ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 14 Nr kol. 267

Mgr inż. Jerzy Klamka
Katedra Automatyki
Procesów Przemysłowych

2.1. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW PODSTAWOWYCH ELEMENTÓW AUTOMATYKI

Streszczenie: W pracy przedstawiono zastosowanie metody identyfikacji polegającej na minimalizacji odległości pomiędzy zbiorami sygnałów do identyfikacji parametrów elementu inercyjnego pierwszego rzędu i elementu inercyjnego drugiego rzędu. Omówiono techniczną stronę organizacji eksperymentu identyfikacji przy zastosowaniu maszyny cyfrowej. Sprecyzowano wnioski dotyczące dokładności identyfikacji.

1. Metoda identyfikacji

Do identyfikacji elementu inercyjnego pierwszego rzędu i elementu inercyjnego drugiego rzędu zastosowano metodę minimalizacji odległości pomiędzy zbiorami sygnałów [1]. W metodzie tej zakłada się a priori strukturę obiektu, a problem identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia na podstawie eksperymentu, numerycznych wartości współczynników założonego modelu matematycznego obiektu. Identyfikacja realizowana jest według algorytmu minimalizującego odległość pomiędzy zbiorem sygnałów wejściowych i zbiorem sygnałów wyjściowych w sensie błędu średnio kwadratowego [2]. Przy założeniu liniowej zależności pomiędzy wektorem sygnałów wejściowych X i wektorem sygnałów wyjściowych Y tzn. gdy zachodzi relacja: $Y = K \cdot X$ (1), gdzie K jest macierzą oraz przy przyjęciu odległości typu euklidesowego, algorytm identyfikacji ma postać |1|:

$$K_{opt} = \left[(X_m^T X_m)^{-1} X_m^T Y_m\right]^T \qquad (2)$$

gdzie

$$X_m = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N^T \end{bmatrix} \qquad Y_m = \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N^T \end{bmatrix} \qquad \text{są macierzami pomiarowymi} \tag{3}$$

przy serii pomiarowej sygnałów wejściowych $E(X) = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ oraz serii pomiarowej sygnałów wyjściowych $E(Y) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$.

2. Identyfikacja elementu inercyjnego pierwszego rzędu:

Modelem matematycznym elementu inercyjnego pierwszego rzędu jest liniowe równanie różniczkowe postaci:

$$y(t) = kx(t) - Ty^{(1)}(t) \tag{4}$$

lub w formie macierzowej

$$Y = KX \tag{5}$$

gdzie:

$$K = \begin{bmatrix} k, -T \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y^{(1)}(t) \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

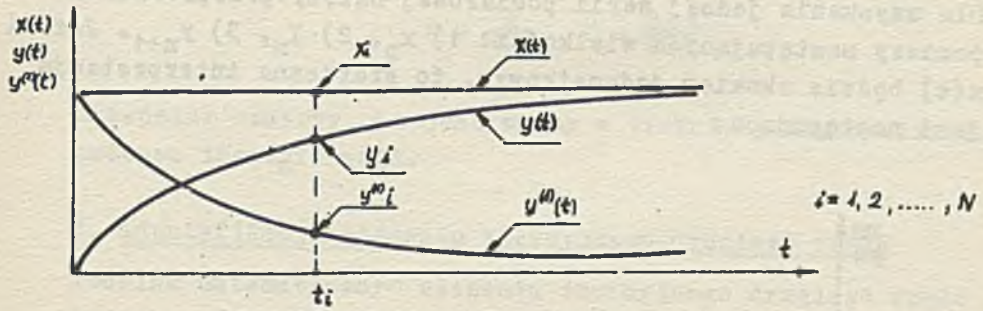
Problem identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia numerycznych wartości współczynników "k" oraz "T" przy pomocy serii pomiarów. Dla uzyskania jednej serii pomiarowej, należy w tej samej chwili czasowej t_i dokonać pomiaru trzech wielkości:

1) sygnału $x(t_i)$,
2) sygnału $y(t_i)$,
3) sygnału $y(1)(t_i)$.

