ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: ELEKTRONIKA z.7 Nr kol. 1351

Jerzy BŁAHUT

Instytut Matematyki
Politechniki Śląskiej

O FRAKTALACH ZWARTYCH

Streszczenie. Jest to tekst o fraktalach zwartych dla niematematyków. Zawiera definicje podstawowych pojęć,elementarne wyliczenie wymiarów Aleksandrowa i Hausdorffa dla odcinka i dla zbioru Cantora,wreszcie przykład zastosowania teorii Hutchinsona.

ON THE COMPACT FRACTALS

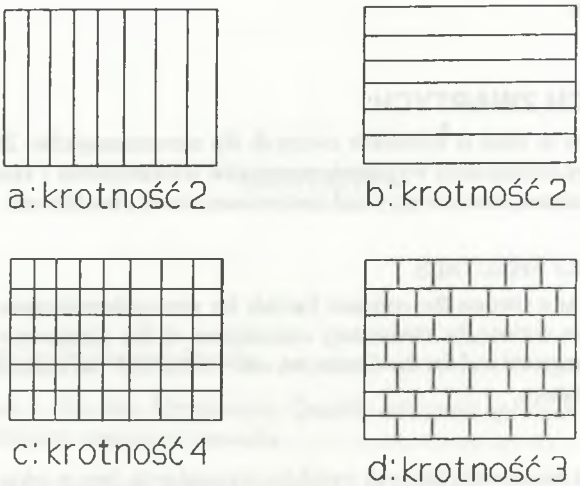
Summary. This is a text on the compact fractals for non-mathematicians. It contains definitions of the main notions,the elementary calculations of the Alexandrov and Hausdorff dimensions for the segment and for the Cantor set, and - at the end - an example of application of the Hutchinsons theory.

1. Niniejszy tekst nie zawiera żadnych wyników oryginalnych. Jest to tekst o fraktalach dla niematematyków. Mimo iż po polsku mówi i pisze się: trybunał, morał, generał, funkcjonał, areał , to przyjęła się fraktal.

Etymologię słowa fraktal można łączyć z łacińskim *fractus* - złamany, *frangere* - łamać (w związku z niegładkim , " połamanym" kształtem fraktalów), ale także z *fractio* ułamek. Zajmiemy się tym ostatnim tropem etymologicznym.

2. Nazywa się fraktalami zbiory, dla których najczęściej (bo nie zawsze) wartość ułamkową przyjmuje odpowiednio zdefiniowany wymiar. Jest to wymiar inny od szerzej znanego z topologii wymiaru, przyjmującego tylko wartości całkowite. Zaczniemy od określenia tego całkowitego, topologicznego wymiaru dla zbiorów zwartych w przestrzeniach euklidesowych, R^k. Punktami przestrzeni R^k są, jak wiadomo,ciągi k-wyrazowe $a = \langle a_1,...,a_k\rangle$,$b = \langle b_1,...b_k\rangle$ itp. liczb rzeczywistych. Określamy w R^k odległość: symbol $\|a - b\|$ oznacza odległość punktów a i b jak wyżej, równą $\sqrt{(a_1 - b_1)^2+...+(a_k - b_k)^2}$. Wyróżniamy w R^k zbiory **domknięte** ,tj. takie, które zawierają granice p wszystkich zbieżnych ciągów $\{p^{(n)}\}$ swoich punktów - takie p,że $\|p^{(n)} - p\| \to 0$ gdy $n \to \infty$.Wśród odległości między punktami danego zbioru domkniętego A albo istnieją dowolnie duże, albo któraś jest największa.Tę największą,

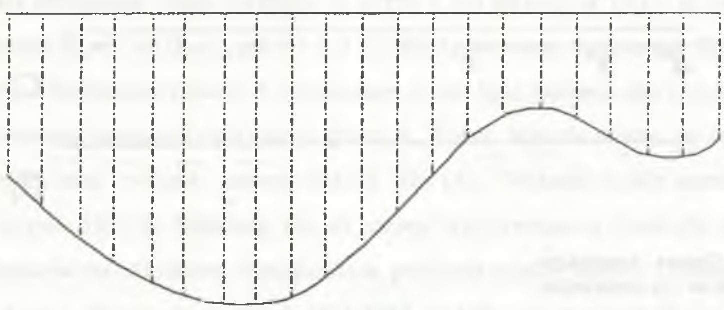
o ile istnieje, nazywamy **średnicą** zbioru A i oznaczamy przez d(A). Zbiór domknięty w R^k o skończonej średnicy nazwiemy zbiorem **zwartym**.



