ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 14 Nr kol. 267

Mgr inż. Krzysztof Nałęcki
Katedra Teorii Regulacji

2.2. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW INERCJI PIERWSZEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM

1. Wstęp

Problem identyfikacji parametrów obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem jest dość ciekawy, gdyż powszechnie stosuje się aproksymację obiektów wysokiego rzędu takim właśnie modelem. Obiekt taki jest charakteryzowany 3 parametrami: wzmocnieniem (k), stałą czasu (T), opóźnieniem (czasem opóźnienia) (S) [2].

Problem identyfikacji parametrów, w postaci najogólniejszej, polega na optymalnym określeniu numerycznych wartości współczynników w równaniach stanowiących proponowany model matematyczny badanego obiektu, na podstawie odpowiednio licznego zbioru pomiarów wielkości charakteryzujących zachowanie się tego obiektu. Wspomniany zbiór pomiarów to wyniki eksperymentu. Optymalność jest przy tym rozumiana w sensie pewnego, założonego z góry, kryterium jakości aproksymacji pewnym modelem danego obiektu na znanym zbiorze pomiarów. Efektem identyfikacji paramentrów jest pewien zbiór uporządkowany numerycznych wartości współczynników modelu.

W niniejszej pracy jako kryterium jakości przyjęto odległość między zbiorami sygnałów [1].

2. Model obiektu

Model różniczkowy

$$T \cdot \dot{y} + y = k \cdot x\,(t - S) \tag{2.1}$$

równoważna postać całkowa wzoru (2.1)

$$y(t) = y_0 \times \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + \frac{k}{T}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{T}\right) \cdot x\,(s - S)\, ds \qquad (2.2)$$

Oznaczając Q - kwant czasu oraz

$$t = n \times Q + s; \qquad S = N \times Q$$

przy założeniu, że $x(kQ + s) = x_k$ $s \in (0; Q)$
mamy

$$y(nQ+s) = y_n \exp\left(-\frac{s}{T}\right) + \frac{k.X_{n-N}}{T}\int_0^S \exp\left(-\frac{s}{T}\right) ds \qquad (2.3)$$

i dla s = Q otrzymujemy model dyskretny

$$Y_{n+1} = Y_n \times D + X_{n-N} \times E \qquad (2.4)$$

gdzie:

$$D = \exp(-Q/T)$$
$$E = k\,(1 - D)$$

Otrzymany model (2.4) podlega identyfikacji metodą minimalizacji odległości kwadratowej [1].

3. Algorytm identyfikacji

Oznaczając przez y_n wyjście obiektu a przez y_n^* wyjście modelu i odpowiednio zbiory pomiarowe Y i Y* mamy odległość między nimi

$$d^2(Y/Y^*) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} (y_{n+i} - y_{n+i}^*)^2 \qquad (3.1)$$

Uwzględniając w powyższym związku równanie modelu (2.4) oraz oznaczając

$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_i b_{i+n} = R_{ab}(n)$. Funkcja korelacji wzajemnej ciągów $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$

otrzymamy

$$d^2(Y/Y^*) = R_{yy}(0)(1+D^2) + E^2 R_{xx}(0) - 2D R_{yy}(1) + \\ - E\left[R_{xy}(N+1) - D R_{xy}(N)\right] \qquad (3.2)$$

Przy tym założono dodatkowo, że ciągi $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ są stacjonarnymi ciągami przypadkowymi.

Poszukiwane minimum odległości, określonej wzorem (3.2), ze względu na parametry modelu dyskretnego D, E i N można przeprowadzić w sposób następujący [2].

I. Dla podanych ciągów $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ wyznaczyć funkcję korelacji wzajemnej $R_{xy}(q)$ dla q z zadanego a priori przedziału spodziewanych czasów opóźnienia.
Przyjąć F : = 1; N1 : = -1

II. Wyznaczyć wartość indeksu N dla którego S_N = max S
$S = R_{xy}(q+1) - D R_{xy}(q)$
(odpowiada to minimalizacji wyrażenia (3.2) ze względu na N)
Przyjąć, że opóźnienie jest równe N.

III. Jeżeli N = N1 to koniec identyfikacji, inaczej przejść do IV.

IV. Skompensować opóźnienie przez przesunięcie ciągu $\{y_i\}$ o N miejsc. Wyznaczyć parametry D i E dla modelu inercji bez opóźnienia wg wzoru

$$\begin{vmatrix} D \\ E \end{vmatrix} = (X_m^T \times X_m)^{-1} \times X_m^T \times Y_m$$

gdzie

$$X_m = \begin{vmatrix} y_N & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ y_{M-1} & x_{M-1-N} \end{vmatrix} \qquad Y_m = \begin{vmatrix} y_{N+1} \\ \\ y_M \end{vmatrix}$$

(patrz [1], [2]).

