ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: GÓRNICTWO z. 36 Nr kol. 245

MIROSŁAW CHUDEK, ANDRZEJ PACH,
WŁODZIMIERZ CLASZOWSKI

ANALITYCZNA POSTAĆ ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY NAPRĘŻENIAMI A ODKSZTAŁCENIAMI DLA SKAŁ

Streszczenie. Na podstawie laboratoryjnych prób badania wytrzymałości skał oraz wykreślnych zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami podano funkcje opisujące to zjawisko.
W dalszej części pracy przeprowadzono krótką analizę przydatności poszczególnych funkcji w mechanice górotworu.
Wskazano na potrzebę rozszerzenia wyżej wymienionych prac w danej dziedzinie mechaniki.

1. Wstęp

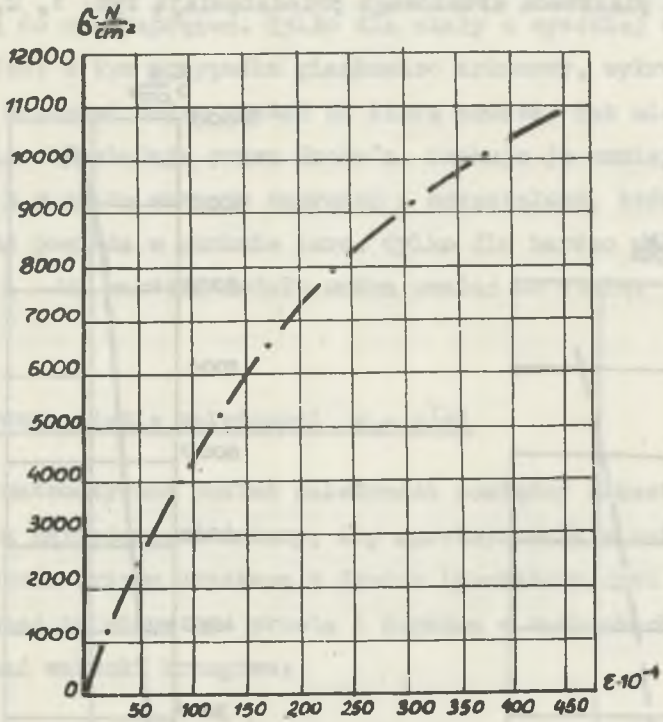
Podstawowym warunkiem stosowania w praktyce teoretycznych prac z zakresu mechaniki górniczej jest znajomość ogółu cech opisujących własności środowiska górniczego. Skały górotworu będące tym właśnie środowiskiem górniczym wykazują szczególną zmienność swych własności. Utrudnia to znacznie tok postępowania przy projektowaniu i wykonywaniu nowych wyrobisk, jak również budowie całych zakładów.
Określenie rzeczywistych fizykomechanicznych własności skał możliwe jest jedynie w drodze doświadczalnej. Niezbędnym więc staje się pobranie odpowiedniej ilości prób w miejscu wykonywania wyrobiska. Oczywiście dokładne rozpoznanie górotworu jest prawie niemożliwe do przeprowadzenia. W mechanice górotworu określenia przybliżonych mechanicznych własności skał dokonuje się na podstawie cech petrograficznych, którym to odpowiadają w pewnym obszarze wielkości.

Przykładowo: wytrzymałość dla węgli waha się od 8.10^6 do $8.10^8 \frac{N}{m^2}$ moduł sprężystości - ściśliwości dla łupków od $7,6.10^9$ do $11,3.10^9 \frac{N}{m^2}$, liczba Poissona dla piasków od 0,28 do 0,44 [5] itd.
Prowadzi to niejednokrotnie do stosowania obliczeń uproszczonych i zmusza zakładać wysokie współczynniki bezpieczeństwa.
Zagadnienie komplikuje dodatkowo zmienność własności w zależności od parametrów zewnętrznych jak również stanu w którym znajduje się skała.