Na podstawie tych pomiarów można zbudować wektory pomiarowe X_i oraz Y_i, a następnie macierze pomiarowe X_m, oraz Y_m według relacji:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_1, & y_1^{(1)} \\ x_2, & y_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x_N, & y_N^{(1)} \end{bmatrix} \qquad Y_m = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \tag{7}$$

Jeżeli sygnał x(t) będzie skokiem jednostkowym, to graficzna interpretacja jest następująca:



Rys. 1. Graficzna interpretacja identyfikacji elementu inercyjnego pierwszego rzędu z możliwością pomiaru pochodnej

Elementy macierzy K_{opt} wyznacza się z relacji (2), co daje bezpośrednio wartości numeryczne k, oraz T.

W przypadku gdy pomiar pochodnej $y^{(1)}(t)$ jest ze względów technicznych niemożliwy, stosujemy przybliżenie:

$$y^{(1)}(t) = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \tag{8}$$

gdzie: $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ (9)

Podstawiając (8) do (4) otrzymujemy równanie różnicowe

$$y_n = \frac{k\,\Delta t}{\Delta t - T}\,x_n + \frac{T}{T-\Delta t}\,y_{n+1} \tag{10}$$

Równanie (10) można zapisać w formie macierzowej:

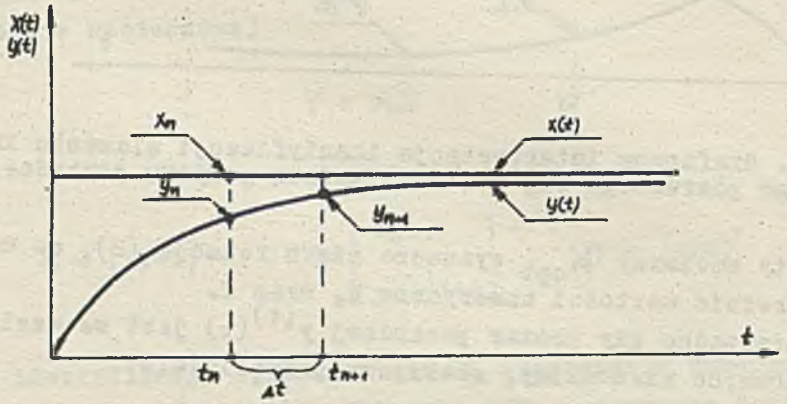
$$Y = KX \tag{11}$$

gdzie:

$$K = [A,B] = \left[\frac{k\,\Delta t}{\Delta t - T},\ \frac{T}{T-\Delta t}\right]$$

$$Y = [y_n] \qquad X = \begin{bmatrix} x_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dla uzyskania jednej serii pomiarowej należy przeprowadzić pomiary następujących wielkości: 1) x_n, 2) Y_n, 3) y_{n+1}. Jeżeli x(t) będzie skokiem jednostkowym, to graficzna interpretacja jest następująca:



Rys. 2. Graficzna interpretacja identyfikacji elementu inercyjnego pierwszego rzędu bez pomiaru pochodnej

Macierze pomiarowe X_m oraz Y_m zbudowane według relacji (3) będą miały postać:

$$Y_m = \begin{bmatrix} y_{n,1} \\ y_{n,2} \\ \vdots \\ y_{n,N} \end{bmatrix} \qquad X_m = \begin{bmatrix} x_{n,1}, & y_{n+1,1} \\ x_{n,2}, & y_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n,N}, & y_{n+1,N} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Po wyznaczeniu elementów macierzy K_{opt} z relacji (2) i rozwiązaniu układu równań otrzymamy szukane parametry k oraz T, które wyrażą się wzorami:

$$k = \frac{A}{1-B} \qquad T = \frac{B\Delta t}{B-1} \tag{14}$$

Przedział czasowy Δt jest znany w trakcie przeprowadzania procesu identyfikacji.

