ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Seria: ELEKTRONIKA z.10

1997 Nr kol.1380

Agnieszka TOMAKA Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, PAN

Jerzy IHNATOWICZ Instytut Elektroniki, Politechnika Śląska

MODEL PROCESU TWORZENIA OBRAZÓW RENTGENOWSKICH

Streszczenie. Opracowano uproszczony model procesu tworzenia obrazów rentgenowskich dla celów implementacji w formie programu komputerowego. Stworzono modele poszczególnych części toru obrazowania: lampy rentgenowskiej, filtru, obiektu oraz detektora. Współczynniki masowego pochłaniania promieniowania rentgenowskiego zebrano na podstawie danych literaturowych, dla danych niedostępnych dokonano estymacji na podstawie składu chemicznego.

A MODEL OF THE X-RAY IMAGING PROCESS

Summary. The article presents a simplified model of an X-ray imaging process designed for computer application purposes. The model consists of models of particular parts of an Xray imaging system namely: the X-ray lamp, the filter, the object and the detector. The attenuation coefficients were gathered from literature, or if unavailable, estimated based on the chemical composition.

Wstęp

Celem zbudowania modelu procesu tworzenia obrazów rentgenowskich w torze obrazowania rentgenowskiego wyodrębniono następujące elementy: lampa, filtr, obiekt obrazowany, detektor, konstruując ich modele w postaci odpowiednich funkcji przejścia.



Fig. 1. The considered elements of the X-ray imaging system

Można przedstawić to schematycznie jak na rysunku (rys. 2) .:



Rys.2. Schemat blokowy tworzonego modelu Fig. 2. Diagram of the constructed model

Jak to wynika z rysunku (rys. 2.), model procesu tworzenia obrazów rentgenowskich jest złożeniem funkcji przejścia (modeli) elementów toru obrazowania. Poszczególne funkcje przejścia zostały szczegółowo omówione w kolejnych punktach artykułu:

1. Model lampy

Model lampy rentgenowskiej można przedstawić jako funkcję, opisującą charakterystykę emisyjną $I_{lampa}(E)$ w zależności od przyłożonego napięcia.

Lampa rentgenowska to źródło promieniowania o pewnej charakterystyce emisyjnej. Charakterystyka ta, jak wykazał Kuhlenkampff, może być opisana za pomocą wzoru [1]:

 $I_{v} = A \cdot Z \cdot (v_{0} - v) + B \cdot Z^{2} \quad (1)$

gdzie: I_{v} - natężenie promieniowania na jednostkowy przedział częstotliwości;

- Z liczba atomowa materiału targetu (anody);
- A, B stałe, niezależne od przyłożonego napięcia i liczby atomowej;
- v. częstotliwość określająca krótkofalową granicę promieniowania.

Krótkofalowa granica promieniowania uzależniona jest bezpośrednio od napięcia przyspieszającego wiązkę elektronów padających na anodę. Minimalną długość fali promieniowania określa wzór Duane'a - Hunta [2]:

$$\lambda_{\min} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_{\max}} = \frac{1.234}{U_{\max}}$$

gdzie: Ume - wartość szczytowa napięcia przyłożonego miedzy elektrody;

prędkość światła w próżni;

e - ładunek elektronu.

Natężenie promieniowania występujące we wzorze (1) jest określane na jednostkowy przedział częstotliwości. Otrzymywane doświadczalnie widma mają jednak przebieg różny od prostoliniowego [1]. Kształt ich wynika ze sposobu ich pomiaru - opartego na równaniu Bragga, w którym przyrostowi kątów odpowiada przyrost długości fali. W efekcie jest mierzone promieniowanie na jednostkowy przyrost długości fali - I_{λ} . Wzajemna relacja między tymi wielkościami określona jest następująco [1]:

$$I_{\lambda} = I_{\nu} \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$
(3)

Podstawiając równanie (3) do (1) oraz pomijając człon $B \cdot Z^2$ jako stały otrzymujemy:

$$I_{\lambda} = \frac{K}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{I}{\lambda} - \frac{I}{\lambda_0}\right) \tag{4}$$

gdzie: $K = c^2 \cdot A \cdot Z$

Natężenie promieniowania w funkcji energii opisuje więc zależność:

$$I_{\lambda} = K E^{2} \left(E - E_{0} \right)$$

$$gdzie: K = \frac{A Z}{h^{3} \cdot c}$$
(5)

Mierzone wartości natężenia zazwyczaj odnosi się do natężenia maksymalnego. Powstała w ten sposób charakterystyka jest charakterystyką idealną. W rzeczywistości jednak fotony o energii mniejszej od 20 [keV] nie wydostają się z lampy. Zjawisko to spowodowane jest filtracją wewnętrzną w warstwie chłodzącej i obudowie lampy, a także pochłanianiem promieniowania przez materiał anody [2]. Materiały, z których zbudowane są anody lampy,

(2)

A.Tomaka, J.Ihnatowicz

posiadają duże liczby atomowe, a w związku z tym silnie pochłaniają promieniowanie i fotony o małej energii powstałe na głębokości 0.01 [mm], mają małe szanse, aby na tej drodze nie zostać pochłonięte i wydostać się z emitera. Sposobem uwzględnienia zjawiska filtracji w anodzie jest modyfikacja idealnej charakterystyki lampy poprzez filtr z warstwy wolframu o grubości 0.01 [mm]. Natomiast filtracja wewnętrzna w warstwie chłodzącej i obudowie lampy może być uwzględniona poprzez tzw. ekwiwalent filtracji wewnętrznej, za który przyjmuje się pewną grubość warstwy aluminium, przy czym osłabienie promieniowania, na skutek przejścia przez tę warstwę, odpowiada osłabieniu promieniowania przy filtracji wewnętrznej. Przykładowo dla lampy typu Opti 150/40/72/C [8] grubość tej warstwy wynosi 0.7 [mm] Al.

