

JAN RYNIK

**ANALITYCZNO-EMPIRYCZNE OKREŚLENIE STATYCZNEJ
SZTYWNOŚCI ŁAŃCUCHÓW OGNIWÓWYCH**

Streszczenie. Wyprowadzono na drodze teoretycznej wzór określający wartość sztywności statycznej łańcuchów o ogniwach pierścieniowych, stosowanych powszechnie w maszynach i urządzeniach górniczych. Otrzymane wartości teoretyczne dla typowych łańcuchów porównano z uzyskanymi wartościami doświadczalnymi.

1. Wstęp

Sztywność łańcucha określamy jako stosunek naciągu łańcucha P do sprężystego wydłużenia względnego. Stanowi ona jedną z podstawowych danych do obliczeń konstrukcyjnych zwrotni, urządzeń napinających i kompensatorów sprężystych maszyn i urządzeń górniczych (przenośniki zgrzebłowe, strugi, strugo-zgarniarki, tarany i kombajny) oraz w badaniach dynamiki łańcuchów pociągowych (prędkość przemieszczania się drgań wzdłużnych, siły dynamiczne powstające na skutek zmian długości konturu, itd.)

2. Teoretyczne określenie sztywności łańcuchów pierścieniowych

Wydłużenie odcinka łańcucha wyraża się wzorem:

$$\Delta L = \frac{L}{t} \delta \quad (1)$$

gdzie:

L - długość odcinka łańcucha

t - podziałka łańcucha

δ - wydłużenie ogniwa.

Wielkość wydłużenia względnego łańcucha można wyliczyć wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{t} \quad (2)$$

Rozpatrując ogniwo jako ciało sprężyste, wydłużenie jego zgodnie z prawem Hooke'a będzie wynosiło:

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{E_{\text{ogn}} \cdot F} \quad (3)$$

gdzie:

P - siła rozciągająca działająca na łańcuch

E_{ogn} - moduł sprężystości zastępczy

F - przekrój (w przypadku pierścieniowego ogniwa o średnicy

$$\text{pręta } d \quad F = \frac{2 \pi d^2}{4}$$

$$E_{\text{ogn}} F = \frac{PL}{\Delta L} = \frac{P}{\varepsilon} = E_0 \quad (4)$$

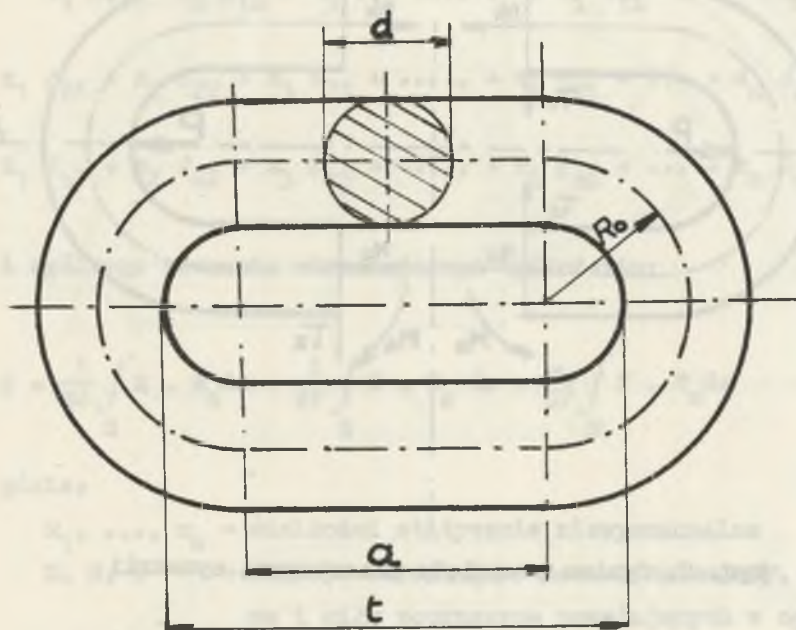
Zgodnie z podaną na wstępie definicją, miarą sztywności ogniwa będzie stosunek działającej siły rozciągającej P do jego jednostkowego wydłużenia.

