

JERZY NAWROCKI, ZBIGNIEW GĘBICKI

TEORETYCZNE OKREŚLENIE MOCY NAPĘDU  
OSADZAREK TŁOKOWYCH

**Streszczenie.** W pracy tej, opierając się na podstawach teoretycznych, pracy osadzarek tłokowych, podano metody określające moc napędu.

Wstęp

"Osadzarka jest maszyną hydrauliczną, w której mieszaninę ziaren o różnym ciężarze właściwym poddaje się oscylacyjnemu bądź pulsacyjnemu działaniu wody, doprowadzonej przez dno sitowe koryta roboczego, służącego do przepływu wzbogaconego materiału, w celu rozdzielenia masy ziaren na warstwy ziaren według ciężaru właściwego" (1).

Spośród znanych badań w zakresie określania mocy osadzarek, spotykamy przeróżne prace doświadczalne podające moc na  $1 \text{ m}^2$  powierzchni koryta roboczego.

Badania przeprowadzone na naszych płuczkach w ostatnich latach wykazały, że zainstalowana moc jest bardzo często nieuzasadniona. Użyte silniki w bardzo wielu przypadkach, nawet przy uwzględnieniu występowania chwilowych obciążeń, mają znacznie większą moc, niżby to wynikało z pomiarów. Z tego to względu w pracy tej omówiono teoretyczne podstawy energetyczne osadzarek.

Określenie strat hydraulicznych

Chwilowa wartość siły nacisku na tłok jest sumą sił: bezwładności masy wody ( $P_b$ ) i potrzebnej na pokonanie oporów hydraulicznych ( $P_h$ ) gdzie:

$$P_b = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot \cos \omega t \quad (1)$$

$$P_h = \frac{1}{2} \xi \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (2)$$

Stąd znajdujemy dla ruchu tłoka

$$\text{w dół: } P = P_b + P_h = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot \left( \cos \omega t + \frac{\xi}{2} \cdot r_0 \cdot \sin^2 \omega t \right) \quad (3)$$

dla  $0 \leq t < \mathcal{T}$

$$\text{w górę: } P = P_b - P_h = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot \left( \cos \omega t - \frac{\xi}{2} \cdot r_0 \cdot \sin^2 \omega t \right) \quad (4)$$

dla  $\mathcal{T} < t \leq 2\mathcal{T}$

Należy zwrócić uwagę, że w myśl założenia jest  $P_h > 0$ , jednakże siła ta zmienia kierunek działania (jest zawsze skierowana przeciwko kierunkowi ruchu) – stąd zrozumiałe są określenia siły  $P$  w dwu zakresach. Dla uproszczenia wprowadzamy oznaczenie:

$$k = \xi \cdot r_0 \quad (5)$$

otrzymujemy wówczas:

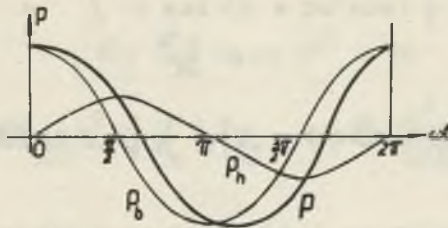
$$P = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \left( \cos \omega t + \frac{k}{2} \cdot \sin^2 \omega t \right) \quad (6)$$

dla  $0 < t < \mathcal{T}$

$$P = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \left( \cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t \right) \quad (7)$$

dla  $\mathcal{T} < t \leq 2\mathcal{T}$

Obrazem graficznym funkcji  $P = f(\omega t)$  jest wykres. Widać stąd, że pod działaniem sił hydraulicznych otrzymuje się cosinusowy, zniekształcony charakter siły  $P$ .



Rys. 1

Elementarna praca  $dL$  siły  $P$  na drodze  $ds$  wyniesie:

$$dL = P ds = P v dt \quad (8)$$

ponieważ: 
$$V = \omega r_0 \cdot \sin \omega t \quad (9)$$

więc: 
$$v dt = \omega \cdot r_0 \cdot \sin \omega t \, dt = r_0 \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t$$

stąd: 
$$dL = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left( \cos \omega t + \frac{k}{2} \cdot \sin^2 \omega t \right) \sin \omega t \cdot d\omega t \quad (10a)$$

i 
$$dL = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left( \cos \omega t - \frac{k}{2} \cdot \sin^2 \omega t \right) \sin \omega t \cdot d\omega t \quad (10b)$$

$$\pi \leq t \leq 2\pi$$

Praca wykonana przez tłok w czasie obrotu wału o kąt  $\omega t$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \int_0^{\omega t} \left( \cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t \right) \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t = \\ &= \frac{1}{2} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left[ \int_0^{\omega t} \sin 2\omega t \cdot d\omega t + \int_0^{\omega t} \sin^3 \omega t \cdot d\omega t \right] \end{aligned}$$

ponieważ:

$$\int_0^{\omega t} \sin 2\omega t \, d\omega t = \frac{-\cos 2\omega t}{2} \Big|_0^{\omega t} = \frac{-\cos 2\omega t + 1}{2} = \sin^2 \omega t$$

$$\int_0^{\omega t} \sin^3 \omega t \, d\omega t = -\frac{1}{3} (\sin^2 \omega t + 2) \cos t \Big|_0^{\omega t} =$$

$$= -\frac{1}{3} [(\sin^2 \omega t + 2) \cdot \cos \omega t - 2] = \frac{1}{3} [2 - \cos \omega t (2 + \sin^2 \omega t)]$$

stąd:

$$L_1 = \frac{1}{2} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left\{ \sin^2 \omega t + \frac{k}{3} [2 - \cos \omega t (2 + \sin^2 \omega t)] \right\} \quad (11)$$

Podobnie całkując określenie pracy elementarnej w zakresie  $\pi - 2\pi$  od kąta  $\pi$  do  $(\pi + \omega t)$  otrzymamy:

$$L_2 = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left\{ \sin^2 \omega t - \frac{k}{3} [2 + \cos \omega t (2 + \sin^2 \omega t)] \right\} \quad (12)$$

dla pierwszej połowy obrotu: ( $\omega t = \pi$ ) znajdujemy:

$$L_1 = \frac{1}{2} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \frac{k}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot k \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2$$

i dla drugiej połowy (dla  $\omega t = 2\pi$ ):

$$L_2 = -\frac{1}{2} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \frac{k}{3} \cdot 4 = -\frac{2}{3} \cdot k \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2$$

Ponieważ w drugiej fazie ruchu tłoka znak - przy wartości siły  $P_h$  oznacza tylko kierunek działania tej siły, czyli biorąc wartości bezwzględne:

$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$$

Całkowity zaś wkład pracy w czasie jednego obrotu:

$$L = 2L_1 = \frac{4}{3} \cdot k \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \quad (13)$$

Moc średnia potrzebna na pokonanie oporów hydraulicznych:

$$N_h = \frac{L n}{60} = \frac{4}{3} \cdot k \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \frac{n}{60} \quad (14)$$

uwzględniając:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ oraz } \pi^2 = 10$$

$$N_h = k \cdot \frac{4}{3} \cdot m_r \cdot \frac{\pi^2 \cdot n^2}{900} \cdot r_o^2 \cdot \frac{n}{60} = k \cdot \frac{m_r \cdot n^3 \cdot r_o^2}{4050} \text{ kgm/sek} \quad (15)$$

Chwilowa wartość mocy potrzebnej na pokonanie oporów hydraulicznych wyrazi się:

w zakresie:

$$0 - \pi \quad N_{h1} = P_h \cdot v = k \cdot \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^3 \cdot r_o^2 \cdot \sin^3 \omega t \quad (16a)$$

w zakresie

$$\pi - 2\pi \quad N_{h2} = -P_h \cdot v = -k \cdot \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^3 \cdot r_o^2 \cdot \sin^3 \omega t \quad (16b)$$

czyli w każdym wypadku  $N_h \geq 0$

### Sprawność hydrauliczna

Z ogólnego pojęcia sprawności maszyny roboczej, jako stosunku otrzymanego efektu (pracy) od włożonej (pobranej) energii można bez trudności wyprowadzić pojęcie "sprawności" hydraulicznej.

Będzie to stosunek maksymalnej energii posiadanej przez wodę w osadzarce  $E_{k \max}$  do pracy włożonej przez mechanizm napędowy dla nadania tej energii  $L_{0-\frac{\pi}{2}}$

$$\eta_h = \frac{E_{k \max}}{L_{0-\frac{\pi}{2}}} \quad (17)$$

Jak wiemy

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_o^2 \text{ oraz } L_{0-\frac{\pi}{2}} \quad (18)$$

$$L_{0-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_o^2 \left(1 + \frac{k}{3} \cdot 2\right)$$

stąd:

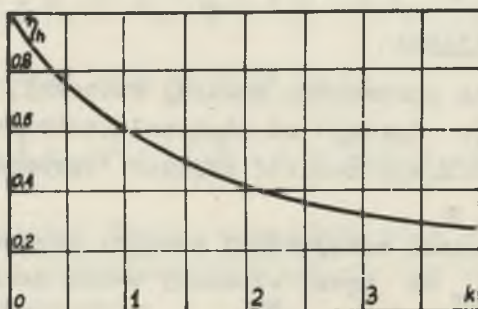
$$\eta_h = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2}{\frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} k\right)}$$

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} k} \quad (19)$$

Współczynnik ten może być rzeczywiście miarą dobroci wykonania i pracy hydraulicznej części osadzarki. Im bowiem osadzarka będzie wymagała doprowadzenia większej ilości energii dla uzyskania tego samego efektu ( $E_{kmax}$ ), tym będzie gorszą i będzie posiadać gorszą sprawność hydrauliczną.

Z charakteru  $\eta_h$  wynika, że jest zawsze:  $0 < \eta_h < 1$

Jest to poza tym jednoznaczna funkcja współczynnika oporów hydraulicznych  $k$ , związek ten przedstawia wykres 2.



Rys. 2

Wydaje się, że sprawność hydrauliczna jako miernik dobroci i procesu oscylacji energii w osadzarce, jest zupełnie poprawnym uogólnieniem pojęcia sprawności.