3. Identyfikacja elementu inercyjnego drugiego rzędu

Modelem matematycznym elementu inercyjnego drugiego rzędu jest liniowe równanie różniczkowe postaci:

$$y(t) = kx(t) - (T_1 + T_2)y^{(1)}(t) - T_1T_2\, y^{(2)}(t) \tag{15}$$

lub w formie macierzowej $Y = KX$

(16)

gdzie:

$$K = [A,B,C] = [k,-(T_1+T_2),-T_1T_2] \tag{17}$$

$$Y = [y(t)] \qquad X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

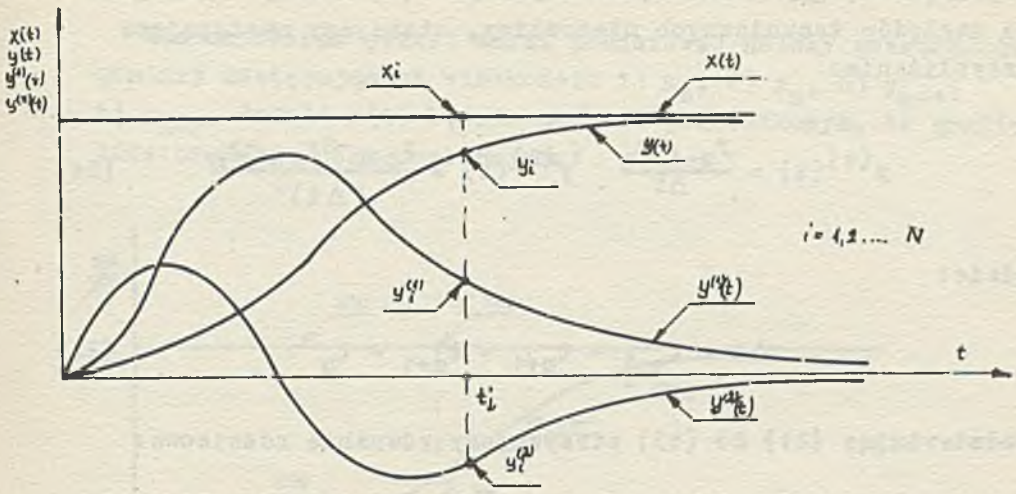
Problem identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia numerycznych wartości współczynników k, T_1, T_2 przy pomocy serii pomiarów. Dla uzyskania jednej serii pomiarowej, należy w tej samej chwili czasowej t_1 dokonać pomiaru czterech wielkości:

1) sygnału $x(t_1)$,
2) sygnału $y(t_1)$,
3) sygnału $y^{(1)}(t_1)$,
4) sygnału $y^{(2)}(t_1)$.

Na podstawie tych pomiarów można zbudować wektory pomiarowe X_1 oraz Y_1, a następnie macierze pomiarowe X_m oraz Y_m według realcji

$$X_m = \begin{bmatrix} x_1, & y_1^{(1)}, & y_1^{(2)} \\ x_2, & y_2^{(1)}, & y_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N, & y_N^{(1)}, & y_N^{(2)} \end{bmatrix} \qquad Y_m = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \tag{18}$$

Jeżeli sygnał x(t) będzie skokiem jednostkowym, to graficzna interpretacja jest następująca:



Rys. 3. Graficzna interpretacja identyfikacji elementu inercyjnego drugiego rzędu z możliwością pomiaru pochodnych

Elementy macierzy K_{opt} wyznacza się z relacji (2), a po rozwiązaniu układu równań otrzymuje się parametry k, T_1, T_2, które wyrażają się wzorami: k = A

$$T_1 = \frac{-B-\sqrt{B^2+4C}}{2} \qquad T_2 = \frac{-B+\sqrt{B^2+4C}}{2} \tag{19}$$

przy czym:

$$B^2 + 4C = (T_1 - T_2)^2 \geqslant 0 \tag{20}$$

Ponieważ układ równań, z którego wyznacza się parametry T_1, T_2 jest symetryczny ze względu na T_1 oraz T_2 więc otrzymane dwie pary rozwiązań T_1^1, T_2^1 oraz T_1^2, T_2^2 są również symetryczne tzn. $T_1^1 = T_2^2$; $T_1^2 = T_2^1$.
Wynika stąd, że rozwiązaniem może być zarówno para T_1^1, T_2^1, jak i para T_1^2, T_2^2. Jest to zgodne z założonym modelem matematycznym obiektu, który jest symetryczny ze względu na parametry T_1 oraz T_2.

