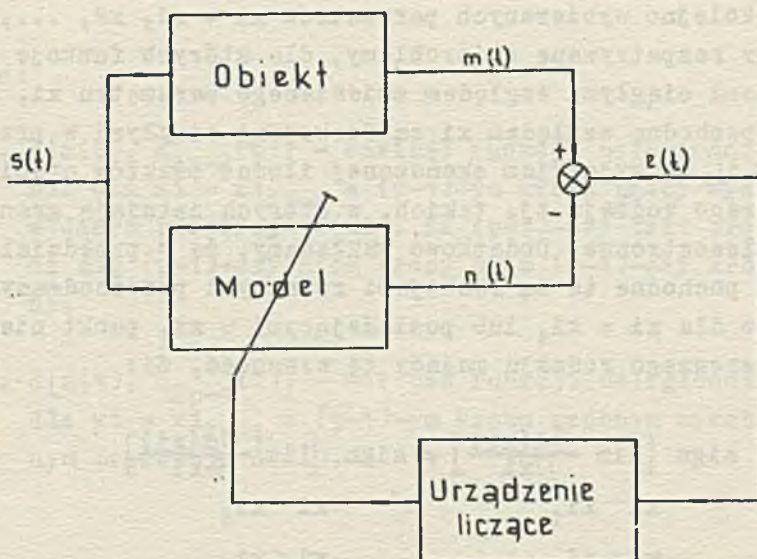


mgr inż. Michał Latarnik
Katedra Teorii Regulacji

2.3. WYKORZYSTANIE ITERACYJNEJ MASZINY ANALOGOWEJ DO IDENTYFIKACJI METODĄ ZMIENNEGO MODELU

Idea metody zmiennego modelu jest prosta i szczegółowo opisana w literaturze [1]. Przy korzystaniu z tej metody na wejścia obiektu i zmiennego modelu podawane są te same sygnały $s(t)$, a różnicę pomiędzy sygnałami wyjściowymi obiektu i zmiennego modelu $m(t)$ i $n(t)$ wprowadza się do urządzenia liczącego, które zmienia wektor parametrów x modelu w ten sposób, by w możliwie najkrótszym czasie uzyskać małą (minimalną), w określonym sensie, odległość [2] między sygnałami wyjściowymi obiektu i modelu.



Rys. 1. Idea zmiennego modelu

Dla rozpatrywanego przez nas obiektu jednowyjściowego i jednowyjściowego, problem można sprowadzić do poszukiwania wektora parametrów $\underline{x} = \underline{x}_{opt}$ spełniającego relacje:

$$n(t) = A \{n(t), s(t), \underline{x}(t)\} \quad (1)$$

$$d^*(\underline{x}_{opt}) = \min_{\underline{x}} d^*(\underline{x}) \quad (2)$$

gdzie:

A - dany operator,

$d^*(\underline{x}) = d^*[n(t), s(t)]$ - odległość między sygnałami wyjściowymi obiektu i modelu dla określonej realizacji $s(t)$.

Wykorzystywany w pracy algorytm poszukiwania wektora \underline{x}_{opt} polega na kolejnym poszukiwaniu minimalnych wartości funkcji $d^*(\underline{x})$:

$$d(x_i) = d(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (3)$$

względem kolejno wybieranych parametrów $x_1 = x_1, x_2, \dots, x_n$.

W pracy rozpatrywane są problemy, dla których funkcje $d(x_i)$ są funkcjami ciągłymi względem zmienianego parametru x_i , a ich pierwsze pochodne względem x_i są funkcjami ciągłymi w przedziale $x_i \in [0, 1]$ za wyjątkiem skończonej ilości punktów nieciągłości pierwszego rodzaju tj. takich, w których istnieją granice prawo- i lewostronne. Dodatkowo zakładamy, że w przedziale $x_i \in [0, 1]$ pochodne te są funkcjami rosnącymi przechodzącymi przez zero dla $x_i = x_{i_1}$ lub posiadającymi w x_{i_1} punkt nieciągłości pierwszego rodzaju mający tę własność, że:

$$\text{sign} \left[\lim_{x_i \rightarrow x_{i_1}} \frac{\partial d(x_i)}{\partial x_i} \right] \neq \text{sign} \left[\lim_{x_i \rightarrow x_{i_1}} \frac{\partial d(x_i)}{\partial x_i} \right] \quad (4)$$

$$\begin{array}{ll} x_i > x_{i_1} & x_i < x_{i_1} \end{array}$$

x) Algorytm ten znany jest jako algorytm Gaussa-Seidela.

