ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 14 Nr kol. 267

Bogdan Skalmierski

1.3. O PEWNYCH PROBLEMACH DYNAMIKI UKŁADÓW

Opracowanie zawiera przegląd podstawowych zagadnień dynamiki układów i odzwierciedla niektóre zainteresowania naukowe Katedry Dynamiki Układów Mechanicznych Politechniki Śląskiej.

W pracy w części deterministycznej wykorzystania szeroko aparat mechaniki analitycznej.

W części probabilistycznej ograniczono się do analizy procesów drugiego rzędu. Starano się przedstawić pogląd na opisane kwestie możliwie ogólnie.

Obok analizy układów dyskretnych podano schemat ogólny rozwiązania problemu probabilistycznego układu o stałych rozłożonych.

1. Podstawowe równania opisujące dynamikę układów

Rozpatrując zagadnienia dynamiki układów na pierwszy plan wysuwa się zawsze problem deterministyczny.
W układach automatycznej regulacji oznacza to znalezienie deterministycznej odpowiedzi układu na sygnał o tym samym charakterze.

Jeżeli zatem wektor X jest sygnałem na wejściu to zadanie sprowadza się do znalezienia odpowiedzi Y układu. Rozwiązanie problemu zależy tak od samego wektora X warunków początkowych jak i parametrów strukturalnych układu.

Poszukiwanie Y jest nie zawsze proste i łatwe. Wiąże się ono z rozwiązaniem równania macierzowego, które ogólnie rzecz biorąc jest nieliniowe.

Równanie to opisuje konfigurację układu. Naturalnie jest ono różne dla układów różnych typów fizycznych, ale w większości przypadków daje ono się przedstawić za pomocą metod mechaniki analitycznej. Nie wchodząc w powszechnie znane zasady mechaniki (zasada d'Alemberta czy zasada Hamiltona) przej-

dziemy do rezultatów wydedukowanych z podstawowych twierdzeń. Konsekwencją przekształceń staje się układ równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q^j} = Q_j + \lambda_\mu^{(1)} C_j^{(1)\mu} + \lambda_\nu^{(2)} C_j^{(2)\nu} \qquad (1)$$

gdzie

E - jest energią kinetyczną układu lub jej analoganem dla układu niemechanicznego,

q^i - współrzędną uogólnioną Lagrange'a (Dla układów elektrycznych ładunek)

Q_j - siłą uogólnioną lub wielkością analogiczną dla innych niż układ mechaniczny,

λ - mnożniki Lagrange'a.

Do równań (1) należy dołączyć równania możliwych przyspieszeń, ażeby ilość niewiadomych odpowiadała liczbie równań. Równania te są następujące:

$$\begin{aligned} \dot{C}_k^{(1)\mu}\dot{q}^k + C_k^{(1)\mu}\ddot{q}^k + D^{(1)\mu} &= 0^{x)} \\ \dot{C}_k^{(2)\nu}\dot{q}^k + C_k^{(2)\nu}\ddot{q}^k + D^{(2)\nu} &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Funkcje $C_k^{(1)\mu}$, $C_k^{(2)\nu}$, $D^{(1)\mu}$ i $D^{(2)\nu}$ współrzędnych i czasu zależą od struktury więzów nałożonych na układ.

Jeżeli ograniczymy nasze rozważania do układów holonomicznych, to jak wiadomo, można w tym przypadku zawsze dobrać tyle niezależnych współrzędnych uogólnionych ile jest stopni swobody. Stąd układ (1) uprości się. Prawe strony będą zawierały teraz tylko siły uogólnione Q_j.

---

x) "(1)" odnosi się do węzłów holomicznych, a "(2)" do więzów anholomicznych.
Obowiązuje konwencja sumacyjna.

