

Jacek IZYDORCZYK

Instytut Elektroniki
Politechniki Śląskiej

ANALIZA SYMBOLICZNA DUŻYCH OBWODÓW LINIOWYCH

Streszczenie. W artykule, na przykładzie analizy małosygnałowej wzmacniacza dławikowego przedstawiona została idea metody nadającej się do symbolicznej analizy obwodów elektronicznych. Metoda, opracowana przez G.E.Aldersona i P.M. Lina, znana jest w literaturze pod nazwą metody ekstrakcji parametrów. Jej podstawową zaletą jest możliwość analizy stosunkowo dużych obwodów przy założeniu, że tylko niewielka część elementów obwodu opisana jest w sposób symboliczny. Autor opracował rozszerzenie programu NAPPE2, działającego wg przedstawionej metody, pozwalające stosować do opisu analizowanego obwodu język symulacyjny programu SPICE2.

SYMBOLIC ANALYSIS OF LARGE LINEAR NETWORKS

Summary. The article presents an idea of symbolic analysis of large linear networks originated by G.E.Alderson and P.M.Lin. The method is known as parameter extraction. It can be used to analyze large linear network under assumption that only a small portion of elements are described by symbols. Author developed a shell for NAPPE2 program, an implementation of described method. The shell can be used for description of the analyzed network in SPICE2 simulation language. Considerations are illustrated by simple amplifier example.

1. Wprowadzenie

Zainteresowanie symboliczną analizą liniowych obwodów elektronicznych datuje się od początku lat pięćdziesiątych. Szybki rozwój maszyn cyfrowych w latach sześćdziesiątych pozwolił na implementację powstałych algorytmów tak, że w końcu lat sześćdziesiątych dostępnych było kilka programów [2],[5],[23],[15],[19],[11] pozwalających na obliczenie dowolnej transmitancji dla obwodu liniowego w postaci symbolicznej. Dopiero jednak w roku 1991 pojawiła się pierwsza pełna monografia problemu opracowana przez P.M.Lina [17].

Dotychczas opracowane metody analizy symbolicznej mogą być zaszeregowane do jednej z następujących czterech klas:

1.1. Metoda topologiczna (wyznaczanie drzew grafu podobowodu)

Jest to jedna ze starszych metod. W przypadku obwodów RLC sprowadza się ona do znalezienia wszystkich drzew (tree) i 2-drzew (2-trees) grafu obwodu. Metoda gwarantuje, że żadne dwa składniki w obliczanym wyznaczniku nie będą się redukować. Jeżeli stosuje się tę metodę w przypadku typu RLC- g_m , konieczne jest zbudowanie dwóch grafów, tj. grafu napięć G_V i grafu prądów G_I . Obliczenie transmitancji wymaga wyliczenia wszystkich kompletnych drzew, tzn. podgrafów będących drzewem w G_V i G_I [14]. Tym razem metoda nie gwarantuje, że składniki obliczanego wyznacznika nie redukują się. Metoda dwóch drzew formalnie równoważna jest innej metodzie opisanej przez W.K.Chena [3] i zastosowanej przez M.Kikowskiego [7], która polega na wyznaczaniu wszystkich drzew skierowanych w grafie obwodu.

Metoda wyznaczania drzew obarczona jest następującymi wadami:

- Już w przypadku stosunkowo niewielkiego obwodu pozostawienie wszystkich elementów opisanych w sposób symboliczny prowadzi do wyniku, który jest bardzo trudny do interpretacji. Wynik staje się bardziej przejrzysty, jeżeli część elementów opisanych jest przez wartości numeryczne. Nie wpływa to jednak w najmniejszym stopniu na szybkość obliczeń.
- Liczba drzew obwodu rośnie w przybliżeniu wykładniczo wraz ze wzrostem liczby węzłów obwodu [17], co w praktyce ogranicza możliwość metody do obwodów o około 15 węzłach i 30 gałęziach.
- Spośród sterowanych źródeł bezpośrednio można uwzględnić tylko źródła prądu sterowane napięciem $-g_m$.

1.2. Metoda grafu przepływu sygnałów (reguła Masona)

Opracowana została do analizy układów automatyki [20], zaś w środowisku elektroników została spopularyzowana przez S.J. Masona [12],[13]. Metoda polega na ułożeniu równań stanu obwodu liniowego. Na tej podstawie tworzony jest graf przepływu sygnałów. Szukana transmitancja związana jest z wyznacznikiem macierzy obliczanym jako suma wag pewnych ścieżek i oczek w grafie przepływu sygnałów. Metoda została zastosowana w programie NASP [16] i w programie SNAP [10]. Ze względu na dużą złożoność obliczeniową metoda, podobnie jak metoda wyznaczania drzew, ogranicza się do obwodów o około 15 węzłach i 30 gałęziach.

1.3. Metoda interpolacji

Metoda ta jest bardzo skuteczna w odniesieniu do obwodów, w którym jednym symbolem jest zmienna zespolona s . Obwód typu RLC- g_m opisujemy za pomocą równań potencjałów węzłowych. Przekształcamy go przy tym w taki sposób, aby macierz admitancyjna mogła być przedstawiona w postaci $\mathbf{Y} = s\mathbf{C} + \mathbf{G}$. Wyznacznik macierzy \mathbf{Y} przyjmuje wtedy postać:

$$\det(\mathbf{Y}) = \det(s\mathbf{C} + \mathbf{G}) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot s + \alpha_2 \cdot s^2 + \dots + \alpha_n \cdot s^n$$

Jeżeli wszystkie parametry elementów są wielkościami numerycznymi to, aby obliczyć współczynniki $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ trzeba obliczyć wartość wyznacznika $\det(\mathbf{Y})$ dla n różnych wartości zmiennej s , a następnie rozwiązać układ równań liniowych:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_1^2 + \dots + \alpha_n \cdot s_1^n = \Delta_1$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot s_2 + \alpha_2 \cdot s_2^2 + \dots + \alpha_n \cdot s_2^n = \Delta_2$$

.....

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot s_n + \alpha_2 \cdot s_n^2 + \dots + \alpha_n \cdot s_n^n = \Delta_n$$

Aby uprościć obliczenia dla niewielkich wartości n , można wybrać rzeczywiste wartości zmiennej s lub wartości czysto urojone¹. Dla $n > 20$ metoda ta staje się jednak niepraktyczna, ponieważ rzeczywiste wartości s (lub czysto urojone) prowadzą do źle uwarunkowanego układu równań [17]. W tym przypadku najlepsze jest zastosowanie zespolonych wartości s rozmieszczonych równomiernie na kole jednostkowym [22]. Sprowadza to problem rozwiązania ww. układu równań liniowych do problemu obliczenia odwrotnej Dyskretnej Transformaty Fouriera. Jeżeli liczba n jest potęgą liczby 2, to do obliczeń można wykorzystać algorytm FFT.

- Główne mankamenty metody interpolacji to:
- Niemożność uwzględnienia innych symboli niż s . Konieczne jest stosowanie innych algorytmów, takich jak np. ekstrakcja parametrów
- Konieczność przewidywania wartości n - rzędu obodu. W przypadku istotnego zawyżenia szacunkowej wartości n w stosunku do rzeczywistej wartości rzędu obodu duża część wysiłku (czasu pracy jednostki centralnej maszyny cyfrowej) zostaje zmarnowana.