Podstawiając do wzoru (4) wartość ε ze wzoru (2), otrzymamy:

$$E_0 = \frac{P \cdot t}{\delta} \quad (5)$$

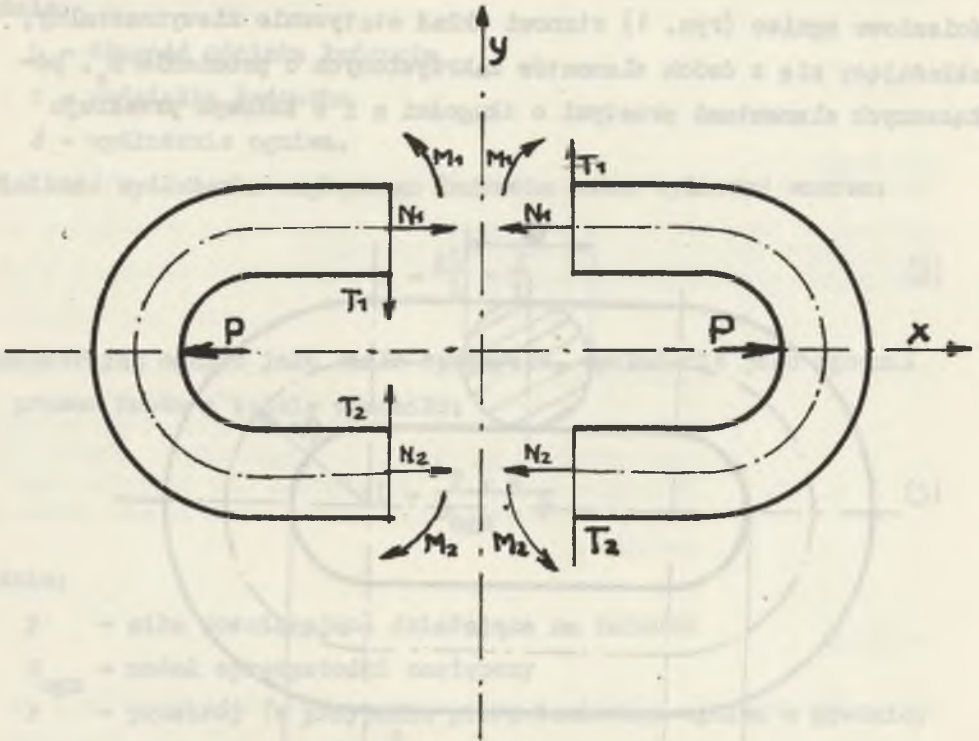
Jak widać z wzoru (5), teoretyczne wyznaczenie sztywności łańcuchów pierścieniowych będzie się sprowadzało do określenia wydłużenia ogniwa δ pod wpływem działania siły rozciągającej P . Pier-

ścieniowe ogniwo (rys. 1) stanowi układ statycznie niewyznaczalny, składający się z dwóch elementów zakrzywionych o promieniu R_0 , połączonych elementami prostymi o długości a i o kołowym przekroju



Rys. 1. Ogniwo łańcucha pierścieniowego

poprzecznym. Dla rozwiązania tego układu statycznie niewyznaczalnego, zastosowana została metoda energetyczna Makwella-Mohra. Aby rozwiązać zadanie, należy wyznaczyć najpierw wielkości wewnętrzne, działające w poszczególnych przekrojach poprzecznych. W tym celu przecinamy ogniwo płaszczyzną symetrii prostopadłą do linii działania sił (rys. 2) i wzajemne oddziaływanie na siebie obu części pierścienia zastępujemy siłami N_1 , T_1 , N_2 , T_2 oraz parami sił o momentach M_1 i M_2 .



Rys. 2. Ogniwko przecięte płaszczyzną symetrii

Z symetrii układu względem osi x wynika, że:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 = T \\ N_1 &= N_2 = N \\ M_1 &= M_2 = M \end{aligned} \quad (6)$$

Z symetrii zaś względem osi y

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1 \\ M_1 &= M_1 \\ T_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Z równań statyki otrzymamy siłę normalną $N = \frac{P}{2}$. Jediną wielkością statyczną niewyznaczalną pozostaje moment M , który wyznaczyć można za pomocą układu równań liniowych Maxwella-Mohra:

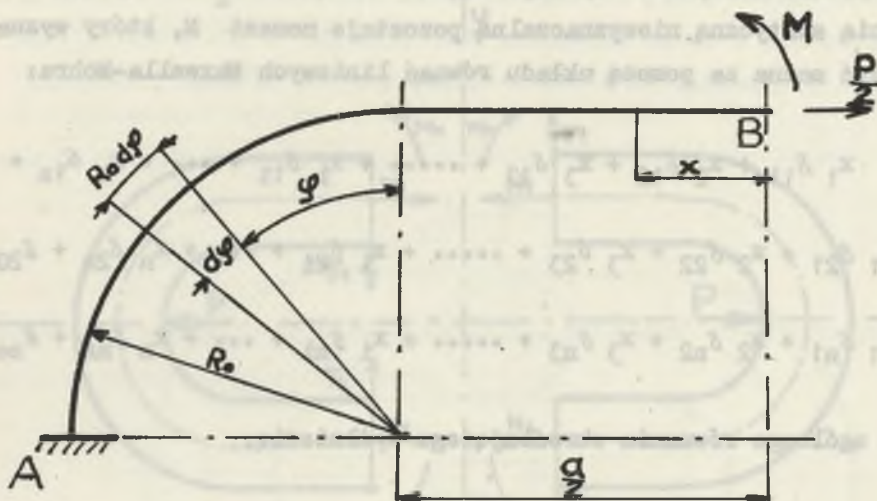
$$\begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + x_3 \delta_{13} + \dots + x_1 \delta_{1i} + \dots + x_n \delta_{1n} + \delta_{10} &= 1 \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + x_3 \delta_{23} + \dots + x_1 \delta_{2i} + \dots + x_n \delta_{2n} + \delta_{20} &= 0 \\ x_1 \delta_{n1} + x_2 \delta_{n2} + x_3 \delta_{n3} + \dots + x_1 \delta_{ni} + \dots + x_n \delta_{nn} + \delta_{no} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

i ogólnego równania określającego wydłużenie:

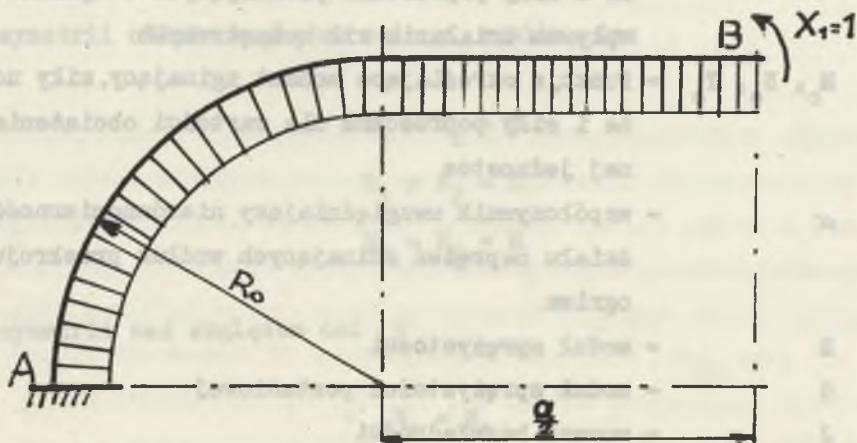
$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_S M \cdot M_0 ds + \frac{1}{EF} \int_S N \cdot N_0 ds + \frac{\alpha}{GF} \int_S T \cdot T_0 ds \quad (9)$$

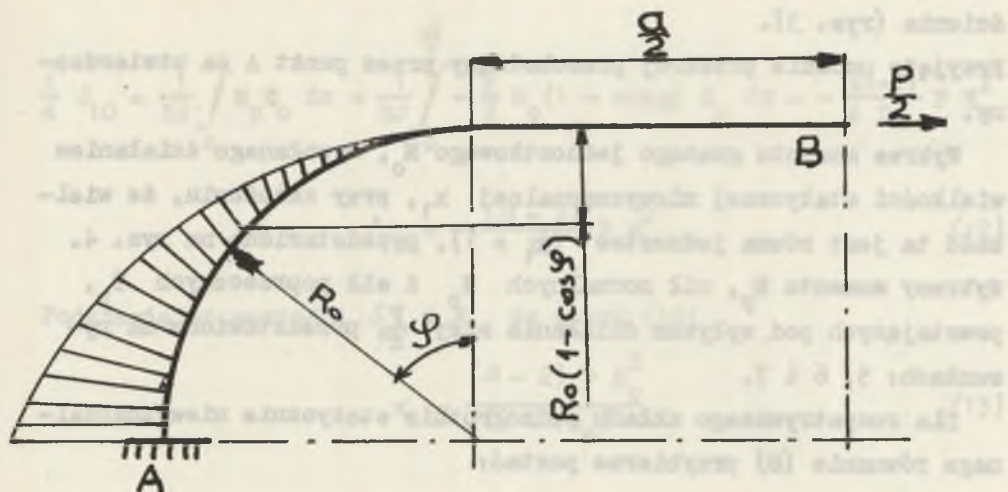
gdzie:

- x_1, \dots, x_n - wielkości statycznie niewyznaczalne
- M, N, T - funkcje określające moment zginający, siły normalne i siły poprzeczne powstających w ogniwie pod wpływem działania sił zewnętrznych
- M_0, N_0, T_0 - funkcje określające moment zginający, siły normalne i siły poprzeczne dla wartości obciążenia równej jednostce
- α - współczynnik uwzględniający nierównomierność rozdziału naprężeń ścinających wzdłuż przekroju ogniwa
- E - moduł sprężystości
- G - moduł sprężystości postaciowej
- J - moment bezwładności
- F - przekrój poprzeczny

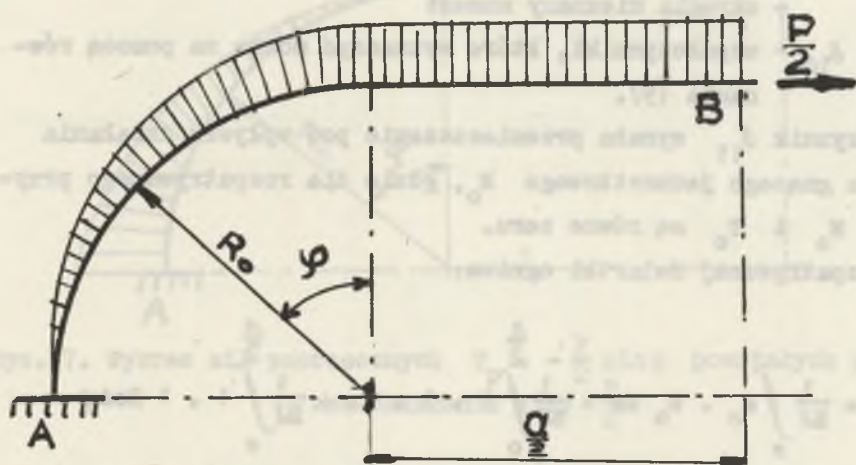


Rys. 3. Rozpatrywana ćwiartka ogniwa

Rys. 4. Wykres momentu gnącego jednostkowego M_0



Rys. 5. Wykres momentu gnącego $M_p = \frac{P}{2} \cdot R_0 (1 - \cos\varphi)$ powstałego pod wpływem działania siły $P/2$



Rys. 6. Wykres sił normalnych $N_p = \frac{P}{2} \cos\varphi$ powstałych pod wpływem działania siły $P/2$

W celu uproszczenia obliczeń rozpatrywana będzie ćwiartka pierścienia (rys. 3).

Przyjęto umownie przekrój przechodzący przez punkt A za utwierdzonego.

Wykres momentu gnącego jednostkowego M_0 , wywołanego działaniem wielkości statycznej niewyznaczalnej x_1 , przy założeniu, że wielkość ta jest równa jednostce ($x_1 = 1$), przedstawiono na rys. 4. Wykresy momentu M_p , sił normalnych N_p i sił poprzecznych T_p , powstających pod wpływem działania siły $\frac{P}{2}$, przedstawiono na rysunkach: 5, 6 i 7.

Dla rozpatrywanego układu jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego równanie (8) przybierze postać:

$$x_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0 \quad (10)$$

gdzie:

- x_1 - określa nieznaną moment
 $\delta_{11} \delta_{10}$ - współczynniki, które wyznaczyć można za pomocą równania (9).

Współczynnik δ_{11} wyraża przemieszczenie pod wpływem działania momentu gnącego jednostkowego M_0 , gdzie dla rozpatrywanego przykładu N_0 i T_0 są równe zeru.