Rys.1. Wymiar prostokąta
Fig.1 .The dimension of a rectangle

W przestrzeniach euklidesowych takie pojęcie zwartości wystarczy. Przykładami zbiorów zwartych na płaszczyźnie, czyli w R^2 , są: prostokąt albo koło wraz z obwodem (w obu przypadkach okrąg koła, łuk okręgu, a także dowolnej funkcji ciągłej, określonej na przedziale [0,1] (wziętym wraz z końcami!). O innych przykładach powiemy później. Teraz zdefiniujemy **wymiar topologiczny** zbiorów zwartych. Pokryciem danego zbioru zwartego A w R^k nazwiemy w tym tekście skończoną rodzinę $\{A_1,...,A_m\}$ zbiorów zwartych (A_i, A_j różne dla i ≠j) taką,że każdy punkt z A leży w pewnym A_n n = 1,...,m.Jeżeli każde A_nz pokrycia ma średnicę mniejszą, niż liczba ε, to pokrycie $\{A_1,...,A_m\}$ nazywamy ε- **pokyciem** A. Jeżeli każdy punkt z A leży w co najwyżej p różnych A_n-ach z pokrycia $\{A_1,...,A_m\}$ i pewne punkty z A leżą w dokładnie p różnych A_n-ach (por. rys.1 a-d), to powiemy, że pokrycie $\{A_1,...,A_m\}$ ma **krotność** p. Jeżeli wreszcie zbiór A ma dla każdego ε>0 ε-pokrycie o krotności p +1,a nie dla każdego ε>0 ma ε-pokrycia o krotnościach mniejszych, to mówimy, że ma **wymiar** p i piszemy *DIM* A = p (łac. dimesio - wymiar).

Takie pojęcie wymiaru zbiorów zwartych przedstawił - nieco ogólniej - Paweł Aleksandrow w latach trzydziestych. Można je uważać za wariant dla zbiorów zwartych wymiaru Čecha-Lebesgu'a. Definicję zilustrujemy na dwu przykładach.Rysunek 1 sugeruje, że prostokąt ma wymiar 2 = 3 -1. Trudności z pokryciami o krotności 2 widać na rys.1a i rys.1b; takie pokrycia nie mogą się składać ze zbiorów o bardzo małej średnicy. Twierdzenie, że prostokąt ma wymiar 2, brzmi rozsądnie i jest prawdziwe; jego dowód nie jest ani krótki ani bardzo naturalny. Drugi przykład: odcinek A np. na prostej liczbowej można (zob. rys.2) podzielić na dowolnie małe odcinki,tworzące pokrycie o krotności 2. Nie 1, bo odcinka nie da się podzielić na odcinki (wzięte wraz z końcami), nie mające punktów wspólnych. Odcinek ma więc wymiar 1 = 2-1. Z rys.2 widać, że taki sam jak A wymiar 1 powinien mieć łuk, który jest wykresem ciągłej funkcji określonej na A. I jest tak rzeczywiście, bo dzięki ciągłości łuki podziałowe można uzyskać dowolnie małe.