2. Wyniki laboratoryjnych prac ustalających związek między naprężeniami a odkształceniami

Podobnie jak wszystkie ciała rzeczywiste skały, poddane obciążeniu doznają odkształceń w zależności od wielkości przyłożonych naprężeń, jak również własności mechanicznych. Szczególnie ważną rolę w procesie odkształceń odgrywa moduł ściśliwości-sprężystości.
Ponieważ większość skał wykazuje znaczną porowatość - trudno mówić wyłącznie o module sprężystości, gdyż pewna część odkształceń w czasie próby ściskania - spowodowana jest zmniejszeniem się wymiarów por i mikroszczelin. Skały o dużej porowatości poddane obciążeniu ulegają dużym deformacjom zarówno objętościowym jak i postaciowym, przy małej wartości modułu. W próbie takiej naprężenia przenoszone zostają wyłącznie przez szkielet skalny. Zawodnienie zatem porowatej skały, o ile woda nie spowoduje jej rozmycia, pociągnie za sobą znaczny wzrost modułu, którego przyczyną jest nieściśliwość wody wypełniającej pory.
Podobnie na wielkość modułu ściśliwości - sprężystości wpływa struktura skał. Skały zbudowane z drobniejszych kryształów bądź okruchów są jak gdyby "gęściej tkane", stąd ich wyższa wytrzymałość, jak również wyższa wartość modułu E. Z tych samych przyczyn

wynika wzrost wartości liczbowej modułu w próbie, dla której kierunek działającego obciążenia jest zgodny z uławiceniem.



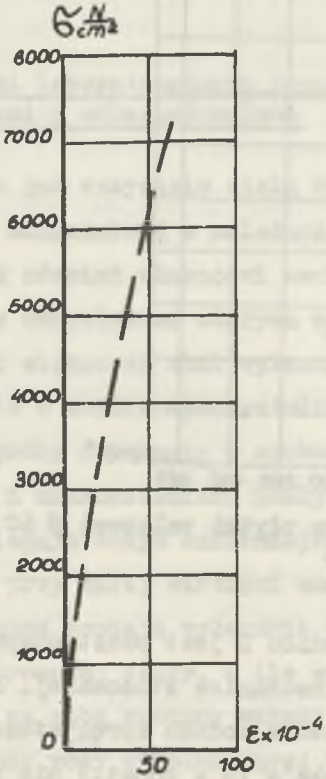
Rys. 1. Wykres odkształcenia podłużnego płytki walcowej Ø 60 mm z sapropelitu

Znajomość rzeczywistej wielkości modułu E jest podstawowym warunkiem poprawności wielu rozwiązań w mechanice stosowanej. Okazuje się bowiem, że jakkolwiek wyznaczenie modułu sprężystości dla ciał stosujących się do prawa Hooke'a (E = const.) nie napotyka na większe trudności, tak dla skał, wskutek porowatości - E jest funkcją stanu naprężenia w próbie.

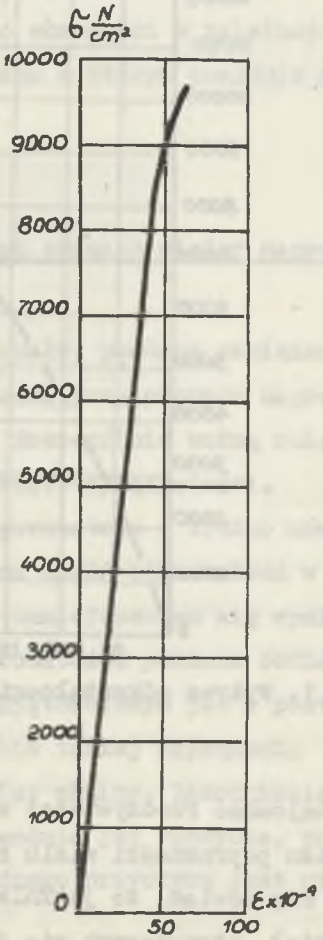
Na podstawie laboratoryjnych badań przy ściskaniu próbek skalnych w prasie hydraulicznej [5], ustalono zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami dla skał karbońskich takich jak: wę-

giel sapropelowy i durytowy, łupek ilasty, piaskowiec arkozowy i kalcytowy.