Energia kinetyczna wyrażona przez współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione składa się z trzech następujących składników:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 \tag{3}$$

$$E_0 = a_0 (q^1, \ldots, q^N, t) \tag{3a}$$

$$E_1 = a_j (q^1 \ldots q^N, t) \dot{q}^j, \tag{3b}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} a_{jk} (q^1 \ldots q^N, t) \dot{q}^j \dot{q}^k \tag{3c}$$

Wprowadzamy obecnie przestrzeń Riemana określoną tensorem metrycznym $a_{jk}(q^1 \ldots q^N, t)$. Jak widać w przypadku, gdy więzy układu zależą od czasu również i własności lokalne owej przestrzeni ulegają zmianie w czasie.

Zagadnienie ruchu układu można rozważać jako probem ruchu punktu w przedstawionej przestrzeni Riemana. Nazywać będziemy tę przestrzeń przestrzenią konfiguracyjną. Równania (1) można zapisać po łatwych przekształceniach następująco:

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s = F^i \tag{4}$$

gdzie

Γ^i_{rs} jest symbolem Christoffela II rodzaju

$$F^i = \left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_1}{\partial \dot{q}^j}\right) + \frac{\partial}{\partial q^j}(E_1+E_0) - \frac{\partial a_{kj}}{\partial t}\dot{q}^k\right] a^{ij} \tag{4a}$$

a^{ij} jest sprzężonym tensorem metrycznym.

Każde z równań (4) jak widać jest równaniem drugiego rzędu. Przedstawienie równań ruchu w postaci (4) nie jest jedyne. Można wprowadzić inne przestrzenie.

Przykładem może być tzw. przestrzeń fazowa, której wymiar jest dwukrotnie większy. W tej nowej przestrzeni występuje obok N współrzędnych q^i N pędów uogólnionych p_j zdefiniowanych następująco:

$$p_j \overset{df}{=} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}^j} \tag{5}$$

Ponieważ $E = \frac{1}{2} a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k + a_j \dot{q}^j + a_o$,

przeto

$$p_j = a_{ji} \dot{q}^i + a_j.$$

Stąd

$$\dot{q}^i = a^{ij} (p_j - a_j) \tag{5a}$$

gdzie a^{ij} jest tensorem sprzężonym do tensora metrycznego przestrzeni konfiguracyjnej.

Wprowadzając nową funkcję

$$H = p_j \dot{q}^j - E + V.$$

zwaną funkcją Hamiltona, w której V jest energią potencjalną układu.

Funkcję tę można zapisać następująco:

$$H = \frac{1}{2} a^{jk} (p_j - a_j)(p_k - a_k) - a_o + V.$$

Równania ruchu w tej nowej przestrzeni można przedstawić w postaci:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i - Q_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{6}$$

Są to tzw. równania kanoniczne Hamiltona.
Równania te po podstawieniu wyrażenia na funkcję H są następujące:

$$\dot{q}^i = a^{ij}(p_j - a_j),$$

$$\dot{p}_i - Q_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial a^{jk}}{\partial q^i}(p_j - a_j)(p_k - a_k) + a^{jk}\frac{\partial a_j}{\partial q^i}(p_k - a_k) +$$

$$+ \frac{\partial a_o}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Równania (6) są równaniami pierwszego rzędu.

Punkt równowagi układu określa się z założenia $p_i = 0$, zatem jest on wyznaczony z układu równań

$$Q_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 \tag{6b}$$

2. Uwagi na temat stabilności układów

Stabilność jest pewną cechą układów. Układ stabilny posiada tę własność, że jest mało wrażliwy na zmiany wielkości, które decydują o jego reakcji. Innymi słowy, jeżeli układ pracuje w pewnych warunkach, a zmiany tych warunków w sposób nieznaczny wpływają na zmiany charakteru jego pracy, to obserwujemy stabilne zachowanie się rozpatrywanego obiektu; w razie przeciwnym mamy do czynienia z niestabilnością.

Pojęcie stabilności rozumiane intuicyjnie jest tak bardzo ogólne, że chcąc je zamknąć w ramach ścisłego zapisu matematycznego, musimy precyzyjnie scharakteryzować cechy, które układ powinien zachować. Na tym tle powstały i istnieją różne definicje stabilności.