Dla rozpatrywanej ćwiartki ogniwa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \int_s M_0 \cdot M_0 ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{a}{2}} 1 \cdot 1 \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot 1 \cdot R d\varphi = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{a + \pi R}{2} \right) \\ \delta_{11} &= \frac{2(a + \pi R)}{EJ} \quad (11) \end{aligned}$$

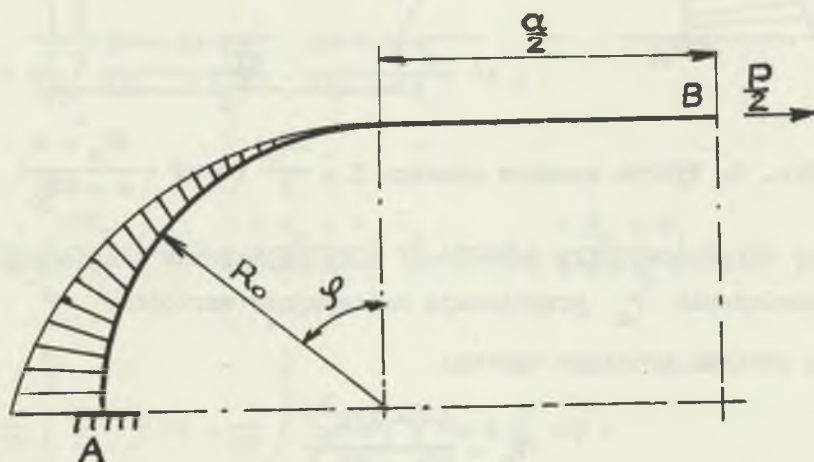
Współczynnik δ_{10} otrzymamy przy uwzględnieniu momentu M_p

$$\frac{1}{4} \delta_{10} = \frac{1}{EJ} \int_s M_p M_0 ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} -\frac{P}{2} R_0 (1 - \cos \varphi) R_0 d\varphi = -\frac{(\sqrt{x}-2)}{4 EJ} P R_0^2$$

$$\delta_{10} = -\frac{(\sqrt{x}-2)}{4 EJ} P R_0^2 \quad (12)$$

Podstawiając wartości δ_{10} i δ_{11} do wzoru (10)

$$x_1 = \frac{(\sqrt{x}-2) P R_0^2}{2(a + \sqrt{x} R_0)} \quad (13)$$



Rys. 7. Wykres sił poprzecznych $T_p = -\frac{P}{2} \sin \varphi$ powstałych pod wpływem działania siły $\frac{P}{2}$

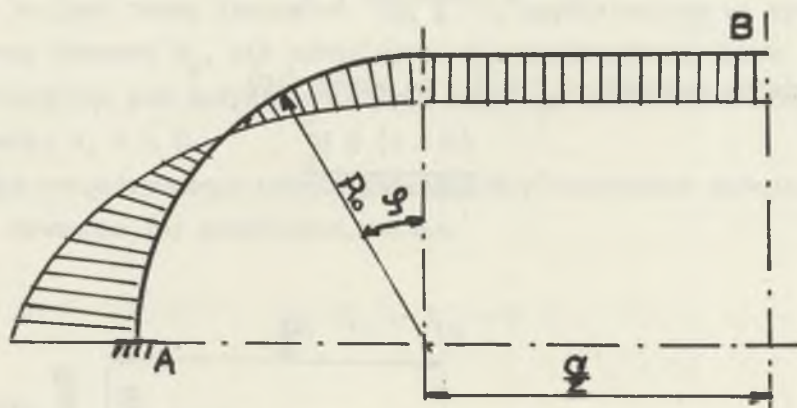
Jest to wartość szukanego momentu w punkcie B. Ma on wartość stałą na odcinku prostym ogniwa, na odcinku zakrzywionym dla $0 \leq \varphi \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$ moment będzie równy:

$$M = \frac{(\sqrt{x}-2) P R_0^2}{2(a + \sqrt{x} R_0)} - \frac{P R_0}{2} (1 - \cos \varphi) \quad (14)$$

Po przekształceniu:

$$M = \frac{P R_0}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2 R_0 + a}{a + \pi R_0} \right) \quad (15)$$

Wykres momentu przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 8. Wykres momentu gnącego $M = \frac{P R_0}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2 R_0 + a}{a + \pi R_0} \right)$