W przypadku, gdy pomiar pochodnych $y^{(1)}(t)$ oraz $y^{(2)}(t)$ jest ze względów technicznych niemożliwy, stosujemy następujące przybliżenia:

$$y^{(1)}(t) = \frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} \qquad y^{(2)}(t) = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{(\Delta t)^2} \tag{21}$$

gdzie:

$$\Delta t = t_{n+2} - t_{n+1} = t_{n+1} - t_n \tag{22}$$

Podstawiając (21) do (15) otrzymujemy równanie różnicowe:

$$x_n = \frac{T_1T_2+(\Delta t)^2-\Delta t(T_1+T_2)}{k(\Delta t)^2}\, y_n + \frac{\Delta t(T_1+T_2)-2\,T_1T_2}{k(\Delta t)^2}\, y_{n+1} + \frac{T_1T_2}{k(\Delta t)^2}\, y_{n+2} \tag{23}$$

Równanie (23) można zapisać w formie macierzowej:

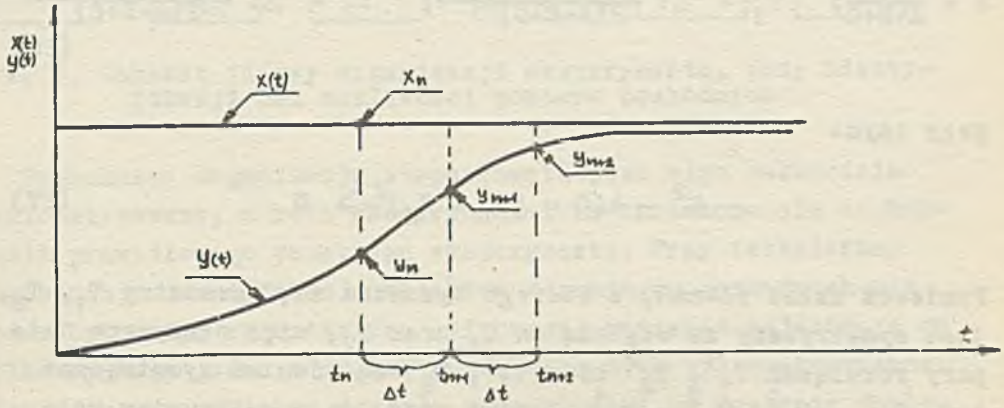
$$Y = KX \tag{24}$$

gdzie:

$$K = [A,B,C] = \left[\frac{T_1T_2+(\Delta t)^2-\Delta t(T_1+T_2)}{k(\Delta t)^2},\ \frac{\Delta t(T_1+T_2)-2T_1T_2}{k(\Delta t)^2},\ \frac{T_1T_2}{k(\Delta t)^2}\right]$$

$$Y = [x_n] \qquad X = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix}$$

Dla uzyskania jednej serii pomiarowej należy przeprowadzić pomiary następujących wielkości: 1) x_n, 2) y_n, E) y_{n+1}, 4) y_{n+2}. Jeżeli x(t) będzie skokiem jednostkowym, to graficzna interpretacja jest następująca:



Rys. 4. Graficzna interpretacja identyfikacji elementu inercyjnego drugiego rzędu bez pomiaru pochodnych