Osłabienie promieniowania, po przejściu przez absorbent o grubości d i liniowym współczynniku pochłaniania µ, określone jest prawem Bougera-Lamberta-Beera [2]:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda 0} \cdot exp(-\mu(E) \cdot l) = I_{\lambda 0} \cdot exp(-\mu_m(E) \cdot \rho \cdot l)$$
(6)

gdzie: μ(E) - liniowy współczynnik absorpcji;

długość drogi przebytej przez promieniowanie w absorbencie;

 $\mu_m(E)$ - masowy współczynnik pochłaniania promieniowania;

ρ - gęstość absorbentu.

Liniowy współczynnik pochłaniania promieniowania jest silnie uzależniony od energii promieniowania. Zależność ta zostanie rozpatrzona w punkcie 2.

Model lampy można więc przedstawić jako następującą funkcję przejścia:

 $I_{lampa}(E) = K \cdot E^2 \cdot (E - e \cdot U_{max}) \cdot exp(-\mu_W(E) \cdot \rho_W \cdot 0.001) \cdot exp(-\mu_{Al}(E) \cdot \rho_{Al} \cdot 0.07)$ (7)

Otrzymane krzywe charakterystyczne przedstawiono na wykresach (rys. 3, 4, 5),





Rys. 3. Względne natężenia promieniowania I_{λ} wynikające z równania Kuhlenkampffa Fig. 3. The relative X-ray intensity I_{λ} obtained

from the Kuhlenkampff's equation

Rys. 4. Względne natężenie promieniowania I_λ po nałożeniu filtru 0.01 [mm] W+0.7 [mm] Al
Fig. 4. The relative X-ray intensity I_λ after filtration 0.01 [mm] W+0.7 [mm] Al





Z analizy otrzymanych rezultatów wynika, że można uprościć model lampy, funkcję charakterystyczną aproksymując parabolą, przecinającą oś energii w punktach 20 [keV] oraz $E_{max} = e \cdot U_{max}$.

W dalszych rozważaniach przyjęto dodatkowo założenia:

- lampa jest źródłem punktowym promieniowania,
- rozważania przeprowadzane są dla wiązki o kształcie stożkowym.

2. Model filtru

Model filtru można przedstawić w postaci funkcji opisującej zmianę charakterystyki emisyjnej lampy na skutek przejścia promieniowania przez filtr.

Promieniowanie rentgenowskie przechodząc przez materię ulega osłabieniu. Pochłonięcie promieniowania przez substancję jest proporcjonalne do liczby atomowej pierwiastków wchodzących w jej skład. Zasada ta została wykorzystana do filtracji promieniowania. Jako filtry stosuje się najczęściej pierwiastki, takie jak Al, Cu. Ponieważ przy analizie modelu lampy rozważano także filtrację przez wolfram, również i on zostanie rozpatrzony.

Badania przeprowadzone przez Bragga i Pierce'a wykazały [2], że masowy współczynnik pochłaniania promieniowania jest proporcjonalny do trzeciej potęgi długości fali, natomiast długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do energii. Zależność współczynnika pochłaniania od energii można więc przedstawić następująco:

$$\mu_m(E) = \frac{k}{E^3} + b$$

gdzie: k, b - współczynniki.

Masowe współczynniki pochłaniania promieniowania [1]

Tabela 1

(8)

	Masowe wspoł							
Energia [kev]	$\mu_{Al}\left[\frac{cm^2}{g}\right]$	$\mu_{\alpha}\left[\frac{cm^{1}}{g}\right]$	$\mu_{\rm W}\left[\frac{cm^3}{g}\right]$					
10		206						
10.04	29.8							
11		159						
12.4	14.7							
13.2	11.2	98.2						
14	10.4							
14.23	8.75	83.8						
15.4	7.1							
16.62	5.47	53.4						
17.44	4.74							
18.2	4.28	41.9						
19.52	3.44							
20.39	3.05	30.5						
22.34	2.35	24.1						
23.1		22.21	4506					

Energia [kev]	$\mu_{Al}\left[\frac{cm^2}{g}\right]$	$\mu_{\alpha_i}\left[\frac{cm^1}{g}\right]$	$\mu_{\rm W}\left[\frac{cm^2}{g}\right]$
24.14		19.7	40.96
24.65	1.84		
25	1.811	18.1	35.96
30.041	1.085	10.84	22.61
40.04	0.5561	4.857	10.45
50.08	0.3517	2.592	5.746
60.03	0.2748	1.58	3.623
70.04	0.2219	1.055	
70.96	0.197		7.729
84.99		0.6604	
89.92	0.1812	100	5.816
100.6	0.1665	0.455	4.362
114.87	0.1565	0.341	3.166
130.31	0.1463	0.2802	2.322

Estymacja tych współczynników przeprowadzona została metodą najmniejszych kwadratów na podstawie danych przedstawionych w tabeli 1, przytoczonych za [1]. Otrzymane wartości współczynników k, b zamieszczono w tabeli 2.

Tabela 2

Pierwiastek		k		Ь			
Al		25729		0.142722			
Cu		270824		0.347			
W	poniżej	powyżej	w całym	poniżej	powyżej	w całym	
	krawędzi	krawędzi	zakresie	krawędzi	krawędzi	zakresie	
	524058	3596039	550526	1.5864	0.7655	3.2577	

Współczynniki dla równania (8) wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów

Zależność (8) jest spełniona w zakresach pomiędzy poszczególnymi krawędziami absorpcji. Dla Al pierwszy prążek krawędzi K występuje dla energii 1.559 [keV], dla Cu 8.9 [keV], a pozostałe prążki krawędzi K i L dla energii mniejszych, nie ma więc potrzeby osobnej aproksymacji w tych zakresach. Natężenie promieniowania jest dla tych energii bardzo małe, błąd spowodowany ekstrapolacją współczynników w tym zakresie, na podstawie funkcji aproksymowanej dla energii wyższych, nie ma wpływu na wartość natężenia promieniowania po przejściu przez filtr.

W przypadku wolframu takie uproszczenie prowadzi do różnic, ponieważ krawędź K występuje dla wolframu dla 60.05 [keV]. Skok dla tej wartości jest największy, pozostałe nie są bezpośrednio uwidocznione, dlatego dla wolframu wyznaczono współczynniki w tych dwóch zakresach. Oprócz tego wyznaczono także uśrednione współczynniki dla całego zakresu energii. Wyniki tych aproksymacji pokazano na wykresach (rys. 6).