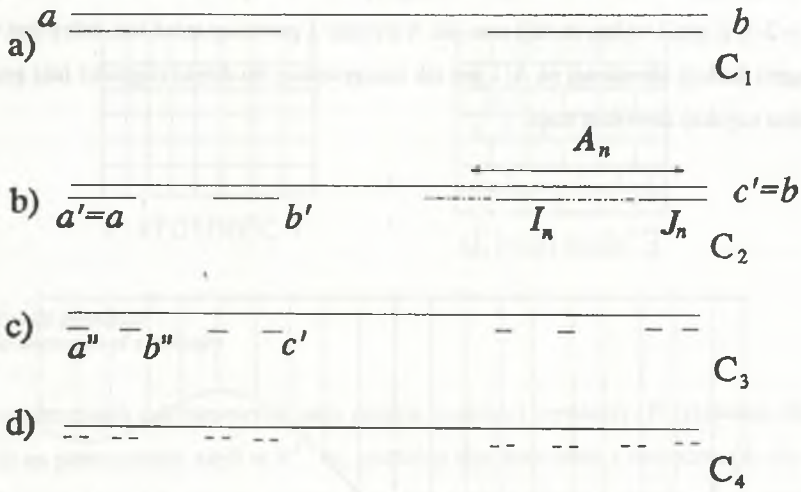
Rys. 2. Wymiar odcinka i wykres funkcji ciągłej
Fig. 2. The dimension of a graph of continuous function

3. Zbudujemy teraz nieskończony zbiór zwarty o wymiarze 0, słynny zbiór Cantora, sposobem trochę nietypowym, ale właśnie taki przyda się dalej.

Obierzmy na prostej odcinek C_0 długości 1 o końcach *a, b*. Przerysujmy go w skali 1:3, raz umieszczając lewy koniec w *a*, raz prawy w *b*, zbiory przerysowane połączmy w nowy zbiór C, (rys.3a). Zbiór C_1 znów przerysowujemy w skali 1:3, raz umieszczając lewy koniec w *a* i raz prawy w b; otrzymane „mapy „ zbioru C_1 łączymy w nowy zbiór C_2 (rys.3b). Analogicznie otrzymujemy C_3 z C_2, C_4 z C_3 i każdego kolejnego C_n dla *n* naturalnego zbiór C_{n+1}.

Zbiór Cantora określamy jako część wspólną C (nieskończenie wielu) zbiorów C_n. C jest nieskończonym zbiorem zwartym, czego tu dowodzić nie będziemy.

Spójrzmy na zbiory C_n na rys.3. Zbiór jest sumą dwu odcinków długości $^1/_3$ każdy,tzw. składowych zbioru C_1. Podobnie C_2 jest sumą czterech składowych długości $\frac{1}{9}$ każda, a dowolnie C_n sumą 2^n składowych długości 3^{-n} każda (zob. C_3 i C_4 na rys.3). Zbiory C_n dla większych *n* dają już niezłe pojęcie o „wyglądzie" zbioru C, - np. zbiór C_{10} z 1024 odcineczków jak punkty.



Rys.3. Zbór Cantora - konstrukcja
Fig.3. Cantor set - its construction

Obierzmy liczbę $\varepsilon > 0$, a do niej dobierzemy *n* takie, by było $3^{-n} < \varepsilon$. Składowe zbioru C_n tworzą pokrycie C,bo C jest częścią C_n ; jest to ε-pokrycie. Jest to (zob.rys.3 dla $n \leq 4$) pokrycie o krotności 1, bo składowe są rozłączne. Da się tak zrobić dla każdego $\varepsilon > 0$, więc C ma wymiar 0.

4. W prowadzimy decydujące o dalszym ciągu nowe pojęcie wymiaru. Wiąże się ono z pojęciem miary Hausdorffa. Narzędzia do skonstruowania tej miary zgromadził w 1914 r. Konstantyn Caratheodory, konstrukcję wykonał i zbadał Feliks Hausdorff w roku 1919. Ograniczmy się do wymiaru zbiorów zwartych, co pozwoli na pewne uproszczenie definicji.