Graficzny obraz uzyskanych wyników dla węgla sapropelowego, łupku ilastego i piaskowca arkozowego przedstawiają rys. 1, 2, 3.



Rys. 2. Wykres odkształceń podłużnych walca równob. Ø 48 mm z łupku ilastego



Rys. 3. Wykres odkształceń podłużnych równob. walca Ø 67 mm z piaskowca arkozowego

Poszczególne wykresy zależności odkształceń od naprężeń różnią się dość znacznie między sobą.

Wielkość bowiem odkształceń przy tych samych naprężeniach dla przedstawionych skał jest różna. Im większa wytrzymałość skały - większy moduł E - mniejsze odkształcenie.

Okazuje się, że wykresy $\varepsilon(\sigma)$ są liniami krzywymi, zwróconymi swą wypukłością do osi naprężeń. Tylko dla skały o wysokiej wytrzymałości, jaką jest w tym przypadku piaskowiec arkozowy, wykres w pewnym przedziale naprężeń można uważać za linię prostą. Tak więc skały wyraźnie nie odpowiadają prawu Hooke'a. Cechuje je zmniejszanie się modułu E w miarę wzrostu naprężeń i odkształceń, który największą wartość posiada w punkcie zero. Tylko dla bardzo małych przyrostów $\Delta\sigma$ i $\Delta\varepsilon$ wartość modułu można uważać za stałą.

3. Matematyczne ujęcie zależności $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$

Dobierając matematyczną postać zależności pomiędzy odkształceniami właściwymi a naprężeniami żądamy, aby aproksymowała w możliwie dokładnym stopniu krzywą uzyskaną w drodze laboratoryjnych pomiarów. Ponadto postać ta winna być prosta i dogodna w rachunkach, jak również spełniać warunki brzegowe:

dla $$\sigma = 0 \Longrightarrow \varepsilon = 0$$

$$(1)$$

dla $$\sigma = R_c \Longrightarrow \varepsilon = \varepsilon(R_c) \longrightarrow \infty$$

gdzie:

R_c - wytrzymałość skały na ściskanie.

Nieliniowy przebieg zależności $\varepsilon(\sigma)$ prowadzi do stwierdzenia, że:

$$E(\sigma) = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \cong \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\sigma} \qquad (2)$$

lub też

$$E(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cong \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \qquad (2')$$

Zatem, używanie niejednokrotnie siecznego modułu jest tym dokładniejsze, im mniejsze rozpatrujemy przyrosty naprężeń i odkształceń.

Funkcja potęgowa postaci:

$$\varepsilon = a \cdot \sigma^{b} \tag{3}$$

opisuje z pewnym przybliżeniem zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, przedstawione na rys. 1, 2 i 3. Wartości a i b są parametrami wyznaczonymi w drodze pomiarów laboratoryjnych wielkości dla początkowej fazy doświadczenia. Okazuje się jednak, że związek (3) nie jest zbyt ścisły w zakresie małych naprężeń.

$$0 < \sigma < \sim 0{,}3\ R_c$$

dając zmniejszone wielkości odkształceń właściwych.
Aby więc ustrzec się od nieporozumień stąd płynących, w zakresie małych naprężeń można stosować liniowy związek w postaci prawa Hooka, w którym:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} \tag{4}$$

Opisując zatem przebieg zależności $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ równaniami: w początkowej fazie równaniem (4), a dla naprężeń $\sigma > 0{,}3\ R_c$ - równaniem (3), otrzymujemy w pierwszym przypadku moduł stały równy E_o, w drugim natomiast zmienny, jako pochodną odkształceń względem naprężeń:

$$E(\sigma) = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = a \cdot b \cdot \sigma^{b-1} \tag{5}$$

Ponieważ w zagadnieniach praktycznych za wartości odciętej przyjmuje się odkształcenia, a za rzędną wartości naprężeń, otrzymujemy odwrotną postać zależności (3):

$$\sigma = \sqrt[b]{\frac{\varepsilon}{a}} \tag{6}$$

Oraz wartość modułu zależną od odkształceń:

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{b}\sqrt[b]{\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1-b}} \tag{7}$$

Ponieważ dla:

$$\sigma \longrightarrow R_c, \text{ mamy } \quad \varepsilon \longrightarrow \infty$$

wartość $E(\varepsilon) \longrightarrow 0$,
a zatem $b > 1$.