#### Redukcja mas na tłok osadzarki

W poprzednich rozważaniach występuje pojęcie masy zredukowanej  $m_r$ . Rozpatrzmy je teraz. Oczywistym jest, że w czasie pracy osadzarki wprawiane okresowo w ruch różne masy wody, rozluźnio-

na warstwa węgla, czy wreszcie sam mechanizm napędowy, oddziałują jakąś siłą na tłok osadzarki. Dla określenia wielkości tej siły przeprowadzić należy tzw. redukcję mas na tłok osadzarki. Redukcja mas, jest to operacja oparta na zasadzie zachowania energii tzn., jeżeli jakaś masa  $m$  porusza się z prędkością  $v$ , czyli posiada energię kinetyczną  $m \frac{v^2}{2}$ , (masa i prędkość zredukowana). Zakładając jakąś prędkość - na którą chcemy przeprowadzić redukcję - z zasady zachowania energii określimy masę zredukowaną na tę prędkość.

$$m_r = m \frac{v^2}{v_r^2} \quad (20)$$

W osadzarce - tą prędkością jest prędkość tłoka  $v_T$  i stąd redukcję przeprowadza się - mówiąc krótko - na tłok osadzarki.

$$m_r = m \frac{v^2}{v_T^2} = \frac{2E_k}{v_T^2} \quad (21)$$

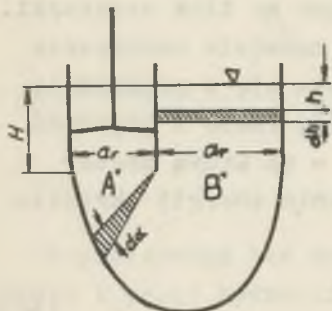
W myśl powyższej zasady przeprowadzimy redukcję mas wody, warstwy nadawy, leżącej na sicie i części mechanizmu napędowego, wykonującego ruch posuwisto-zwrotny. Opory hydrauliczne, wskutek założenia ich proporcjonalności do masy zredukowanej zostały tym samym zredukowane na tłok - redukcja ich więc w tym miejscu nie ma sensu. Tak więc redukcję mas przeprowadza się jak dla osadzarki doskonałej.

#### a) Redukcja mas wody

Z całej pojemności wodnej osadzarki można wyodrębnić trzy charakterystyczne przestrzenie:

- 1) przestrzeń komory tłokowej o wymiarach (oznaczenia wg rys. 3):

$$a_t \cdot b \cdot H = F_t \cdot H$$



Rys. 3

- 2) przestrzeń komory roboczej o wymiarach

$$a_r \times b \times H = F_r \times H$$

- 3) część denną (pośrednią) o dowolnym przekroju i szerokości  $b$ .

W komorze tłokowej i roboczej – wobec stałego przekroju ( $F_P$  czy  $F_r$ ) – woda posiada w poszczególnych przekrojach stałą prędkość, zaś w części dennej – prędkość ta zmienia się od przekroju do przekroju, w myśl prawa ciągłości przepływu:

$$F \cdot v = F_T \cdot v_T \quad (22)$$

Z łatwością znajdujemy stałą prędkość w komorze roboczej:

$$F_r \cdot v_r = F_T \cdot v_T$$

$$v_r = \frac{F_T}{F_r} v_T$$

oznaczając stosunek powierzchni współczynnikiem:

$$\varphi = \frac{F_T}{F_r} \quad (23)$$

otrzymujemy:

$$v_r = \varphi \cdot v_T \quad (24)$$

Dla obliczania energii kinetycznej posłużymy się różniczkową formą równania:

$$dE_k = dm \cdot \frac{v^2}{2} \quad (25)$$



gdzie  $dE_k$  oznacza różniczkę energii kinetycznej elementarnej masy wody  $dm$ , posiadającej stałą prędkość  $v$ .

Komora tłokowa:

$$dm = F_T \cdot dh \cdot \gamma \quad (26)$$

$\gamma$  - gęstość wody w osadzarce.

Całkowita chwilowa energia mas wody w przedziale tłokowym:

$$E_{kT} = \int_A^H dm \frac{v^2}{2} = \int_A^H F_T \cdot \gamma \cdot \frac{v_T^2}{2} \cdot dh = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot \gamma \cdot v_T^2 \int_A^H dh$$

$$E_{kT} = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot v_T^2$$

ponieważ chwilowa wartość  $v_T$ :

$$v_T = \omega \cdot r_0 \cdot \sin \omega t$$

więc:

$$E_{kT} = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (27)$$

Komora robocza:

$$dm = F_r \cdot dh \cdot \gamma \quad v = v_r = \phi v_T \quad F_r = \frac{F_T}{\phi}$$

$$E_{kR} = \int_B^H dm \frac{v^2}{2} = \int_B^H \frac{F_T}{\phi} \cdot dh \cdot \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot \phi^2 \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot \phi v_T^2 \quad (28)$$

i po uwzględnieniu wartości  $v_T$ :

$$E_{kR} = \frac{1}{2} \cdot \phi F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (29)$$

Część dolna (pośrednia):

$$dm = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot d\alpha \cdot \gamma \cdot b$$

Wartość prędkości w myśl (28):

$$(a \cdot b) \cdot v = (a_T \cdot b) \cdot v_T$$

$$v = \frac{a_T}{a} \cdot v_T \quad (30)$$

Ponieważ  $dm$  jest wyrażona w funkcji kąta, całkowanie wykonać należy w układzie biegunowym od  $A$  do  $B$ , czyli od kąta  $\alpha = 0$  do  $\alpha = \mathcal{F}$

$$E_{kD} = \int_0^{\mathcal{F}} dm \cdot \frac{v^2}{2} = \int_0^{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot d\alpha \cdot b \cdot \gamma \frac{a_T^2 v_T^2}{a^2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \cdot a_T^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot v_T^2 \int_0^{\mathcal{F}} d\alpha$$

$$E_{kD} = \frac{\mathcal{F}}{4} \cdot F_T \cdot a_T \cdot \gamma \cdot v_T^2 \quad (31)$$

(gdyż  $F_T = a_T \cdot b$ )

i ostatecznie:

$$E_{kD} = \frac{\mathcal{F}}{4} \cdot F_T \cdot a_T \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (32)$$

Jak widać, sposób powyższy pozwala obliczyć energię kinetyczną mas wody w części dolnej osadzarki o dowolnym przekroju poprzecznym tej części, bez znajomości – wydawałoby się koniecznej – funkcji  $a = f(\alpha)$ .

Mógłby ktoś zarzucić, że wykonana w ten sposób redukcja mas nie odzwierciedla obrazu osadzarki rzeczywistej, że przecież wcale nie ma równomiernego rozkładu prędkości na całym przekroju ( $axb$ ) części dolnej osadzarki, dalej – że szerokość koryta "b" ulega zwężeniu itd. Należy jednak wziąć pod uwagę cel, dla którego wykonuje się redukcję. Masa zredukowana stanowi jeden ze składników, wobec którego założono proporcjonalność oporów hydraulicznych, a jasnym jest, że uwzględnienie którekolwiek z tych czynników (zresztą matematycznie możliwe), równałoby się przyjęciu jako wzorca osadzarki nie odpowiadającej wymaganiom postawionym w rozdz. II.

Całkowita chwilowa wartość energii kinetycznej mas wody w osadzarce:

$$E_k = E_{kT} + E_{kR} + E_{kD} \quad (33)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot F_T \cdot H \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t + \\ + \frac{\pi}{4} F_T \cdot a_T \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot \gamma \cdot (H + \phi H + \frac{\pi}{2} a_T) \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot F_T \cdot \gamma [H(1 + \phi) + \frac{\pi}{2} a_T] \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (34)$$

W myśl zasad redukcji mas, chcemy równoważną energię wyrazić przez

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (35)$$

Stąd zredukowana masa wody:

$$m_{r1} = F_T \cdot \gamma [H(1 + \phi) + \frac{\pi}{2} a_T] \quad (36)$$

#### b) Redukcja masy nadawy

Na sicie osadzarki o powierzchni  $F_r$  leży warstwa nadawy o grubości statycznej  $h_w$  - wobec tego objętość tej warstwy wynosi  $F_r \cdot h_w = v$ . Jej ciężar usypowy  $\gamma_u$  - stąd z łatwością można by obliczyć ciężar nadawy i jej masę. Ponieważ jednak przy obliczeniu mas wody - nie pominięto objętości zajętej przez węgiel przy obliczaniu masy ciężaru nadawy, nie można brać ciężaru usypowego, lecz względny ciężar właściwy nadawy w wodzie, czyli ciężar nadawy pomniejszony o objętość wyparowanej cieczy:

$$G = G_0 - G_{\text{wyp}},$$

$G$  - względny ciężar nadawy,

$G_0$  - rzeczywisty ciężar nadawy,

$G_{\text{wyp}}$  - ciężar wypartej wody,

$\gamma_n$  - względny ciężar usypowy,

$\gamma_u$  - rzeczywisty ciężar usypowy = liczbowo gęstości usypowej,

$\gamma$  - ciężar właściwy wody równy liczbowo gęstości,

$\gamma_c$  - ciężar właściwy nadawy równy liczbowo gęstości,

$V_0$  - objętość rzeczywiście zajęta przez nadawę,

$V$  - objętość statyczna nadawy.

W świetle powyższych oznaczeń:

$$G = V \cdot \gamma_n \quad G_0 = V_0 \cdot \gamma_c \quad G_{\text{wyp}} = V_0 \cdot \gamma$$

stąd:

$$V \cdot \gamma_n = V_0 \cdot \gamma_c - V_0 \cdot \gamma$$

ponieważ dodatkowo:

$$V \cdot \gamma_u = V_0 \cdot \gamma_c, \quad \text{czyli} \quad V_0 = V \frac{\gamma_u}{\gamma_c}$$

$$V \cdot \gamma_n = V \frac{\gamma_u}{\gamma_c} (\gamma_c - \gamma)$$

$$\gamma_n = \gamma_u \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right) \quad (37)$$

względny ciężar nadawy:

$$G = V \cdot \gamma_n = F_R \cdot h_w \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right) \quad (38)$$

i liczbowo równa masa:

$$m = F_R \cdot h_w \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right) \quad (39)$$

Zakładając, że nadawa porusza się z prędkością równą chwilowej prędkości wody w komorze roboczej:

$$v = v_r = v_{r1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \omega r_0 \cdot \sin \omega t \quad (40)$$

Obliczymy energię kinetyczną nadawy:

$$E_k = \frac{F_r \cdot h_w \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{1}{\gamma_c}\right)}{2} \varphi^2 \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

W myśl (27) masa zredukowana na tłok:

$$m'_{r2} = \varphi^2 \cdot F_r \cdot h_w \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{1}{\gamma_c}\right) = \varphi \cdot F_{r1} \cdot h_w \cdot \gamma_u \left(1 - \frac{1}{\gamma_c}\right) \quad (41)$$

### c) Redukcja mas układu korbowo-tłokowego

Tłok, drąg tłokowy i oprawa mimośrodowa, wykonują ruch posuwisto-zwrotny (ponieważ praktycznie  $\nu_r \rightarrow \infty$ , jest to założenie poprawne). Elementy powyższe wykonują ruch z prędkością równą szybkości tłoka, czyli prędkością zredukowaną, a więc masa ich jest masą zredukowaną. Oznaczając masę wspomnianych elementów przez  $G_1$  otrzymamy:

$$m'_{r3} = G_1$$

Uwaga: W powyższych rozważaniach pominięto świadomie wypór tłoka jako mały, co nie jest zupełnie słuszne dla osadzarek z drewnianym tłokiem.