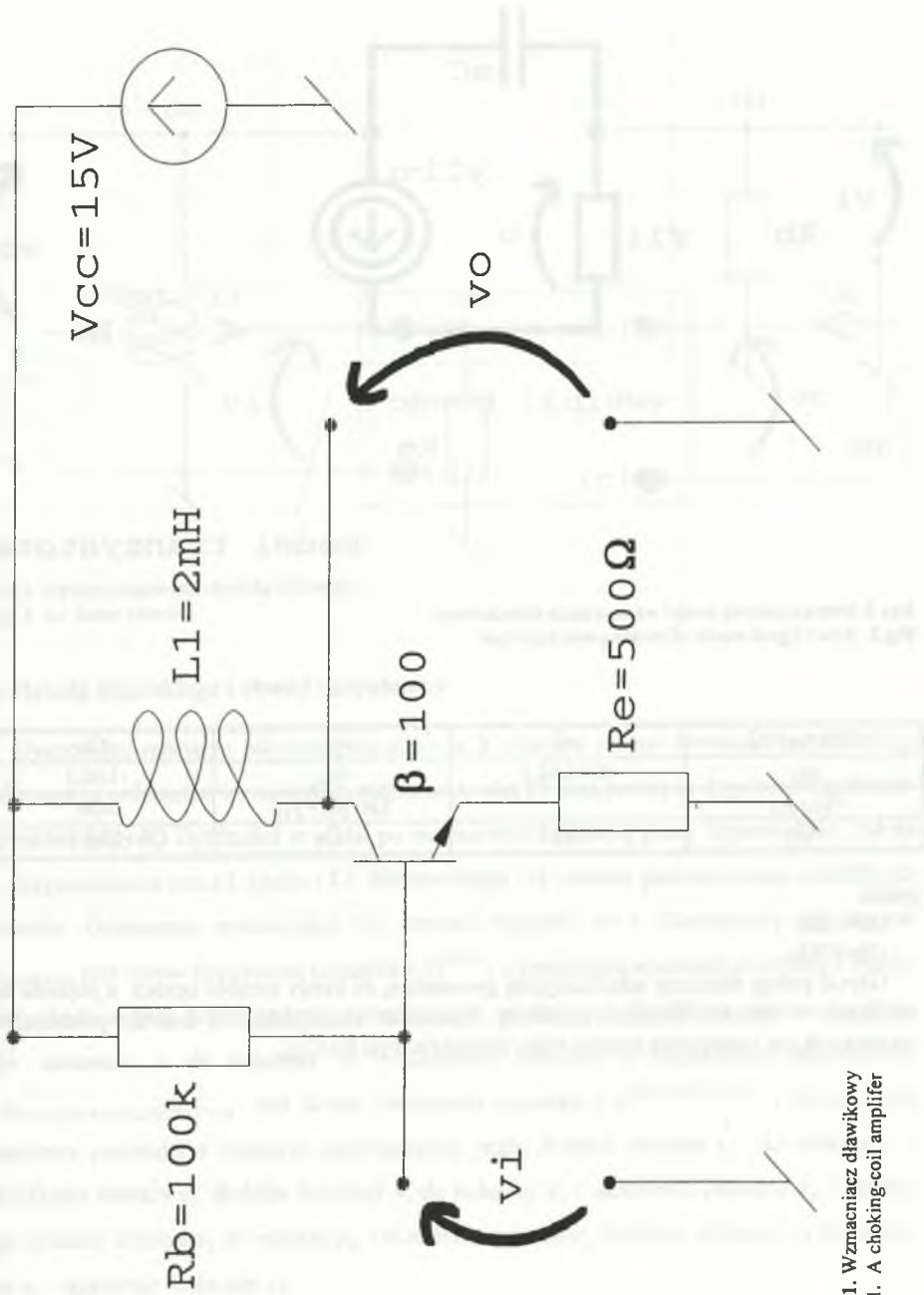
¹ W tym drugim przypadku zamiast rozwiązywać układ n równań z n niewiadomymi rozwiązuje się dwa układy po $n/2$ równań i $n/2$ niewiadomych.

1.4. Ekstrakcja parametrów

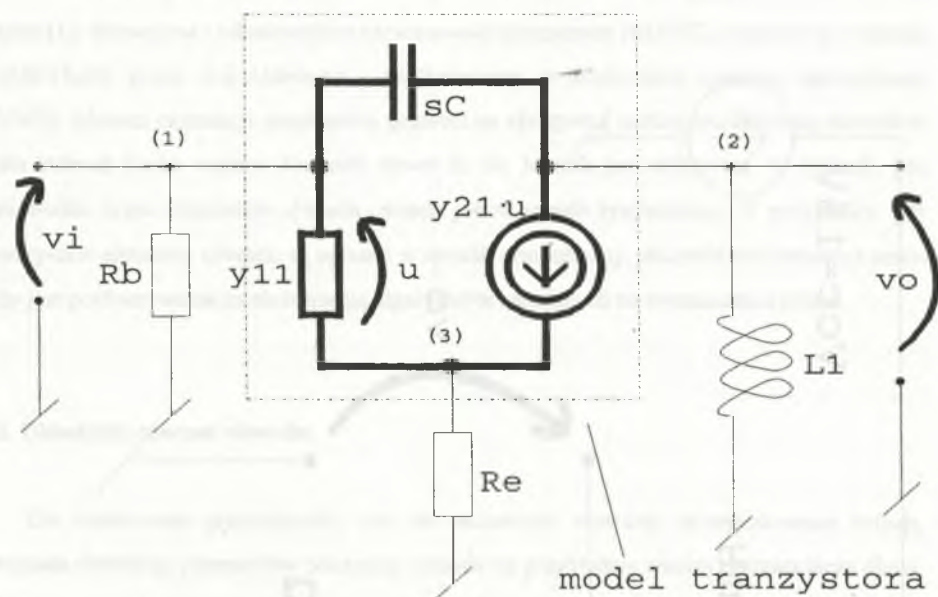
Metodzie tej poświęcona jest niniejsza praca. Początki metody sięgają lat siedemdziesiątych [1]. Rozwijana i udoskonalana zaowocowała programem NAPPE2, napisanym w języku FORTRAN przez G.E.Aldersona i użytkowym w środowisku systemu operacyjnego UNIX. Metoda ekstrakcji parametrów pozwala na efektywną analizę symboliczną obwodów, dla których liczba węzłów dochodzi nawet do 50. Metoda jest efektywna w sytuacji, gdy niewielka część elementów obwodu opisana jest w sposób symboliczny. W przypadku gdy wszystkie elementy obwodu są opisane w sposób symboliczny, złożoność obliczeniowa metody jest porównywalna ze złożonością algorytmów bazujących na wyznaczaniu drzew.