Ograniczenie zmian poszczególnych parametrów do przedziału $[0,1]$ zostało wprowadzone jedynie dla ułatwienia zapisu w dalszej części pracy. Oczywiście jest, że dowolny skończony przedział zmian parametru można przez odpowiedni dobór skali zmiennej sprowadzić do przedziału $[0,1]$.

Zbiór $\{d[m(t), n(t)]\}$ stanowią elementy zbioru $\{d^*[m(t), n(t)]\}$ wyznaczone przy określonym $s(t)$, dla wszystkich realizacji wektora x możliwych do uzyskania na wyjściu urządzenia liczącego.

Wartości minimalne dla poszczególnych przekrojów $d(x_i)$ wyznaczane są na drodze iteracji w oparciu o następujący algorytm:

$$x_{i_{2k}} = \frac{1}{2} - \sum_{p=2}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot I_{p-1} \cdot \text{sign} \left\{ d[m(t), n_{2p-1}(t)] - \right. \\ \left. - d[m(t), n_{2p-2}(t)] \right\} \quad (5)$$

gdzie:

1. $d[m(t), n_{2p-2}(t)]$ - wartość funkcji odległości uzyskana dla $x_i = x_{i_{2p-2}}$ w $(p-1)$ -ym kroku pracy wykonanym w danym przekroju $d(x_i)$. Na $(p-1)$ -szy takt pracy składa się $(p-1)$ -szy krok pracy oraz $(p-1)$ -szy krok próbny.
2. $d[m(t), n_{2p-1}(t)]$ - wartość funkcji odległości uzyskana dla $x_i = x_{i_{2p-1}}$ w $(p-1)$ -ym kroku próbnym wykonany w danym przekroju $d(x_i)$.

$$3. x_{1_{2p-1}} = x_{1_{2p-2}} + \varepsilon \quad \varepsilon > 0 \quad (6)$$

$$4. I_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } d[m(t), n_{2p-1}(t)] - d[m(t), n_{2p-2}(t)] \leq a \\ 1 & \text{jeśli } d[m(t), n_{2p-1}(t)] - d[m(t), n_{2p-2}(t)] > a \end{cases}$$

gdzie $a \geq 0$.

Można wykazać [4], że iteracyjny proces poszukiwania minimalnej wartości w danym przekroju $d(x_i)$ przebiegający w oparciu o zaproponowany algorytm (5) jest zbieżny dla $a = 0$ do punktu x_{1_0} spełniającego relację:

$$0 < x_{1_1} - x_{1_0} < \varepsilon \quad (7)$$

natomiast dla $a > 0$ proces ten osiąga punkt należący do przedziału $[x_{1_d}, x_{1_g}]$ otaczającego punkt x_{1_0} ; granice tego przedziału można wyznaczyć z relacji:

$$d[x_{1_g} + \varepsilon] - d[x_{1_g}] = d[x_{1_d}] - d[x_{1_g} + \varepsilon] = a \quad (8)$$

Obeonie uzasadnimy wybór przedstawionego powyżej algorytmu pracy urządzenia liczącego porównując go z innymi znanymi algorytmami pracy urządzeń liczących tego typu. Ze względu na to, że wiele algorytmów poszukiwania wartości optymalnych parametrów [6], [8] z uwagi na skomplikowany sposób doboru kroku roboczego nie znalazło jeszcze swej technicznej realizacji,

ograniczmy się do porównania rozpatrywanego algorytmu poszukiwania z algorytmami poszukiwań przedstawionymi w pracach [5], [7]. Konkretnie porównamy proponowany algorytm z dwoma rozpatrywanymi w pracy [5] algorytmami:

a) z algorytmem wymagającym określenia gradientu.