Całkowita masa zredukowana jest sumą:

$$m'_r = m'_{r1} + m'_{r2} + m'_{r3} \quad (42)$$

W ten sposób wyrażono masę zredukowaną  $m'_r$  w układzie fizycznym, czyli w kg. Z uwagi na konieczność wykonania obliczeń w układzie technicznym (co wynika z formuły  $P = m'_r \cdot p$ ), masę tę należy wyrazić w tymże układzie. Stosujemy zamienniki

$$9,81 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$$

otrzymujemy masę w układzie technicznym liczbowo 9,81 razy mniejszą:

$$m_r = \frac{m'_r}{9,81} = \frac{m'_{r1}}{9,81} + \frac{m'_{r2}}{9,81} + \frac{m'_{r3}}{9,81} \quad (43)$$

wyrażoną w jednostkach:  $\text{KG} \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$

#### d) Mechanizm napędowy

Praca rzeczywistej osadzarki tłokowej - jak zresztą praca każdej maszyny rzeczywistej w ogóle - związana jest z pokonywaniem oporów tarcia, występujących w mechanizmie. W osadzarce straty te występują w elementach mechanizmu napędowego, a w szczególności mamy zjawiska:

- 1) tarcia tłoka o ściany komory tłokowej,
- 2) tarcia w łożyskach i mimośrodkach.

#### 1. Tarcia tłoka o ściany komory tłokowej

Chwilowa wartość siły masowej, działającej na tłok wynosi:

$$P = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot \cos \omega t \quad (44)$$

Składowa siła powodująca docisk tłoka:

$$P_N = P \cdot \text{tg} \beta = P \cdot \sin \beta \quad (45)$$

gdyż kąty  $\beta$  są rzędu  $0-3^\circ$  ponieważ:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \omega t} = \frac{r_0}{l} \quad (46)$$

więc:

$$P_N = P \cdot \frac{r_0}{l} \sin \omega t \quad (47)$$

Siła tarcia:

$$P_t = P_N \mu = P \cdot \frac{r_0}{l} \cdot \sin \omega t \quad (48)$$



Rys. 4

oznaczając:

$$\frac{r_0}{l} = \chi$$

$$P_t = P \cdot \mu \chi \cdot \sin \omega t = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \mu \chi \sin \omega t \cdot \cos \omega t \quad (49)$$

Wkład pracy w czasie 1/4 obrotu wału potrzebny na pokonanie tarcia.

$$L_t = \int_0^{\pi/2} P_t \cdot ds \quad (50)$$

ponieważ:

$$ds = r_0 \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t \quad (51)$$

więc:

$$\begin{aligned} L_t &= \int_0^{\pi/2} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \mu \chi \sin^2 \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t = \\ &= m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \cdot \mu \chi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \omega t \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t &= \int \cos \omega t \cdot d\omega t - \int \cos^3 \omega t \cdot d\omega t = \\ &= \sin \omega t - \frac{1}{3} \cdot \cos^2 \omega t \cdot \sin \omega t - \frac{2}{3} \sin \omega t = \\ &= \frac{1}{3} \sin \omega t (1 - \cos^2 \omega t) = \frac{1}{3} \sin^3 \omega t \quad (53) \end{aligned}$$

stąd:

$$L_t = m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \mu \chi \frac{1}{3} \quad (54)$$

dla całego obrotu:

$$L_t = \frac{4}{3} \cdot \mu \cdot \chi \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0^2 \quad (55)$$

$$L = \frac{4}{3} \cdot k \cdot m_r \cdot \omega^2 \cdot r_o^2$$

widzimy, że stosunek tych prac wyraża się:

$$\frac{L_t}{L} = \frac{\mu \cdot \chi}{k} \quad (56)$$

$$L_t = \frac{\mu \cdot \chi}{k} L \quad (57)$$

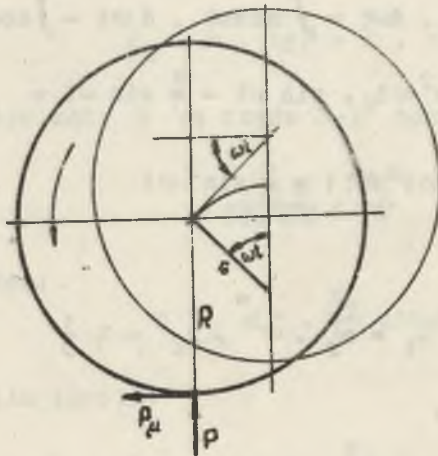
Widać z powyższego, że  $L_t$  można będzie pomijać wobec  $L$ , gdyż w najniekorzystniejszym wypadku: dla  $\mu = 0,2$ ;  $\chi = 0,03$ ;  $k = 0,2$  otrzymuje się:

$$\frac{\mu \cdot \chi}{k} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,2} = 3,0\%$$

## 2. Straty tarcia w mimośrodkach i łożyskach

Na pokonanie tarcia, należy dostarczyć pewną pracę. W wypadku ruchu ogólnego, składającego się z obrotu i przesunięcia, pracę określa (w formie różniczkowej) związek:

$$dL = M \cdot d\omega t + F \cdot ds \cdot \cos(F, ds) \quad (58)$$



Rys. 5



W wypadku mimośrodka spotykamy oba te ruchoy, gdzie wg rysunku 5:

$$M = P \cdot \mu_1 \cdot (R - r_0 \cos \omega t)$$

$$F = P \cdot \mu_1 \quad (59)$$

$$ds = r_0 \cdot d\omega t$$

$$\cos(F ds) = \cos \omega t$$

podstawiając:

$$dL = P \cdot \mu_1 (R - r_0 \cos \omega t) \cdot d\omega t + P \mu_1 \cdot r_0 \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t$$

$$dL = P \cdot \mu_1 R \cdot d\omega t \quad (60)$$

Przechodząc do mocy:

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{P \cdot \mu_1 R \cdot d\omega t}{dt} = P \cdot \mu_1 R \cdot \omega \frac{dt}{dt}$$

$$N_1 = P \cdot \mu_1 \cdot R \cdot \omega \quad (61)$$

Można więc powiedzieć, że w mimośrodku praca tarcia równa jest pracy wynikłej z obrotu tarczy mimośrodu dookoła jej środka, a oblicza się ją mnożąc siłę tarcia  $P \cdot \mu_1$  przez prędkość kątową  $\omega$  i promień części obrotowej mimośrodu  $R$ , zwany następnie krótko promieniem (średnicą) mimośrodu.

W wypadku łożyska mamy wyłącznie ruch obrotowy: tak więc moc tarcia:

$$N_2 = P \cdot \mu_2 \cdot r_w \cdot \omega$$

gdzie  $r_w$  jest promieniem ozopa łożyskowego.

Łączna więc moc strat tarcia w mimośrodkach i łożyskach (dla jednakowej siły obciążającej) wyniesie:

$$N_t = N_1 + N_2 \quad (63)$$

$$N_t = P \cdot \omega (\mu_1 \cdot R + \mu_2 \cdot r_w) \quad (64)$$

przechodząc do średnio:

$$N_t = \frac{1}{2} P \cdot \omega (\mu_1 \cdot D + \mu_2 \cdot d) \quad (65)$$

### Zasady obliczania średniej mocy strat tarcia

Wzór (65) pozwala na obliczenie chwilowej wartości mocy potrzebnej na pokonanie strat tarcia w mimośrodach i łożyskach.

Jak wygląda teraz kwestia obliczenia mocy średniej? Czy można obliczać ją jako średnią całego obrotu?

Należy przede wszystkim zwrócić uwagę, że siła  $P$  może zmieniać swój kierunek działania - wyrazem czego będzie zmiana jej znaku. Przyjęto oznaczać siły skierowane ku górze znakiem plus (+), zaś w dół minus (-). Założywszy, że prędkość kątowna i współczynnik tarcia mają stałą wartość stwierdzamy, że moc jest funkcją siły nacisku  $P$ , a więc znak jej zmieniać się będzie zgodnie ze znakiem. Czy można więc np. przyjąć, że moc  $N_t < 0$  oznacza co innego niż  $N_t > 0$ ? Tarcie jest stratą i jako takie zawsze wymaga doprowadzenia mocy z zewnątrz. Musimy więc dla wartości  $P < 0$  obliczać bezwzględną wartość mocy lub mówiąc inaczej wielkość  $-N$ .

Wynika stąd istotny wniosek: jeżeli siła  $P$  zmienia swój znak, to nie można obliczać mocy tarcia całkując jej chwilową wartość w zakresie całego obrotu (gdyż otrzymalibyśmy wówczas różnicę tych mocy), lecz prowadząc całkowanie (obliczając wartość średnią) w zakresach, w których moc (siła) nie zmienia swego znaku (kierunku).

Ogólnie moc tarcia określa związek:

$$N_t = P \cdot \mu \cdot r \cdot \omega = f(P) \quad (66)$$

Widać stąd, że dla znalezienia średniej wartości mocy należy znaleźć średnią wartość siły i pomnożyć ją przez stałe wartości:

$$N_{t\text{sr}} = P'_{\text{sr}} \cdot \mu \cdot r \cdot \omega \quad (67)$$

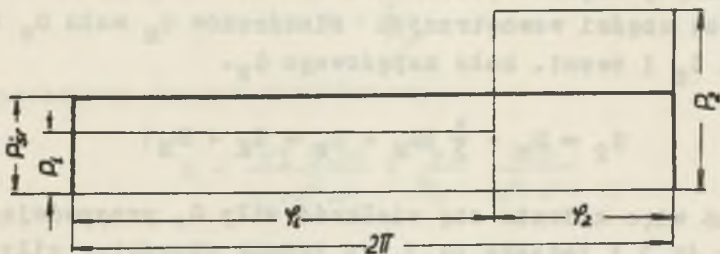
Pojęcie średniej siły ma sens tylko w odniesieniu do pewnego przedziału (zakresu), którego sposób znalezienia, wynika z wyżej powiedzianego. Trzeba przede wszystkim znaleźć punkty, dla których  $P=0$ , (siła zmienia swój znak), gdyż stanowią one granice zakresu całkowania.

Musimy więc rozwiązać równania typu:  $P = 0$ . Ogólnie siła  $P$  jest funkcją kąta obrotu  $\omega t$ :  $P = f(\omega t)$ . Znajdujemy więc jakąś szczególną wartość kąta  $\omega t = \varphi$  dla którego to zachodzi.

Średnią siłę dla całego obrotu znajduje się, w myśl zależności, opartej na proporcji i wynikającej jasno z rys. 6

$$P'_{sr} = \frac{1}{2\pi} \left[ \varphi_1 \cdot P'_{1sr} + \varphi_2 \cdot (-P_{sr}) \right] \quad (68)$$

gdzie:  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oznaczają długości przedziałów (kąty), dla których obliczano odpowiadającą wartość średniej siły. Kąt  $\varphi_1$  czy  $\varphi_2$  jest więc odległością granic całkowania równą różnicy kątów  $\varphi$  dla których znaleziono  $P=0$ .