2. Układanie równań obwodu

Dla zachowania przejrzystości, aby nie zaciemniać rozważań skomplikowaną notacją, metoda ekstrakcji parametrów pokazana zostanie na przykładzie analizy wzmacniacza dławikowego - rys.1. Zostanie obliczona małosygnałowa transmitancja od napięcia wejściowego v_i do napięcia wyjściowego v_o . Przyjęto uproszczony małosygnałowy model tranzystora typu hybryd II. W modelu tym świadomie pominięto pojemność baza-emiter oraz admitancję wyjściową y_{22} dla zachowania przejrzystości dalszych rozważań. W rezultacie model małosygnałowy układu przedstawia rys.2. Wyróżniono na nim grubszą linią model samego tranzystora. W tym momencie należy zaznaczyć, że metoda ekstrakcji parametrów nie jest związana w sposób szczególny z żadną metodą układania równań obwodu. Choć mogłoby się wydawać, że najlepsza byłaby metoda równań stanu, to w praktyce okazuje się, że metoda ta wiąże się ze skomplikowanym algorytmem. Na przykład konieczne jest wybranie drzewa w grafie obwodu, a następnie specjalne potraktowanie oczek utworzonych z pojemności oraz rozcięć utworzonych z indukcyjności. W programie NAPPE2 wykorzystano metodę potencjałów węzłowych [17]. Do opisu obwodu używa się przy tym pełnej macierzy admitancyjnej obwodu Y_0 :



Rys.1. Wzmacniacz dławikowy
Fig.1. A choking-coil amplifier



Rys.2. Małosygnałowy model wzmacniacza dławikowego
 Fig.2. Small signal model of choking-coil amplifier

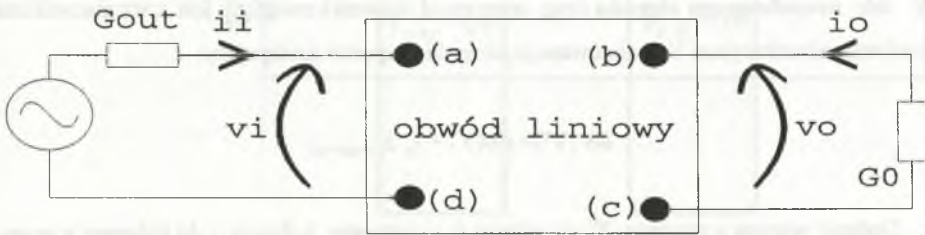
$G_b + y_{11} + sC$	$-sC$	$-y_{11}$	$-G_b$
y_{21}	$sC + 1/sL_1$	$-y_{21}$	$-1/sL_1$
$-y_{21} - y_{11}$		$G_e + y_{21} + y_{11}$	$-G_e$
$-G_b$	$-1/sL_1$	$-G_e$	$G_b + 1/sL_1 + G_e$

gdzie:

$$G_e = 1/R_e;$$

$$G_b = 1/R_b.$$

Użycie pełnej macierzy admitancyjnej gwarantuje, że każdy symbol oprócz s pojawia się dokładnie w czterech kłótkach macierzy. Natomiast niedogodnością metody potencjałów węzłowych jest możliwość analizy tylko obwodów typu RLC- g_m .



Rys.3. Ogólny przypadek obwodu liniowego
 Fig. 3. An linear network

3. Metoda Sigorskiego i obwód uzupełniony

Dysponując macierzą admitancyjną obwodu Y obliczyć można dowolną transmitancję. Wymaga to obliczenia wyznacznika macierzy $\Delta = \det(Y)$ oraz pewnych dopełnień algebraicznych macierzy Y . Zależności te podał po raz pierwszy w swojej pracy Sigorski [21]. Tabela 1, przytoczona za pracą L.Laska i J.J. Witkowskiego [9], zawiera podsumowanie potrzebnych wzorów. Oznaczenia zastosowane we wzorach wyjaśnia rys.3. Dopełnienie algebraiczne $\Delta_{(x+y)(v+z)}$ jest równe iloczynowi czynnika $(-1)^{(x+v)}$ i wyznacznika macierzy powstałej z macierzy admitancyjnej przez dodanie wiersza x do wiersza y i skreślenie wiersza x , dodanie kolumny v do kolumny z i skreślenie kolumny v . Dopełnienie algebraiczne $\Delta_{(x1+y1)(v1+z1), (x2+y2)(v2+z2)}$ jest równe iloczynowi czynnika $(-1)^{(x1+v1)+(x2+v2)}$ i wyznacznika macierzy powstałej z macierzy admitancyjnej przez dodanie wiersza x_1 do wiersza y_1 i skreślenie wiersza x_1 , dodanie kolumny v_1 do kolumny z_1 i skreślenie kolumny v_1 , a następnie dodanie wiersza x_2 do wiersza y_2 i skreślenie wiersza x_2 , dodanie kolumny v_2 do kolumny z_2 i skreślenie kolumny v_2 .

Podstawą analizy symbolicznej zaimplementowanej w programie NAPPE2 są wzory, które zawiera tab.1 (można je także znaleźć w [17]). Należy je jednak uzupełnić następującymi uwagami:

- Wyznacznik macierzy admitancyjnej $\Delta = \det(\mathbf{Y})$ jest równy wyznacznikowi macierzy powstałej przez skreślenie **dowolnego** wiersza i **dowolnej** kolumny w pełnej macierzy admitancyjnej. Dowód [17].
- Jeżeli uzupełnimy analizowany obwód o źródło prądu g_s , włączone między węzły x i y , sterowane napięciem panującym między węzłami v i z , to wyznacznik macierzy admitancyjnej \mathbf{Y}' tak **uzupełnionego obwodu** (ang. augmented network) związany jest z wyznacznikiem macierzy admitancyjnej \mathbf{Y} analizowanego obwodu w sposób następujący:

$$\det(\mathbf{Y}') = \det(\mathbf{Y}) + g_s \cdot \Delta_{(x+y)/(v+z)}$$

Dodanie wiersza x macierzy \mathbf{Y}' do wiersza y , a następnie kolumny v do kolumny z powoduje, że element g_s znajduje się tylko w klatce o współrzędnych (x, v) -rys.4. Rozwijając wyznacznik macierzy \mathbf{Y}' względem kolumny v otrzymujemy powyższy wzór. Oznacza to, że wystarczy obliczyć tylko wyznacznik macierzy admitancyjnej **obwodu uzupełnionego**. Wszystkie składniki tego wyznacznika proporcjonalne do parametru g_s tworzą dopełnienie $\Delta_{(x+y)/(v+z)}$ (po pominięciu dodatkowego symbolu g_s). Pozostałe składniki tworzą wyznacznik macierzy admitancyjnej analizowanego obwodu. Postępowanie takie jest charakterystyczne dla analizy symbolicznej i nazwane jest **schematem sortowania**².

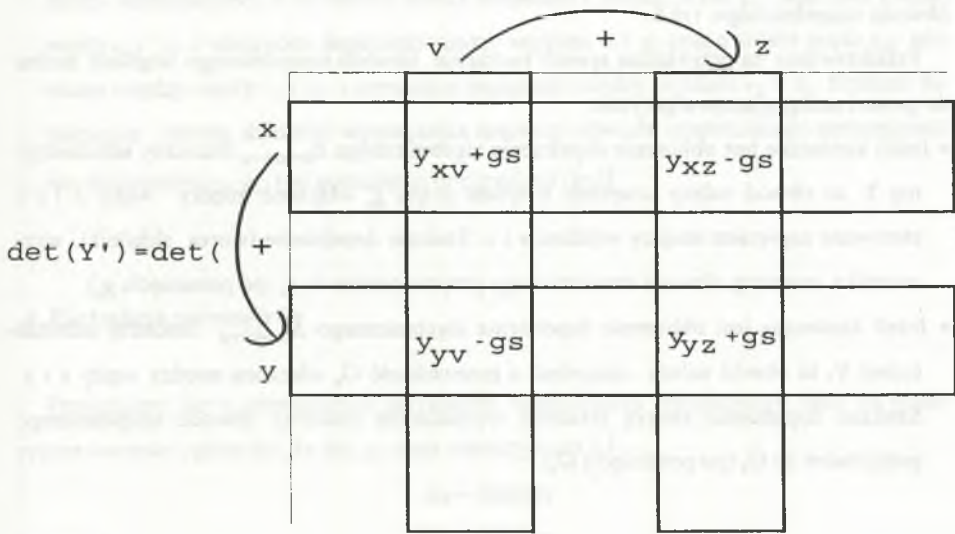
W przypadku analizowanego obwodu wzmacniacza dławikowego należy obliczyć wzmacnienie napięciowe K_v . Wymaga to obliczenia następujących dopełnień algebraicznych:

$$\Delta_{(1++0)/(2+0)} = \Delta_{12}; \quad \Delta_{(1+0)/(1+0)} = \Delta_{11}$$