Macierze pomiarowe X_m oraz Y_m zbudowane według realcji (3) będą miały postać:

$$Y_m = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,N} \end{bmatrix} \qquad X_m = \begin{bmatrix} y_{n,1}, & y_{n+1,1}, & y_{n+2,1} \\ y_{n,2}, & y_{n+1,2}, & y_{n+2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n,N}, & y_{n+1,N}, & y_{n+2,N} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Elementy macierzy K_{opt} wyznacza się z relacji (2), a następnie po rozwiązaniu układu równań otrzymuje się parametry k, T_1, T_2, które wyrażają się wzorami:

$$k = \frac{1}{A+B+C}; \quad T_1 = \Delta t \frac{B+2C+\sqrt{B^2-4AC}}{2(A+B+C)}; \quad T_2 = \Delta t \frac{B+2C-\sqrt{B^2-4AC}}{2(A+B+C)} \tag{26}$$

przy czym:

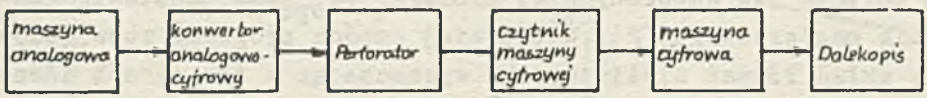
$$B^2 - 4AC = (T_1 - T_2)^2 \geqslant 0 \tag{27}$$

Ponieważ układ równań, z którego wyznacza się parametry T_1, T_2, jest symetryczny ze względu na T_1 oraz T_2, więc otrzymane dwie pary rozwiązań T_1^1, T_2^2 oraz T_1^2, T_2^2 są również symetryczne tzn. $T_1^1 = T_2^2$; $T_1^2 = T_2^1$. Wynika stąd, że rozwiązaniem może być zarówno para T_1^1, T_2^1, jak i para T_1^2, T_2^2. Jest to zgodne z założonymi modelem matematycznym, który jest symetryczny, ze względu na parametry T_1 oraz T_2.

4. Organizacja eksperymentu

Organizacja eksperymentu jest zależna od tego, czy identyfikację przeprowadzamy bez możliwości pomiaru pochodnych, czy też z pomiarem pochodnych. Przy identyfikacji bez możliwości pomiaru pochodnych, techniczna organizacja eksperymentu jest następująca: identyfikowane obiekty zostały zamodelowane na maszynie analogowej, a sygnały analogowe wejścia i wyjścia były podawane na wielokanałowy rejestator cyfrowy, składający się z konwertora analogowo-cyfrowego i perforatora. Po zamianie sygnału z postaci analogowej na sygnał w postaci cyfrowej, następuje przesłanie sygnału cyfrowego do perforatora, na wyjściu którego otrzymuje się wyniki na taśmie perforowanej. Taśma z perforatora, bez żadnych dodatkowych obróbek może być użyta jako dane wejściowe do maszyny cyfrowej, która na podstawie odpowiedniego programu wylicza identyfikowane parametry

obiektu. Schemat ideowy organizacji eksperymentu jest następujący:



Rys. 5. Schemat ideowy organizacji eksperymentu, przy identyfikacji bez możliwości pomiaru pochodnych

Techniczna organizacja eksperymentu jest więc całkowicie zautomatyzowana, a rola eksperymentatora ogranicza się do kontroli prawidłowego przebiegu eksperymentu. Przy technicznej organizacji identyfikacji obiektów z pomiarem pochodnych nie można było użyć rejestratora cyfrowego, ponieważ rejestruje on tylko sygnały jednego znaku, a pochodne mogą być znakozmienne. Identyfikowane obiekty zostały zamodelowane na maszynie analogowej, a sygnały analogowe wejścia, wyjścia i odpowiednich pochodnych wyjścia były podawane na wielokanałowy rejestrator analogowy. Po zarejestrowaniu sygnałów na taśmie w postaci wykresów, potrzebne wyniki pomiarów odczytywano przy użyciu specjalnej linijki uwzględniającej przesunięcie poszczególnych wykresów w osi czasu. Odczytane wyniki wprowadzono do maszyny cyfrowej, która na podstawie odpowiedniego programu wylicza identyfikowane parametry obiektu. Schemat ideowy organizacji eksperymentu jest następujący:

Rys. 6. Schemat ideowy organizacji eksperymentu, przy identyfikacji z pomiarem pochodnych