Rys. 6. Masowe współczynniki pochlaniania (wyniki doświadczalne i obliczone) a) dla Al; b) dla Cu; c) dla W Fig. 6. Mass attenuation coefficients (experimental and computed values) a) for Al; b) for Cu; c) for W Model filtru w postaci funkcji przejścia może być zatem opisany następującą zależnością:

$$I_{filtr}(E) = I_{lampa}(E) \cdot exp(-\mu_{mf}(E) \cdot \rho_f \cdot d_f)$$
⁽⁹⁾

gdzie: $I_{lampa}(E)$ - charakterystyka emisyjna wynikająca z modelu lampy (7);

 $\mu_{mf}(E)$ - masowy współczynnik pochłaniania promieniowania dla wybranego

rodzaju filtru, wyznaczony z równania (8);

 ρ_{f} - gęstość pierwiastka, z którego zbudowany jest filtr;

d, - grubość filtru.

Rodzaj i grubość filtru są parametrami dla tego modelu. Założono możliwość zmiany grubości filtru w granicach [0,5] co 0.5 [mm] dla aluminium oraz w granicach [0,1] co 0.1 [mm] dla miedzi.

Zmiana natężenia promieniowania i kształtu charakterystyki emisyjnej na skutek filtracji zilustrowana jest na wykresach: (rys. 7):



Rys.7. Zmiana natężenia promieniowania i ksztaltu charakterystyki na skutek flitracji: a) dla filtru Al, b) dla filtru Cu

Fig. 7. Changes of the X-ray intensity and the shape of the function after filtration a) for Al filter; b) for Cu filter

3. Model obiektu

Model obiektu to funkcja opisującą zmiany natężenia promieniowania w punkcie $P(x_d, y_d)$ detektora na skutek przejścia promieniowania przez obrazowany obiekt.

Osłabienie promieniowania, po przejściu przez absorbent o grubości d i liniowym współczynniku pochłaniania µ, określone jest prawem Bougera-Lamberta-Beera (6). W modelu obiektu istotne jest więc: wyznaczenie liniowego współczynnika pochłaniania i długości drogi promieniowania w obiekcie.

Zagadnienie estymacji współczynnika pochłaniania było poruszane, gdy omawiano filtrację promieniowania przez filtry Al, Cu. Przytoczono współczynniki pochłaniania promieniowania dla miedzi, aluminium, wolframu, dla niektórych wartości energii promieniowania oraz dokonano ekstrapolacji na cały zakres energii za pomocą równania (8).

Większość obrazowanych w medycynie obiektów to tkanki biologiczne. W radiologii przyjął się więc podział tkanek na grupy ze względu na różnicę w masowych współczynnikach pochłaniania. Wyróżnia się tkanki miękkie - różnego rodzaju tkanki, z których zbudowane są narządy wewnętrzne, skóra oraz tkanki twarde - kości, zęby i zwapnienia.

3.1. Współczynnik pochłaniania promieniowania dla tkanek miękkich

Wartości liniowych współczynników pochłaniania promieniowania dla tkanek miękkich przytoczono za [3]. Pomiary wykonywane były dla potrzeb tomografii komputerowej, w której istnieje możliwość rozróżnienia tkanek o względnej różnicy współczynników pochłaniania mniejszej od 0.5%. Autorzy wyznaczyli współczynniki dla następujących tkanek: wody, płynu mózgowo-rdzeniowego, plazmy i RBC (red blood cell), białej i szarej substancji mózgu, wątroby, trzustki, mięśni, tkanki tłuszczowej oraz komórek nowotworowych. Zapewnia to dostęp do większości potrzebnych współczynników pochłaniania (tabela 3.). Liniowy współczynnik pochłaniania promieniowania dla krwi wyznaczany jest na podstawie współczynnika pochłaniania plazmy i RBC oraz na podstawie znajomości wielkości hematokrytu (H) w postaci:

 $\mu_{krwi} = H \cdot \mu_{RBC} + (I - H) \cdot \mu_{plazmy}$

13

(10)

A.Tomaka, J.Ihnatowicz

Oprócz danych doświadczalnych zostały przytoczone współczynniki aproksymacji średniokwadratowej współczynnika pochłaniania dla równania opisanego za pomocą wzoru:

$$\mu(E) = A_1 \cdot \exp(-\beta_1 \cdot E) + A_2 \cdot \exp(-\beta_2 \cdot E) + A_3 \cdot \exp(-\beta_3 \cdot E) + A_4 \cdot \exp(-\beta_4 \cdot E)$$
(11)

Zależność (11) daje także możliwość wyznaczenia współczynnika promieniowania dla wartości energii, dla których dane eksperymentalne są nieosiągalne.

Tabela 3

energia	woda	RBC	plazma	płyn	tkanka	tkanka	trzustka	wątroba	mózg-	mózg-
[keV]				mózg -	tłuszcz.	mięśń.			subst.	subst.
				rdzen.					szara	biała
17.7	1.05	1.165	1.115	1.116	0.6647	1.151	1.142	1.175	1.122	1.092
21.1	0.6875	0.7663	0.7364	0.7236	0.4615	0.7589	0.7552	0.7725	0.731	0.7106
26.4	0.4434	0.491	0.4696	0.4628	0.3273	0.4845	0.484	0.4927	0.471	0.4593
27.4	0.4167	0.4645	0.4382	0.4379	0.3169	0.4551	0.4542	0.46	0.4445	0.434
31.1	0.3453	0.3836	0.3595	0.3613	0.276	0.375	0.3749	0.3772	0.3683	0.3577
35.5	0.2952	0.325	0.3066	0.3067	0.2451	0.3876	0.3173	0.3219	0.3125	0.3062
41.4	0.2549	0.2799	0.2635	0.2601	0.2189	0.2743	0.274	0.2771	0.2667	0.2631
47.2	0.2303	0.2509	0.237	0.2361	0.2041	0.2478	0.2466	0.25	0.2386	0.2387
52	0.218	0.2378	0.2224	0.2218	0.195	0.2333	0.2319	0.2332	0.2264	0.2251
59.5	0.2027	0.221	0.2082	0.2057	0.1843	0.2128	0.2157	0.2167	0.2096	0.208
59.6	0.2028	0.2224	0.2063	0.2068	0.185	0.216	0.2144	0.2157	0.2117	0.2079
84.3	0.1776	0.1942	0.1816	0.1813	0.166	0.1889	0.1887	0.1899	0.1843	0.1821
97.4	0.1687	0.1841	0.1732	0.1708	0.1608	0.1804	0.1791	0.1818	0.1747	0.1741
103.2	0.1658	0.1813	0.1691	0.1669	0.1618	0.1773	0.1759	0.178	0.1709	0.1711
121.9	0.1578	0.1704	0.1622	0.1598	0.1517	0.1685	0.1671	0.1679	0.1633	0.163
136.3	0.1531	0.1632	0.1561	0.1547	0.1465	0.1636	0.1614	0.1621	0.1578	0.1586