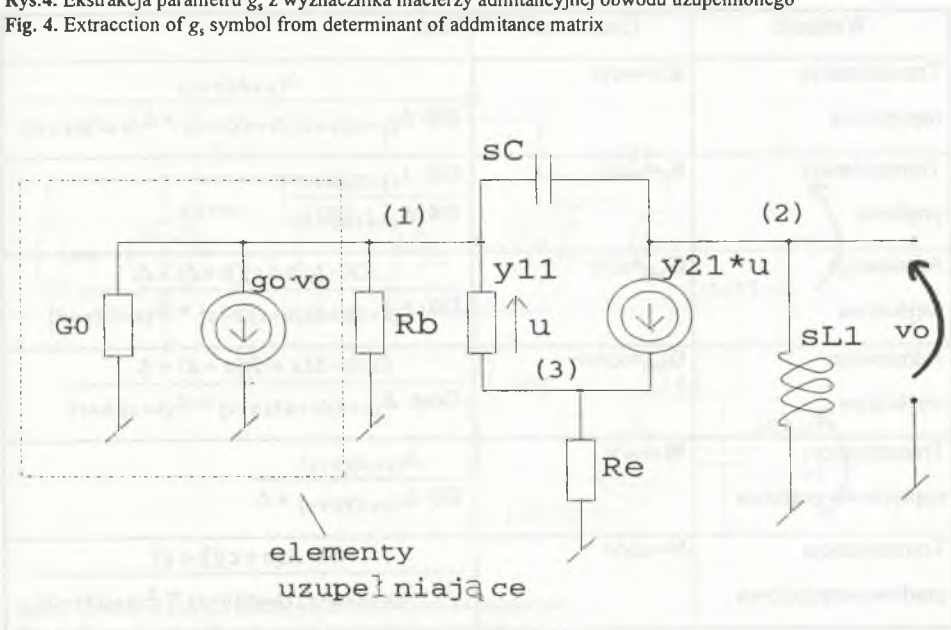
Obwód należy zatem uzupełnić o dwa elementy (rys.5.):

- Źródło prądu wpięte między węzeł 1 i węzeł 0, a sterowane napięciem między węzłami 2 i 0 - g_0 .
- Źródło prądu wpięte między węzeł 1 i węzeł 0, a sterowane napięciem między węzłami 1 i 0, czyli przewodność - G_0 .

² Schemat sortowania nie jest w sposób szczególnie związany z metodą ekstrakcji parametrów



Rys.4. Ekstrakcja parametru g , z wyznacznika macierzy admytancyjnej obwodu uzupełnionego
 Fig. 4. Extraction of g , symbol from determinant of admittance matrix



Rys.5. Obwód uzupełniony
 Fig.5. The augmented network

Postawiony problem sprowadza się do obliczenia wyznacznika macierzy admitancyjnej obwodu uzupełnionego- rys.5.

Przedstawiony na przykładzie sposób tworzenia obwodu uzupełnionego uogólnić można do postaci następującego algorytmu:

- Jeżeli konieczne jest obliczenie dopełnienia algebraicznego $\Delta_{(x+y)(v+z)}$ macierzy admitancyjnej Y , to obwód należy uzupełnić o źródło prądu g_s włączone między węzły x i y i sterowane napięciem między węzłami v i z . Szukane dopełnienie tworzą składniki wyznacznika macierzy obwodu uzupełnionego proporcjonalne do g_s (po pominięciu g_s).
- Jeżeli konieczne jest obliczenie dopełnienia algebraicznego $\Delta_{(x+y)(x+y)}$ macierzy admitancyjnej Y , to obwód należy uzupełnić o przewodność G_s włączoną między węzły x i y . Szukane dopełnienie tworzą składniki wyznacznika macierzy obwodu uzupełnionego proporcjonalne do G_s (po pominięciu G_s).

Tabela 1

Transmitancje Czwórnika Liniowego

Wielkość	Oznaczenie	Wzór
Transmitancja napięciowa	$K_v = v_o/v_i$	$\frac{\Delta_{(a+d)(b+c)}}{G_0 \cdot \Delta_{(a+d)(a+d), (b+c)(b+c)} + \Delta_{(a+d)((a+d))}}$
Transmitancja prądowa	$K_f = -i_o/i_i$	$\frac{G_0 \cdot \Delta_{(a+d)(b+c)}}{G_0 \cdot \Delta_{(b+c)(b+c)}}$
Admitancja wejściowa	$G_{wej} = i_i/v_i$	$\frac{G_0 \cdot \Delta_{(b+c)(b+c)} + \Delta}{G_0 \cdot \Delta_{(a+d)(d), (b+c)(b+c)} + \Delta_{(a+d)(a+d)}}$
Admitancja wyjściowa	$G_{wyj} = i_o/v_o$	$\frac{G_{out} \cdot \Delta_{(a+d)(a+d)} + \Delta}{G_{out} \cdot \Delta_{(a+d)(a+d), (b+c)} + \Delta_{(b+c)(b+c)}}$
Transmitancja napięciowo-prądowa	$M = v_o/i_i$	$\frac{\Delta_{(a+d)(b+c)}}{G_0 \cdot \Delta_{(b+c)(b+c)} + \Delta}$
Transmitancja prądowo-napięciowa	$N = -i_o/v_i$	$\frac{G_0 \cdot \Delta_{(b+c)(b+c)}}{G_0 \cdot \Delta_{(a+d)(a+d), (b+c)(b+c)} + \Delta_{(a+d)(a+d)}}$

- Jeżeli konieczne jest obliczenie dopełnienia algebraicznego $\Delta_{(x_1+y_1)(v_1+z_1),(x_2+y_2)(v_2+z_2)}$ macierzy admitancyjnej Y , to obwód należy uzupełnić o źródło prądu g_{s1} włączone między węzły x_1 i y_1 i sterowane napięciem między węzłami v_1 i z_1 oraz o źródło prądu g_{s2} włączone między węzły x_2 i y_2 i sterowane napięciem między węzłami v_2 i z_2 . Szukane dopełnienie tworzą składniki wyznacznika macierzy obwodu uzupełnionego proporcjonalnie do iloczynu $g_{s1} g_{s2}$ (po pominięciu iloczynu $g_{s1} \cdot g_{s2}$).