Rozpatrzmy np. układ o jednym stopniu swobody, opisany równaniem:

$$\frac{dE}{dq} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} - Q(q,E) = 0 \tag{7}$$

Punkt określający położenie równowagi, w tym przypadku nie zmienia swego położenia w czasie. Przyjmujemy początek układu w punkcie równowagi. Uznamy, że cechą charakterystyczną będzie odległość $\varrho(\mathbb{X})$ punktu trajektorii fazowej od położenia równowagi. Położenie to będziemy uważali za stabilne, o ile małym zmianom warunków początkowych (zmiany $p_0 = p(0)$ i $q_0 = q(0)$), towarzyszyć będą małe zmiany odległości. Uściślając wypowiemy twierdzenie Liapunowa o stabilności. Powiadamy, że położenie równowagi $p = q = 0$ jest stabilne, o ile dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli

$$\varrho(\mathbb{X}_0) < \delta$$

to dla każdego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$\varrho(\mathbb{X}) < \varepsilon$$

Posługując się rachunkiem zdań i kwantyfikatorów, wypowiedziane twierdzenie można zapisać krócej: położenie równowagi $p = q = 0$ jest stabilne, o ile prawdziwe jest następujące zdanie logiczne:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \left[\varrho(\mathbb{X}_0) < \delta \Longrightarrow \bigwedge_{t>0} \varrho(\mathbb{X}) < \varepsilon \right]$$

Symbole $\bigwedge$ i $\bigvee$ noszą nazwę kwantyfikatorów: ogólnego i szczegółowego. Wzór $\bigwedge_x f(x)$ czytamy: dla każdego x spełniona jest funkcja f(x); $\bigvee_x f(x)$ oznacza, że istnieje takie x spełniające funkcję f(x). $\Longrightarrow$ jest znakiem implikacji. Zdanie a $\Longrightarrow$ b należy czytać: jeżeli a to b.

Pojęcie stabilności, omówione przed chwilą, zilustrowane przykładem układu o jednym stopniu swobody jest naturalnie takie samo w przypadku układów o wielu stopniach swobody. Jedyną różnicą jest to, że w omawianym problemie odległość punktu trajektorii fazowej od punktu równowagi określamy nie na płaszczyźnie, a w przestrzeni 2N wymiarowej. A zatem punkt równowagi określony równaniem (6b) jest stabilny, o ile istnieje taki obszar warunków początkowych w przestrzeni fazowej, dla których odległość $\varrho(\mathbb{X})$ punktu trajektorii od punktu równowagi nie przekroczy z góry założonej wielkości. Przykładowo dla układu konserwatywnego warunkiem stabilności punktu równowagi, jak to zaraz pokażemy, jest istnienie w tym punkcie minimum energii potencjalnej V. Warunek ten jest znany w literaturze [13] pod nazwą kryterium Lagrange'a - Dirichleta. W celu dowodu przeprowadzimy następujące rozumowanie:

Zauważmy na początku, że punkt równowagi określony równaniami

$$\frac{\partial V}{\partial q^j} = 0$$

A więc, w punkcie, w którym energia potencjalna przyjmuje wartość ekstremalną nie działają żadne siły na układ; jest zatem spełniony podstawowy warunek statyki.

Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć tak układ współrzędnych, ażeby początek jego znajdował się w położeniu równowagi. Po wychyleniu układu z tego położenia i po nadaniu mu prędkości początkowej, tzn. po zrealizowaniu warunków początkowych, obserwować będziemy ruch układu. Ruch ten jest reprezentowany przez ruch punktu w przestrzeni fazowej wzdłuż trajektorii fazowej. Jeżeli układ jest konserwa-

tywny, to jego pełna energia $T = E + V$ pozostaje stała. Zatem trajektoria fazowa leży na powierzchni o równaniu

$$\frac{1}{2} a^{ij} p_i p_j + V(q^1, q^2, \ldots, q^N_r) = \text{const} \qquad (8)$$