Rys. 6

### Obliczanie średniej siły dla osadzarki rzeczywistej

Na mimośrod i łożyska osadzarki rzeczywistej działa w każdej chwili siła ( $P$ ), będąca wypadkową sił: bezwzględności ( $P_b$ ), oporów hydraulicznych ( $P_h$ ) i ciężaru mechanizmu napędowego ( $G$ ).

$$P = P_b \pm P_h - G \quad (69)$$

Należy zwrócić uwagę, że o ile wielkość sił bezwzględności i oporów hydraulicznych dla mimośrodków i łożysk jest jednakowa, o tyle na łożyska przypada większy ciężar pochodzący od mechanizmu napędowego.

Najmniejszą jednostkę - jaką można wyodrębnić - w mechanizmie napędowym osadzarki - jest sekcja. Dwie sekcje osadzarki

dla węgla) tworzą przedział, dwa przedziały – osadzarke. Obliczenia powinny dotyczyć właściwej sekcji, ponieważ jednak zwykle w przedziale mamy jednakowe parametry pracy (skoki) – a czasem nawet 1 tłok na 2 sekcje – najwygodniej obliczenia prowadzić jest w odniesieniu do przedziału. Stąd też wynika, zasada obliczania ciężarów przypadających na mimośrodowość i łożyska.

Tak więc: na mimośrodość działa ciężar  $G_1$ , będący sumą ciężarów w jednym przedziale, a to: tłoków  $G_T$ , drągów  $G_D$  i opraw mimośrodkowych  $G_0$ :

$$G_1 = G_T + G_D + G_0 \quad (70)$$

Na łożyska ciężar ten zwiększa się o połowę (osadzarke ma 2 przedziały), ciężaru pozostałych elementów mechanizmu napędowego, a to: części wewnętrznych mimośrodków  $G_M$  wału  $G_W$  kół zamachowych  $G_K$  i ewent. koła napędowego  $G_N$ .

$$G_2 = G_1 + \frac{1}{2} (G_M + G_W + G_K + G_N) \quad (71)$$

Chociaż więc zmienia się wielkość siły  $G$ , przypadającej na mimośrodość ( $G_1$ ) i łożyska ( $G_2$ ), to jednak charakter siły  $P$  pozostaje ten sam – określony już powyżej.

$$P = P_b \pm P_h - G$$

w szczególności w zakresie:

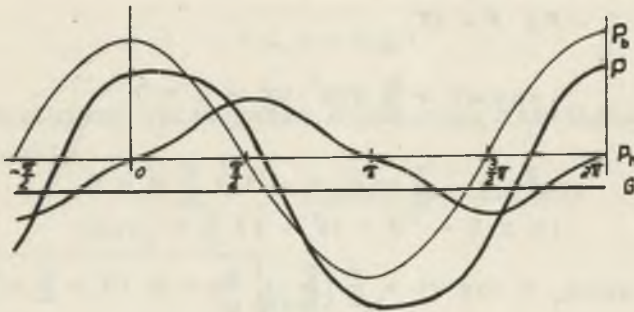
$$G - \mathcal{F} \quad P = P_b + P_h - G = P_0 (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t) - G \quad (72a)$$

$$\mathcal{F} - 2\mathcal{F} \quad P = P_b - P_h - G = P_0 (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t) - G \quad (72b)$$

Obrazem tych zależności jest rys. 7.

Siłę  $P$  można również wyrazić:

$$P = P_0 (\cos \omega t \pm \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) \quad (73)$$



Rys. 7

gdzie:

$$a = \frac{G}{P_0} \tag{74}$$

lub przechodząc do mas zredukowanych:

$$a = \frac{m_{r1} \cdot 9,81}{m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0} = \frac{m_{r1}}{m_r} \cdot \frac{900}{n^2 \cdot r_0} \tag{75}$$

oznaczając:

$$\alpha = \frac{m_{r1}}{m_r} \tag{76}$$

otrzymamy dla mimośrodków:

$$\alpha_1 = \frac{m_{r3}}{m_r} \tag{77}$$

dla łożysk:

$$\alpha_2 = \frac{m_{r4}}{m_r} \tag{78}$$

gdzie:  $m_{r3}$  i  $m_{r4}$  są masami zredukowanymi, działającymi odpowiednio na mimośrodky i łożyska, zaś  $m_r$  sumaryczną masą zredukowaną. Ostatecznie:

$$e = \alpha_1 \frac{900}{n^2 r_0} = \alpha_1 \frac{1800}{n^2 s} \tag{79}$$

Postępując zgodnie z podanymi poprzednio zasadami znajdujemy punkty dla których  $P = 0$ .

w zakresie  $0 - \pi$ ;  $\pi - 2\pi$

$$\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a = 0$$

$$\cos^2 \omega t - \frac{2}{k} \cos \omega t - 1 + \frac{2}{k} a = 0$$

$$\cos \varphi_1 = \cos \omega t = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{k} \pm \sqrt{\frac{4}{k^2} + 4 \left( 1 - \frac{2}{k} a \right)} \right]$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 \pm \sqrt{1 + k^2 - 2 k a})$$

w zakresie  $\pi - 2\pi$

$$\cos \omega t - \frac{k}{2} \cdot \sin^2 \omega t - a = 0$$

$$\cos^2 \omega t + \frac{2}{k} \cdot \cos \omega t - 1 - \frac{2}{k} a = 0$$

$$\cos \varphi_2 = \cos \omega t = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{k} \pm \sqrt{\frac{4}{k^2} + 4 \left( 1 + \frac{2}{k} a \right)} \right]$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 \pm \sqrt{1 + k^2 + 2 k a})$$

Zestawiając wyniki napiszemy:

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 \pm \sqrt{1 + k^2 - 2 k a}) \quad (80)$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 \pm \sqrt{1 + k^2 + 2 k a}) \quad (81)$$

Z kolei należy przeprowadzić dyskusję rozwiązań i określić, które określenia  $\cos \varphi$  są słuszne; widać bowiem, że dla wartości:  $a > 0$ ;  $k > 0$ , (co wynika z ich istoty) możemy otrzymać)

$$\cos \varphi < 1 \quad \text{lub} \quad \cos \varphi > -1$$

Funkcja cosinus jest funkcją ograniczoną i stąd mamy dla obydwu wyrażeń następujące ograniczenia:

$$-1 \leq \cos \psi \leq 1 \quad (82)$$

Przedyskutujemy teraz każde z czterech rozwiązań na oba powyższe warunki:

$$\cos \phi_1 = \frac{1}{k} (1 + \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\cos \phi_1 \leq 1$$

$$\frac{1}{k} (1 + \sqrt{1 + k^2 - 2ka}) \leq 1$$

$$k - 1 \geq \sqrt{1 + k^2 - 2ka}$$

$$k > 1 - \text{możliwe}$$

$k < 1$  - niemożliwe, gdyż wówczas  $k - 1 < 0$

$$1 - 0 > \sqrt{1 + k^2 - 2ka}; \text{ dla } k > 1$$

$$k^2 - 2k + 1 \geq 1 + k^2 - 2ka$$

$$-2k \geq -2ka$$

$$1 \leq a$$

Wniosek: I.1. zachodzi dla  $k > 1$  i  $a \geq 1$

$$\cos \phi_1 \geq -1$$

$$\frac{1}{k} (1 + \sqrt{1 + k^2 - 2ka}) \geq -1$$

$$\sqrt{1 + k^2 - 2ka} \geq -(1 + k)$$

Zawsze słuszne, sprawdzamy która z bezwzględnych wartości jest większa:

$$\sqrt{1 + k^2 - 2ka} \quad |(1+k)|$$

$$1 + k^2 - 2ka \quad 1 + k^2 + 2k$$

$$-2ka < 2k$$

$$-a < 1$$

Wobec powyższego, podnosząc do kwadratu obie strony nierówności zmieniam jej kierunek:

$$1 + k^2 - 2ka < 1 + k^2 + 2k$$

$$-2ka < 2k$$

$$a > -1$$

$$a > 0$$

Wniosek: I.2 zachodzi dla  $k \geq 0$  i  $a > 0$ .

$$\cos \phi_1 = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\cos \phi_1 < 1$$

$$\frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka}) < 1$$

$$k - 1 > -\sqrt{1 + k^2 - 2ka}$$

$$1 - k < \sqrt{1 + k^2 - 2ka}$$



a)  $k \leq 1$

$$1 - 2k + k^2 < 1 + k^2 - 2ka$$

$$-2k < -2ka$$

$$1 > a$$

$$a < 1$$

Wniosek a) zachodzi dla  $k < 1$  i  $a < 1$

b)  $k > 1$

sprawdzamy wartości bezwzględne:

$$|1 - k| \quad \left| \sqrt{1 + k^2 - 2ka} \right|$$

$$|1 - 2k + k^2| \quad |1 + k^2 - 2ka|$$

a) dla  $a < 1$  mamy

$$|1 + k^2 - 2k| \leq |-2ka + 1 + k^2|$$

β)  $a > 1$

$$|1 + k^2 - 2k| > |-2ka + 1 + k^2|$$

$$\frac{b}{a} 1 + k^2 - 2k < 1 + k^2 - 2ka$$

$$-2k < -2ka$$

$$1 < a$$

Wniosek: b)α zachodzi dla  $k > 1$  i  $a < 1$

$$b)β \quad 1 + k^2 - 2k > 1 + k^2 - 2ka$$

$$1 \leq a$$

Wniosek:  $b/\beta$  zachodzi dla  $k > 1$   $a \geq 1$   
 Zestawiając wnioski mamy:

$$\text{II. 1 zachodzi dla: a: } k \leq 1 \quad \text{i} \quad a \leq 1 \\
 \text{b: } k > 1 \quad \text{i} \quad a \geq 1 \quad \text{czyli} \quad a > 0$$

$$2 \cos \varphi_1 > -1$$

$$\frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka}) > -1$$

$$- \sqrt{1 + k^2 - 2ka} > -1 - k$$

$$\sqrt{1 + k^2 - 2ka} < 1 + k$$

$$-a \leq 1$$

$$a > 0$$

Wniosek: II. 2 zachodzi dla  $a > 0$   $k > 0$

$$\text{III. } \cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 + \sqrt{1 + k^2 + 2ka})$$

$$\cos \varphi_2 \leq 1$$

1.

$$\frac{1}{k} (-1 + \sqrt{1 + k^2 + 2ka}) \leq 1$$

$$k + 1 > \sqrt{1 + k^2 + 2ka}$$

$$2k > 2ka$$

$$1 \geq a$$

$$a \leq 1$$

Wniosek: III. 1. zachodzi dla  $k \geq 0$   $a \leq 1$

$$2. \cos \varphi_2 \geq -1$$

$$\frac{1}{k} (-1 + \sqrt{1 + k^2 + 2ka}) \geq -1$$

$$\sqrt{1 + k^2 + 2ka} \geq 1 - k$$

dla wszystkich  $a \geq 0$ :

$$\sqrt{1 + k^2 + 2ka} > 1 - k$$

Wniosek III. 2. zachodzi dla  $k \geq 0$  i  $a \geq 0$

$$IV. \cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 - \sqrt{1 + k^2 + 2ka})$$

$$1. \cos \varphi_2 < 1$$

$$\frac{1}{k} (-1 - \sqrt{1 + k^2 + 2ka}) \geq 1$$

$$k + 1 \geq -\sqrt{1 + k^2 + 2ka}$$

Wniosek: IV. 1. zachodzi dla  $a \geq 0$  i  $k \geq 0$

$$2. \cos \varphi_2 \geq -1$$

$$\frac{1}{k} (-1 - \sqrt{1 + k^2 + 2ka}) \geq -1$$

$$\sqrt{1 + k^2 + 2ka} < k - 1$$

$$a) k > 1$$

$$1 + k^2 + 2ka < k^2 - 2k + 1$$

$$a < -1$$

Wniosek: 2a nie zachodzi.

b)  $k < 1$

$$\sqrt{1 + k^2 + 2ka} < k - 1$$

$$\sqrt{1 + k^2 + 2ka} < 0$$

Wniosek: 2b nie zachodzi.