Układ wykonuje n ruchów wzdłuż współrzędnych, po czym na podstawie określonego gradientu wykonuje skok o długości:

$$|\Delta \underline{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} = h \quad (9)$$

w kierunku najsilniejszego zmniejszenia wartości przyjętej funkcji odległości.

b) z algorytmem przypadkowego poszukiwania, dla którego powrót po ewentualnym błędnym kroku oraz następny krok $\Delta \underline{x}_{i+1}$ odbywają się równocześnie:

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i - a_i \Delta \underline{x}_i + \Delta \underline{x}_{i+1} \quad (10)$$

gdzie:

1. $\Delta \underline{x}_i = [(\Delta x_1)_i, (\Delta x_2)_i, \dots, (\Delta x_n)_i]$ - wektor przyrostu, którego kierunek wybiera się przypadkowo z równomiernym prawdopodobieństwem we wszystkich kierunkach.

$$2. |\Delta \underline{x}_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\Delta x_j)_i^2} = h$$

$$3. \quad a_1 = \begin{cases} 1 & \text{— jeśli wprowadzony w ostatnim przypadkowym kro-} \\ & \text{ku wektor przyrostu } \Delta \underline{x}_1 \text{ nie spowodował zmniejsz-} \\ & \text{enia wartości funkcji odległości} \\ 0 & \text{— jeśli wprowadzony w ostatnim przypadkowym kro-} \\ & \text{ku wektor przyrostu } \Delta \underline{x}_1 \text{ spowodował zmniejsze-} \\ & \text{nie wartości funkcji odległości.} \end{cases}$$

Przyjmujemy za pracą [5] następującą postać funkcji odległości od optimum $\underline{x}_{opt} = [(x_1)_{opt}, (x_2)_{opt}, \dots, (x_n)_{opt}]$:

$$d = \sqrt{[x_1 - (x_1)_{opt}]^2 + [x_2 - (x_2)_{opt}]^2 + \dots + [x_n - (x_n)_{opt}]^2} = r \quad (11)$$

tzn. metody poszukiwań będą porównywane pod względem przydatności ich do rozwiązywania problemów, dla których można przyjąć funkcję odległości o postaci (11).

Dodatkowo zakładamy, że:

1. Punkt optymalny \underline{x}_{opt} może przyjmować z jednakowym prawdopodobieństwem dowolne położenie w hipersześcianie X , którego współrzędne spełniają relację:

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

2. Przy wyznaczaniu optymalnych wartości parametrów ograniczamy się do dokładności h określonej jako:

$$[(x_1)^* - (x_1)_{opt}]^2 + [(x_2)^* - (x_2)_{opt}]^2 + \dots + [(x_n)^* - (x_n)_{opt}]^2 \leq h^2 \quad (13)$$

gdzie:

$(x_1)^*, (x_2)^*, \dots, (x_n)^*$ są wartościami parametrów po zakończeniu procesu poszukiwania.

3. Kryterium porównania stanowi średnia statystyczna r_{sr} wartości funkcji odległości wyznaczonych dla punktów rozpozę-

cia procesów poszukiwania osiagających po K krokach punkt $x^* = [(x_1)^*, (x_2)^*, \dots, (x_n)^*]$ należą do kuli określonej relacją (13).

Ilość K kroków jest tak dobrana, by proces, przebiegający w oparciu o proponowany w niniejszej pracy algorytm poszukiwania, osiągał w tej ilości kroków dowolnie położony w hiper-sześcianie (12) punkt optymalny z dokładnością określoną relacją (13).

Ilość K kroków jest więc równa:

$$K(h, n) = 2 \cdot n \cdot N(h, n) \quad (14)$$

gdzie:

$$N(h, n) = \inf_{m=1, \text{ nat.}} \left(m \geq \frac{\log \frac{\sqrt{n}}{h}}{\log 2} \right) \quad (15)$$

Dla metody gradientowej (a) wspomnianą powyżej średnią wartość $r_{\text{śr}}$ funkcji odległości ograniczymy od góry wykorzystując relację wynikającą z przyjętego algorytmu (a):

$$r_{\text{aśr}}(h, n) < r'_{\text{aśr}} = h \cdot \text{ENTIER} \left[\frac{K(h, n)}{n+1} + 1 \right] \quad (16)$$