Momenty zginające, siły normalne i siły poprzeczne dla jednostkowego obciążenia P_0 przybierają następujące wartości:

1) dla odcinka prostego ogniwa:

$$M'_0 = \frac{(\pi - 2) R_0^2}{2(a + \pi R_0)}$$

$$N'_0 = \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$T'_0 = 0$$

2) dla odcinka zakrzywionego ogniwa:

$$\begin{aligned}
 M''_0 &= \frac{R_0}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2R_0 + a}{a + \pi R_0} \right) \\
 N''_0 &= \frac{1}{2} \cos \varphi \\
 T''_0 &= -\frac{1}{2} \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{17}$$

Po podstawieniu do wzoru (9) wartości momentu M , sił normalnych N i poprzecznych T oraz odpowiadające im wartości dla jednostkowego obciążenia $P_0 = 1$: M_0 , N_0 i T_0 otrzymamy wydłużenie δ dla rozpatrywanej części konturu ogniwa.

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{4} &= \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2) PR_0^2}{2(a + \pi R_0)} \cdot \frac{(\pi - 2) R_0^2}{2(a + \pi R_0)} dx + \\
 &+ \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR_0}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2R_0 + a}{a + \pi R_0} \right) \frac{R_0}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2R_0 + a}{a + \pi R_0} \right) R_0 d\varphi + \\
 &+ \frac{1}{EF} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} dx + \frac{1}{EF} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} \cos \varphi \frac{1}{2} \cos \varphi R_0 d\varphi + \\
 &+ \frac{\alpha}{GF} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{P}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi \right) R_0 d\varphi
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{\delta}{4} = \frac{P R_0^3}{4 E J} \frac{(\pi^3 - 8\pi) R_0^2 + (3\pi - 8)a^2 + (4\pi^2 - 8\pi - 8) a R_0}{4(a + \pi R_0)^2} + \frac{P}{2EF} \left(a + \frac{\pi R_0}{2} \right) + \frac{P\alpha \pi R_0}{4 GF} \quad (18)$$

Wartości EF, GF i α dla przekroju kołowego wynoszą:

$$EF = \frac{16}{d^2} EJ, \quad GF = \frac{16}{2(1 + \nu)d^2} EJ, \quad \alpha = \frac{32}{27}$$

Po podstawieniu powyższych wartości otrzymujemy:

$$\frac{\delta}{4} = \frac{P}{4EJ} \left\{ R_0^3 \frac{(\pi^3 - 8\pi)R_0^2 + (3\pi - 8)a^2 + (4\pi^2 - 8\pi - 8)aR_0}{4(a + \pi R_0)^2} + d^2 \left[\frac{a}{32} + R_0 \left(\frac{\pi}{64} + \frac{1 + \nu}{27} \right) \right] \right\}$$

Przyjmujemy dla stali ułamek poissona $\nu = 0,3$, a po wyliczeniu współczynników otrzymujemy:

$$\frac{\delta}{4} = \frac{P}{4EJ} \left[R_0^3 \frac{1,46 R_0^2 + 0,355 a^2 + 1,58 a R_0}{(a + \pi R_0)^2} + d^2 (0,03 a + 0,2 R_0) \right]$$

Dla całego ogniwa wydłużenie będzie wynosiło:

$$\delta = \frac{P}{EJ} \left[R_0^3 \frac{1,46 R_0^2 + 0,355 a^2 + 1,58 a R_0}{(a + \pi R_0)^2} + d^2 (0,03 a + 0,2 R_0) \right] \quad (19)$$

Otrzymany wzór uwzględnia wydłużenie ogniwa łańcucha jako funkcji jego parametrów i działającej siły wzdłużnej P. Podstawiając do wzoru (5) otrzymany szukany wzór na sztywność statyczną łańcucha pierścieniowego:

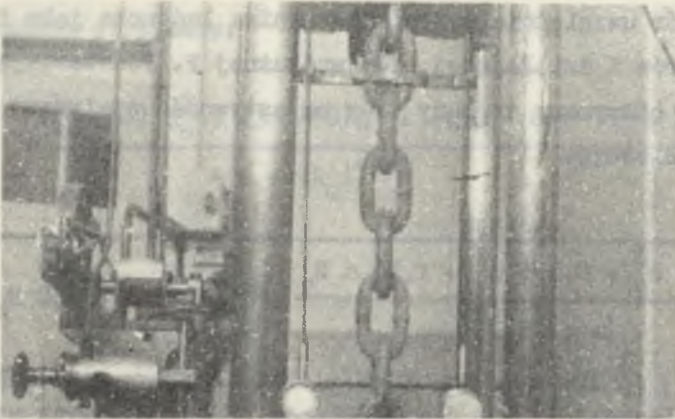
$$E_0 = \frac{EJt}{R_0^3 \frac{1,46 R_0^2 + 0,355 a^2 + 1,58 a R_0}{(a + \pi R_0)^2} + d^2(0,03 a + 0,2 R_0)} \quad (20)$$

Obliczeniowe wartości E_0 dla łańcuchów pierścieniowych stosowanych w polskich maszynach i urządzeniach górniczych [3] podano w tabelicy 1. W obliczeniach przyjęto $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

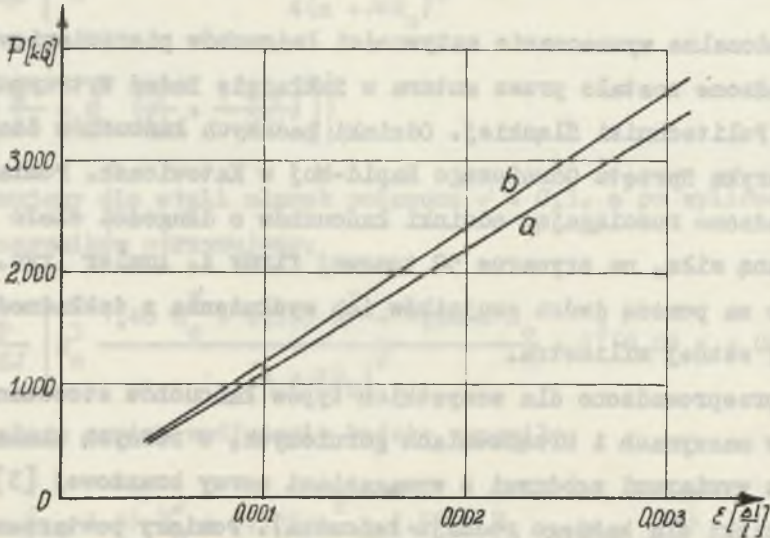
3. Doświadczalne określenie sztywności statycznej łańcuchów pierścieniowych

Doświadczalne wyznaczanie sztywności łańcuchów pierścieniowych przeprowadzone zostało przez autora w Zakładzie Badań Wytrzymałościowych Politechniki Śląskiej. Odcinki badanych łańcuchów dostarczyła Fabryka Sprzętu Górniczego Rapid-Moj w Katowicach. Pomiar przeprowadzono rozciągając odcinki łańcuchów o długości około 0,9 m znaną siłą, na zrywarce 50 tonowej firmy A. Amaler (rys. 9) i mierząc za pomocą dwóch czujników ich wydłużenia z dokładnością do jednej setnej milimetra.

Pomiary przeprowadzono dla wszystkich typów łańcuchów stosowanych obecnie w maszynach i urządzeniach górniczych, w różnych klasach jakości z wymiarami zgodnymi z wymaganiami normy branżowej [3] (po 4 odcinki dla każdego rodzaju łańcucha). Pomiar powtarzano trzykrotnie przy stopniowym wzroście siły rozciągającej do wartości około 1/3 wytrzymałości łańcucha na rozrywanie i stopniowym obniżaniu siły do wartości naciągu wstępnego.