Funkcja logarytmiczna

Dobre wyniki w praktyce daje logarytmiczny związek $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, którego szczególnym przypadkiem jest zależność wykładnicza typu:

$$\sigma = (a \cdot p^{f(\varepsilon)} + b)k \tag{8}$$

w której:

- p - podstawa logarytmów, w szczególności naturalnego,
- a,b - parametry doświadczalne,
- $f(\varepsilon)$ - funkcja odkształceń,
- k - stały współczynnik.

Przez odpowiedni dobór parametrów, jak również podstawy logarytmu, można bardzo dokładnie aproksymować zależności stwierdzone w drodze laboratoryjnej.

Ogólną postać wyrażenia pomiędzy σ i ε dla materiałów wykazujących duże odchylenia od prawa Hooke'a przedstawił Ylinen [3] w postaci równania różniczkowego:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = (a + b\,\sigma^n)k \tag{9}$$

o trzech parametrach a, b, n, cechujących materiał. Wielkości a i b dla materiałów o wyraźnej granicy plastyczności σ_{pl} określa jako:

$$a = E_o = \frac{\Delta\sigma_o}{\Delta\varepsilon_o}, \qquad b = -\frac{E_o}{(\sigma_{pl})^n} \tag{9 }$$

gdzie:

$\Delta\sigma_o$ i $\Delta\varepsilon_o$ - wartości dla początkowej fazy odkształceń, najlepiej w pkt $\sigma = 0$ i $\varepsilon = 0$,

n - parametr wahający się w granicach $0{,}5 \leqslant n \leqslant 1{,}6$.

W przypadku materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności, do których zalicza się zdecydowaną większość skał, σ_{pl} wg Ylinena należy zastąpić wytrzymałością materiału na ściskanie R_c, otrzymaną na podstawie wyników badań laboratoryjnych.

Wstawiając do (9) wartości a i b, otrzymujemy wyrażenie na wielkość modułu sprężystości - ściśliwości $E(\sigma)$ w postaci:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_o k\left[1 - \left(\frac{\sigma}{R_c}\right)^n\right], \qquad K = \frac{1}{k} \tag{10}$$

Wykonując całkowanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych:

$$\varepsilon(\sigma) = K \cdot \frac{1}{E_o}\int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{1 - \left(\frac{\sigma}{R_c}\right)^n} \tag{11}$$

dostajemy wyrażenie na wielkość odkształceń skał poddanych działaniu naprężeń σ.

Załóżmy liniową zmienność zależności (11) przez przyjęcie wykładnika potęgowego $n = 1$, otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_o k \left(1 - \frac{\sigma}{R_c}\right) \tag{12}$$

a po scałkowaniu wyrażenie na wielkość odkształceń w postaci logarytmicznej:

$$\varepsilon(\sigma) = -\frac{K \cdot R_c}{E_o} \ln \left(1 - \frac{\sigma}{R_c}\right) \tag{13}$$

Okazuje się, że wzór (13) spełnia podane na wstępie warunki brzegowe. Oczywiście, na skutek kruszenia i pękania skał, a więc nieciągłości odkształceń szczególnie w końcowej fazie obciążania, jak również wewnętrznego tarcia poszczególnych cząstek, maksymalne naprężenia niszczące osiąga się przy konkretnych odkształceniach właściwych, dalekich od nieskończoności.

Funkcja paraboliczna

Wiemy, że wielomiany nieskończone:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \tag{14}$$

przy odpowiednim doborze stałych $a_1, a_2, a_3 \ldots$ aproksymują bardzo dokładnie przebiegi funkcji rzeczywistych.