Liniowy współczynnik pochłaniania dla tkanek miękkich - dane eksperymentalne [3]:

3.2. Współczynnik pochłaniania promieniowania dla tkanki kostnej

Struktura tkanki kostnej nie jest jednolita, budowa kości uzależniona jest od osobniczych cech badanego, jego wieku. W związku z bardzo złożoną budową tkanki kostnej istnieją trudności z wyznaczeniem współczynnika pochłaniania promieniowania przez kości. W dostępnej literaturze udało się znaleźć współczynniki pochłaniania promieniowania przez kości dla energii mniejszych od 20 [keV] [4]. Zakres ten jest jednak niewystarczający. W pracy tej przytoczono również wzór na przybliżone obliczenie masowego współczynnika pochłaniania promieniowania dla substancji złożonych z pierwiastków o liczbie atomowej z zakresu [6,18]. Dla takich substancji obowiązuje zależność:

$$\mu_m = \sum_i \omega_i \cdot \mu_{m_i}, \qquad (12)$$

gdzie: ω_i - procentowy udział wagowy i - tego składnika (tabela 4);

 μ_m - masowy współczynnik pochłaniania promieniowania przez i-ty pierwiastek.

Tabela 4

Skille wilgowy kosor na podstavio [1].									
pierwiastek	H	С	N	0	Mg	Р	S	Ca	
procent wagowy	0.064	0.278	0.027	0.41	0.002	0.07	0.002	0.147	

Skład wagowa kości na podstawie [4]:

Tabela 5

Współczynniki pochłaniania wyznaczone na podstawie (13),(12):

Energia	H	С	N	0	Mg	Р	S	Ca	tk. kostn.	tk.kostn.
[keV]									wsp. mas.	wsp.lin.
10	0.4067	2.4851	4.0263	6.101	20.4606	39.6116	47.661	88.708	19.276	34.6971
20	0.3721	0.4745	0.6698	0.9342	2.7970	5.3373	6.4413	12.3672	2.7669	4.9804
30	0.3578	0.2654	0.3236	0.4025	0.9597	1.7249	2.0649	3.8992	0.9704	1.7468
40	0.3461	0.2103	0.2349	0.2683	0.5036	0.8277	0.9760	1.7664	0.5175	0.9316
50	0.3356	0.1874	0.2001	0.21730	0.3371	0.5026	0.5814	0.9912	0.3508	0.6315
60	0.3261	0.1749	0.1822	0.1922	0.2609	0.3558	0.4036	0.6427	0.2739	0.4931
70	0.3172	0.1665	0.1711	0.1775	0.2200	0.2789	0.3108	0.4623	0.2325	0.4185
80	0.3091	0.1601	0.1633	0.1676	0.1955	0.2341	0.2570	0.3589	0.2075	0.3734
90	0.3015	0.1550	0.1572	0.1603	0.1793	0.2057	0.2230	0.2948	0.1909	0.3436
100	0.2944	0.1505	0.1522	0.1544	0.1678	0.1864	0.2002	0.2527	0.1790	0.3223
110	0.2878	0.1466	0.1479	0.1496	0.1592	0.1726	0.1839	0.2235	0.1701	0.3062
120	0.2816	0.1431	0.1441	0.1454	0.1524	0.1622	0.1718	0.2023	0.1631	0.2935
130	0.2758	0.1399	0.1407	0.1417	0.1469	0.1541	0.1625	0.1865	0.1573	0.2831
140	0.2703	0.1369	0.1375	0.1384	0.1422	0.1475	0.1550	0.1742	0.1524	0.2742
150	0.2651	0.1341	0.1347	0.1354	0.1382	0.1420	0.1488	0.1645	0.1481	0.2666

W artykule tym jednak masowe współczynniki pochłaniania promieniowania dla wymienionych wyżej pierwiastków obejmowały zakres energii [0,20][keV]. Aby uzyskać współczynniki w zakresie do 150 keV (tabela 5.), wykorzystano następujący wzór: [5],[7]

$$\mu_m = C \cdot \lambda^3 - D \cdot \lambda^4 + \sigma_{K-N} \cdot \frac{N \cdot A}{Z}, \qquad (13)$$

gdzie: C,D - współczynniki uzależnione od liczby atomowej [5],

N - liczba Avogadro;

A - masa atomowa pierwiastka;

Z - liczba atomowa;

 $\sigma_{N-\kappa}$ - elektronowy współczynnik rozpraszania określony równaniem Kleina i Nishiny[5]. Wyznaczone współczynniki pochłaniania promieniowania dla wymienionych wyżej pierwiastków, a także estymowane współczynniki pochłaniania promieniowania dla tkanki kostnej zawiera tabela 5. Wyniki mogą różnić się od rzeczywistych, ale z braku innych danych uznano je za wystarczające.