Stała po prawej stronie równania zależy od warunków początkowych, a więc od energii udzielonej układowi w chwili $t = 0$. Wychodząc z początku układu współrzędnych, gdzie znajduje się minimum energii potencjalnej i gdzie przyjmiemy $V(0, \ldots, 0) = 0$ obserwować będziemy powierzchnie zamknięte, zamykające coraz to większe obszary, homeomorficzne z kulą. Dokąd punkt trajektorii fazowej będzie poruszał się po powierzchni homeomorficznej z kulą, dotąd można mówić o stabilności układu w sensie Liapunowa. Widać, że biorąc najmniejszą z kul, w której znajduje się powierzchnia $T = \text{const}$ mamy pewność, że trajektoria fazowa nie oddali się bardziej od początku układu współrzędnych, jak na odległość równą promieniowi owej kuli. Można zatem w otoczeniu początku układu, współrzędnych, w którym energia potencjalna przyjmuje wartość minimum, znaleźć dla każdej kuli domkniętej taki obszar ograniczony powierzchnią $T = \text{const}$ warunków początkowych, że trajektoria wychodząca z niego pozostanie w czasie ruchu układu zawsze wewnątrz tej kuli. Jak widać układ zachowawczy skleronomiczny dla którego energia potencjalna przyjmuje wartość minimum jest układem stabilnym w sensie Liapunowa.

Łatwo zauważyć, że siły giaroskopowe nie mają wpływu na stabilność układu (nie zmieniają stanu energetycznego układu). Jeżeli na układ konserwatywny stabilny działają siły dyssypatywne to układ jest asymptotycznie stabilny.

Rzeczywiście w układzie tym maleje pełna energia T, a więc powierzchnia (18.9) "kurczy" się, a zatem trajektoria fazowa dąży do początku współrzędnych.

Należy zauważyć, że jeżeli w początku układu współrzędnych funkcja V przyjmie wartość maksimum, to układ konserwatywny jest niestabilny.

Niestabilność wynika z faktu, że powierzchni T = const nie można zamknąć w kuli o dowolnym promieniu.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na to, że w przypadku stabilności siły potencjalne po wychyleniu układu z położenia równowagi są zwrócone do punktu równowagi, a w przypadku gdy punkt równowagi nie jest stabilny, siły potencjalne mają charakter odpychający, tzn. są zwrócone od tego punktu na zewnątrz. Oczywiście wynika to stąd, że w obydwu przypadkach gradient pola potencjalnego ma inny zwrot.

3. Zagadnienie linearyzacji równań

Rozważać będziemy układy holonomiczne skleronomiczne. Dla tych układów będzie

$$\dot{q} = a^{ik} p_k, \tag{9a}$$

oraz

$$\dot{p}_k - Q_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial a^{jk}}{\partial q^i} p_j p_k - \frac{\partial V}{\partial q^i} \tag{9b}$$

Załóżmy w dalszym ciągu, że w początku układu współrzędnych energia potencjalna układu V posiada wartość minimum. Wiadomo na podstawie kryterium Lagrange'a - Dirichleta, że ten punkt jest punktem równowagi trwałej.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie małych drgań układu dokoła położenia równowagi.

W tej sytuacji równania ruchu można łatwo zlinearyzować ograniczając rozwinięcie funkcji $V(q^1, \ldots q^N)$ do wyrazów kwadratowych oraz przyjmują, że własności lokalne przestrzeni konfiguracyjnej w obszarze ruchu zmieniają się tak mało, że można uważać, że składowe tensora metrycznego w tym obszarze są stałymi.