4. Ekstrakcja parametrów

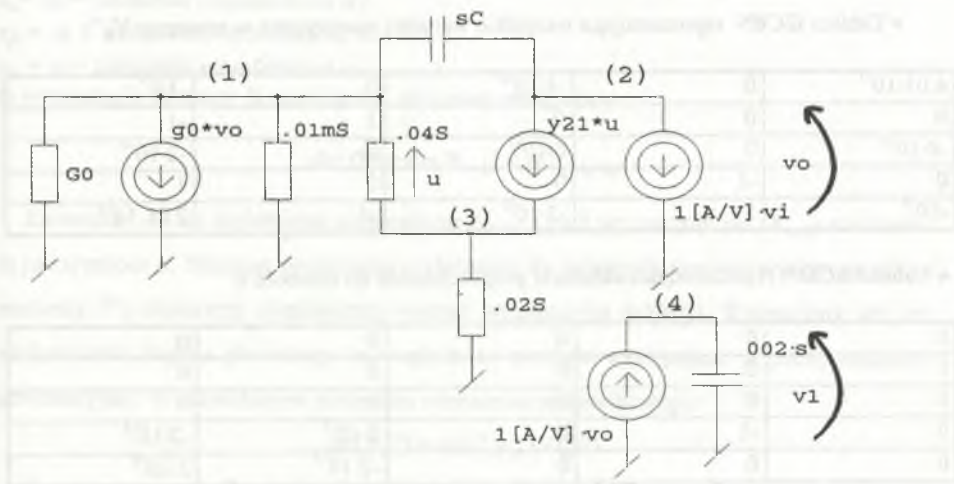
Przyjmijmy, że w rozważanym przykładzie wzmacniacza dławikowego dane są numeryczne wartości oporności R_e, R_b, y_{11} oraz indukcyjności L_1 :

$$R_e = 500[\Omega]$$

$$R_b = 100[\text{k}\Omega]$$

$$y_{11} = 0.04[\text{S}]$$

$$L_1 = 2[\text{mH}]$$



Rys.6. Obwód, w którym indukcyjność zamieniono na pojemność
 Fig. 6. The network with inductance converted to capacitance

W postaci symboli pozostają natomiast elementy $g0$, $G0$, sC , y_{11} . Zwróćmy uwagę, że symbol s „doklejonny” został do symbolu C . W pełnej macierzy admitancyjnej obwodu znajdujemy teraz wartości numeryczne oraz symboliczne. Szczególnie interesujący jest przypadek indukcyjności. Gdyby miała pozostać symbolem, w macierzy admitancyjnej widniałby symbol $1/sL1$ - podobnie jak w przypadku pojemności symbol s byłby „doklejonny” do symbolu $L1$. W rozważanym przypadku indukcyjność jest dana numerycznie. Powoduje to, że w macierzy admitancyjnej Y_0 pojawia się dodatkowy symbol $1/s$. Aby tego uniknąć, indukcyjność $L1$ symulujemy za pomocą żyratora, obciążonego pojemnością [4] tak, jak pokazuje to rys.6.

Pełna macierz admitancyjna Y_0 tego obwodu przedstawiona jest poniżej:

$4.01 \cdot 10^{-3} + sC + G0$	$-sC + g0$	$-4 \cdot 10^{-3}$	0	$-10^{-3} - G0 - g0$
$y_{21} - sC$	sC	$-y_{21}$	1	-1
$-4 \cdot 10^{-3} - y_{21}$	0	$6 \cdot 10^{-3} + y_{21}$	0	$-2 \cdot 10^{-3}$
0	-1	0	$2 \cdot 10^{-3} s$	$1 - 2 \cdot 10^{-3} s$
$-10^{-3} - G0$	$1 - g0$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-1 - 2 \cdot 10^{-3} s$	$2.01 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} s + G0 + g0$

Reprezentację powyższej macierzy admitancyjnej w pamięci maszyny cyfrowej tworzą następujące trzy struktury danych:

- Tablica **GC0N** reprezentująca wszystkie wartości numeryczne w macierzy Y_0 :

$4.01 \cdot 10^{-3}$	0	$-4 \cdot 10^{-3}$	0	-10^{-3}
0	0	0	1	-1
$-4 \cdot 10^{-3}$	0	$6 \cdot 10^{-3}$	0	$-2 \cdot 10^{-3}$
0	-1	0	0	1
-10^{-3}	1	$-2 \cdot 10^{-3}$	-1	$2.01 \cdot 10^{-3}$

- Tablica **SC0N** reprezentująca składniki proporcjonalne do symbolu s :

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	-1	0	$2 \cdot 10^{-3}$	$-2 \cdot 10^{-3}$
0	0	0	$-2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

- Lista symboli w postaci uporządkowanych piątek:

(wiersz 1, wiersz2, kolumna1, kolumna2, symbol)

Każda piątka reprezentuje położenie pewnego symbolu w pełnej macierzy admitancyjnej. W kłatkach o współrzędnych (wiersz1, kolumna1) oraz (wiersz 2, kolumna 2) symbol wystę-

puje ze znakiem plus. W klatkach o współrzędnych (wiersz 1,kolumna2) oraz (wiersz2, kolumna1) występuje ze znakiem minus. W przypadku rozważanego wzmacniacza odpowiednia lista jest następująca:

(1,2,1,2,sC)

(2,3,1,3,y₂₁)

(1,5,1,5,G0)

(1,5,2,5,g0)

Zauważmy, że piątka w postaci (2,3,1,3,y₂₁) oznacza to samo, co piątka (3,2,3,1,y₂₁). W dalszych rozważaniach dla oszczędności miejsca tablice GC0N i SC0N będziemy reprezentować w postaci jednej tablicy SG:

$$SG = GC0N + s \cdot SC0N$$

Zadanie polega na obliczeniu wyznacznika pełnej macierzy admitancyjnej Y_0'' w postaci symbolicznej. Umożliwia to następujące twierdzenie o ekstrakcji.

Twierdzenie o ekstrakcji [17]

Jeżeli macierz X zawiera symbol α , występujący dokładnie w czterech klatkach:

$$x_{ik} = \alpha + (\text{składniki niezależne od } \alpha),$$

$$x_{il} = -\alpha + (\text{składniki niezależne od } \alpha),$$

$$x_{jk} = -\alpha + (\text{składniki niezależne od } \alpha),$$

$$x_{jl} = \alpha + (\text{składniki niezależne od } \alpha),$$

to wyznacznik macierzy X może zostać obliczony następująco:

$$\det(X) = \det(X_{\alpha=0}) + \alpha \cdot \Delta_{(j+i)(l+k)}$$

Zauważmy, że ani dopełnienie algebraiczne $\Delta_{(j+i)(l+k)}$, ani wyznacznik $\det(X_{\alpha=0})$ nie zawiera już symbolu α . Stosując twierdzenie o ekstrakcji do kolejnych symboli występujących w macierzy Y_0'' obliczymy symboliczną wartość wyznacznika $\det(Y_0'')$. Wyznacznik ten jest wielomianem stopnia pierwszego ze względu na symbole występujące w pełnej macierzy admitancyjnej. W rozważanym przypadku wzmacniacza dławikowego:

$$\det(Y_0'') = w(sC, y_{21}, G0, g0)$$

W ogólnym przypadku wielomian występujący po prawej stronie powyższego wzoru zawiera $2^4 = 16$ składników, z których każdy jest liniowy ze względu na symbole sC, y₂₁, G0, g0. W praktyce nie wszystkie iloczyny symboli występują w tym wyznaczniku. Operacje elementarne wykonywane na macierzy w celu wyznaczenia dopełnienia $\Delta_{(j+i)(l+k)}$ mogą wyeliminować pewne symbole. Okazuje się, że dozwolone iloczyny symboli można znaleźć analizując

jąc listę symboli w postaci uporządkowanych piątek [17]. Poniżej przedstawiony jest algorytm postępowania pozwalający na znalezienie wszystkich składników proporcjonalnych do wybranego symbolu α .