3.3. Droga promieniowania w obiekcie

Modelowanie przestrzenne obiektu, poddawanego działaniu promieni rentgenowskich, pociąga za sobą konieczność rozwiązania następujących problemów:

- reprezentacji graficznej obiektu,
- wyznaczenia długości drogi promieniowania w obiekcie.

Reprezentacja graficzna rzeczywistego obiektu jest sprawą dość skomplikowaną. Problemami przedstawienia brył przestrzennych, wraz z algorytmami rzutów, wyznaczania powierzchni zasłoniętych, oświetlenia zajmuje się dział grafiki komputerowej [9]. W celu pokazania jednak najistotniejszych zjawisk obrazowania rentgenowskiego przyjęto bardzo uproszczony model w postaci brył elementarnych: elipsoidy, walca i prostopadłościanu, oraz ich złożenia.

Sposób wyznaczania długości drogi promieniowania w obiekcie jest uzależniony od sposobu zamodelowania obiektu w przestrzeni. Wyznaczenie długości drogi w bryle elementarnej sprowadza się do wyznaczenia części wspólnej promienia i bryły, a więc punktów przecięcia powierzchni brył przez prostą wyznaczoną przez drogę promieniowania.

Geometrię obrazowania obiektu (rys. 8) opisują następujące wielkości:

d - odległość źródło-detektor,

zo - odległość środek obiektu - źródło,

y, y_d - współrzędne punktu na detektorze,

x, y,- współrzędne rzutu źródła na detektor,

x_v_o- współrzędne rzutu środka obiektu na detektor,

r - odległość punktu P od O na detektorze.

Oś X jest prostopadła od płaszczyzny rysunku.

Parametry opisujące wielkość obiektu to

- w przypadku prostopadłościanu:
 w grubość obrazowanego obiektu,
 Lx, Ly szerokości obrazowanego obiektu,
- w przypadku elipsoidy
 a, b, c osie elipsoidy,
- w przypadku walca jedna z trójek:

a, b, w - osie elipsoidy na płaszczyźnie XY, wysokość walca w osi Z,

a,Ly,c - osie elipsoidy na płaszczyźnie XZ, wysokość walca w osi Y,

Lx,b,c - osie elipsoidy na płaszczyźnie YZ, wysokość walca w osi X.



Rys. 8. Geometria obrazowania dla a)prostopadlościanu, b) elipsoidy, c) walca Fig. 8. The imaging geometry for: a) rectangular paralellepiped, b)ellipsoid, c) cylinder

Przy tych założeniach można obliczyć odpowiednie długości drogi promieniowania.

3.3.1. Długość drogi promieniowania w prostopadłościanie

Niech funkcja rect(x) będzie zdefiniowana jako: $rect(x) = \begin{cases} 0 \ dla \ |x| > \frac{1}{2} \\ 1 \ dla \ |x| \le \frac{1}{2} \end{cases}$

Długość drogi promieniowania w obiekcie może być wyznaczona poprzez znalezienie części wspólnej trzech zakresów, a następnie podzielenie jej przez cosinus kąta odchylenia drogi promieniowania od osi Z. Zakresy te wynikają z grubości obiektu i odległości w osi Z, między punktami przecięcia się drogi promieniowania z krawędziami bocznymi w wymiarze X i Y. Wyprowadzony wzór na drogę promieniowania ma postać:

$$l = \sqrt{I + \frac{\left(y_d - y_s\right)^2 + \left(x_d - x_s\right)^2}{d^2}} \cdot \left[rect\left(\frac{z - z_0}{w}\right)rect\left(\frac{y_d - y_s}{d \cdot L_y} \cdot z - \frac{y_0 - y_s}{L_y}\right)rect\left(\frac{x_d - x_s}{d \cdot L_x} \cdot z - \frac{x_0 - x_s}{L_x}\right)$$
(14)

3.3.2. Długość drogi promieniowania w elipsoidzie

Długość drogi promieniowania w elipsoidzie wyznaczana jest jako odległość punktów przecięcia drogi promieniowania z elipsoidą i jest określona wzorem:

$$l = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{(y_a - y_s)^2 + (x_a - x_s)^2}{d^2}} \\ \left[\frac{\sqrt{\frac{(x_a - x_s)^2}{a^3 d^2} + \frac{(y_a - y_s)^2}{b^3 d^2} + \frac{1}{c^1} - \left(\frac{(x_a - x_s)(y_a - x_s)}{abd} - \frac{(x_s - x_s)(y_a - x_s)}{abd}\right)^2 - \left(\frac{(x_s - x_s)}{a} - \frac{(-z_s)(x_a - x_s)}{cad}\right)^2 - \left(\frac{(y_s - y_s)}{b} - \frac{(-z_s)(y_a - y_s)}{cbd}\right)^2}{\frac{(x_a - x_s)^2}{a^3 d^2} + \frac{(y_a - y_s)^2}{b^3 d^2} + \frac{1}{c^2}} \right]$$

(15)

3.3.3. Długość drogi promieniowania w walcu

W celu wyznaczenia drogi promieniowania w walcu zakłada się, że walec to elipsoida, której jedna oś dąży do nieskończoności, ograniczona płaszczyznami, prostopadłymi do tej osi. Wyznaczenie drogi odbywa się poprzez wyznaczenie długości części wspólnej przedziałów powstałych poprzez rzuty na oś Z: drogi promieniowania w elipsoidzie i odległości między punktami przecięcia się drogi promieniowania z płaszczyznami zawierającymi podstawy, a następnie podzielenie tej wartości przez cosinus kąta odchylenia drogi od osi Z.