Dla metody poszukiwań przypadkowych (b) odległość $r_{\text{bśr}}$ możemy określić korzystając z tego, że wartość oczekiwana sumarycznego zbliżenia, dla procesu osiagającego po K krokach odległość $r_k \leq h$, równa jest sumie wartości oczekiwanych zbliżeń uzyskanych w poszczególnych K krokach czyli:

$$\begin{aligned} r_{\text{bśr}} &= E \left\{ (1-a_1) \Delta r_1 + (1-a_2) \Delta r_2 + \dots + (1-a_k) \Delta r_k + r_k \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^k E_i \left\{ \Delta r_i (1-a_i) \right\} + E(r_k) \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

$E(r_k)$ - wartość oczekiwana funkcji odległości dla punktów końcowych procesu $r_k \leq h$.

$$E_1 \{ \Delta r_1 (1-a_1) \} = \frac{\int_0^{\arccos \frac{1}{2r_1}} (r_1 - \sqrt{r_1^2 + h^2 + 2r_1 h \cos \varphi}) \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi}$$

- wartość oczekiwana zbliżenia w 1-tym kroku procesu [5].

φ - kąt zawarty między wektorami $(\underline{x}_{\text{opt}} - \underline{x}_1)$ oraz $\Delta \underline{x}_{1+1}$.

Ze względu na to, że wspomniana powyżej wartość oczekiwana zbliżenia $E_1 \{ \Delta r_1 (1-a_1) \}$ jest funkcją rosnącą z r_1 ograniczymy $r_{\text{bśr}}$ od góry obliczając $r'_{\text{bśr}}$ dla $r_1 \rightarrow \infty$ czyli:

$$r_{\text{bśr}} < r'_{\text{bśr}} = K E \{ \Delta r [r \rightarrow \infty, \varphi] \} + h \quad (18)$$

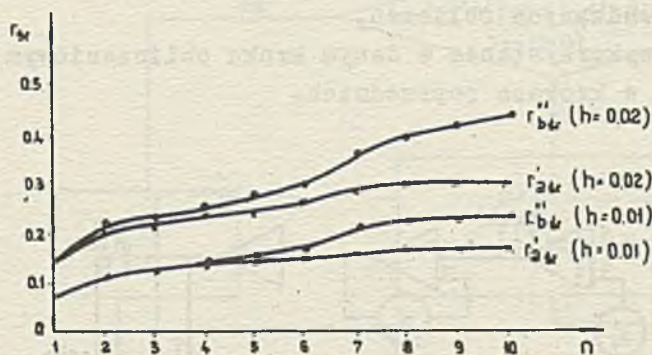
gdzie wartość oczekiwaną zbliżenia $E \{ \Delta r [r \rightarrow \infty, \varphi] \}$ możemy wyznaczyć z relacji [5]:

$$E \{ \Delta r [r \rightarrow \infty, \varphi] \} = \frac{h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi} \quad (19)$$

Dotychczas nie uwzględnialiśmy narzuconych wymiarami hiper-sześcianu (12) ograniczeń zmian parametrów \underline{x} , co jest słuszne dla przypadku, gdy kula Q o promieniu $R = h(K+1)$ i środku w optimum całkowicie zawarta w hipersześcianie (12). Dla przypadku, gdy wspomniana kula Q nie jest całkowicie zawarta w hipersześcianie (12), wartość oczekiwana $r_{\text{bśr}}$ ulegnie zmniejszeniu. Jest to spowodowane zmniejszeniem się ilości najbardziej odległych od optimum punktów rozpoczęcia procesów po-

szukiwania osiągających po K krokach kulę (13), (bo właśnie te punkty znajdują się na zewnątrz hipersześcianu) oraz zmniejszeniem się prawdopodobieństwa wykonania poprawnego kroku w pobliżu ścian hipersześcianu. Tym samym również dla tego przypadku spełniona jest realoja (18).

Biorąc pod uwagę przeprowadzone powyżej rozważania możemy stwierdzić (rys. 2), że dla dużych dokładności wyznaczania wartości optymalnych oraz małej ilości n parametrów, propo-



Rys. 2. Zależność długości umownego promienia r_{gr} od n -ilości parametrów oraz h -dokładności wyznaczenia optimum

nowana w niniejszej pracy metoda poszukiwań wymaga, w sensie statystycznym, mniejszej ilości kroków potrzebnych do wyznaczenia optymalnych wartości parametrów z zadaną dokładnością (13).