Algorytm ekstrakcji symbolu [17]

Niech będzie dana lista Q symboli występujących w pełnej macierzy admitancyjnej. Po ekstrakcji symbolu opisanego piątką (i,j,k,l,α) lista $Q^{(1)}$ opisująca położenie symboli w dopełnieniu algebraicznym $\Delta_{(j+i)(l+k)}$ otrzymywana jest z listy Q w sposób następujący:

- Usunąć piątkę (i,j,k,l,α) ;
- Każdą z pozostałych piątek w postaci $(i1,j1,l1,\alpha1)$ zmodyfikuj w sposób opisany następującym pseudokodem:

```

if(i1 = j)
if(j > i) i1 = else i1 = i-1,
if(j1 = j)
  if(j > i) j1 = i else j1 = i-1;
if(i1 > j)
  i1 = i1-1;
if(j1 > j)
  j1 = j1-1,
if(k1 == 1)
  if(l > k) k1 = 1 else k1 = 1-1;
if(l1 == 1)
  if(l > k) l1 = 1 else l1 = 1-1;
if(k1 > 1)
  k1 = k1-1;
if(l1 > 1)
  l1 = l1-1;

```

- Usunąć wszystkie piątki, w których $i1 == j1$ lub $k1 == l1$.

Zastosujemy algorytm ekstrakcji do rozważanego przez nas przykładu wzmacniacza dwukowego.

Krok 0. Dozwolony jest składnik bez symboli (wyraz wolny).

Krok 1. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do sC

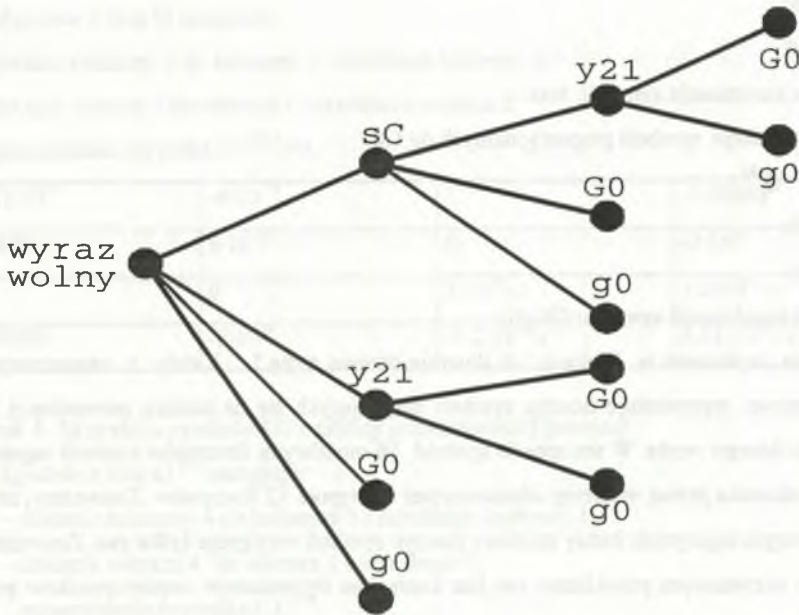
Q	$Q^{(1)}$
$(1,2,1,2,sC)$	$(1,2,1,2,y_{21})$
$(2,3,1,3,y_{21})$	$(1,4,1,4,G0)$
$(1,5,1,5,G0)$	$(1,4,1,4,g0)$
$(1,5,2,5,g0)$	

Dozwolone kombinacje symboli: $sC, sC \cdot y_{21}, sC \cdot G0, sC \cdot g0$

Krok 2. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do $sC \cdot y_{21}$

$Q^{(1)}$	$Q^{(2)}$
(1,2,1,2, y_{21})	(1,3,1, G_0)
(1,4,1,4, G_0)	(1,3,1,3, g_0)
(1,4,1,4, g_0)	

Dozwolone kombinacje symboli: $sC \cdot y_{21} \cdot G_0, sC \cdot y_{21} \cdot g_0$



Rys.7. Ilustracja procesu ekstrakcji symboli
Fig. 7. Extracion of parameters

Krok 3. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do $sC \cdot y_{21} \cdot G_0$

$Q^{(2)}$	$Q^{(3)}$
(1,3,1,3, G_0)	
(1,3,1,3, g_0)	

Dozwolone kombinacje symboli: brak.

Krok 4. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do y_{21}

$$Q^{(4)} \quad Q^{(5)}$$

$$(2,3,1,3,y_{21}) \quad (1,4,1,4,G_0)$$

$$(1,5,1,5,G_0) \quad (1,4,2,4,g_0)$$

$$(1,5,2,5,g_0)$$

Dozwolone kombinacje symboli: $y_{21}, y_{21} \cdot G_0, y_{21} \cdot g_0$

Krok 5. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do $y_{21} \cdot G_0$

$$Q^{(5)} \quad Q^{(6)}$$

$$(1,4,1,4,G_0)$$

$$(1,4,2,2,4g_0)$$

Dozwolone kombinacje symboli: brak .

Krok 6. Ekstrakcja symboli proporcjonalnych do G_0

$$Q^{(7)} \quad Q^{(8)}$$

$$(1,5,1,5,G_0)$$

$$(1,5,2,5,g_0)$$

Dozwolone kombinacje symboli: G_0, g_0 .

Działania wykonane w krokach 1-6 ilustruje drzewo z rys.7. Każdy z zaznaczonych węzłów drzewa reprezentuje iloczyn symboli znajdujących się na ścieżce prowadzącej od korzenia do danego węzła. W ten sposób spośród 16 możliwych iloczynów symboli naprawdę w wyznaczniku pełnej macierzy admitancyjnej występuje 12 iloczynów. Zauważmy, że w przedstawionym algorytmie każdy możliwy iloczyn symboli występuje **tylko raz**. Zauważmy dalej, że w rozważanym przykładzie nie jest konieczne wyznaczanie współczynników przy wszystkich możliwych kombinacjach symboli. Ponieważ obliczamy wzmocnienie napięciowe, konieczne jest wyznaczenie tylko składników proporcjonalnych do G_0 i g_0 . Takich składników jest 6 i są one związane z następującymi iloczynami:

$$sC \cdot G_0, sC \cdot g_0, sC \cdot y_{21} \cdot G_0, sC \cdot y_{21} \cdot g_0, G_0, g_0$$

Sposób obliczania współczynników proporcjonalności zilustrujemy na przykładzie iloczynu $sC \cdot G_0$.

Krok 1. Utworzenie tablicy SG dla obwodu

$4.01 \cdot 10^{-3}$	0	$-4 \cdot 10^{-3}$	0	-10^{-5}
0	0	0	1	-1
$-4 \cdot 10^{-3}$	0	$6 \cdot 10^{-3}$	0	$-2 \cdot 10^{-3}$
0	-1	0	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$
-10^{-3}	1	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$	$2.01 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$

Krok 2. Ekstrakcja symbolu sC

Zgodnie z listą Q następuje:

- dodanie kolumny 2 do kolumny 1 i skreślenie kolumny 2;
- dodanie wiersza 2 do wiersza 1 i skreślenie wiersza 2;
- zapamiętanie czynnika $(-1)^{2+2} = 1$.