W zakres technicznej organizacji eksperymentu wchodzi także opracowanie odpowiednich programów dla maszyny cyfrowej. Struktura programów dla identyfikacji z możliwością pomiaru pochodnych, jak i bez możliwości pomiaru pochodnych jest po-

dobna i składa się z trzech zasadniczych części. Pierwsza część służy do odpowiedniego wczytania danych bezpośrednio z taśmy perforowanej z rejestratora cyfrowego. W drugiej części programu oblicza się współczynniki macierzy K_{opt} na podstawie równania macierzowego (2). W trzeciej części programu rozwiązuje się układ równań nieliniowych, wyznaczając w ten sposób identyfikowane parametry obiektu.

5. Wyniki pomiarów

Przy identyfikacji elementu inercyjnego pierwszego rzędu i elementu inercyjnego drugiego rzędu jako sygnału wejściowego użyto skoku jednostkowego zniekształconego celowo przypadkowymi zakłóceniami. Zamodelowany na maszynie analogowej element inercyjny pierwszego rzędu posiadał parametry: wzmocnienie $k_0 = 10$; stała czasowa $T_0 = 100$ sek. Na wykresach podano błędy obliczone według relacji:

$$\Delta_k\% = \frac{(k-k_0)}{k_0} \cdot 100\% \qquad \Delta_T\% = \frac{(T-T_0)}{T_0} \cdot 100\%$$

gdzie: k, T są zidentyfikowanymi parametrami obiektu.
N - oznacza ilość serii pomiarowych.

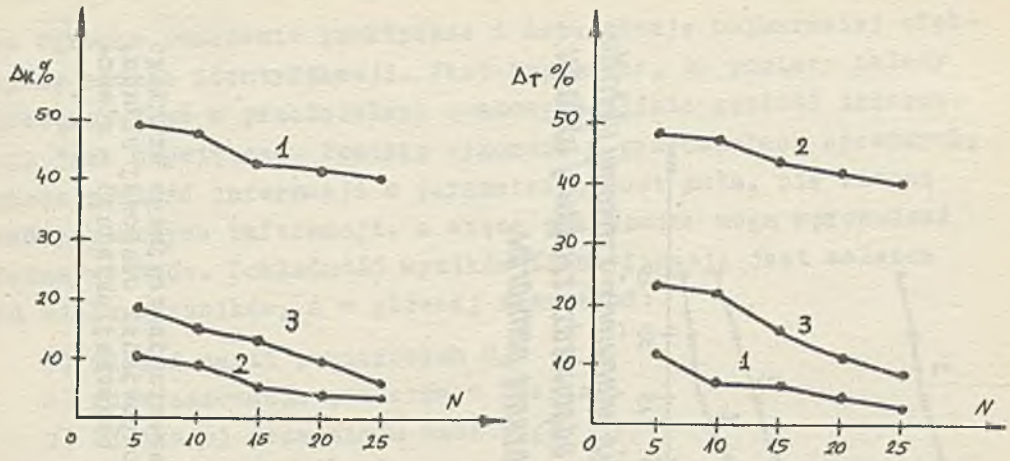
Element inercyjny drugiego rzędu zamodelowany na maszynie analogowej posiadał parametry: $k_0 = 10$; $T_{10} = 50$ sek; $T_{20} = 25$ sek;

Na wykresach podano błędy obliczone według relacji:

$$\Delta_k\% = \frac{(k-k_0)}{k_0} \cdot 100\%; \qquad \Delta_{T_1}\% = \frac{(T_1-T_{10})}{T_{10}} \cdot 100\%;$$