W związku z tym równania ruchu przyjmą kształt

$$\dot{q}^i = a^{ik} p_k,$$
$$\dot{p}_i - Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}. \tag{9c}$$

Ponieważ

$$V = \frac{1}{2} C_{ik} q^i q^k,$$

a z pierwszego z równań wynika, że:

$$p_i = a_{ik} \dot{q}^k,$$

przeto można napisać

$$a_{ik} \ddot{q}^k + C_{ik} q^k = Q_i \tag{a}$$

Wydzielając z sił uogólnionych siły dyssypatywne określone przez funkcję Reileigha

$$R = \frac{1}{2} h_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k,$$

zmodyfikujemy układ równań (a). Jego ostateczna postać jest następująca

$$a_{ik} \ddot{q}^k + h_{ik} \dot{q}^k + C_{ik} q^k = Q_i \tag{10}$$

Macierze $[a_{ik}]$, $[h_{ik}]$ i $[C_{in}]$ są macierzami symetrycznymi o elementach stałych.

Załóżmy, że uogólnione siły Q_i są funkcjami czasu.

Równania (10) można przepisać w bardziej zwartej formie:

$$L_{ik}\, q^k = Q_i \tag{10a}$$

L_{in} jest macierzą symetryczną liniowych operatorów różniczkowych. Rozwiązanie w tym przypadku układu (10) może być dokonane np. metodą transformacji całkowych co prowadzi do wyniku

$$q^k = L^{ki}\, Q_i\, {}^{x)}, \tag{11}$$

gdzie L^{ki} jest również operatorem liniowym.

4. Opis zjawisk przypadkowych w układach dynamicznych

Zastosowanie metod statycznych do badań dynamiki układów stanowi jeden z najbardziej aktualnych problemów. Konieczność probabilistycznego potraktowania zagadnień dynamiki wynika z powszechnego występowania sygnałów przypadkowych, powodujących przypadkowe zmiany konfiguracji układu. Przykładami niedeterministycznych obciążeń mogą być (np. w układach mechanicznych) wymuszenia kinematyczne drgań pojazdów poruszających się po nierównej powierzchni, drgania budowli podczas trzęsień ziemi, drgania powłok wywołane źródłami akustycznymi itp.

We wszystkich tych przypadkach opis deterministyczny jest całkowicie nieadekwantny i musi być zastąpiony innym. Przypadki te należy uważać jako problem probabilistyczny, wymagający innego aparatu matematycznego, którego podstawy zawdzięczamy głównie pracom N. Wienera, A.J. Chinczyna, A.N. Kołmogorowa, M. Plancka, M. Loève.

---

x) $L^{ki}\, Q_i = \int_{-\infty}^{t} G^{ki}(t-\tau)\, Q_i(\tau)\, d\tau$

gdzie: $G^{ki}(t)$ jest impulsową funkcją przejścia układu z n "wejściami" i n "wyjściami".
Transformata Laplace'a tych funkcji tworzy macierz przejścia rozpatrywanego układu, a transformata Fouriera jest charakterystyką częstotliwością układu.

Metody probabilistyczne można w zasadzie podzielić na trzy grupy:

1° metody korelacyjne,
2° metody równań kinetycznych Fokkera-Planoka-Kołmogorowa,
3° metody quasi-statyczne.

W opracowaniu, ze względu na prostotę i stosunkowo dobre przybliżenie rzeczywistości ograniczono się do omówienia grupy pierwszej.

W oparciu o analizę korelacyjną można ustalić związki pomiędzy wartościami średnimi oraz momentami drugiego rzędu, pomiędzy wejściem a wyjściem układu.

Wiadomo, że proces posiada pełną charakterystykę probabilistyczną, o ile znane są wszystkie zgodne rozkłady gęstości prawdopodobieństwa; wtedy bowiem jest jednoznacznie określony operator uśredniania E dla momentów i funkcji korelacyjnych.

Wartość oczekiwaną procesu określa wyrażenie:

$$E\left[q^k(t)\right] = E\left[L^{ki}Q_i(t)\right]^{x)} \tag{12}$$

Założymy w naszych rozważaniach, że parametry strukturalne układu posiadają charakter deterministyczny. W związku z tym można napisać:

$$E\left[q^k(t)\right] = L^{ki}\, E\left[Q_i(t)\right] \tag{12a}$$

Bez naruszenia ogólności rozwiązań można tu założyć, że proces na wejściu posiada średnią równą zero.