$4.01 \cdot 10^{-3}$	$-4 \cdot 10^{-3}$	1	-1.00001
$-4 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	0	$-2 \cdot 10^{-3}$
-1	0	$2 \cdot 10^{-3} \cdot s$	$1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$
0.99999	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$	$2.01 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$

Krok 3. Ekstrakcja symbolu G0 z tablicy przedstawionej powyżej

Zgodnie z listą Q⁽¹⁾ następuje:

- dodanie kolumny 4 do kolumny 1 i skreślenie kolumny 4;
- dodanie wiersza 4 do wiersza 1 i skreślenie 1;
- zapamiętanie czynnika $(-1)^{1+1}$.

$6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$	$-6 \cdot 10^{-3}$	$-2 \cdot 10^{-3} \cdot s$
$-6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	0
$-2 \cdot 10^{-3} \cdot s$	0	$2 \cdot 10^{-3} \cdot s$

Krok 4. Skreślenie dowolnego wiersza (np.1) i kolumny (np.1). Przekształcamy pełną macierz admitancyjną obwodu. Niezależnie od tego, który wiersz i którą kolumnę skreślimy, wyznacznik otrzymanej macierzy jest taki sam.

$6 \cdot 10^{-3}$	0
0	$2 \cdot 10^{-3} \cdot s$

$$sC \cdot G0 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

W podobny sposób postępujemy z pięcioma pozostałymi iloczynami, otrzymując:

$$sC \cdot g0 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

$$sC \cdot y_{21} \cdot G0 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$$

$$sC \cdot y_{21} \cdot g0 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s$$

$$y_{21} \cdot G0 \cdot 1$$

$$y_{21} \cdot g0 \cdot (-4) \cdot 10^{-6} \cdot s$$

$$G0 \cdot 6 \cdot 10^{-3}$$

$$g0 \cdot 0$$

Składniki proporcjonalne do $G0$ tworzą dopełnienie algebraiczne Δ_{11} macierzy admitancyjnej Y obwodu:

$$\Delta_{11} = sC \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot s + sC \cdot y_{21} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s + y_{21} \cdot 6 \cdot 10^{-3}$$

Składniki proporcjonalne do $g0$ tworzą dopełnienie algebraiczne Δ_{21} macierzy admitancyjnej Y :

$$\Delta_{21} = sC \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot s + sC \cdot y_{21} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot s - y_{21} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

W rezultacie wzmacnienie napięciowe układu dane jest wzorem:

$$K_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 \cdot C + 2 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 \cdot C \cdot y_{21} - 4 \cdot 10^{-6} \cdot s \cdot y_{21}}{6 \cdot 10^{-3} + y_{21} + 12 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 \cdot C + 2 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 \cdot y_{21} \cdot C}$$

5. Obliczanie wyznaczników macierzy w postaci $s \cdot C + G$

W poprzednich paragrafach nie wyjaśniono jeszcze w pełni algorytmu, według którego maszyna cyfrowa jest w stanie obliczyć wyznacznik macierzy w postaci $s \cdot C + G$. Macierze C i G są to macierze kwadratowe, których elementami są liczby (a nie symbole). Macierz taka pojawiła się np. w kroku 4 przykładowego algorytmu ekstrakcji iloczynu $sC \cdot G0$ z macierzy admitancyjnej wzmacniacza dławikowego. Algorytm obliczania $\det(s \cdot C + G)$ można podzielić na dwie części:

1. Sprowadzenie problemu do obliczenia wyznacznika macierzy w postaci $s \cdot E - A$, gdzie E jest macierzą jednostkową.

2. Obliczenie wyznacznika $\det(s \cdot E - A)$.

Jeżeli macierz C jest nieosobliwa, to algorytm redukcji kończy się w pierwszym kroku:

$$\det(s \cdot C + G) = \det(C) \cdot \det(s \cdot E + C^{-1}G)$$

$$A = -C^{-1}G$$

Jeżeli macierz G jest nieosobliwa, to algorytm wymaga podstawienia $s1=1/s$:

$$\det(s \cdot C + G) = \det(G \cdot s \cdot (G^{-1}C + s1 \cdot E)) = s^n \cdot \det(G) \cdot \det(G^{-1}C + s1 \cdot E)$$

$$A = -G^{-1}C$$

Jeżeli obie macierze ,tj. C i G są osobliwe, to należy stosować tzw. redukcję progresywną. Poniżej zostanie przedstawiona idea redukcji, natomiast specyficzne pojęcia, konieczne dowody i uzasadnienia można znaleźć np. w [8].

Lemat

Pojedyncza operacja elementarna przeprowadzona na wierszu (kolumnie) macierzy X odpowiada lewostronnemu (prawostronnemu) przemnożeniu macierzy X przez macierz jednostkową E , na której wykonano wspomnianą operację elementarną.

Twierdzenie

Dla każdej macierzy kwadratowej X o wymiarach $n \times n$ istnieją takie nieosobliwe macierze kwadratowe P i Q , które spełniają warunek:

$$PXQ =$$

E_{rxr}	0
0	0

lub:

$$PXQ =$$

0	0
0	E_{rxr}

Algorytm redukcji progresywnej [17]

Krok 1. Wykonujemy identyczne operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy C i G tak, aby dokonać diagonalizacji macierzy C . Niech wykonane operacje elementarne reprezentują macierze $P1$ i $Q1$.

$$P1(sC+G)Q1 = sC^{(1)} + G^{(1)} = s \cdot \begin{bmatrix} E_{ixi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} & G_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Jeżeli i jest równe wymiarowi macierzy C , to dokonano redukcji. W tym przypadku:

$$\det(sC+G) = \det(s \cdot E + P1 \cdot G \cdot Q1) / \det(P1 \cdot Q1)$$

$$A = P1 \cdot G \cdot Q1.$$

Jeżeli i jest mniejsze od n , należy przejść do kroku 2.

Krok 2. Wykonujemy identyczne operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy C i G tak, aby dokonać diagonalizacji macierzy $G_{22}^{(1)}$. Niech wykonane operacje elementarne reprezentują macierze $P2$ i $Q2$.

$$P2(sC^{(1)}+G^{(1)})Q2 = sC^{(2)} + sC^{(2)} + G^{(2)} = s \cdot \begin{bmatrix} E_{ixi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^{(2)} & G_{12}^{(2)} & 0 \\ G_{21}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{ixi} \end{bmatrix}$$

Jeżeli n (wymiar macierzy G i C) jest równy $i + j$, to redukcja została wykonana:

$$\det(sC+G) = \det(s \cdot E + G_{11}^{(2)}) / \det(P1 \cdot Q1 \cdot P2 \cdot Q2)$$

$$A = -G_{11}^{(2)}$$

Jeżeli n jest większe od $i+j$, to należy wykonać krok 3.

Krok 3. Przeprowadzamy operacje elementarne, reprezentowane przez macierze $P3$ i $Q3$ tak, aby macierz $sC^{(2)} + G^{(2)}$ przekształcić do postaci:

$$P3(sC^{(2)}+G^{(2)})Q3 = sC^{(3)} + G^{(3)} = s \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \left(C_{11}^{(3)} \right) (i-q)x(i-p) & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(3)} & \left(C_{22}^{(3)} \right)_{q \times p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(G_{11}^{(3)} \right)_{(i-q)x(i-p)} & G_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^{(3)} & \left(G_{22}^{(3)} \right)_{q \times p} & 0 & E_{q \times q} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{(k-p)x(k-q)} & 0 & 0 \\ 0 & E_{p \times p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{j \times j} \end{bmatrix}$$

gdzie $k = n - i - k$.