$$\Delta_{T_2}\% = \frac{(T_2-T_{20})}{T_{20}} \cdot 100\%$$

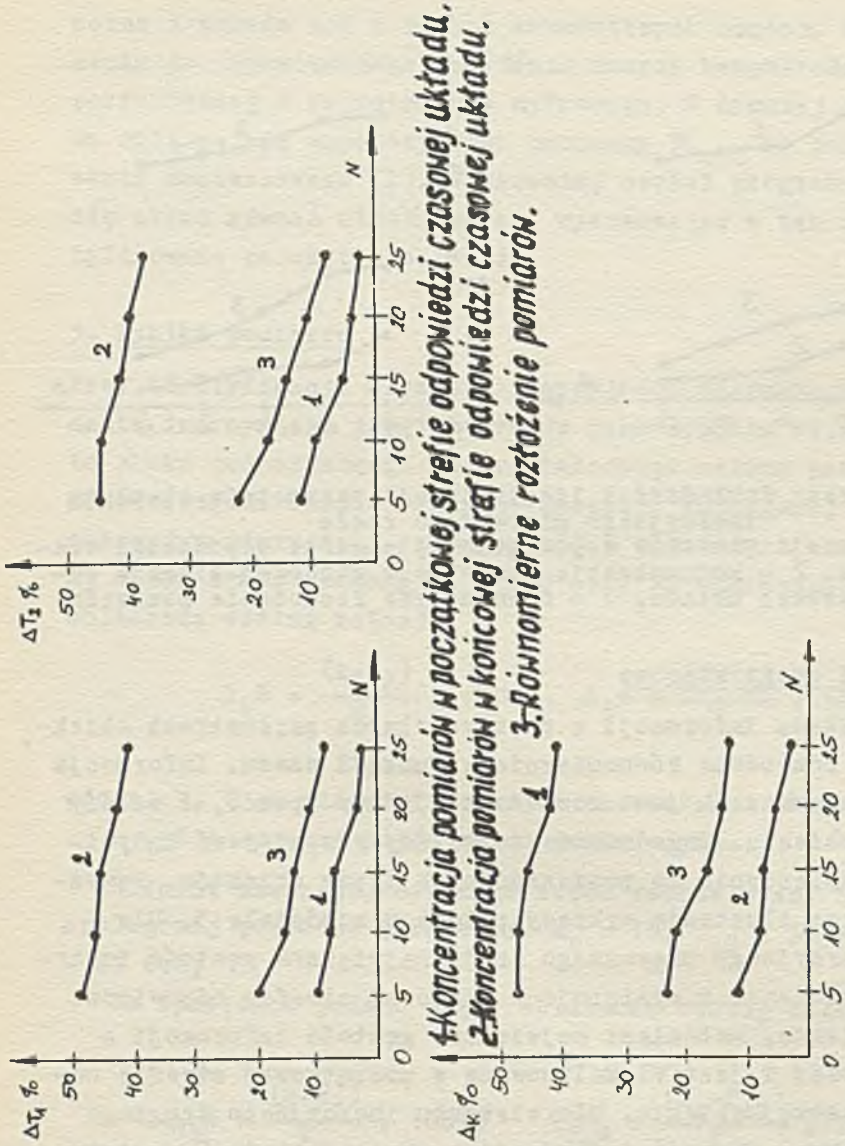
gdzie: k, T_1, T_2, są zidentyfikowanymi parametrami obiektu.
N - oznacza ilość serii pomiarowych.



Rys. 7. Wykresy dokładności identyfikacji parametrów elementu inercyjnego pierwszego rzędu
1 - koncentracja pomiarów w początkowej strefie odpowiedzi czasowej układu, 2 - koncentracja pomiarów w końcowej strefie odpowiedzi czasowej układu, 3 - równomierne rozłożenie pomiarów