Stosunkowo wysoki stopień przybliżenia otrzymamy pisząc skończoną sumę:

$$y \approx \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \tag{15}$$

Zadowalając się dwoma pierwszymi wyrazami i przechodząc do rozważanych zależności napiszemy:

$$\sigma(\varepsilon) = a\varepsilon - b\varepsilon^2 \tag{16}$$

gdzie przyjęto oznaczenia $a_1 = a$, $a_2 = -b$, uważając a i b za parametry doświadczalne.

W efekcie otrzymuje się paraboliczną zależność pomiędzy odkształceniami i naprężeniami dla skał. Wykonując różniczkowanie:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a - 2b\varepsilon \tag{17}$$

dostaje się wyrażenie na wielkość modułu skały.

Znajdując zależność odwrotną $\varepsilon(\sigma)$ napiszemy:

$$\varepsilon = \frac{a}{2b}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}\sigma}\right) \tag{18}$$

i odpowiednio do (17)

$$E(\sigma) = a\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}\sigma} \tag{17'}$$

Przedstawiona funkcja (18) typu parabolicznego daje stosunkowo wysokie rozbieżności z wynikami praktycznymi, zwłaszcza dla większych wartości naprężeń. Ponadto duże trudności sprawia tu wyznaczenie parametrów doświadczalnych a i b, które nie posiadają w tym przypadku uzasadnienia wyrażającego własności skały, podobnie jak funkcja potęgowa.

4. Analiza przydatności poszczególnych funkcji w mechanice górotworu

Przytoczone związki matematyczne zależności odkształceń od naprężeń dla skał przybliżają tylko w pewnym stopniu graficzny obraz tych zależności wyznaczony w drodze laboratoryjnych badań dla jednoosiowego stanu naprężeń.

Za miarę aproksymacji graficznych zależności $\varepsilon(\sigma)$ i $E(\sigma)$ przedstawionych graficznie na rys. 1, 2 i 3 jedną z podanych funkcji, przyjmuje się wielkość średniego odchylenia kwadratowego d_ε obliczonych wartości ε od pomierzonych wielkości ε_d, wyrażoną wzorem:

$$d_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\varepsilon_i - \varepsilon_{di})^2} \tag{19}$$

i analogicznie wielkość średniego odchylenia kwadratowego d_E wartości $E(\sigma)$ obliczonych od pomierzonych laboratoryjnie wielkości $E_d(\sigma)$ na podstawie wzoru:

$$d_E = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left[E(\sigma) - E_d(\sigma)\right]^2} \tag{20}$$

gdzie:

k - ilość pomiarów wykonanych podczas badań laboratoryjnych.

Ponadto funkcja aproksymująca powinna spełniać podane warunki brzegowe (1). Okazuje się jednak, iż niszczenie skał nie odbywa się w sposób ciągły. Zbliżając się z naprężeniami do granicy wytrzymałości np. na ściskanie, w skale powstaje siatka spękań i mikroszczelin powodujących pozorny wzrost odkształceń materiału, gdy faktyczne odkształcenia właściwe - punktowe są mniejsze. Oprócz tego pomierzone wielkości odkształceń dla tej fazy obciążenia są problematyczne, ponieważ uzyskuje się je przez pomiar zbliżenia np. płyt dociskowych prasy hydraulicznej. Urządzenia pomiarowe zakła-

dane bezpośrednio na skałę w tym przypadku zawodzą, a ze względu na ich ewentualne uszkodzenie - są zdejmowane lub odłączane.

Ponieważ zachowanie się skał w stanie pokruszonym opisują stosunkowo dokładnie teorie dla ośrodków sypkich, często wykorzystywane w mechanice górotworu, można zrezygnować ze spełnienia warunków brzegowych przez obrany rodzaj funkcji, o ile jednak opisuje ona dokładnie fazę odkształceń ciągłych do momentu powstania w skale pierwszych spękań, ograniczając tym samym wielkość naprężeń. Wzrost obciążeń powyżej tej granicy spowoduje pokruszenie skały, a rozważania teoretyczne w tym przypadku prowadzić będziemy jak dla materiałów sypkich.

Stosunkowo dobre wyniki zbliżone z rzeczywistymi daje funkcja logarytmiczna, mimo że posługiwanie się nią w rozważaniach teoretycznych napotyka niejednokrotnie na poważne trudności w obliczeniach.