Obierzmy zbiór zwarty A w R^k oraz liczbę $\varepsilon > 0$ i również dodatnią liczbę γ. Rozważmy wszystkie skończone ε- pokrycia zzbioru A zbiorami zwartymi A_n o średnicach $d(A_n)$ oraz odpowiadające im sumy $\sum_n d(A_n)^\gamma$. Sumy te wypełniają pewien przedział otwarty (a, ∞) lub domknięty $[a, \infty)$, gdzie $a \geq 0$. Liczbę a oznaczamy przez $m^\gamma_\varepsilon(A)$ i nazywamy ją wymiarową miarą Hausdorffa zbioru A. Przy ustalonej liczbie γ i zbiorze A, $m^\gamma_\varepsilon(A)$ jest malejącą funkcją ε. Jej granicę dla $\varepsilon \to 0$ (być może nieskończoną) nazywamy γ - **wymiarową miarą Husdorffa** zbioru A i oznaczany przez $m^\gamma(A)$.

Podzielmy odcinek A długości 1 na *n* części A_i długości $\frac{1}{n}$ każda. Mamy:

$$\Sigma_{i=1}^n \left(d(A_i)\right)^{3/2} = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

więc

$$m^{3/2}_{1/n}(A) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Stąd w granicy $m^{\frac{3}{2}}(A) = 0$. Podobnie jest z $m^\gamma(A)$ ilekroć $\gamma > 1$. Dla $\gamma < 1$ jest $m^\gamma(A) = \infty$.

Ogólnie dla dowolnego zbioru zwartego, A liczby γ, dla których $m^\gamma(A) = 0$, wypełniają pewien przedział $\{b,\infty)$ lub (b,∞), gdzie $b \geq 0$. Liczbę b nazywamy **wymiarem Hausdorffa** lub Hausdorffa - Bezikowicza zbioru A i oznaczamy przez *h*(A).Zarówno *dim* (A) jak i *h* (A) są liczbami charakteryzującymi ogół pokryć zbioru A. Wobec tego nie należy się dziwić, że zachodzi między nimi związek ; zawsze $h(A) \geq dim(A)$. Wykazał to (dla szerszej klasy zbiorów A) w roku 1932 G. Nöbeling. On też nazwał *h*(A) wymiarem Husdorffa zbioru A. Nazwisko Bezikowicza (Abrahama Samojłowicza, profesora między innymi Uniwersytetu w Cambridge) dodano dlatego, że w latach 1928-1967 opublikował on ponad 30 prac poświęconych zbiorom, dla których *h*(A) jest nicałkowite , więc różne od *dim(*A), więc większe. Benoit Mandelbrot użył słowa fraktal (ang.fractal) w latach 70. właśnie jako nazwy dowolnego zbioru A, dla którego $h(A) > dim(A)$.

Definicja fraktala figuruje w pierwszym wydaniu *The Fractala Geometry of Nature* Mardelbrota. Intuicje, które Mardelbrot wiązał z pojęciem fraktala, nie zawsze były dobrze związane z jego definicją i na Kongresie Matematycznym w Warszawie w r.1983 powiedział :" W miarę upływu czasu definicja ta podoba mi się coraz mniej." Jest to jednak jedyna dotychczas definicja, z której można wyprowadzić niebanalne własności fraktala. Inne definicje są zbyt ogólne.

5. Odcinek A długości 1 nie jest fraktalem. Wykazaliśmy wcześniej, że $m^{3/2}(A)=0$ i łatwo uwierzyć, że równość $m^\gamma(A)=0$ dla $\gamma>1$ wykazuje się podobnie. Nie dowiedliśmy wcale, że $m^\gamma(A) = <1$. Ale tego dowodzić nie trzeba,jeśli się wie, że $m^1(A) = 1$ i dokładniej, że $m^1_\varepsilon(A) = 1$ dla każdego $\varepsilon >0$.Ostatnią tezę udowadnia się prosto. PokryjmyA skończenie wieloma zbiorami zwartymi $B_1, B_2, \ldots B_n$ o średnicach mniejszych od danego $\varepsilon >0$. Każdy zbiór B_i zastąpić można odcinkiem $[a_i,b_j\}$ o tej samej średnicy, zawierającym B_i. Odcinki te tworzą pokrycie A: Stąd, jeżeli $A = \{a,b]$, to pewne $a_i \leq a$(np.$a_1 \leq a$) i pewne $b_j \geq b$ (np.$b_n \geq b$).