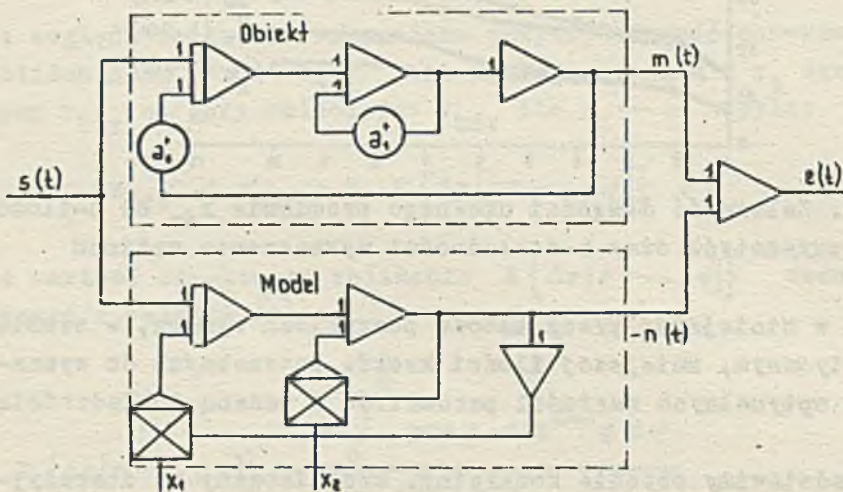
Przedstawimy obecnie konkretny, zrealizowany na iteracyjnej maszynie analogowej, układ identyfikacji wartości parametrów obiektu wykorzystujący metodę zmiennego modelu. Rozpatrzmy przypadek identycznych struktur obiektu i zamkniętego zmiennego modelu [3]. Funkcje przejścia obiektu i modelu posiadają tę samą postać:

$$K(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p} \quad (20)$$

co odpowiada schematowi maszynowemu przedstawionemu na rys. 3.

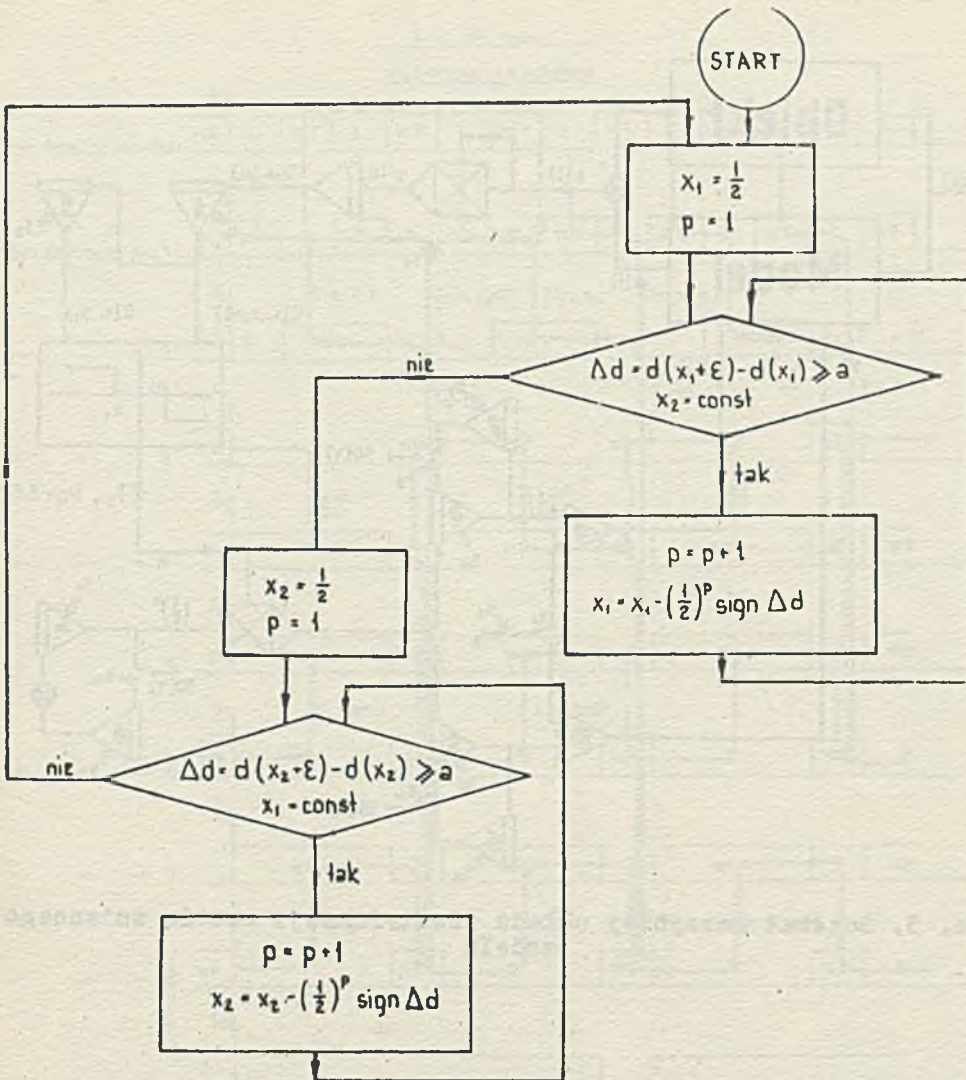
Tok przeprowadzanych obliczeń w układzie przedstawiono w postaci schematu blokowego (rys. 4). Zwraca się uwagę na pewne podobieństwa programowania iteracyjnej maszyny analogowej i programowania maszyn cyfrowych. Nowymi elementami programu iteracyjnej maszyny analogowej w porównaniu z programem konwencjonalnych maszyn analogowych są:

- możliwość zaprogramowania repetycyjnego rozwiązywania wybranej operacji matematycznej,
- możliwość alternatywnego wyboru operacji matematycznej w toku przeprowadzanych obliczeń,
- możliwość wykrzystania w danym kroku obliczeniowym wyników uzyskanych w krokach poprzednich.

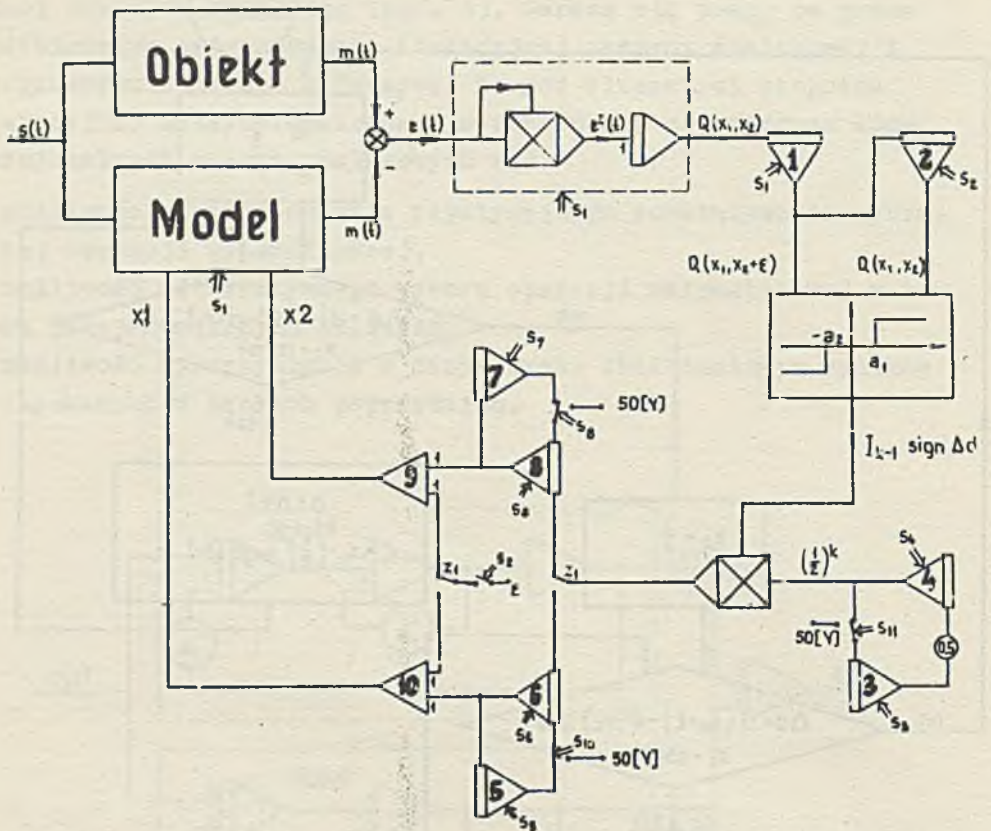