Jeszcze lepszą zgodność wyników laboratoryjnych z obliczeniowymi uzyskuje się przy zastosowaniu wzoru całkowego (11), który wymaga jednak stabelaryzowania dla konkretnego "n" wyznaczonego dla poszczególnych skał. Prace w tym kierunku podjęte zostaną w najbliższym czasie.

Wystarczającą poprawność wyników daje również funkcja potęgowa, zważywszy fakt, że wyznaczenie współczynników "a" i "b" we wzorze (3) nie sprawia większych trudności matematycznych.

Funkcja paraboliczna ze względu na nieskończony ciąg wyrazów jest niewygodna przy wszelkiego rodzaju obliczeniach. Przy posługiwaniu się nią, należy określić wyraz od którego zaniechanie reszty spowoduje różnice mieszczące się w zakresie błędów np. pomiaru wartości ε w laboratorium.

5. Wnioski

Wyniki laboratoryjnych badań zachowania się skał podczas obciążenia wskazują na nieliniowy charakter zależności $\varepsilon(\sigma)$.
Posługiwanie się zatem w obliczeniach teoretycznych dla skał prawem Hooke'a prowadzić może do dużych rozbieżności z wynikami laboratoryjnymi i obserwacjami w kopalniach. Ponadto używanie siecznego modułu sprężystości, zależnego faktycznie od stanu naprężeń, daje wyniki przybliżone do rzeczywistych.
Znacznie dokładniejsze obliczenia wielkości odkształceń uzyskuje się przy użyciu jednego z podanych w niniejszej pracy wzorów. Łatwym w użyciu jest wzór logarytmiczny, dający dużą zbieżność wielkości obliczonych i pomierzonych zwłaszcza dla naprężeń większych od $0{,}3\ R_c$.
Liniowa zmienność modułu z naprężeniami dla naprężeń mniejszych od $0{,}3\ R_c$, prowadzi do pewnych odchyłek dla początkowego stanu obciążenia.
Uważa się, że dla obliczeń praktycznych spełnienie warunków brzegowych przez funkcje $\varepsilon(\sigma)$ nie jest konieczne, o ile matematyczna postać tej zależności ściśle aproksymuje wartości doświadczalne w zakresie naprężeń do około $0{,}8\ R_c$.

LITERATURA

[1] BORECKI M., CHUDEK M. - "Mechanika górotworu", skrypt uczelniany, Gliwice, 1968 r.

[2] CHUDEK M., PACH A., GLASZOWSKI W. - "Analiza stanu naprężeń i deformacji skał w otoczeniu wyrobisk korytarzowych", Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Górnictwo, z. 32, 1968 r.

[3] LEWICKI B. - "Nośność konstrukcji betonowych w przypadku technicznego obciążenia osiowego", PWN, Warszawa 1960 r.

[4] OLASZOWSKI W. - "Badania modelowe nad zachowaniem się skał górotworu przy jednej i dwóch płaszczyznach odsłoniętych", Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s. Górnictwo, z. 18, 1966 r.

[5] ZNAŃSKI J. - "Kryteria powolnego i gwałtownego zruszania się środowiska do wyrobisk", Prace GIG, Komunikat 250, s. A, Katowice 1960 r.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВИД ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ДЛЯ СКАЛ

Р е з ю м е

На основании лабораторных опытов испытания прочности скал, а также диаграммных зависимостей между напряжениями и деформациями представлены функции, описывающие это явление.

В следующей части работы проведён краткий анализ пригодности отдельных функций в механике образования пород.

Указано на необходимость расширения вышеупомянутых работ в данной области механики.

ANALYTICAL DEPENDENCES BETWEEN INTENSITY OF STRESSES AND ROCK DEFFORMATIONS

S u m m a r y

On the ground of laboratory strength tests of rocks and plotted dependencies between intensity of stresses and deformations, some functions describing this phenomenon have been given.
Further in this paper a short analysis of adaptability of some functions in the mechanisc of orogenesis has been carried out.
A need of further research work in this part of mechanics has been finally pointed out.