Wniosek: IV 2 nie zachodzi dla  $k > 0$  i  $a > 0$ . Biorąc szczególniejszy z warunków (1 i 2) ograniczających zakres stosowalności poszczególnych związków napiszemy:

Określenie  $\cos \varphi$  związkiem (I - IV) stosuje się:

I dla  $k > 1$  i  $a > 1$

II dla a)  $a < 1$  i  $k < 1$

b)  $a > 0$  i  $k > 1$

III dla  $k \geq 0$  i  $a < 1$

IV nigdy dla  $k > 0$  i  $a > 0$

Zakresy stosowalności poszczególnych równań przejrzysto przedstawiają drugostronne tablice:

Jak widać nie otrzymaliśmy żadnego rozwiązania na  $\cos \varphi$  dla  $a > 1$  i  $k < 1$  oraz mamy dwa rozwiązania na  $\cos \varphi_1$ , w zakresie  $a > 1$  i  $k > 1$ , nie mając żadnego na  $\cos \varphi_2$  w tymże zakresie.

Sens powyższego ujawnia się w pełni po przeprowadzeniu dyskusji mechanicznej interpretacji rozwiązań. Należy zauważyć, że znalezienie punktów zerowych równań opiera się na porównaniu sumy sił bezwzględności i oporów hydraulicznych z ciężarem układu korbowego; wynika to jasno z przekształconej formy równania:

$$\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t = a$$

Dla ograniczonych wartości  $k$  wyrażenie  $f = \cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t$ , jest wielkością ograniczoną; może się więc zdarzyć wypadek, że ciężar układu korbowego będzie większy od  $f_{\max}$ . W tym wypadku

nie otrzymamy wartości  $P = 0$ , gdyż  $a > f_{\max}$  i równanie staje się nierównością. Musimy więc wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia  $f$ , biorąc oczywiście:

$$f = \cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t$$

Dla znalezienia maksimum funkcji należy obliczyć pierwszą pochodną  $f'$ , znaleźć wartość zmiennej, dla której  $f' = 0$  oraz sprawdzić czy druga pochodna dla tejże wartości spełnia warunek  $f'' < 0$ .

Wykonujemy to obliczenie:

$$f' = -\sin \omega t + k \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t$$

$$f' = -\sin \omega t (k \cdot \cos \omega t - 1)$$

$$f' = -\sin \omega t + \frac{k}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

$$f' = -\cos \omega t + k \cdot \cos 2\omega t$$

$$f' = -\cos \omega t + k \cdot (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

$$f' = 0$$

$$1) \sin \omega t = 0 \qquad 2) \cos \omega t = \frac{1}{k}$$

Wartości  $f''$

$$1) \text{ dla } \sin \omega t = 0 \qquad f'' = -1 + k$$

$$\text{dla } k < 1 \qquad f'' < 0$$

a więc jest to maksimum dla  $k < 1$

$$2) \text{ dla } \cos \omega t = \frac{1}{k}$$

$$f'' = -\frac{1}{k} + k \left[ \frac{1}{k^2} - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right]$$

$$f'' = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k} - k + \frac{1}{k}$$

$$f'' = \frac{1}{k} - k$$

dla  $k > 1$   $f'' < 0$

a więc jest to maksimum dla  $k > 1$

Dla  $k = 1$  oba rozwiązania są jednoznaczne i dają dla  $\omega t = 0$ ;  
 $f = f_{\max}$

Obliczając wartości  $f_{\max}$  i zestawiając je z otrzymanymi wynikami napiszemy:

$$1) \text{ dla } k \leq 1 \quad \text{ i } \quad \omega t = 0 \quad f_{\max} = 1$$

$$2) \text{ dla } k \geq 1 \quad \text{ i } \quad \omega t = \arccos \frac{1}{k} \quad f_{\max} = \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right)$$

Ponieważ jak stwierdzono powyżej - granicznym wypadkiem, dla którego zachodzi  $P = 0$  jest  $a = f_{\max}$ , otrzymujemy z powyższego dodatkowe ograniczanie wartości  $a$ :

$$1) \quad a \leq 1 \quad \text{ dla } \quad k \leq 1$$

$$2) \quad a \leq \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) \quad \text{ dla } \quad k \geq 1$$

Wartość

$$a = \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{k} \right) = a_{gr}$$

stanowi górną granicę stosowalności równań I i II. Na wielkość  $a_{gr}$  wpływają opory hydrauliczne, ale dopiero po przekroczeniu pewnej wartości ( $k > 1$ ). Dla  $k \leq 1$  ta granica podyktowana jest przez maksymalną siłę bezwładności i wynosi:  $a = 1 = \text{const}$

Widać stąd, że w zależności od wartości  $k$  będziemy mieli typowe przebiegi funkcji  $f$  (sumy sił bezwładności i oporów hydraulicznych, a to dla  $k \leq 1$  i  $k > 1$ . Przedstawiają je wykresy, wiążąc je z wielkością  $a$  zauważymy, że możemy podać dla tej ostatniej kilka charakterystycznych wartości, które naniesiono na wykresy. Stanowią one każdorazową oś odciętych układu. Odległość  $f$  od każdorazowej osi odciętych  $a$  jest proporcjonalna do siły  $P$ . Powyżej mamy  $P > 0$ , poniżej -  $P < 0$ .

Wartościami charakterystycznymi są:

$$1) \quad a < 1$$

$$k \geq 1$$

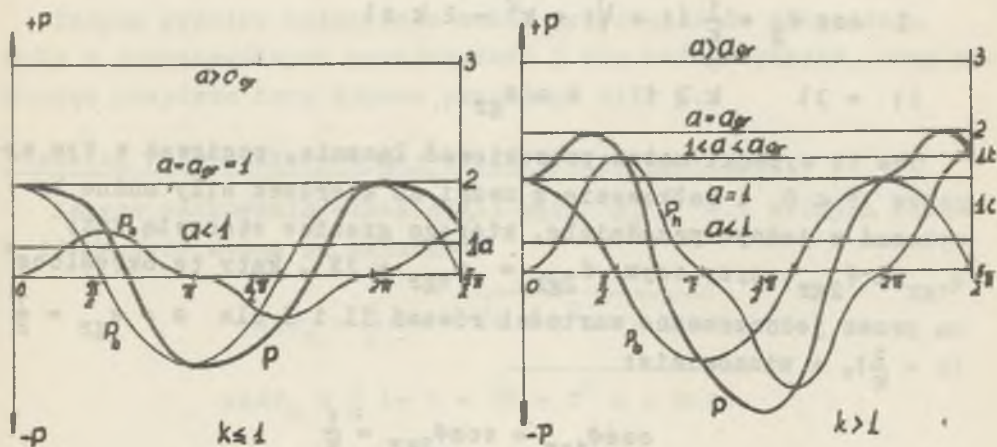
$$1b) \quad 1 < a < a_{gr}$$

$$k > 1$$

$$P \geq 0$$

$$2) a = a_{gr} \quad k \geq 1 \quad P \leq 0$$

$$3) a > a_{gr} \quad k \geq 1 \quad P < 0$$



Rys. 8

Celem rozważań jest obliczenie średniej siły nacisku w łożyskach i mimośrodach. Metoda postępowania jest znana: potrzebna jest w niej znajomość punktów dla których  $P = 0$ . Punkty te – określone kątami  $\varphi$  – stanowią granice całkowania. Wykresy (8) wraz z tablicami i ograniczeniem górnej wartości "a" pozwalają na podanie sposobu wyznaczania granic całkowania dla poszczególnych wypadków, a to:

$$1a) k \geq 1 \quad a \leq 1$$

Całkowanie należy prowadzić w zakresach określonych kątami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  przez równania:

$$\text{II} \quad \cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\text{III} \quad \cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 + \sqrt{1 + k^2 + 2ka})$$

$$1b) k > 1 \quad 1 < a \leq a_{gr}$$

Całkowanie należy przeprowadzić w zakresach określonych kątami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  ( $\varphi_2 > 2\pi$ ) przez równania:

$$\text{II } \cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\text{I } \cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (1 + \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$2) = 3) \quad k \geq 1 \quad a \geq a_{gr}$$

Oba te wypadki można potraktować łącznie, ponieważ w tym wypadku  $P < 0$  i całkowanie z uwagi na kierunek siły można by wykonać w jednym przedziale, którego granice stanowią kąty  $\varphi_{1gr}$  i  $\varphi_{2gr}$ , przy czym  $\varphi_{2gr} = \varphi_{1gr} + 2\pi$ , kąty te określone są przez jednoznaczne wartości równań II i I dla  $a = a_{gr} = \frac{1}{2}(k + \frac{1}{k})$ , a mianowicie:

$$\cos \varphi_{1gr} = \cos \varphi_{2gr} = \frac{1}{k}$$

Wartości  $a_{gr}$  i kąta granicznego  $\varphi_{gr}$  zestawiono w poniższej tabelicy dla kilku wartości  $k$ :

k	0	0,4	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	4,0
$a_{gr}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,017	1,13	1,25	1,67	2,125
$\varphi_{gr}$	0°	0°	0°	0°	33°30	51°20	60°	70°40	75°30

Odnosnie kątów  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  należy zwrócić uwagę, że zawsze

$$0 < \varphi_1 < \pi$$

natomiast:

$$\pi < \varphi_2 < \frac{5}{2}\pi$$

Wypada się wreszcie zastanowić, czy powyższe rozważania wynikłe z dopuszczenia  $a > 1$  mają uzasadnienie praktyczne. Okazuje się, że tak. Przyjmując przeciętne wartości:  $\alpha = 0,15$  n = 80 obr/min.  $r_0 = 0,015$  m otrzymujemy:



$$a = \frac{900 \cdot \alpha}{n^2 \cdot r_0} = \frac{900 \cdot 0,15}{6400 \cdot 0,015} = 1,41$$

czyli

$$a > 1$$

Znając granice całkowania można przystąpić do obliczenia siły w poszczególnych przedziałach i dla całego obrotu, uwzględniając powyższe trzy typowe przebiegi siły P.