Przypuśćmy, że wspólnymi punktami różnych $[a_i,b_i]$ są zawsze końce tych przedziałów. Wtedy można przedziały ponumerować tak, by było $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3, \ldots b_{n-1} = a_n$, stąd $\sum_i d(B_i) = (b_1 - a_1) +(b_2 - a_2) +\ldots(b_n - a_n) = b_n - a_1 >= b -a = 1$

Częściami wspólnymi różnych $[a_i,b_i]$ mogą być odcinki. Na przykład mogło być $n=2$, $a_1 \leq a$, $a_2<b_1$, $b_2 \geq b$. Wówczas $b_2 -a_2 = (b_2 - b_1) +(b_1 - a_2)$, $b_1 - a_1 = (b_1 - a_2) +(a_2 - a_1)$, więc $(b_2 -a_2) + (b_1 - a_1) >(b_2 - b_1) + (b_1 - a_2) + (a_2 - a_1) = (b_2 - a_1)\geq b - a = 1$. Podobnie wykazuje się, że $\sum^n_{i=1} (b_n - a_n) \geq 1$ w ogólnym przypadku .

Wobec dowolności rozważanego ε-pokrycia mamy $m^1_\varepsilon(A) \geq 1$. Pokrycie powstałe z podziału A na *n* odcinków długości **1/n** $<\varepsilon$ każdy dowodzi, że $m^1_\varepsilon(A) \leq 1$, stąd $m^1_\varepsilon(A) = 1$, a zatem , wobec tego, że $m^\gamma(A) = 0$, gdy $\gamma >1$, wynika, że $h(A) =1$. Wiadomo, że $\dim(A) = 1$, więc $h(A) = \dim(A)$. A nie jest rzeczywiście fraktalem.

6. Zbiór Cantora C jest fraktalem. Dokładnie $h(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, inaczej $3^{h©}= 2$.

Oznaczamy liczbę $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ przez s. *h*© jest lewym końcem pzedziału utworzonego ze wszystkich γ, dla których $m^\gamma© = 0$. Wykażemy, że tym lewym końcem musi być s. Najpierw, że $s \geq h©$. Jeżeli bowiem $\gamma >s$ i jeśli przez S_{np}, $n = 1,2,\ldots 2^p$ oznaczyć składowe zbioru C_p (tworzą one pokrycie zbioru C, ε-pokrycie gdy $3^{-p} < \varepsilon$, to mamy:

$$\sum_n (d(S_{np}))^\gamma\, 2^p \cdot (3^{-p})^\gamma = (2\cdot 3^{-\gamma})^p$$

Przy tym z $\gamma > s$ wynika $2\cdot 3^{-\gamma}< 1$ i z $m^\gamma_\varepsilon© \leq (2\cdot 3^{-\gamma})^p$ (gdy $3^{-p} < \varepsilon$) wynika, że $m^\gamma_\varepsilon © = 0$ dla każdego ε, więc $m^\gamma© = 0$ gdy $\gamma > s$.

Wykażemy teraz, że $h© \geq s$. W tym celu wystarczy wykazać, że miara $m^s©$ jest dodatnia. Rozważmy najpierw pokrycie zbioru C składowymi S_{np}, $n = 1,2,\ldots,2^p$, zbioru C^p. Mamy:

$$\sum_n(d(S_{np}))^s = (2 \cdot 3^{-s})^p = 1^p = 1$$

Każdy przedział S_{np} jest (zob. rys.3) sumą dwu dokładnie przedziałów $S_{i,p+}$ (składowych zbioru C_{p+1}. Mamy przy tym :

$$(d(S_{ip+1}))^s + (d(S_{jp+1}))^s = 2 \cdot (3^{-p-1})^s = 2 \cdot 2^{-p-1} = 2^{-p} = (3^{-p})^s = (d(S_{np}))^s$$