Rys. 3. Schemat maszynowy obiektu i modelu

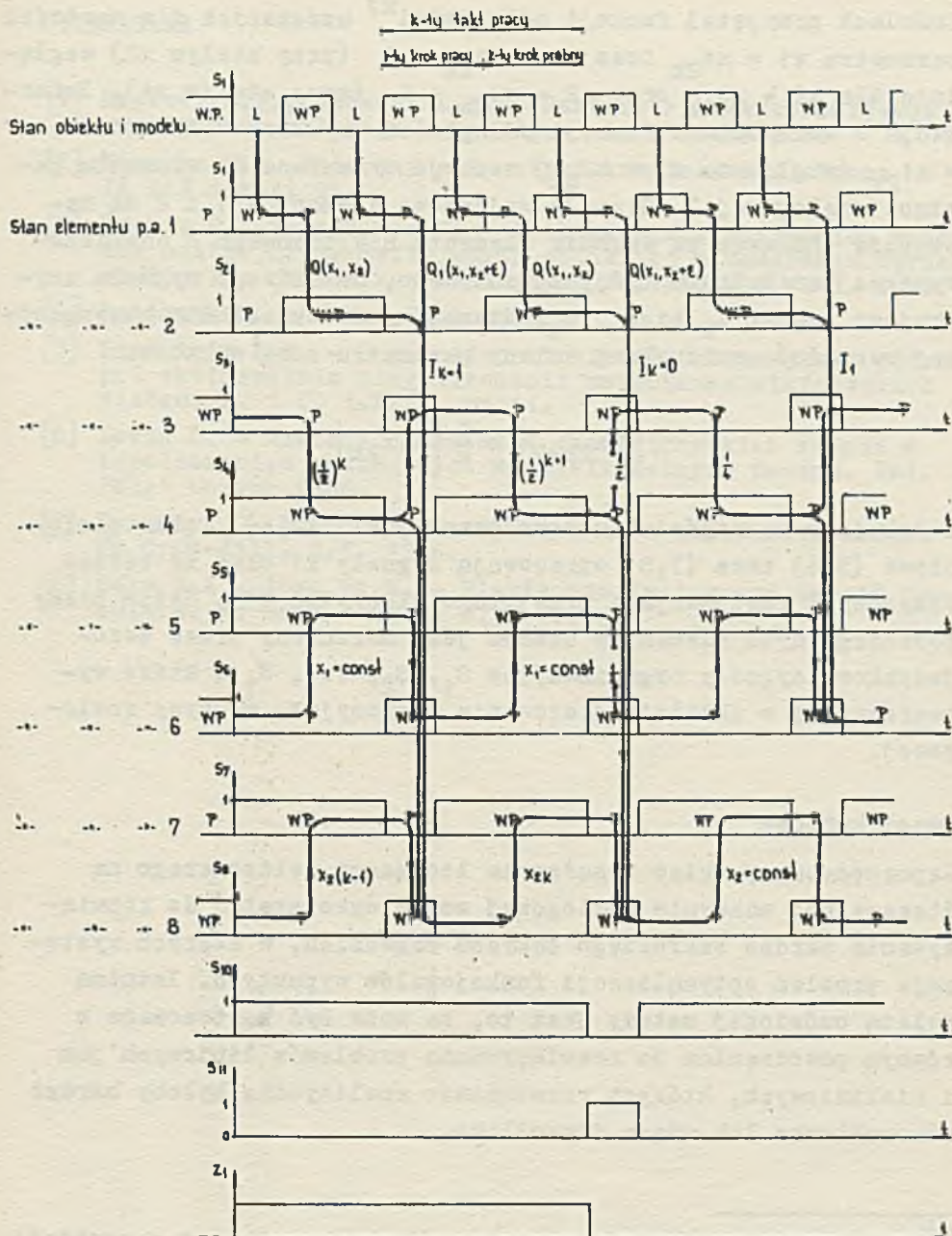
Omówimy obecnie pracę zaproponowanego układu identyfikacji (rys. 5). Wygodnie jest wykorzystać do tego celu diagram przepływu informacji w tym układzie. Element pamięci analogowej 1 otrzymuje w kolejnych krokach iteracji informację o war-



