F}\left[\exp(j\,\omega_1 t).\exp(j\,\omega_2 t)\right] = \mathcal{F}\left[\exp(j\,\omega_1 + \omega_2)t\right] =$$

$$= 2\pi\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(x - \omega_1)\,2\pi\delta(\omega - x - \omega_2)dx$$

z tego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x - \omega_1)\,\delta(\omega - x - \omega_2)dx = \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

LITERATURA

[1] Wunderer P. - Messverstärker. Arch. techn. Messen 1967 Nr 380 str. 211.

[2] Bracewell R. - The Fourier transform and Its Application. Mc-Graw Hill Book Company 1965.

[3] Jawid M., Brenner E. - Analysis, transmission, and filtering of signals. Mc-Graw Hill Book Company 1963.

[4] Fichtenholz G.M. - Rachunek różniczkowy i całkowy tom III PWN Warszawa 1964.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 3.11.1968 r.

ВЛИЯНИЕ ПОЛОСЫ ЧАСТОТЫ ИДЕАЛЬНОГО УСИЛИТЕЛЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА НА СУММАРНОЕ УСИЛЕНИЕ, УСИЛИТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Р е з ю м е

В настоящей работе проведён анализ действия усилителя постоянно тока с преобразованием. Определена спектральная функция выходного сигнала синусоидальной формы. Основной упор в работе направлен на определение коэффициента усиления по постоянному току. Показано, как на этот коэффициент, влияет полоса частоты идеального усилителя переменного тока, а также коэффициент преобразования.

RELATION BETWEEN THE FREQUENCY BAND OF AN IDEAL A.C.AMPLIFIER AND THE OVERALL GAIN OF THE CHOPPER TYPE D.C.AMPLIFIER

S u m m a r y

The present article describes the performance analysis of the chopper type D.C.amplifier. Using Fourier integral method spectral function of the D.C.amplifier output signal with sinusoidal input signal was found.
The main topics of this paper are the calculation of overall gain of the chopper type D.C. amplifier and the discussion of some parameters of the chopper and ideal A.C.amplifier.