Zastępując niektóre S_{np} sumami zawartych w nich składowych zbioru C_{p+1} otrzymujemy nowe pokrycie $S_1,\ldots,S_k$ zbioru C takie, że

$$\Sigma_n(d(S_n))^s = \Sigma_n(d(S_{np}))^s = 1$$

Pokrycie $S_1,\ldots,S_k$ możemy modyfikować wprowadzając do niego, podobnie jak wyżej, składowe zbiorów C_{p+2}, C_{p+3} itd. Sumy $\Sigma_n(d(S_n))^s$ dla zmodyfikowania pokryć $S'_{1,\ldots}S'_q$ będą przy tym wszystkie równe 1. Stąd, **jeżeli $S_1, S_2,\ldots,S_q$ jest pokryciem zbioru C złożonym z rozłącznych parami składowych różnch zbiorów C_p, to** $\Sigma^q_{n=1}(d(S_n))^s = 1$. Wykorzystamy ten wynik, by oszacować z dołu sumę $\Sigma_n(d(A_n))^s$ dla dowolnego pokrycia zbioru C odcinkami A_n. Obierzmy odcinek A_n i dobierzmy do niego naturalne *p* takie,że $3^{-p-1} < d(A_n) \leq 3^{-p}$. Jest dokładnie jedno takie *p*. Z nie równości dla *p* wynika,że A^n zawarte jest w sumie czterech odcinków długości 3^{-p1} każdy, z których dwa najwyżej (oznaczamy je I_n, J_n) są składowymi zbioru C_{p+1} (por. rys.3b, na którym $p = 1$). Mamy :

$$d(A_n))^s > (3^s)^{-p-1} = 2^{-p-1} = \frac{1}{2}(2^{-p-1} + 2^{-p-1}) = \frac{1}{2}((d(I_n))^s + (d(J_n)^s))$$

$I_1,\ldots J_1,\ldots I_n, J_n,\ldots$ określone dla $A_1,\ldots A_n,\ldots$ tworzą pokrycie C złożone ze składowych różnych C_p. Jeżeli składowe te są parami rozłączne, to

$$\Sigma_n((d(I_n))^s + (d(J_n))^s) = 1,$$

jeśli nie, to suma ta musi być większa. Stąd

$$\Sigma_n(d(A_n))^s > \frac{1}{2}\Sigma_n(d(A_n))^s > \frac{1}{2}\Sigma_n((d(I_n))^s + (d(J_n))^s) \geq \frac{1}{2}$$

Ostatnią nierówność wkazaliśmy dla pokryć C odcinkami, ale rozpinając na zbiorze zwartym B_n odcinek A_n (możliwie najkrótszy, więc o średnicy $d(B_n)$) mamy:

$$\Sigma_n(d(B_n))^s = \Sigma_n(d(A_n))^s > \frac{1}{2}$$

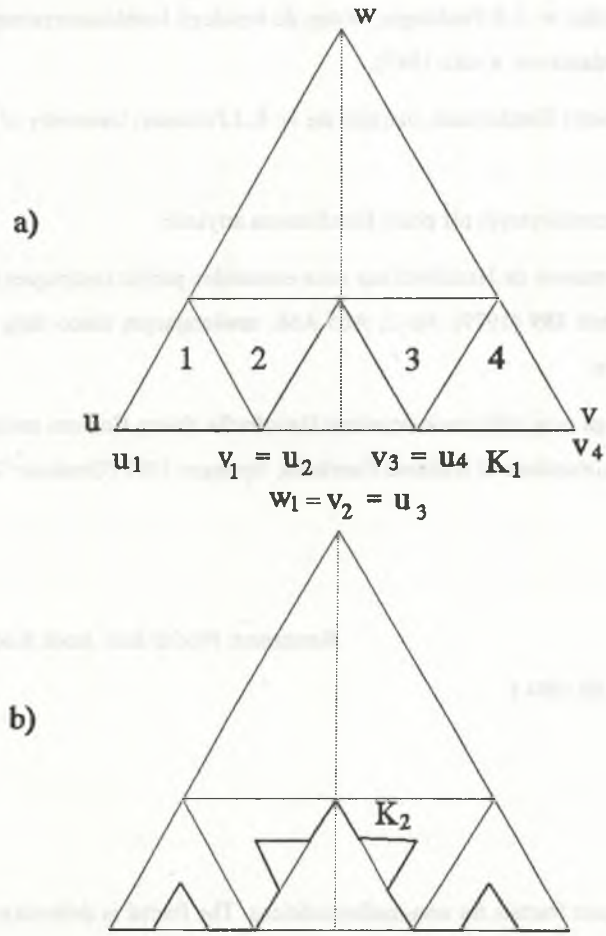
dla każdego pokrycia $B_1,\ldots B_q$ zbioru C zbiorami zwartymi. Stąd m^s © ≥ ¨, więc h© ≥ s.