---

x) Ogólnie wartość oczekiwaną funkcji wielu zmiennych losowych definiujemy następująco:

$$E\left[f(x_1,x_2,\ldots,x_M)\right] \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots x_M)\cdot$$

$$\cdot\, g(x_1,x_2,\ldots x_M,\, t_1,\ldots t_M)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_M$$

gdzie: $g(x_1,\ldots x_M,\, t_1,\ldots t_M)$ jest gęstością prawdopodobieństwa.

Macierz korelacyjną, dla tego procesu, definiuje się następująco:

$$K_{q^s q^r}(t_1,t_2) \overset{df}{=} E\left[q^s(t_1)\, q^r(t_2)\right].$$

Wiążąc macierze korelacyjne wejścia i wyjścia układu napiszemy:

$$E\left[q^s(t_1)\, q^r(t_2)\right] = E\left[L^{si}Q_i(t_1)\, L^{rj}Q_j(t_2)\right],$$

lub po wykorzystaniu twierdzenia Fubiniego o produktowaniu miar

$$E\left[q^s(t_1)\, q^r(t_2)\right] = L^{si}L^{rj}E\left[Q_i(t_1)Q_j(t_2)\right]. \qquad (13)$$

W ten sposób otrzymaliśmy prawo przejścia macierzy korelacyjnej przez rozpatrywany układ. Wzór (13) jest podstawą nie tylko do określenia macierzy korelacyjnej na wyjściu układu, umożliwia on również wyznaczenie średniego kwadratowego odchylenia procesu. Znajomość tego odchylenia jest ważna, gdyż na tej podstawie można określić prawdopodobieństwo przekroczenia wartości zadanej procesu. Problem znacznie się upraszcza gdy założy się normalność procesu.

N. Wiener i Chinczyn zaproponowali metody spektralne, które polegają na zastąpieniu macierzy korelacji $\mathbb{K}(t_1,t_2)$ przez macierz $\mathbb{S}(\omega_1, \omega_2)$ poprzez przekształcenie:

$$\mathbb{S}(\omega_1, \omega_2) = \iint\limits_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \mathbb{K}(t_1,t_2)e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}\cdot dt_1 dt_2$$

lub pisząc krócej

$$\mathbb{S}(\omega_1, \omega_2) = \mathfrak{F}\mathbb{K}(t_1,t_2) \qquad (14)$$

Nakładając operację J na wyrażenie (13) otrzymamy:

$$S_{q^s q^r}(\omega_1, \omega_2) = \mathfrak{J}\left[L^{si} L^{rj} E(Q_i Q_j)\right].$$

co po przekształceniach daje:

$$S_{q^s q^r}(\omega_1, \omega_2) = \bar{G}^{si}(i\,\omega_1)\,\bar{G}^{*}(i\,\omega_2)\,S_{Q_i Q_j}(\omega_1, \omega_2) \tag{15}$$

Znajomość macierzy $\mathbb{S}(\omega_1\ \omega_2)$ jest podstawą do określenia poszukiwanej macierzy korelacyjnej. W tym celu należy na (14) wykonać operacje odwrotną. I tak

$$\mathbb{K}(t_1, t_2) = J^{-1}\,\mathbb{S}(\omega_1, \omega_2) \tag{16}$$

Operator J^{-1} jest następujący:

$$J^{-1} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\ldots)e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}d\,\omega_1 d\,\omega_2 \tag{16a}$$

Zaprezentowana metoda spektralna jest bardzo ogólna. Zawiera więc w sobie procesy różnych typów. Mamy tu na myśli procesy niestacjonarne jak i stacjonarne. Te ostatnie stanowią klasę mniej ogólną. Przypominamy, że procesem stacjonarnym w szerszym sensie nazywamy taki proces dla którego macierz korelacyjna zależy tylko od różnicy czasów $t_1 - t_2$.