W tym celu w zależności od ustawienia walca należy wyznaczyć granicę, gdy a lub b, lub c dąży do nieskończoności wyrażeń:

$$\overline{z} = \frac{-\left[\frac{(x_d - x_s)(x_s - x_0)}{a^2 d} + \frac{(y_d - y_s)(y_s - y_0)}{b^2 d} - \frac{z_0}{c^2}\right]}{\left[\frac{(x_d - x_s)^2}{a^2 d^2} + \frac{(y_d - y_s)^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{c^2}\right]}$$
(16)
$$\frac{2 \sqrt{\frac{(x_d - x_s)^2}{a^3 d^2} + \frac{(y_d - y_s)^2}{b^3 d^3} + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{(x_s - x_s)(y_s - x_s)}{abd} - \frac{(x_s - x_s)(y_s - x_s)}{abd}\right)^2 - \left(\frac{(x_s - x_s)}{cad} - \frac{(-x_s)(x_s - x_s)}{cad}\right)^3 - \left(\frac{(y_s - y_s)}{cbd} - \frac{(-x_s)(y_s - y_s)}{cbd}\right)^2}{\frac{(x_s - x_s)^2}{a^3 d^2} + \frac{1}{c^3}}$$
(17)

Następnie należy wyznaczyć część wspólną z przedziałem powstałym przez rzut na oś Z punktów przecięcia drogi promieniowania z płaszczyznami zawierającymi podstawy walca. Na przykład długość drogi dla przypadku ($a \rightarrow \infty$) wyniesie:

$$l = \sqrt{1 + \frac{(y_d - y_s)^2 + (x_d - x_s)^2}{d^2}} \cdot \int rect\left(\frac{z - \overline{z}}{\Delta z}\right) rect\left(\frac{x_d - x_s}{d \cdot L_x} \cdot z - \frac{x_0 - x_s}{L_x}\right) dz$$
(18)

Model obiektu w postaci funkcji przejścia może być opisany następującą zależnością:

$$I_{obiekt}(E, x_d, y_d, x_s, y_s) = I_{filtr}(E) \cdot exp\left(-\sum_i \mu_{o_i}(E) \cdot l_{o_i}(\ldots)\right)$$
(19)

gdzie:

 $I_{filtr}(E)$ - charakterystyka emisyjna wynikająca z modelu filtru;

- $\mu_{0}(E)$ współczynnik pochłaniania promieniowania przez poszczególne bryły elementarne;
- długość drogi promieniowania w poszczególnych bryłach elementarnych,
 z których zbudowany jest obiekt. Jest to funkcja wielu parametrów, takich
 jak: wzajemne odległości bryła-źródło-detektor, rodzaj, położenie i
 rozmiary bryły, współrzędne źródła, współrzędne punktu, w którym
 natężenie jest mierzone.

Natężenie promieniowania, po przejściu promieniowania przez obiekt, jest funkcją energii, a także takich parametrów, jak: wzajemne odległości bryła-źródło-detektor, rodzaj, położenie i rozmiary bryły, współrzędne źródła, współrzędne punktu, w którym natężenie jest mierzone.

4. Geometria modelu

W poprzednich punktach rozważono podstawowe własności poszczególnych elementów toru obrazowania rentgenowskiego oraz zaproponowano ich modele przez podanie funkcji opisujących te własności.

Wyprowadzając poszczególne wzory, opisujące wielkość natężenia promieniowania, zakładało się, że natężenie promieniowania nie zależy od parametrów geometrycznych systemu. Wyjątkiem był model obiektu, gdy ta zależność wynikała z drogi promieniowania w obiekcie.

Ponieważ jednak wiązka promieniowania nie jest równoległa, ale stożkowa, natężenie promieniowania, mierzone na jednostkowej powierzchni, uzależnione jest od kąta odchylenia promienia od promienia centralnego. Można je opisać następującym wzorem:

(20)

$$I' = I \cdot \cos^{3} \alpha = I \frac{I}{\left(\sqrt{I + \frac{(y_{d} - y_{s})^{2} + (x_{d} - x_{s})^{2}}{d^{2}}}\right)^{3}}$$

gdzie: I - natężenie promieniowania dla promienia centralnego;

 α - kąt odchylenia drogi promieniowania od promienia centralnego; pozostałe wielkości jak powyżej.

Równanie (20) wynika z równania (21) znanego jako prawo odwrotnych kwadratów oraz z nachylenia jednostkowej powierzchni pomiaru natężenia dla promienia odchylonego.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{F_1^2}{F_2^2} \tag{21}$$

gdzie: I_1 , I_2 – natężenia promieniowania na powierzchniach odległych od źródła odpowiednio

 $o F_1, F_2$.

W modelowanym torze obrazowania istnieje możliwość zmiany odległości lampa-detektor od pewnej wartości d_{min} do d_{max} . Zmiana tego parametru przy ustalonych innych parametrach, takich jak napięcie, prąd, czas trwania ekspozycji powoduje zmianę natężenia promieniowania. Jeśli natężenie promieniowania dla najmniejszej wartości d przyjąć jako pewne natężenie odniesienia, wówczas:

$$I_0 = I_{0 \text{ odnies}} \cdot \frac{d_{\min}^2}{d^2}$$
(22)

Uwzględnienie geometrii systemu obrazowania w postaci funkcji przejścia może być opisane następującą zależnością:

$$I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s) = I_{obiekt}(E, x_d, y_d, x_s, y_s) \cdot \frac{d_{min}^2}{d^2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{(y_d - y_s)^2 + (x_d - x_s)^2}{d^2}}\right)^3}$$
(23)

gdzie: $I_{obiekt}(E, x_d, y_d, x_s, y_s)$ - funkcja natężenia promieniowania wynikająca z modelu obiektu.

5. Wyznaczenie natężenia promieniowania padającego na detektor

Ze względu na wymiary geometryczne i rodzaj źródła promieniowania natężenie promieniowania padającego na detektor jest opisane różnymi funkcjami.

5.1. Źródło punktowe, monochromatyczne

W tym przypadku natężenie promieniowania padającego na detektor jest opisane bezpośrednio funkcją, wyznaczoną w poprzednim punkcie, przy uwzględnianiu zależności wynikających z geometrii systemu obrazowania.

$$I_{det\,ekt}(x_d, y_d) = I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s)$$
⁽²⁴⁾

5.2. Źródło punktowe, polichromatyczne

Jeżeli źródło promieniowania jest źródłem polichromatycznym, zaczernienie na detektorze jest proporcjonalne do sumy natężeń promieniowania o wszystkich wartościach energii

$$I_{det\,ekt}(x_d, y_d) = \int I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s) d\lambda = \int \frac{h \cdot c}{E^2} \cdot I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s) dE \quad (25)$$

5.3. Źródło niepunktowe, monochromatyczne

Źródło niepunktowe posiada niezerowe wymiary geometryczne. Wówczas do punktu $P(x_d, y_d)$ detektora dociera promieniowanie z każdego punktu źródła i wypadkowe natężenie w punkcie $P(x_d, y_d)$ jest sumą natężeń promieniowania z każdego punktu źródła (rys 14.).