7. Zbiór Cantora jest częścią wspólną wszystkich zbiorów C_p. Każdy zbiór C_{p+1} i T składa się z C_p przerysowanego w skali 1: 3 i umieszczonego lewym końcem w *a* (przekształconego przez podobieństwo T_n o współczynniku $^1/_3$) i ze zbioru C_p przerysowanego w tej samej skali i umieszczonego prawym końcem w *b* (przekształconego przez podobieństwo T_b o współczynniku $^1/_3$; współczynnik ten, to po prostu skala 1:3, napisana jako ułamek). T_a i T_b są dla wszystkich *p* te same. Biorąc część wspólną zbiorów C_p przekształconych przez T_a otrzymujemy C przekształcone przez T_a. Podobnie dla T_b, stąd c jest sumą C przekształconego przez T_a (zbioru T_aC) i C przekształconego przez T_b (zbioru T_bC).

Uogólnijmy tę sytuację. Rozważmy - dla prostoty na płaszczyźnie R^2 - zbiór zawarty A i poddajmy go przekształceniom przez podobieństwa (zwykłe podobieństwa z geometrii szkolnej takie, jak np. jednokładności) $T_1, T_2, \ldots, T_p$ o współczynnikach $r_1, r_2, \ldots, r_p$ zdefiniowanych podobnie jak dla T_a, T_b. J.E. Hutchinson nazwał zbiór A zbiorem **niezmienniczym** (ze względu na $T_1, \ldots, T_p$), jeżeli jest on sumą zbiorów $T_1 A, \ldots, T_pA$ (sens oznaczeń T_i A jest taki, jak T_aC, T_bC wyżej). Jeżeli każda z liczb dodatnich $r_1, r_2, \ldots$, jest mniejsza od 1, to istnieje jedno dokładnie *t* takie, że $r_1^t + \ldots + r_p^t = 1$. Hutchinson wykazał twierdzenie, z którego w szczeólności wynika, że jeżeli dla pewnego wielokąta W (wziętego bez punktów na obwodzie)$T_1W, \ldots, T_pW$ T_iW to W przekształcone przez T_i) sa rozłączne i są częściami W, to liczba *t* wyżej określona jest wymiarem Hausdorffa niezmienniczego zbioru A. Przy tym każdy punkt z A leży w W lub na jego obwodzie. Dla zbioru Cantora i liczb $r_a = r_b = {}^1/_3$ oraz $t = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ mamy $r_a^t + r_b^t = 1$. Zbiór C jest zbiorem niezmienniczym ze względu na T_a, T_b. Jako wielokąt W można dobrać np.kwadrat zbudowany na odcinku C_0 bez końców *a* i *b*. Z twierdzenia Hutchinsona otrzymać można więc to, co wcześniej zrobiliśmy elementarnie.