V. Jeżeli D = F to koniec identyfikacji, inaczej przejść do VI.

VI. Jeżeli D = 0 to obiekt bezinercyjny, inaczej przejść do VII.

VII. Założyć F : = D, N1: = N i przejść do II.

4. Algorytm uproszczony

Oznaczmy względną funkcję autokorelacji ciągu $\{x_i\}$ przez r_n przy czym

$$R_{xx}(n) = r_n R_{xx}(0) \tag{4.1}$$

i zakładając, że

$$|r_n| \leqslant a \times (1 - D) \qquad n \neq 0 \tag{4.2}$$

można wykazać [2], że funkcja korelacji wzajemnej ciągów $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$

$$R_{xy}(p) = G \times \sum_{i=0}^{M-N-1} D^i{}_{i+N-p-1} \qquad G = \text{const} \tag{4.3}$$

oraz że

$$\max R_{xy}(p) = R_{xy}(N-1) \quad \text{patrz dodatek} \tag{4.4}$$

Wniosek powyższy pozwala uprościć algorytm identyfikacji parametrów modelu (2.4) do postaci:

I. Wyznaczyć funkcję korelacji $R_{xy}(q)$

II. Znaleźć $\max R_{xy}(q) = R_{xy}(N1)$

$N := N1 + 1$

III. Skompensować opóźnienie N i zastosować wzór (3.3).

5. Skutki założeń upraszczających

Spełnienie warunków (4.2) i (D.7) jest równoważne warunkowi

$$|r_n| \leqslant \frac{(1-D)^2}{2} \quad \text{dla} \quad n \neq 0 \qquad (5.1)$$

przy tym

$$(1 - D) < Q/T \qquad (5.2)$$

Ostatecznie mamy

$$|r_n| \leqslant \frac{Q^2}{2T} \Longrightarrow Q \geqslant T\sqrt{2|r_n|_{max}} \quad n \neq 0 \qquad (5.3)$$

Ponieważ wartość czasu opóźnienia $S = NQ$ jest określona z dokładnością do Q/2 to dokładność ta jest tym lepsza im mniejsze jest Q tzn. im mniejsze jest $|r_n|$ max.

Oznacza to, że sygnał wejściowy x(t) powinien zajmować odpowiednio szerokie pasmo częstotliwości.

Załóżmy np. że sygnał wejściowy x(t) jest białym szumem przepuszczonym przez idealny filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości granicznej F. Wtedy

$$r_n = \frac{\sin(2\pi FQn)}{2\pi FQn} \quad \text{i} \quad |r_n| \leqslant \frac{1}{2\pi FQn} \leqslant \frac{1}{2\pi FQ} \qquad (5.4)$$

Uwzględnienie (5.4) w (5.3) daje

$$Q \geqslant \sqrt[3]{\frac{T^2}{\pi F}} \tag{5.5}$$

Ponieważ równocześnie (zgodnie z tw. Kotielnikowa - Shannona)

$$Q \leqslant \pi T \tag{5.6}$$

Ostatecznie

$$\sqrt[3]{\frac{T^2}{\pi F}} < \pi T \Rightarrow F \geqslant \frac{1}{\pi^4 T} \tag{5.7}$$

Ponieważ pasmo przepuszczania identyfikowanego obiektu określone jest przez $f_{gr} = 1/2\pi T$, to

$$\frac{F}{f_{gr}} \geqslant \frac{2}{\pi^3} \approx 0.068 \tag{5.8}$$

Stąd wniosek, że aby można było stosować uproszczony założeniami (4.2) i (D.7) algorytm identyfikacji w widmie sygnału wejściowego powinny się znaleźć częstotliwości nie mniejsze niż 7% górnej granicy pasma przepuszczania badanego obiektu. Wydaje się, że warunek ten łatwo można wypełnić.

6. Zakończenie

Jeżeli znane są numeryczne wartości parametrów D i E, to wyznaczenia k i T jest już bardzo proste, gdyż

$$k = \frac{E}{1-D}; \quad T/Q = -\frac{1}{\ln D} \tag{6.1}$$

W pracy [2] podane są wyniki eksperymentalnego sprawdzania opisanych algorytmów (które są zupełnie zadawalające) oraz porównanie tych algorytmów z innymi algorytmami identyfikacji parametrów obiektów liniowych z opóźnieniem. Porównanie to wypada na korzyść opisanych w niniejszym referacie algorytmów.

Sam zaś referat jest pewnym uzupełnieniem pracy [2], która została wykonana jako praca dyplomowa w Katedrze Teorii Regulacji pod kierunkiem Prof. dr Stefana Węgrzyna.

LITERATURA

[1] Węgrzyn S.- Podstawy Automatyki kompleksowej. Instytut Automatyki PAN Warszawa 1969 r.

[2] Nałęcki K. - Identyfikacja opóźnień transportowych. Praca dyplomowa, Katedra Teorii Regulacji Gliwice 1969 r.

DODATEK

Oznaczając przez

$$Z_p = \sum_{j=0}^{M-N-1} D^j \, r_{j+N-p-1} \tag{D.1}$$

przy spełnieniu założenia (4.2) mamy dla

$$p = N - k \qquad k \geqslant 2$$

$$|Z_{N-K}| = \left|\sum_j D^j \, r_{j+k-1}\right| \leqslant a \tag{D.2}$$

$$p = N - 1$$

$$Z_{N-1} = 1 + \sum_j D^j \tag{D.3}$$

$$1 - a \leqslant Z_{N-1} \leqslant 1 + a \tag{D.4}$$

$$Z_{N+k} = \sum_{j=0}^{k} D^j\, r_{k+1-j} + D^{k+1} + \sum_{j=k+2}^{M-N-1} D^j\, r_{j-k-1} \qquad (D.5)$$

stąd

$$D-a \leqslant |Z_{N+k}| \leqslant D+a \qquad (D.6)$$

Jeżeli teraz

$$1 - a > a \Longrightarrow a < \frac{1}{2}$$

$$1 - a > D + a \Longrightarrow a < \frac{1-D}{2} \qquad (D.7)$$

to oczywiste jest, że

$$\max Zq = Z_{N-1} \qquad (D.8)$$

oraz, że

$$\max R_{xy}(q) = G \times Z_{N-1} = R_{xy}\ (N-1) \qquad (D.9)$$

Warażenie (D.9) jest identyczne z (4.4) a przytoczone w Dodatku rozważania stanowią wyprowadzenie tego związku.