Jeżeli założyć jednostajny rozkład natężenia promieniowania źródła, a źródło jako zbiór nieskończenie wielu źródeł punktowych, to natężenie promieniowania takiego punktowego źródła wynosi:

$$dI_0 = \frac{I_0}{D}$$

(26)



Rys. 9. Idea powstawania obrazu dla źródeł niepunktowych Fig. 9. The idea of the image formation for the extended sources

Natężenie promieniowania padającego na detektor jest równe:

$$U = \int_{x_0}^{x_0 + \frac{D}{2}} dI(x_s) dx_s$$

$$(27)$$

gdzie $dI(x_s)$ - natężenie promieniowania od źródła punktowego po przejściu przez obiekt.

Ponieważ natężenie to zależy od długości drogi promieniowania w obiekcie, która jest funkcją położenia źródła, natężenie promieniowania I w punkcie $P(x_d, y_d)$ detektora wyniesie:

$$I_{det \ ekt}(x_d, y_d) = \int_{x_0 - \frac{D}{2}}^{x_0 + \frac{D}{2}} \frac{I_{geom}(E_{,,} x_d, y_d, x_s, y_s)}{D} dx_s$$
(28)

5.4. Źródło niepunktowe, polichromatyczne

Wyznaczenie funkcji natężenia promieniowania na detektorze dla przypadku polichromatycznego źródła liniowego związane jest z koniecznością podwójnego całkowania funkcji otrzymanej przy uwzględnianiu wpływu parametrów geometrycznych. Natężenie promieniowania jest w tym przypadku proporcjonalne do sumy natężeń promieniowania pochodzących z każdego punktu źródła polichromatycznego, a więc będącego sumą natężeń promieniowania dla wszystkich energii.

$$I_{det\ ekt}(x_d, y_d) = \int_{0}^{E_{max}} \int_{x_0 - \frac{D}{2}}^{x_0 + \frac{D}{2}} \frac{h \cdot c}{E^2} \cdot \frac{I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s)}{D} dEdx_s$$
(29)

Otrzymane całki nie posiadają analitycznego przedstawienia. Funkcje wewnętrzne funkcji $I_{geom}(E, x_d, y_d, x_s, y_s)$: $I_{lampa}(E)$, $\mu(E)$, $l(x_s)$ analizowano w poprzednich punktach. Funkcja $I_{lampa}(E)$ może być definiowana przez użytkownika, w ogólnym przypadku więc jej postać jest nieznana, $\mu(E)$ wyrażona jest jako odwrotność trzeciej potęgi energii, $l(x_s)$ jest funkcją ciągłą, ale ma różną postać dla różnych rodzajów brył elementarnych, szczególnie złożoną w pobliżu krawędzi. Z tych powodów rozwiązanie przeprowadza się poprzez całkowanie numeryczne, np. metodą Simpsona.

6. Model detektora

Model detektora to funkcja zaczernienia błony w zależności od natężenia promieniowania w punkcie $P(x_d, y_d)$ detektora.

Zaczernienie (gęstość optyczna) błony, czyli powstały obraz, jest funkcją ekspozycji błony na promieniowanie rentgenowskie. Ekspozycja jest to iloczyn natężenia promieniowania i czasu, w którym takim natężeniem oddziaływano na błonę, jej wartość jest zatem proporcjonalna do natężenia promieniowania rentgenowskiego. Zadaniem detektora jest zamiana natężenia promieniowania po przejściu przez obiekt na zaczernienie błony fotograficznej. Dla każdego punktu $P(x_d, y_d)$ płaszczyzny detektora zachodzi przekształcenie:

$$D(x_d, y_d) = f(I_{det \ ekt}(x_d, y_d))$$
(30)

gdzie: $D(x_d, y_d)$ - (zaczernienie) gęstość optyczna błony w punkcie $P(x_d, y_d)$;

 $I_{det ekt}(x_d, y_d)$ - natężenie promieniowania w punkcie $P(x_d, y_d)$.

Funkcja przekształcająca f(30) jest dana w postaci krzywej charakterystycznej dla każdego rodzaju błony. Kształt krzywej charakterystycznej jest uzależniony od wielu czynników,

(31)

związanych z obróbką fotochemiczną: sposobu obróbki, czasu wywoływania i temperatury, jednak przy zapewnionych stałych warunkach obróbki nie zmienia się ze zmianą napięcia [2]. Krzywa ta ulega jedynie przesunięciu na osi logarytmu ekspozycji (osi natężenia promieniowania). Zamiast podania rodziny krzywych podaje się więc jedną krzywą, oś skalując w jednostkach logarytmu względnej ekspozycji (logarytmu względnego natężenia promieniowania)

Zaczernienie kliszy można wyrazić wzorem [2]:

$$D = k \cdot I_{\star} \cdot U^{P} \cdot t$$

gdzie: I_A - prąd anody;

U - napięcie przyspieszające;

t - czas ekspozycji;

k - współczynnik zależny od czułości materiału fotograficznego i konstrukcji kasety;

p - wykładnik, zależny od U, $p = \begin{cases} 5 & dla & U = 40[keV]; \\ 3 & dla & U = 150[keV]. \end{cases}$

W przyjętym modelu zakłada się, że maksymalne zaczernienie błony wywoływane jest przez promieniowanie nieosłabione w obiekcie, niezależnie od wartości napięcia przyspieszającego. Aby to odpowiadało rzeczywistości, należy tak zmienić natężenie prądu płynącego przez lampę, by przy zmianie napięcia zaczernienie było stałe (31).