Rozważmy inny przykład zastosowania twierdzenia Htchinsona. Będzie to obliczenie wymiaru Hausdorffa krzywej Helge von Kocha. Jest ona granicą ciągu łamanych, z których pierwsze dwie przedstawiają rys.4 a i b. Dobry rysunek samej krzywej zawarty jest w artykule S.Sulwińskiego w niniejszym zeszycie. Łamaną $u_1u_2u_3u_4v$ na rys.4a otrzymać można z uv następująco. Bierzemy podobieństwa T_1, T_2, T_3, T_4 przekształcające trójkąt równoboczny u,*v*,*w* o bokach 1 na trójkąty oznaczone odpowiednio liczbami 1,2,3,4 i to w taki sposób, by punkt *u* przechodził odpowiednio na u_1, u_2, u_3, u_4 , zaś *v* na $v_1, v_2, v_3 v_4$. Trójkąty równoboczne oznaczone liczbami 1,2,3,4 mają każdy bok $^1/_3$. Stąd $r_1 = 1$ $r_2 = r_3 = r_4 = {}^1/_3$. Jeżeli bok *u*,v oznaczyć przez K_0, to = $T_1K_0 \cup T_2K_0 \cup T_3K_0 \cup T_4K_0$. Podobnie łamana K_2 z rys. 4b jest postaci

$T_1 K_1 \cup T_2K_1 \cup T_3K_1 \cup T_4K_1$. Znów T_iA Oznacza zbiór A przekształcony przez T_i. Analogicznie dla $n = 2,3,4...$ połóżmy $K_{n+1} = T_1K_n \cup T_2K_n \cup T_3K_n \cup T_4K_n$. Jeśli granicę ciągu łamanych K_n oznaczyć przez K, to z rozumowania trochę podobnego do przeprowadzonego wyżej dla zbioru Cantora wynika,że $TK = T_1K \cup T_2K \cup T_3K \cup T_4K$.



Rys.4. Przybliżenie krawędzi krzywej von Kocha
Fig.4. Approximation of the von Koch curve

W naszej wersji twierdzenia Hutchinsona występuje wielokąt W. Z rysunku 4 widać, że jego rolę grać może trójkąt u,v,w wzięty bez punktów na obwodzie. Do krzywej von Kocha stosuje się twierdzenie Hutchinsona i $h(K) = t$ dokładnie wtedy, gdy $r_1^t + r_2^t + r_3^t + r_4^t = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$.

Z równości $4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$ wynika przez zlogarytmowanie, że $t = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Liczba ta jest niecałkowita . Wykazaliśmy, że krzywa von Kocha jest fraktalem.

8. Parę słów o literaturze. Wykład teorii wymiaru zbiorów zwartych w duchu definicji Aleksandrowa znaleźć można w: L.S.Pontriagin, Wstęp do topologii kombinatorycznej, Warszawa, 1961 (przekład wydania ros. z roku 1947).

Szczegółowy wykład teorii Hutchinsona znajduje się w: K.J.Falconer, Geometry of Fractal Sets, Cambridge, 1985.

Warto wspomnieć o wcześniejszym niż praca Hutchinsona artykule:

J.Marion, Le calcul de la mesure de Hausdorff des sous-ensembles parfait isotipiques,Compt. Rendues de l'Ac. Sci. Paris **289** (1979), No 2, A65-A68, zawierającym nieco inną analizę pojęcia samopodobieństwa.

Inne od przedstawionego tutaj obliczenie wymiaru Hausdorffa zbioru Cantora można znaleźć np. w : A.F.Beardon,Interation of Rational Functions, Springer 1991 (Graduate Texts in Mathematics 132).

Recenzent: Prof.dr hab. Jacek Kudrewicz

Wpłynęło do Redakcji 28.09.1994 r.

Abstract

This is a text on the compact fractals for non-mathematicians. The fractal is defined(as in the first Mandelbrot's paper) as the set, that has Hausdorff dimension greater, then its dimension in the sense, of say, Menger-Urysohn, or Alexandrov (which is the same for compact sets). In a fact it is done for the compact fractals only. The analogies between both (the topological and the measure-theoretical) notions of dimension are.pointed and the main properties of the

notion are presented. Using elementary facts only, we calculate the Alexandrov and Hausdorff dimensions for the segment and for the Cantor set. The main facts from Hutchinsons Theory are presentend (in the smallest possible generality) and used to calculate Hausdorff dimension of the von Koch curve.