Przebieg P charakteryzujący się:  $k \geq 1$      $a \leq 1$

Zakres całkowania określający kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , których wielkość znaleźć można ze związków:

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (-1 + \sqrt{1 + k^2 + 2ka})$$

Widać, że siła P jest w zakresie:

$$0 - \varphi_1 \quad P > 0$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 \quad P < 0$$

$$\varphi_2 - 2\pi \quad P > 0$$

Zmieniając znak siły P dla wartości  $P < 0$ , chcemy znaleźć wartość bezwzględną oraz uwzględniając ponadto, że dla  $\omega t = \pi$  zmienia się równanie definicyjne siły P ( $P_h$  zmienia znak), otrzymany poniższe cztery zakresy całkowania siły P:

$$0 - \varphi_1 \quad P'_{sr1} = \frac{1}{\varphi_1} P_0 \int_0^{\varphi_1} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\varphi_1 - \pi \quad P_{sr2} = - \frac{1}{\pi - \varphi_1} P_0 \int_{\varphi_1}^{\pi} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\pi - \varphi_2 P_{sr3} = - \frac{1}{\varphi_2 - \pi} P_0 \int_{\pi}^{\varphi_2} (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\varphi_2 - 2\pi P_{sr4} = \frac{1}{2\pi - \varphi_2} P_0 \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

otrzymujemy następujące całki do rozwiązania:

$$1) \int \cos \omega t \cdot d\omega t = \sin \omega t$$

$$2) \int \sin^2 \omega t \cdot d\omega t = -\frac{1}{4} \sin 2\omega t + \frac{\omega t}{2}$$

$$3) \int d\omega t = \omega t$$

Obliczenie przeprowadzono tabelarycznie.

Podstawiając wartości z tablicy otrzymujemy:

$$P'_{sr1} = \frac{1}{\varphi_1} P_0 \left[ \sin \varphi_1 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_1 + \frac{k}{4} \varphi_1 - a \varphi_1 \right]$$

$$P'_{sr2} = \frac{1}{\pi - \varphi_1} P_0 \left[ \sin \varphi_1 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_1 - \frac{k}{4} (\pi - \varphi_1) + a(\pi - \varphi_1) \right]$$

$$P'_{sr3} = \frac{1}{\varphi_2 - \pi} P_0 \left[ -\sin \varphi_2 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_2 + \frac{k}{4} (\varphi_2 - \pi) + a(\varphi_2 - \pi) \right]$$

$$P'_{sr4} = \frac{1}{2\pi - \varphi_2} P_0 \left[ -\sin \varphi_2 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_2 - \frac{k}{4} (2\pi - \varphi_2) - a(2\pi - \varphi_2) \right]$$

Ponieważ

$$P'_{sr} = P'_{sr1} \frac{\varphi_1}{2\pi} + P'_{sr2} \frac{\pi - \varphi_1}{2\pi} + P'_{sr3} \frac{\varphi_2 - \pi}{2\pi} + P'_{sr4} \frac{2\pi - \varphi_2}{2\pi}$$

otrzymujemy:

$$P'_{sr} = \frac{1}{2\pi} P_0 \left[ 2 \sin \varphi_1 - 2 \sin \varphi_2 - \frac{k}{4} \sin 2\varphi_1 - \frac{k}{4} \sin 2\varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{k}{4} (\pi - 2\varphi_1) - \frac{k}{4} (3\pi - 2\varphi_2) + a(\pi - 2\varphi_1) - a(3\pi - 2\varphi_2) \right]$$

zakres	$0 - \varphi_1$		$\varphi_1 - \mathcal{F}$		$\mathcal{F} - \varphi_2$		$\varphi_2 - 2\mathcal{F}$	
	wsp.	wynik	wsp.	wynik	wsp.	wynik	wsp.	wynik
1	1	$\sin \varphi_1$	-1	$-\sin \varphi_1$	-1	$\sin \varphi_2$	1	$-\sin \varphi_2$
2	$\frac{k}{2}$	$-\frac{1}{4} \sin 2\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{2}$	$-\frac{k}{2}$	$\frac{1}{4} \sin 2\varphi_1 + \frac{\mathcal{F} - \varphi_1}{2}$	$-\frac{k}{2}$	$-\frac{1}{4} \sin 2\varphi_2 + \frac{\varphi_2 - \mathcal{F}}{2}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{1}{4} \sin 2\varphi_2 + \frac{2\mathcal{F} - \varphi_2}{2}$
3	-a	$\varphi_1$	a	$\mathcal{F} - \varphi_1$	a		-a	$2\mathcal{F} - \varphi_2$

$$P'_{sr} = \frac{2}{f} P_0 \left\{ \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) - \frac{k}{16} (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{k}{8} (\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\varphi_1 + \pi)] \right\}$$

$$P_{sr} = \frac{2}{f} P_0 \left\{ \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] - \right. \\ \left. - \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + 4\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2)] \right\}$$

Zauważywszy, że  $\frac{2}{f} P_0 = P'_{sro}$  jest średnią siłą w wypadku ruchu harmonicznego ( $P = P_0 \cos \omega t$ ). Wyrażenie zaś w klamrze, większe od jednośoi, zwiększa tę siłę średnią - nazwijmy je współczynnikiem zwiększenia nacisku  $\psi$ , tak więc:

$$P'_{sr} = P'_{sro} \cdot \psi \quad (83)$$

gdzie:

$$\psi = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] - \\ - \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + 4\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (84)$$

We współczynniku tym można wyodrębnić dwa człony:

$$A = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] \quad (85)$$

$$B = - \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + 4\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (86)$$

Oba są dodatnie, pierwszy uwzględnia zwiększenie nacisku przez ciężar mechanizmu napędowego, drugi - występowaniem oporów hydraulicznych.

Przebieg  $P$  charakteryzujący się:  $k \geq 1$        $1 < a \leq a_{gr}$ .

Zakres całkowania określają kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , wynikające ze związków:

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{k} (1 + \sqrt{1 + k^2 - 2ka})$$

siła P jest w zakresie:

$$0 - (\varphi_2 - 2\pi) \quad P < 0$$

$$(\varphi_2 - 2\pi) - \varphi_1 \quad P > 0$$

$$\varphi_1 - 2\pi \quad P < 0$$

Uwzględniając zmianę definicji siły P dla  $\omega t = \pi$  otrzymujemy poniższe cztery zakresy jej całkowania:

$$0 - (\varphi_2 - 2\pi) P'_{sr1} = - \frac{1}{\varphi_1 - 2\pi} P_0 \int_0^{\varphi_2 - 2\pi} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$(\varphi_2 - 2\pi) - \varphi_1 P'_{sr2} = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi} \cdot P_0 \int_{\varphi_2 - 2\pi}^{\varphi_1} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\varphi_1 - \pi P_{sr3} = - \frac{1}{\pi - \varphi_1} \cdot P_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2 - 2\pi} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\pi - 2\pi P_{sr4} = - \frac{1}{\pi} P_0 \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

Otrzymujemy tutaj podobne jak poprzednio całki, których wartości w przedziałach całkowania zestawiono w poniższej tabelicy.

Podstawiając wartości z tabelicy otrzymujemy:

$$P'_{sr1} = \frac{1}{\varphi_2 - 2\pi} P_0 \left[ -\sin \varphi_2 + \frac{k}{8} \sin 2\varphi_2 - \frac{k}{4} (\varphi_2 - 2\pi) + a(\varphi_2 - 2\pi) \right]$$

zakres	$0 - (\varphi_2 - 2\pi)$		$(\varphi_2 - 2\pi) - \varphi_1$		$\varphi_1 - \pi$		$\pi - 2\pi$	
	wsp.	wynik	wsp.	wynik	wsp.	wynik	wsp.	wynik
1	-1	$\sin\varphi_2$	1	$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2$	-1	$-\sin\varphi_1$	-1	0
2	$-\frac{k}{2}$	$-\frac{1}{4}\sin 2\varphi_2 + \frac{\varphi_2 - 2\pi}{2}$	$\frac{k}{2}$	$-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi)$	$-\frac{k}{2}$	$\frac{1}{4}\sin 2\varphi_1 + \frac{\pi - \varphi_1}{2}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
3	a	$\varphi_2 - 2\pi$	-a	$\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi$	a	$\pi - \varphi_1$	a	$\pi$

$$P'_{sr2} = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi} P_o \left[ \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_1 + \frac{k}{8} \sin 2\varphi_2 + \right. \\ \left. + \frac{k}{4} (\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi) - a(\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi) \right]$$

$$P'_{sr3} = \frac{1}{\pi - \varphi_1} P_o \left[ \sin\varphi_1 - \frac{k}{8} \sin 2\varphi_1 - \frac{k}{4} (\pi - \varphi_1) + a(\pi - \varphi_1) \right]$$

$$P'_{sr4} = \frac{1}{\pi} P_o \left[ \frac{k}{4} \pi + a\pi \right]$$

Uwzględniając że:

$$P'_{sr} = P'_{sr1} \frac{\varphi_2 - 2\pi}{2\pi} + P'_{sr2} \frac{\pi_1 - \varphi_2 + 2}{2\pi} + P'_{sr3} \frac{\pi - \varphi_1}{2\pi} + \\ + P'_{sr4} \frac{\pi}{2\pi}$$

otrzymujemy po podstawieniu:

$$P'_{sr} = \frac{1}{2\pi} P_o \left[ 2 \sin\varphi_1 - 2 \sin\varphi_2 + \frac{k}{4} \sin 2\varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{k}{4} \sin 2\varphi_1 - \frac{k}{4} (\varphi_2 - 2\pi - \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi + \pi - \varphi_1 - \pi) + \right. \\ \left. + a (\varphi_2 - 2\pi - \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi + \pi - \varphi_1 + \pi) \right]$$

$$P'_{sr} = \frac{1}{2\pi} P_o \left[ 2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) + a(2\varphi_2 - 2\varphi_1 - 2\pi) - \right. \\ \left. - \frac{k}{4} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) - \frac{k}{4} (-2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 4\pi) \right]$$

$$P'_{sr} = \frac{2}{\pi} P_o \left\{ \frac{1}{2} (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] - \right. \\ \left. - \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 4\pi - 2(\varphi_1 - \varphi_2)] \right\} \quad (87)$$

Wprowadzając znane orzeczenie:

$$P'_{sr} = P'_{sro} \psi \quad (88)$$

gdzie podobnie jak poprzednio:

$$\psi = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] - \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 4\pi - 2(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (89)$$

oraz:

$$A = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)]) \quad (90)$$

$$B = -\frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 4\pi - 2(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (91)$$

Jak widać - w stosunku do przebiegu 1a - otrzymaliśmy identyczne wyrażenie na A, natomiast różne dla B. Okazuje się jednak, że oba wyrażenia dają identyczną wartość na granicy stosowności, tzn. dla  $k = 1$  i  $a = 1$ , gdyż wówczas

$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$  i  $B = 0$ . Oznacza to ciągłą zmianę składnika B we współczynniku  $\psi$ .