Rys. 4. Schemat blokowy obliczeń



Rys. 5. Schemat maszynowy układu identyfikacji metodą zmiennego modelu



Rys. 6. Diagram przepływu informacji

tościach przyjętej funkcji odległości^{x)} uzyskanych dla wartości parametru $x_1 = x_{1,2k}$ oraz $x_1 = x_{1,2k} + \epsilon$ (przy stałym x_2) względnie dla $x_2 = x_{2,2k}$ oraz $x_2 = x_{2,2k} + \epsilon$ (przy stałym x_1). Informacja o wartościach funkcji odległości uzyskanych dla $x_1 = x_{1,2k}$ (względnie $x_2 = x_{2,2k}$) zostaje przesłana do elementu pamięci analogowej 2. Sygnały wyjściowe elementów 1 i 2 są następnie podawane na wejście elementu nieliniowego o charakterystyce przekaźnika trójpołożeniowego, na którego wyjściu uzyskujemy sygnał $I_k \text{ sign } \Delta d_k$. Niezbędny do określenia bezwzględnej wartości ewentualnej zmiany parametru ciąg wartości:

$$|\Delta x_{2k+2}| = \frac{1}{2} |\Delta x_{2k}|$$

uzyskujemy na wyjściu integratora 4 pętli (3,4). Pętle pamięciowe (5,6) oraz (7,8) opracowują sygnały x_1 oraz x_2 będące fizycznymi realizacjami przyjętego algorytmu (5). Reżim pracy poszczególnych elementów układu jest narzucony przez zerowyjedynekowe sygnały organizacyjne S_1, S_2, \dots, S_{11} , które wytwarzane są w układzie sterowania iteracyjnej maszyny analogowej.

Uwagi końcowe

Zaproponowany układ urządzenia liczącego realizowanego na iteracyjnej maszynie analogowej można wykorzystać do rozwiązywania bardzo szerokiego zakresu zagadnień, w których występuje problem optymalizacji funkcjołałów wypukłych. Istotną zaletą omówionej metody jest to, że może być zastosowana z równym powodzeniem do rozwiązywania problemów liniowych jak i nieliniowych, których rozwiązanie analityczne byłoby bardzo czasochłonne lub wręcz niemożliwe.

^{x)} Jako funkcję odległości przyjęto funkcję Hilberta o postaci:

$$d[m(t), n(t)] = \sqrt{\int_0^T [m(t) - n(t)]^2 dt}$$

LITERATURA

- [1] Masłow, E.P., Osowski L.M. - Samonastriaiwajuszczijesja sistiemy uprawlenija z modelu. A. i T. 6/1966.
- [2] Węgrzyn S. - Podstawy automatyki kompleksowej. Prace IA PAN zeszyt 81.
- [3] Norkin K., Spiridonow W. - Issliedowanie poiskowych meto-
dow nastrojki upravliajemych modieliej w zadaczach oprie-
dielienija parametrov liniejnyoh obiektow. A. i T. 1/1969.
- [4] Latarnik M. - Praca dyplomowa.
- [5] Rastrigin L.A. - O schodimosti metoda słuczajnowo poiska
pri ekstremalnim riegluirowanii mnogoparamietriczeskich
sistem. A. i T. t.XXIV, nr 11.
- [6] Lewin L. - Metody rieszenija tiechniczeskich zadacz z
ispolzowaniem analogowych wyoisliitelnyh maszyn. Izd.
"Mir" Moskwa 1966.
- [7] Korn G.A. - Random Process Simulation and Measurements
Mc Graw-Hill, N.Y. 1966.
- [8] Korn G.A., Korn Th.M. - Electronic Analog and Hybrid Com-
puters. Mc Graw - Hill, N.Y. 1964.