Jeżeli $p < k$ lub $q < k$, to

$$\det(s \cdot C + G) = 0$$

Jeżeli $p=q=k$, to:

$$\det(sC+G) = (-1)^k \det(s \cdot C_{11}^{(3)} + G_{11}^{(3)}) / P_1 \cdot Q_1 \cdot P_2 \cdot Q_2 \cdot P_3 \cdot Q_3$$

Aby obliczyć $\det(s \cdot C_{11}^{(3)} + G_{11}^{(3)})$, należy powrócić do kroku 1. Ponieważ wykonanie kroków 1÷3 powoduje zmniejszenie wymiarów tablicy przynajmniej o 1, to algorytm zakończy się w skończonej liczbie kroków.

W programie NAPPE2 wyznacznik macierzy $\det(s \cdot E - A)$ obliczany jest za pomocą algorytmu Souriau-Frame [17].

Algorytm Souriau-Frame

Jeżeli macierz A ma wymiar $n \times n$, to wyznacznik macierzy $s \cdot E - A$ jest wielomianem stopnia n postaci:

$$\det(s \cdot E - A) = s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_0,$$

gdzie:

$$P_1 = E$$

$$q_1 = -1/1 \cdot \text{tr}(P_1 \cdot A);$$

$$P_2 = P_1 \cdot A + q_1 \cdot E;$$

$$q_2 = -1/2 \cdot \text{tr}(P_2 \cdot A)$$

...

$$P_n = P_{n-1} \cdot A + q_{n-1} \cdot E$$

$$q_n = -1/n \cdot \text{tr}(P_n \cdot A)$$

6. Program NAPPE2 w środowisku MS-DOS

Kod źródłowy programu NAPPE2, zbudowany na podstawie opisanych algorytmów, opublikowany został w monografii P.M.Lina [17]. NAPPE2 jest napisany w języku FORTRAN, a przeznaczony do użytkowania w środowisku UNIX. Może analizować obwody mające do 100 węzłów. Jak podaje autor, program przez wiele lat był stosowany na Purdue University podczas wielu standardowych zajęć dotyczących teorii obwodów. Tekst programu

został przepisany, a następnie skompilowany kompilatorem MS-FORTRAN v5.0. W formie opublikowanej w [17] program posiada bardzo surowy i niewygodny interfejs użytkownika. Dlatego zdecydowano się, że w środowisku MS-DOS oryginalny program zostanie zintegrowany z edytorem tekstu BRIEF (edytor programisty). Dzięki temu uzyskano następujące ulepszenia:

- Dane wprowadzane są w swobodnym formacie SPICE [18], [6].
- Akceptowane są duże i małe litery.
- Możliwie jest definiowanie i wywoływanie podobwodów.
- Możliwa jest swobodna numeracja węzłów obwodu.
- Wyniki przedstawione są w bardziej czytelnej postaci (w porównaniu z oryginalnymi wynikami NAPPE2).
- Tworzony jest zbiór pozwalający wydrukować obliczony wzór na dowolnej drukarce.
- Łatwo można uzyskać wynik w dowolnym formacie, np. pozwalającym na wykorzystanie go w WordPerfect (wzór) lub wykorzystaniu go do dalszych obliczeń, np. w systemie Mathematica.

Kod integrujący napisany został w języku makropolecień edytora BRIEF. Język ten do złudzenia przypomina C. W związku z tym kod ten niewielkim nakładem pracy może zostać przekształcony w samodzielny program.

LITERATURA

1. Alderson G.E., Lin P.M.: Integrating Topological and Numerical Methods for Semi-symbolic Network Analysis, Proc. Midwest Symposium on Circuit Theory, pp. 646-654, 1970
2. Calahan D.A.: Linear Network Analysis and Realization Digital Computers Programs and Instructional Manual, University of Illinois Bulletin 472, 1965
3. Cen W.K.: Topological Analysis for Active Networks, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-12, pp. 85-91, 1965
4. Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981

5. Deckert K.L.: LISA - a Program for Linear System Analysis, 1966 WESCON Technical Papers, Los Angeles, Calif.
6. Izydorczyk J.: P Spice. Komputerowa analiza układów elektronicznych, Helion 1993
7. Kikowski M.: Program analizy symbolicznej AS, Instytut Elektroniki Politechniki Śląskiej, raport wewnętrzny, 1993
8. Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowania . WNT, Warszawa 1976
9. Lasek L., Witkowski J.J.: Analiza układów elektronicznych. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 1014, Gliwice 1981
10. Lin P.M., Alderson G.E.: SNAP - A Computer Program for Generating Symbolic Network Functions, Purdue Univ., Sch. of EE, Rept. TR-EE70-16, 1970
11. Lutz K.J.: The Homewood Electronic Jobshop Instruction Manual, dept. of Elec. Engineering, The John Hopkins University, 1969
12. Mason S.J.: Feedback Theory - Some Properties of Signal Flow Graphs, Proc.IRE, pp.1144-1156, 1953
13. Mason S.J.: Further Properties of Signal Flow Graphs , Proc. IRE, pp.920-926, 1956
14. Mayeda W., Seshu, S.: Topological Formulas for Network Functions, Engineering Experimentation Station Bulletin 446, University of Illinois, Urbana, 1957
15. Mc Namee L.P., Potash H.: A User's and Programmer's Manual for NASP, Univ. Calif., Los Angeles, Rept. 98-38, 1968
16. Okrent H., Mc Namee, L.P.: NASP-70 User's and Programmer's Manual, University of Calif., Los Angeles, Rept. ENG-7044, 1970
17. Pen-Min Lin: Symbolic Network Analysis, Elsevier, 1991

18. Porębski J., Korohoda P.: SPICE. Program analizy nieliniowej układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1989
19. Pottle C.: CORNAP User Manual, Cornell University, 1969
20. Shannon C.E.: The Theory and Design of Linear Differential Machines, OSDR Rep. 411, U.S national defense Committee, 1942
21. Sigorski L.R.: Analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1965
22. Singal, K., Vlach J.: Generation of Immitance in Symbolic Form for Lumped Distributed Active Networks, IEEE trans. Circuit Theory, CAS-21, pp.57-67 197423
23. Sorensen E.V.: A Preliminary Note the Analytical Network Program ANP1, Lab. Circuit Theory, Tech.Univ. Denmark. Rept. LKT23, 1967

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stanisław Kuta

Wpłynęło do Redakcji 28.09.1994 r.

Abstract

The first part of the article contains a short revision of symbolic analysis of linear circuits. There are given advantages and disadvantages of particular methodologies. The rest of article focuses on method known as „parameter extraction”. This method has been orginated by G.E. Alderson and P.M.Lin. It is universal method, and can be used for various forms of circuit equations. Nevertheless it is used to nodal equations. In the article a simple amplifier was chosen to show the strength of the method . Parameter extraction method is a mixed algorithm ie. partially combinatorical, partially numerical. It is possible to analyze linear network

with all symbolical parameters. It is possible to analyze network with partially numerical and partially symbolical parameters, and the algorithm can take advantage of such situation to lower time of computations. The algorithm has been implemented by G. E.

Alderson and P.M. Lin on Unix system, as NAPPE2 program, and used on Purdue University for educational purposes. The program has been moved to PC platform by the author and some features was so it conforms SPICE2 de facto standard.