Przebieg P charakteryzujący się  $k \geq 1$   $a > a_{gr}$

W tym wypadku całkowanie przeprowadza się w zakresie kątów  $\varphi_{1gr}$  i  $\varphi_{2gr}$ , przy czym  $\varphi_{2gr} = \varphi_{1gr} + 2\pi$ , gdzie kąt graniczny określa związek:

$$\cos \varphi_{gr} = \frac{1}{k} \quad (92)$$

Przy czym zawsze  $P \leq 0$

Uwzględniając ponadto zmianę definicji siły P dla  $\omega t = \pi$  otrzymamy następujące trzy zakresy całkowania:

$$0 - \varphi_{gr} \quad P'_{sr1} = -\frac{1}{\sqrt{3r}} P_0 \int_0^{\varphi_{gr}} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$\varphi_{gr} - \pi \quad P'_{sr2} = -\frac{1}{\sqrt{3 - \varphi_{gr}}} P_0 \int_{\varphi_{gr}}^{\pi} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$



$$\pi - 2\pi P'_{sr3} = -\frac{1}{\pi} P_0 \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

Stosując do dwóch pierwszych całek zasadę addytywności otrzymujemy:

$$P'_{sr1-2} = -\frac{1}{\pi} P_0 \int_0^{\pi} (\cos \omega t + \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

$$P'_{sr3} = \frac{1}{\pi} P_0 \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \omega t - \frac{k}{2} \sin^2 \omega t - a) d\omega t$$

Uwzględniając, że poszczególne całki dają w obu zakresach  $(0 - \pi)$  i  $(\pi - 2\pi)$ , jednakowe wartości, a to:

$$\int \cos \omega t d\omega t = \sin \omega t \quad - 0$$

$$\int \sin^2 \omega t d\omega t = -\frac{1}{4} \sin 2\omega t + \frac{\omega t}{2} \quad - \frac{\pi}{2}$$

$$\int d\omega t = \omega t \quad - \pi$$

otrzymujemy w wyniku:

$$P'_{sr1-2} = \frac{1}{\pi} P_0 \left( -\frac{k}{4} \pi + a\pi \right)$$

$$P'_{sr3} = \frac{1}{\pi} P_0 \left( \frac{k}{4} \pi + a\pi \right)$$

Średnia siła dla całego obrotu:

$$P'_{sr} = \frac{1}{2} (P'_{sr1-2} + P'_{sr3}) = P_0 \cdot a \quad (93)$$

lub inaczej:

$$P'_{sr} = \frac{2}{\pi} P_0 \cdot \frac{\pi}{2} a \quad (94)$$

Biorąc podobnie jak poprzednio:

$$P'_{sr} = P'_{sro} \psi \quad (95)$$

przy czym  $\psi$  jest znanym współczynnikiem obliczanym z określenia dla

$$\varphi_1 = \varphi_{gr} \text{ oraz } \varphi_2 = \varphi_{gr} + 2\pi,$$

Reasumując wszystkie wyniki stwierdzić należy:  
Średnią siłę nacisku oblicza się w myśl równania:

$$P'_{sr} = P'_{sro} \psi$$

gdzie:

$P'_{sro}$  - średnia siła dla ruchu harmonicznego, określona:

$$P'_{sro} = \frac{2}{\pi} P_0 = \frac{2}{\pi} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 \quad (96)$$

zaś  $\psi$  - współczynnik zwiększania nacisku:

$$\psi = A + B \quad (97)$$

gdzie: A jest wartością obliczaną w identyczny sposób dla wszystkich trzech przebiegów:

$$A = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \frac{a}{2} [\varphi_2 - (\pi + \varphi_1)] \quad (98)$$

zaś B zależnie od przebiegu:

$$k \geq 1 \quad a < 1 \quad B = -\frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + 4\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (99)$$

$$k \geq 1 \quad 1 < a \leq a_{gr}$$

$$k \geq 1 \quad a > a_{gr} \quad B = \frac{k}{16} [\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 4\pi - 2(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (100)$$

Straty tarcia w mechanizmie napędowym osadzarki

Znajomość średniej siły (rozd. poprzedni) pozwala na obliczenie średniej mocy, potrzebnej na pokonanie oporów tarcia w mechanizmie napędowym osadzarki rzeczywistej.

Wychodzimy ze wzoru

$$N_{t\acute{s}r} = P'_{sr} \cdot \mu r \cdot \omega$$

ale

$$P'_{sr} = P'_{sro} \psi$$

więc

$$N_{t\acute{s}r} = \psi P'_{sro} \cdot \omega \cdot r \mu$$

Jest to wzór ogólny; możemy go zarówno zastosować do łożysk jak i mimośrodków. Przypisując mimośrodkom indeks -1, łożyskom -2 otrzymamy:

$$N_{t\acute{s}r1} = \psi_1 P'_{sro} \mu_1 \cdot \omega r_1 \quad (101)$$

$$N_{t\acute{s}r2} = \psi_2 P'_{sro} \mu_2 \cdot \omega r_2 \quad (102)$$

uwzględniając przyjęte ostatnio oznaczenia promieni: mimośrodu i czopa łożyskowego:

$$r_1 = R \quad r_2 = r_w$$

łączna moc strat tarcia wyniesie:

$$N_t = N_{t\acute{s}r} = \psi_1 \cdot P'_{sro} \mu_1 \cdot R \cdot \omega + \psi_2 \cdot P'_{sro} \mu_2 r_w \cdot \omega \quad (103a)$$

$$N = P'_{sro} \cdot \omega [\psi_1 \cdot R \cdot \mu_1 + \psi_2 \cdot r_w \cdot \mu_2] \quad (103b)$$

Uwzględniając dalej:

$$\omega = \frac{n}{30}$$

$$P'_{sro} = \frac{2}{\pi} P_0 = \frac{2}{\pi} m_r \cdot \omega^2 \cdot r_0 = \frac{2}{\pi} m_r \frac{\pi^2 n^2}{900} r_0 \quad (104)$$

otrzymamy:

$$N_t = \frac{2}{\pi} m_r \frac{\pi^2 n^2}{900} r_0 \frac{\pi n}{30} [\psi_1 \cdot R \cdot \mu_1 + \psi_2 \cdot r_w \cdot \mu_2]$$

przyjmując  $\pi^2 = 10$  otrzymujemy:

$$N_t = \frac{m_r \cdot n^3 \cdot r_0}{1350} [\psi_1 \cdot R \cdot \mu_1 + \psi_2 + \psi_2 \cdot r_w \mu_2] \text{ kGm/sec} \quad (105)$$

Wzór powyższy określa moc potrzebną do pokonania oporów tarcia w jednym przedziale osadzarki.

Należy tutaj raz jeszcze podkreślić, że współczynniki dla łożysk i mimośrodków różnią się od siebie ( $\psi_1$  i  $\psi_2$ ), gdyż obliczane są dla różnych wartości ciężaru mechanizmu napędowego.  $\psi = F(a)$  zaś  $a = f(\alpha)$ .

### Nomogramy

Operowanie wzorem uprzednio wyprowadzonym, chociaż niewątpliwie prostym w budowie, jest dosyć uciążliwe wobec konieczności wyznaczania współczynników  $\psi$ . Aby ułatwić praktyczne stosowanie powyższego wzoru należy opracować nomogram pozwalający na graficzne rozwiązanie zagadnienia, tzn. na podanie wartości współczynnika  $\psi$  przy znajomości wartości zmiennych, od których zależy ten współczynnik.

Jak wiemy:  $\psi = A + B$ , ale  $A$  i  $B$  są funkcjami  $k$ ,  $\phi$  a  $\phi$  jest funkcją  $k$  i  $a$ , zaś  $a$  zależy od  $\alpha$ ,  $n$  i  $s$ : ostatecznie:

$$\psi = F(\alpha, n, s, k)$$

Zmiennymi są więc:

- $\alpha$  - stosunek masy zredukowanej mechanizmu napędowego do masy zredukowanej (całkowitej),
- $n$  - obroty wału osadzarki - obr/min,
- $a$  - skok tłoka - m,
- $k$  - współczynnik oporów hydraulicznych.

Obliczenie współczynnika  $\psi$  należy prowadzić etapami i tak: tworząc ze zmiennych  $n$  i  $s$  wyrażenie  $n^2s$  można dla znanych i  $n^2s$  obliczyć wartość  $a$  wg zależności:

$$a = \frac{1800 \cdot \alpha}{n^2 s}$$

wówczas współczynnik  $\psi$  wyrazi się:

$$\psi = f(a, k)$$

Dla wartości  $a$  i  $k$  można obliczyć wartości współczynników  $A$  i  $B$ , gdzie  $A$  określone jest zależnością, zaś  $B$  przez - (98) i (99). Występujące w tych określeniach kąty  $\phi$  oblicza się zgodnie z podanymi uprzednio zasadami. Dodając wartości  $A$  i  $B$  otrzymujemy wartość  $\psi$ .

Wyniki obliczeń dla sporządzenia nomogramu zestawiono w tablicach i naniesiono na wykresy, a łącząc odpowiednio skale tych wykresów otrzymano nomogram. W celach obliczeniowych sporządzono ponadto wykres kątów  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Nomogram uzupełniono kojarząc wartość współczynnika  $\psi$ , ze skokiem  $s$ , tak że z nomogramem można wprost znajdować wartości  $\psi s$ , która - jak się okazuje - występuje w obliczeniach dla części doświadczalnej. Przez pięciokątne uwielokrotnienie skali  $\psi$  dla linii  $k = 0$ , rozszerzono zakres stosowania nomogramu dla celów doświadczalnych. W celach praktycznego zastosowania nomogramu (obliczenia mocy napędu) wystarczy znacznie mniejszy zakres wartości, mniejszy nawet niż to przewiduje niewielokrotniona skala  $\psi$ . W tablicach nie podano wartości dla nakreślenia w nomogramie linii  $n = \text{const}$  w układzie  $n^2s - s$ , i  $s = \text{const}$  w układzie  $\psi s - \psi$ , gdyż są one prostymi.