Jako modele zostały przyjęte rzeczywiste charakterystyki błon Fluorofilm TK1, Rentgen XS1 [6] (rys. 10). Istnieje możliwość wyboru jednej z tych charakterystyk.





Rys. 10. Krzywe charakterystyczne na podstawie [6] Fig. 10. Characteristic curves according [6]

Jeżeli przyjąć, że dla wartości $I_{0\,det\,ekt}$ -nieosłabionego natężenia promieniowania gęstość optyczna ma być maksymalna w prostoliniowym zakresie charakterystyki (przyjęto wartość D_{max} odpowiadającą $log H_{wzgl} = log I_{wzgl} = 2$), to dla natężenia promieniowania $I_{det\,ekt}$ zaczernienie wyraża się wzorem:

$$D = f\left(2 + \log\left(\frac{I_{det\ ekt}}{I_{0_{det\ ekt}}}\right)\right)$$
(32)

Podsumowanie

Zaproponowano model procesu tworzenia obrazu rentgenowskiego jako kompozycję modeli cząstkowych toru obrazowania, jak: lampa rentgenowska, filtr, obrazowany obiekt i detektor. Otrzymano funkcję opisującą zaczernienie błony w zależności od: charakterystyki emisyjnej lampy, przyłożonego napięcia, grubości i rodzaju zastosowanego filtru, kształtu obiektu i materiału, z którego jest on zbudowany oraz krzywej charakterystycznej detektora i wzajemnego położenia układu lampa - obiekt - detektor.

Rozważania przeprowadzono dla punktowego źródła promieniowania, podając także postać tej funkcji dla źródła niepunktowego o określonej szerokości.

Wyprowadzono wzór na drogę promieniowania w obiekcie dla kilku kształtów obiektów najczęściej stosowanych w medycynie - elipsoidy, walca, prostopadłościanu. Zebrano w tabeli masowe współczynniki pochłaniania promieniowania dla różnych rodzajów obiektów, przytaczając wzór na przybliżone wyznaczenie współczynnika na podstawie znajomości składu chemicznego obiektu (tabele 3, 5).

Przyjęto przy opracowywaniu modelu pewne założenia upraszczające, takie jak: brak promieniowania rozproszenia, brak pochłaniania promieniowania w warstwie powietrza lub próżni, brak kolimatorów - założenie, że wiązka jest dostatecznie wąska, brak okładek wzmacniających - przyjęto, że funkcja konwersji promieniowania X na promieniowanie widzialne jest stała w całym zakresie energii. Nie uwzględniono także takich parametrów lampy, jak: czas naświetlania, prąd płynący przez lampę ograniczając się jedynie do założenia, że nastawy te powinny być takie, aby powodować przy danej wartości napięcia U i braku obrazowanego obiektu zaczernienie o maksymalnej wartości w liniowym zakresie krzywej charakterystycznej. Ograniczenia powyższe wynikają z braku danych literaturowych do opisu poszczególnych nie uwzględnionych elementów.

Opisany model został zaimplementowany w postaci aplikacji RTG.EXE działającej w środowisku MS Windows [11]. Stanowi on narzędzie, dające użytkownikowi możliwość jakościowej oceny wpływu poszczególnych parametrów toru rentgenowskiego na jakość obrazowania.

LITERATURA

- DYSON N. A. : Promieniowanie rentgenowskie w fizyce atomowej i jądrowej, PWN, Warszawa 1978.
- 2. JEZIERSKI G. : Radiografia przemysłowa, WNT, Warszawa 1993.
- PHELPS M. E., HOFFMAN E. J., TER-POGOSSIAN M.: Attenuation Coefficients Of Various Body Tissues, Fluids and Lessions at Photon Energies of 18 to 136 keV, Radiology: 117 573-583, December 1975.
- MILLAR R. H.: Experimental X-ray Coefficients at Low Photon Energies for Substances of Medical Importance, Phisics in Medicine and Biology, 1975, vol 20, nr. 6 974-979.
- 5. International Tables for X-ray Crystalography, The Kynoch Press, Birmigham, 1968.
- 6. Charakterystyki blon medycznych: FluoroFilm TK 1, Rentgen XS 1, Warszawskie Zakłady Fotochemiczne FOTON.
- 7. HAISSINSKY M. Chemia jądrowa i jej zastosowanie, PWN, Warszawa1959.
- 8. Dokumentacja lampy rentgenowskiej OPTI 150/40/72/C.
- 9. JANKOWSKI M. Elementy grafiki komputerowej, WNT, Warszawa 1990.
- SMOLIK A.: Modelowanie obrazowania rentgenowskiego, Praca dyplomowa Politechnika Ślaska, 1994.
- 11. SMOLIK A.: RTG.EXE, aplikacja dla MS Windows, Politechnika Śląska, 1994.

Recenzent: Prof. dr hab.inż. Adam Mrózek

Wpłynęło do Redakcji: 28.10.1997 r.

Abstract

A simplified model of an X-ray imaging process was design. The model consists of models of particular parts of an X-ray imaging system namely: the X-ray lamp, the filter, the object being imaged and the detector. The relashionships describing the X-ray film density was found as a function of such parameters as: anode voltage, the type and thickness of the filter, the shape of the object, its attenuation coefficient, the characteristic curve of the detector and also of the relative position of the source, object and detector.

The source's energy distribution was derived assuming an inner filtration and filtration in anode as a function of anode voltage (fig. 3,4,5). The change of the energy distribution after filtering was presented depending on the type and thickness of the filter (fig. 9,10). The lenght of the way of the X-ray in the object was found for ellipsoid, cylindrical and rectangular paralellepipedical objects. (eqn 13,14,17). The attenuation coefficients were gathered from literature, or if anavailable, estimated based on the chemical composition (tbl. 3, 5). The detector characteristic curves used were those of Florofilm TK1, Rentgen XS1. The geometric parameters were taken into account when deriving the X-ray way lenght in the object and multiplying factor from an inverse square falloff. The density function was derived for both point and extended sources. This model being nonlinear, the density (image intensity) must be computed via numerical integration.

The designed model was implemented as a program under MS Windows, which allows the influence of particular parameters on the image quality to be shown.