Na zakończenie tego ustępu przypominamy jeszcze, że istnieją również procesy dla których średnie po przestrzeni probabilistycznej można zastępować średnimi liczonymi po czasie. Takie procesy nazywamy ergodycznymi. W przypadku przyjęcia hipotezy możemy średnie znajdować na podstawie znajomości tylko jednej realizacji otrzymanej np. z doświadczenia. Stąd też hipoteza ta ma ważny aspekt praktyczny.

5. Zagadnienie probabilistyczne układu o stałych rozłożonych

Problem ten przedstawimy podając reprezentatywny przykład. Niech będzie dana płyta prostokątna o wymiarach axb i sztywności zginania D.

Równanie różniczkowe drgań płyty jest następujące:

$$D\Delta\Delta W + \varkappa \frac{\partial W}{\partial t} + \varrho\delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z(x,y,t) \tag{17}$$

gdzie

δ - grubość płyty,
W - ugięcie płyty,
ϱ - gęstość materiału płyty,
Z(x,y,t) - obciążenie przypadkowe działające na płytę,
$\varkappa$ - współczynnik określający tłumienie drgań układu.

Załóżmy, że płyta jest zamocowana przegubowo na brzegach. Rozwiązania w tym przypadku można poszukiwać w formie:

$$W(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{18}$$

Podstawiając proponowane rozwiązanie do równania różniczkowego ruchu i wykorzystując ortogonalność funkcji własnych otrzymamy:

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 W_{mn}(t) + \varkappa \frac{dW_{mn}(t)}{dt} + A\delta \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt} = Z_{mn}(t) \tag{19}$$

gdzie

$$Z_{mn}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b z(x,y,t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dxdy$$

Wykonując następnie na równaniu (19) transformację Fouriera dostajemy:

$$\bar{W}_{mn}(i\omega) = \bar{G}_{mn}(i\omega)\ \bar{Z}_{mn}(i\omega)^{x)}$$

Retransformując wynik napiszemy:

$$W_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_{mn}(t-\tau)\ Z_{mn}(\tau)d\tau$$

A zatem

$$W(x,y,t) =$$

$$= \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} G_{mn}(t-\tau)\ Z(x,y,\tau)\ \sin\frac{m\pi x}{a}x\right.$$

$$\left. x\ \sin\frac{n\pi y}{b}\ d\tau\ dxdy\right]\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (20)$$

Na podstawie rozwiązania (20) wyznaczymy funkcje Greena.
W tym celu położymy

$$Z(x,y,\tau) = \delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta)\ \delta(\tau).$$

Tu δ oznacza dystrybucję Diraca.
Zatem funkcja wpływu Greena wyrazi się wzorem

$$W^{(1)}(x,y,\xi,\eta,t) =$$

$$= \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}(t)\ \sin\frac{m\pi\xi}{a}\ \sin\frac{n\pi\eta}{b}\ \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (21)$$

---

x) Nie należy sumować po m i n.

Rozwiązanie wyrażone przez funkcję wpływu można zapisać następująco:

$$w(x,y,t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} w^{(1)}(x,y,\xi,\eta,t-\tau)z(\xi,\eta,\tau)d\xi\, d\eta\, d\tau \quad (22)$$

Rozwiązanie to jest bardzo wygodne do dalszej dyskusji problemu probabilistycznego.

Chcąc obliczyć dyspersję ugięć należy określić następującą średnią

$$E\left[(w(x,y,t))^2\right] = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} w^{(1)}(x,y,\xi_1,\eta_1,t-\tau_1)\, x$$

$$x\, w^{(1)}(x,y,\xi_2,\eta_2,t-\tau_2)\, x$$

$$x\, E\left[z(\xi_1,\eta_1,\tau_1).z(\xi_2,\eta_2,\tau_2)\right] d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \quad (23)$$

Jak zauważamy zakłada się deterministyczny charakter parametrów strukturalnych układu.