## Wzory teoretyczne

### 1. Wzór I

Dodając moc potrzebną na pokonanie oporów hydraulicznych  $N_h$ , do mocy potrzebnej na pokonanie strat tarcia  $N_t$ , otrzymujemy łączną moc na wale:

$$N = N_h + N_t = k \frac{m_r \cdot n^3 \cdot r_o^2}{4050} + \frac{m_r \cdot n^3 \cdot r_o}{1350} (\psi_1 \cdot \mu_1 \cdot R + \psi_2 \mu_2 \cdot r_w) \quad (106)$$

kGm/sec

Uwzględniając wprowadzone pod (5) oznaczenie:  $k = \xi r_o$  otrzymujemy:

$$N = \frac{m_r \cdot n^3}{1350} \left[ \frac{\xi r_o^3}{3} + r_o (\psi_1 \cdot \mu_1 \cdot R + \psi_2 \mu_2 \cdot r_w) \right] \text{kGm/sec} \quad (107)$$

Wprowadzając wielkość skoku:  $a = 2r_o$  i średnio:  $D = 2R$  oraz  $d = 2r_w$  otrzymujemy:

$$N = \frac{m_r \cdot n^3}{5400} \left[ \frac{\xi s^3}{6} + s (\psi_1 \cdot \mu_1 \cdot D + \psi_2 \mu_2 \cdot d) \right] \text{k Gm/sec} \quad (108)$$

lub w kW:

$$N = \frac{m_r \cdot n^3}{5,5 \cdot 10^5} \left[ \frac{\xi s^3}{6} + s (\psi_1 \mu_1 \cdot D + \psi_2 \mu_2 \cdot d) \right] \text{kW} \quad (109)$$

Jak zaznaczono powyżej, wzór ten dotyczy jednego przedziału osadzarki. Oznaczając wielkość dotyczące przedziału kamienia "k", przerostów "p", otrzymamy wzór określający moc na wale osadzarki:

$$N = \frac{m_r \cdot n^3}{5,5 \cdot 10^5} \left[ \frac{\xi}{6} (s_k^3 + s_p^3) + \mu_1 D (\psi_{1k} s_k + \psi_{2k} s_k) + \mu_2 \cdot d (\psi_{2k} s_k + \psi_{2p} \cdot s_p) \right] \text{kW} \quad (110)$$

Chcąc za pomocą tego wzoru obliczyć moc silnika napędowego, trzeba uwzględnić w nim sprawność przekładni  $\eta_p$  oraz przewidzieć pewną nadwyżkę mocy, określoną współczynnikiem nadmiaru mocy  $c$ :

$$N_s = c \frac{1}{\eta_p} N \quad (111)$$

$$N_s = \frac{c}{\eta_p} \frac{m_r \cdot n^3}{5,5 \cdot 10^5} \left[ \frac{\xi}{6} (s_k^3 + s_p^3) + \mu_1 D (\psi_{1k} s_k + \psi_{1p} s_p) + \mu_2 d (\psi_{2k} s_k + \psi_{2p} s_p) \right] \text{kW} \quad (112)$$

Jest to najogólniejsza postać wzoru. Nadaje się ona zarówno po wprowadzeniu pewnych uzasadnionych uproszczeń (co uwzględniono w dalszej części pracy) – do dobierania mocy silnika napędowego, jak też do analizy wyników pomiarów w postaci poniższej, gdzie pominięto współczynnik nadmiaru mocy  $\alpha$ :

$$N_s = \frac{1}{\eta_p} \frac{m_r \cdot n^3}{5,5 \cdot 10^5} \left[ \frac{\xi}{6} (s_k^3 + s_p^3) + \mu_1 \cdot D (\psi_{1k} s_k + \psi_{1p} s_p) + \mu_2 d (\psi_{2k} s_k + \psi_{2p} s_p) \right] \text{ kW} \quad (113)$$

Poszczególne wielkości oznaczają:

$N_s$	- kW	-	moc na wale silnika,
$\eta_p$	-	-	sprawność przekładni,
$m_r$	- $\text{kg} \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$	-	masa zredukowana na tłok osadzarki,
$n$	- obr/min	-	obroty wału osadzarki,
$\xi$	- $\frac{1}{\text{m}}$	-	współczynnik oporów hydraulicznych, wartość wyznaczona w dalszej części pracy,
$s_k, s_p$	- m	-	skoki tłoków w przedziale kamienia i przerostów,
$\mu_1, \mu_2$	-	-	współczynniki tarcia w mimośrodkach i łożyskach,
$D$	- m	-	średnica mimośrodu,
$d$	- m	-	średnica czopów łożyskowych wału,
$\psi_s$	- m	-	ilozyn współczynnika zwiększania nacisku i skoku $s$ wyznaczany z nomogramu wg zasad na nim podanych dla znanych $s, n, \alpha, k$ .

## Wzór II

Podany uprzednio wzór stanowi rezultat poprzedzającego opracowania teoretycznego,

$$N_1 = \frac{G_0 \cdot i^2 \cdot n^3 (1 + \varphi)^2}{16200} \psi_0 \quad (114)$$

$$N_2 = (G_0 \frac{1+\varphi}{2} + K) (d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2) \frac{r n^3}{2020} \quad (115)$$

$$N_s = \frac{c}{\eta p} (N_1 + N_2) \quad (116)$$

Wzory dotyczą jednego przedziału osadzarki, poszczególne wielkości oznaczają w nich

$N_s$	-	KM	-	moc na wale silnika,
$N_1$	-	KM	-	moc strat hydraulicznych.
$N_2$	-	KM	-	moc strat tarcia w mimośrodkach i łożyskach,
$G_0$	-	t	-	masa wody w jednym przedziale osadzarki,
$K$	-	t	-	masa tłoków, drągów i opraw mimośrodowych w jednym przedziale osadzarki,
$\psi_0$	-	-	-	współczynnik określający moc strat hydraulicznych,
$\varphi$	-	-	-	stosunek powierzchni przedziału tłokowego do roboczego,
$n$	-	obr/min	-	obroty wału osadzarki,
$r$	-	m	-	mimośrodowość (połowa skoku tłoka),
$d_1, d_2$	-	m	-	średnica mimośrodu i czopa łożyskowego wału,
$\mu_1 \mu_2$	-	-	-	odpowiadające współczynniki tarcia,
$\eta p$	-	-	-	sprawność przekładni,
$c$	-	-	-	współczynnik nadmiaru mocy instalowanej

Po wprowadzeniu indeksów "k" i "p" (jak w rozdz. poprzednim zastąpieniu mimośrodowości - skokiem i przejściu na kW, moc na wałku silnika napędowego osadzarki wyrazi się:

$$N_s = \frac{c}{\eta p} \frac{r^3}{5,5 \cdot 10^3} \left[ G_0 \left( \frac{1+\varphi}{2} \right)^2 \left( \frac{s_k^2 + s_p^2}{4} \right) + \psi_0 + \right. \\ \left. + (G_0 \frac{1+\varphi}{2} + k) \cdot (d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2) (s_k + s_p) \right] \text{ kW} \quad (117)$$

Wzór ten z powodu powyższych założeń - może nadawać się do dobierania mocy silników napędowych, nie nadaje się jednak do analizy wyników pomiarów.



Porównanie wzorów

Ponieważ nie są znane (w tym miejscu) wyniki otrzymane za pomocą obu wzorów, porównanie może dotyczyć jedynie:

- 1) założeń, jakimi posłużono się w obu wypadkach dla ich wy-  
prowadzenia,
- 2) budowy wzorów.

Głównymi założeniami dla wzoru I są:

- 1) założenie proporcjonalności siły oporów hydraulicznych do masy zredukowanej, kwadratu prędkości tłoka oraz przypisanie im kierunku przeciwnego do kierunku ruchu tłoka - wynika stąd wkład pracy potrzebnej na pokonanie tych oporów;
- 2) obliczenie strat tarcia w mechanizmie napędowym jako rezultatu działania sił bezwładności z uwzględnieniem wpływu sił oporów hydraulicznych (na co pozwala założenie 1) i ciężaru mechanizmu napędowego;
- 3) redukcja masy wody - w oparciu o model osadzarki - nie uwzględniająca w wielkości tej masy wpływu zwężeń przekroju w części dolnej osadzarki;
- 4) założenie 3 wraz z założeniem 1 sprawia, że wpływ zwężeń przerzucano na współczynnik proporcjonalności:  $\xi$  czy  $k$ .

Wzór II cechują założenia:

- 1) określenie mocy strat hydraulicznych - po wyjściu z założenia, że pewna ( $\psi_0$ ) część energii maksymalnej, jaką posiada woda w osadzarce zużywa się z powodu występowania strat hydraulicznych;
- 2) w obliczeniu strat tarcia w mechanizmie napędowym założono, że ciężar mechanizmu w pewnych okresach zwiększa się, w innych zmniejsza się. Działanie sił masowych - można pominąć;
- 3) założenie pierwsze nie pozwala na liczbowe powiązanie strat hydraulicznych z siłą potrzebną do ich pokonania;
- 4) w konsekwencji założenia drugiego i trzeciego, straty tarcia w mechanizmie napędowym obliczono wyłącznie jako efekt działania sił bezwładności;

- 5) redukcja mas wody oparta została o rzeczywistą ich objętość i pewne założenia co do ich prędkości.

Z porównania założeń dla obu wzorów widać, że wzoru II z powodu nieuwzględnienia wpływu na straty sił oporów hydraulicznych i ciężaru mechanizmu napędowego nie można zastosować do analizy wyników pomiaru. Redukcja mas w obu wypadkach jest pewnym przybliżeniem. Za przyjęciem sposobu jak dla wzoru I przemawiałyby prostota formuły.

Porównując budowę obu wzorów stwierdzić należy jej identyczność, powtarzającą się w obu wypadkach dwuczłonowość (straty hydrauliczne i straty tarcia), proporcjonalność względem trzeciej potęgi obrotów i proporcjonalności strat tarcia względem pierwszej potęgi skoku.

Oprócz formalnej różnicy w sposobie określenia masy zredukowanej w obu wzorach, można zauważyć pewne rozbieżności o znaczeniu raczej nieistotnym;

- 1) wzór II zakłada proporcjonalność strat hydraulicznych do drugiej zaś wzór I do trzeciej potęgi skoku, wobec jednak domniemanej (we wzorze I) odwrotnej proporcjonalności współczynnika  $\xi$  względem skoku - otrzymalibyśmy zgodność obu wzorów:
- 2) we wzorze II straty hydrauliczne liczone są względem całkowitej masy zredukowanej  $m_x$ , to jest z uwzględnieniem masy mechanizmu napędowego  $m_x$ . Prowadzi to do uproszczenia formuły obliczeniowej ( $m_x$  - powtarza się w obu członach wzoru) i nie jest błędne, gdyż odpowiednio do tego założenia ulega pewnemu zmniejszeniu współczynnik  $\xi$  ozy  $k$ ;
- 3) wzór II przez współczynniki  $\psi$  uwzględnia zwiększenie strat tarcia przez działanie sił hydraulicznych, a zwłaszcza ciężaru mechanizmu.

Zestawiając powyższe można stwierdzić: wzór I wyprowadzany był z myślą o analizie pomiaru i następnym uogólnieniu go do dobierania mocy silników, wzór II - jako praktyczny oblicze-

niowy. Wydaje się jednak (na podstawie nomogramu), że nieuwzględnienie we wzorze II głównie wpływu ciężaru mechanizmu napędowego ogranicza i tutaj możliwość jego szerokiego zastosowania.

Dalszą ocenę obu wzorów przeprowadzić można będzie po przeanalizowaniu wyników otrzymanych za pomocą obu wzorów - co uczyniono w dalszej części pracy.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ПРИВОДА  
ПОРШНЕВОЙ ОТСАДОЧНОЙ МАШИНЫ

Р е з ю м е

В настоящей работе, опираясь на теоретические основы работы поршневых отсадочных машин, представлено методы, определяющие мощность привода.

THEORETICAL DETERMINATION OF PISTON JIGGERS' DRIVING FORCE

S u m m a r y

In the paper on the ground of theoretical foundations concerning piston jiggers' work the methods determining their driving force have been given.