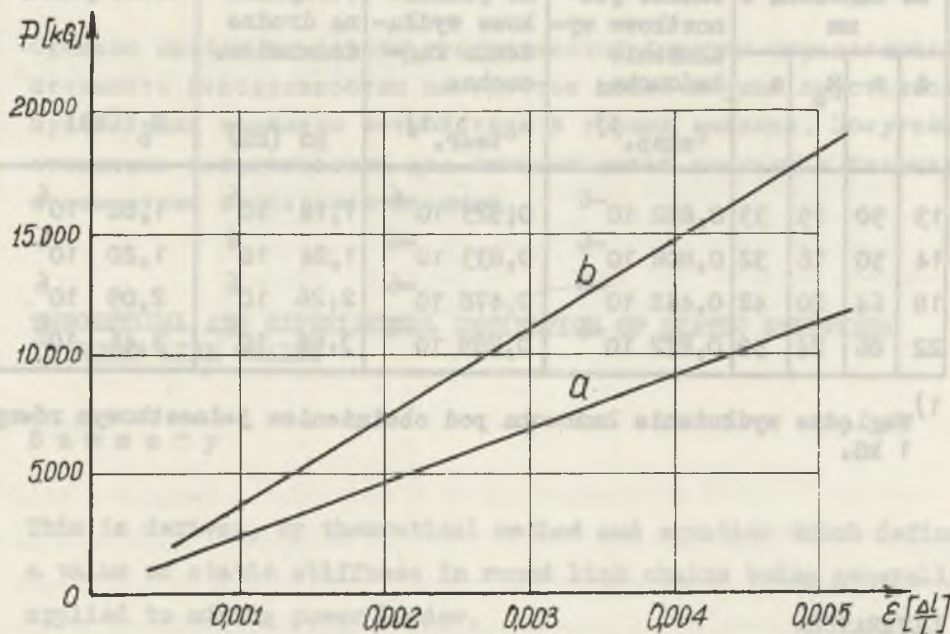
Rys. 9. Pomiar wydłużenia odcinka łańcucha strugowego $d = 22$ mm
na zrywarce firmy Amsler (fot)



Rys. 10. Wyniki pomiarów sztywności:

a - dla łańcucha o $d = 13$ mm, b - dla łańcucha o $d = 14$ mm. Naciąg
wstępny = 500 kg, górna granica obciążenia 3.500 kg

Pomiary nie wykazały istotnych różnic wartości wydłużeń względnych w różnych klasach jakości wykonania łańcuchów. Wyniki średnie pomiarów dla łańcuchów o średnicy pręta 13 i 14 mm przedstawiono na rys. 10, a dla łańcuchów o średnicy 18 i 22 mm na rys.11.



Rys. 11. Wyniki pomiarów sztywności:

a - dla łańcucha o $d = 18$ mm, naciąg wstępny = 1.000 kg górna granica obciążenia 10.000 kg, b - dla łańcucha o $d = 22$ mm, naciąg wstępny = 2.000 kg górna granica obciążenia = 20.000 kg

Wyniki liczbowe zestawiono z wartościami uzyskanymi na drodze teoretycznej w tablicy 1.

Badania wykazały, że wartości doświadczalne i teoretyczne są bardzo zbliżone do siebie. Wartości doświadczalne są nieco wyższe i różnią się od teoretycznych maksymalnie od 3 do 6%.

Tablica 1

Teoretyczne i doświadczalne wartości sztywności
łańcuchów ogniowych

Wymiary ogniwa łańcucha w mm				Doświadczalne jednostkowe wydłużenie łańcucha: $\epsilon_{\text{eksp.}}^{1)}$	Teoretyczne jednostkowe wydłużenie łańcucha: $\epsilon_{\text{teor.}}^{1)}$	Sztywność otrzymana na drodze doświadcz. E_0 (kg)	Sztywność teoretyczna E_0 (kg)
d	t	R_0	a				
13	50	15	33	$0,892 \cdot 10^{-6}$	$0,925 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^6$	$1,08 \cdot 10^6$
14	50	16	32	$0,806 \cdot 10^{-6}$	$0,833 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^6$	$1,20 \cdot 10^6$
18	64	20	42	$0,442 \cdot 10^{-6}$	$0,478 \cdot 10^{-6}$	$2,26 \cdot 10^6$	$2,09 \cdot 10^6$
22	86	24	58	$0,272 \cdot 10^{-6}$	$0,289 \cdot 10^{-6}$	$3,68 \cdot 10^6$	$3,46 \cdot 10^6$

¹⁾ Względne wydłużenie łańcucha pod obciążeniem jednostkowym równym 1 kg.

LITERATURA

- [1] KUROWSKI R., NIEZGODZIŃSKI M.E. - Wytrzymałość materiałów PWN Warszawa 1965.
- [2] BIELAJEW N.M. - Wytrzymałość materiałów MON 1954
- [3] Łańcuchy ogniowe górnicze Norma branżowa BN-63 1719-01.