Okazuje się, że wprowadzenie funkcji wpływu jest bardzo wygodne i dlatego ten sposób przedstawienia rozwiązania został podkreślony.

Dokonując przeglądu metod i wskazując na kolejność rozważań należy podkreślić trudności na jakie napotyka się w określaniu średniego kwadratowego odchylenia od średniej na wyjściu układu. Zagadnienie komplikuje się z racji trudności całkowania, które tu występuje. Zagadnienie jest szczególnie uciążliwe zwłaszcza w przypadkach kiedy sygnał wejściowy jest niestacjonarny [24].

Sygnał wyjściowy jest wtedy również niestacjonarny. Ale nie tylko wtedy. W przypadku zaburzenia układu procesem stacjonarnym możemy uzyskać odpowiedź niestacjonarną na skutek skończonego czasu działania zaburzenia [6].

LITERATURA

[1] Babakow I.M. - Teorija kolebanij - Moskwa 1958.

[2] Banach S. - Mechanika - PWN Warszawa 1956.

[3] Bołotin W.W. - Statisticzeskie mietody w stroitielnoj mechanikie, Striizdat, Moskwa 1965.

[4] Bułgarow B.W. - Kolebanija - Moskwa 1954.

[5] Crandall S.H. (ed), - Random vivration vol. 2 MIT press, 1963.

[6] Czogała E. - O reakcji pewnych układów mechanicznych o stałych rozłożonych na wymuszenia przypadkowe (praca doktorska) maszynopis Politechnika Śl., Gliwice 1969.

[7] Gantmacher F.R. - Lekcji po analiticzeskoj mechanikie - Moskwa Fizmatgiz 1960.

[8] Gichman I.I., Skorochod A.W. - Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[9] Komitet Elektrotechniki PAN Dynamika układów elektromechanicznych. Praca zbiorowa - PWN Warszawa 1963.

[10] Landau L., Lifszic E. - Mechanika - Moskwa 1958.

[11] Loeve M. - Probability theory, Van Nostrand Co, Chapt X.

[12] La Salle and Lefschetz - Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York and London, 1961.

[13] Łojejańskij L.G., Łurie A.I. - Kurs teoreticzeskoj mechaniki tom I i II. Moskwa 1955.

[14] Maxwell C.,- A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford 1873.

[15] Nikołajenko N.A. - Wierojatnostnyje mietody dinamiczeskogo rasczeta maszynostroitielnych konstrukcji, Izd. Maszinostrojenie M., 1967.

[16] Pugaczew W.W. - Tieorija słuczajnych funkcji i jeje priłożenije k zadaczam awtomaticzeskogo uprawlenija, Fizmatgiz M 1962.

[17] Romanienko A.F., Siergiejew G.D. - Woprosy prikładnego analiza słuczajnych procesow. Izdat. "Sowietskoje radio" Moskwa 1968.

[18] Rosemblatt M. - Procesy stochastyczne, PWN Warszawa 1967.

[19] Skalmierski B., Czogała E. - O pewnym problemie niestacjonarnych drgań powłok pod wpływem obciążeń przypadkowych. Rozprawy Inż. 2. 1969.

[20] Skalmierski B. - Kinematyka i dynamika dla automatyków, Politechnika Śląska skrypt uczelniany Nr 224, Gliwice 1968.

[21] Skalmierski B. - Dynamika układów mechanicznych, skrypt uczelniany, Gliwice, 1969.

[22] Susłow G.K. - Teoreticzeskaja mechanika - Gostichzdat 1946.

[23] Synge J.L., Schild A. - Tensor calculus - Toronto 1959.

[24] Tylikowski A. - Niestacjonarne procesy w układach mechanicznych wywołane pewnymi zaburzeniami losowymi (praca doktorska) maszynopis. Politechnika Śl. Gliwice 1969.

[25] Wiener N. - Kibernetik (przekład z ang.), M., Sowietskoje radio" 1958.

[26] Whittaker E.T. - Dynamika analityczna - PWN Warszawa 1959.