6. Wnioski i uwagi końcowe

Gęstość rozkładu informacji o poszczególnych parametrach obiektu nie jest rozłożona równomiernie w funkcji czasu. Informacja o różnych parametrach jest rozłożona w różny sposób, i zależy od rodzaju obiektu. Zagadnienie to należy rozpatrywać indywidualnie w odniesieniu do poszczególnych typów obiektów. Powyższy fakt dobrze ilustrują wykresy podane w rozdziale 5. Dla elementu inercyjnego pierwszego rzędu największa gęstość informacji o wzmocnieniu k występuje w końcowej strefie odpowiedzi czasowej obiektu, natomiast największa gęstość informacji o stałej czasowej T jest zlokalizowana w początkowej strefie odpowiedzi czasowej obiektu. Dla elementu inercyjnego drugiego rzędu największa gęstość informacji o wzmocnenieniu k występuje w końcowej strefie odpowiedzi czasowej obiektu, natomiast największa gęstość informacji o stałych czasowych T_1, T_2 jest zlokalizowana w początkowej strefie odpowiedzi czasowej obiektu, ale w większym przedziale niż to miało miejsce dla elementu inercyjnego pierwszego rzędu. Fakt, że gęstość informacji o poszczególnych parametrach jest rozłożona nierównomiernie



Rys. 8. Wykresy dokładności identyfikacji parametrów elementu inercyjnego drugiego rzędu: 1 – koncentracja pomiarów w początkowej strefie odpowiedzi czasowej układu, 2 – koncentracja pomiarów w końcowej strefie odpowiedzi czasowej układu; 3 – równomierne rozłożenie pomiarów

ma ogromne znaczenie praktyczne i determinuje najbardziej efektywny sposób identyfikacji. Jest oczywiste, że pomiary należy przeprowadzać w przedziałach czasowych, gdzie gęstość informacji jest największe. Pomiary wykonane w przedziałach czasowych, gdzie gęstość informacji o parametrach jest mała, nie wnoszą żadnych nowych informacji, a wręcz przeciwnie mogą wprowadzać fałszywe dane. Dokładność wyników identyfikacji jest zależna od wielu czynników, a w głównej mierze od:

1) ilości serii pomiarowych N,
2) rozmieszczenia pomiarów w czasie,
3) wielkości przedziału czasowego Δt,

Ad. 1. Zwiększenie ilości serii pomiarowych N poprawia dokładność uzyskiwanych wyników, co zostało potwierdzone eksperymentalnie. Problem ten wiąże się ściśle z zagadnieniem reprezentatywności próbki pomiarowej [3].

Ad 2. Rozmieszczenie pomiarów w przedziałach, gdzie gęstość informacji o parametrach jest największa, zwiększa wydatnie dokładność otrzymywanych rezultatów identyfikacji.

Ad. 3. W przypadku identyfikacji bez możliwości pomiaru pochodnych istotną rolę gra dobór przedziału czasowego Δt, będącego odstępem czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami w serii pomiarowej. Skrócenie przedziału czasowego, ale tylko do pewnej wartości, polepsza dokładność wyników, gdyż powoduje to lepsze przybliżenie wartości pochodnych sygnałów przez przyrosty skończone. Z drugiej strony przedziału czasowego Δt nie można zmniejszać nieograniczenie, ze względu na ograniczoną czułość rejestratora cyfrowego. Jak z tego wynika, można dobrać optymalną wartość przedziału czasowego Δt, przy której dokładność identyfikacji będzie największa.

Metoda identyfikacji bez możliwości pomiaru pochodnych sygnałów jest metodą bardziej korzystną z punktu widzenia zastosowania jej w praktyce przemysłowej, od metody identyfikacji z pomiarem pochodnych sygnałów. Fakt, że pomiar pochodnych sygnałów nie jest konieczny bardzo upraszcza część pomiarową eksperymentu identyfikacji, a zastosowanie wielokanałowych re-

jestratorów cyfrowych pozwala na zautomatyzowanie przebiegu całego eksperymentu identyfikacji.

Metoda ta może znaleźć zastosowanie w praktyce przemysłowej.

LITERATURA

[1] Węgrzyn S., Denis G., Delisle J. - L' identification par minimalisation des destances. Sherbrocke 1967 r.

[2] Węgrzyn S. - Podstawy automatyki kompleksowej. Prace Instytutu Automatyki PAN zeszyt 81. Warszawa 1968 r.

[3] Klamka J. - Identyfikacja obiektów liniowych. Katedra Teorii Regulacji Politechniki Śląskiej. Gliwice, 1968 r. Praca dyplomowa.