ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 14 Nr kol. 267

Antoni Niederliński
Katedra Automatyki
Procesów Przemysłowych

2.4. IDENTYFIKACJA I ADAPTACYJNA REGULACJA PRZEPŁYWOWEGO REAKTORA CHEMICZNEGO O MIESZANEJ ZAWARTOŚCI[x)]

Streszczenie: Rozpatrzono reaktor przepływowy o mieszanej zawartości, dla którego wymagana jest bardzo dokładna regulacja stężenia produktu, przy czym: a) jedyną wielkością mierzalną jest temperatura reakcji, b) zaburzeniem jest zmiana stężenia wejściowego i zmiana stałej kinetycznej, c) rozwiązanie konwencjonalne polegające na stabilizacji temperatury reakcji daje zbyt małą dokładność statyczną.

W celu uzyskania żądanej dokładności statycznej i dynamicznej koniecznym było zastosowanie adaptacyjnego regulatora cyfrowego składającego się z a) adaptacyjnej wersji filtru Kalmana identyfikującego nieznaną stałą kinetyczną i nieznane stężenie wejściowe oraz estymującego niemierzalne składowe wektora stanu układu, b) adaptacyjnego układu sterowania obliczającego w oparciu o technikę programowania dynamicznego na podstawie danych wypracowanych przez filtr Kalmana optymalny sygnał sterujący temperaturą czynnika chłodzącego. Przedstawiono wyniki modelowania układu na maszynie cyfrowej.

x) Pracę wykonano w ramach Postgraduate Study finansowanych przez British Council w kierowanej przez prof. J.F. Coales'a Control Group w Department of Engineering, University of Cambridge. Przy realizacji części obliczeniowej i modelowaniu układu korzystano z maszyny cyfrowej IMB 1130 w Department of Engineering. Autor uważa za swój miły obowiązek podziękowanie prof. J.F. Coales'owi i w/w instytucjom za pomoc okazaną w czasie wykonywania pracy.

1. Omówienie problemu

1.1. Model reaktora

Założenia: a) reakcja jest nieodwracalną dysocjacją egzotermiczną rzędu I,

b) mieszanie ma charakter idealny,

c) na przebieg reakcji można oddziaływać zmieniając temperaturę czynnika chłodzącego, co realizuje się mieszając dwa strumienie o różnych temperaturach. Ze względu na duże natężenie przepływu czynnika chłodzącego pomija się dynamikę chłodnicy w porównaniu z dynamiką reaktora,

d) zawartość reagentów w reaktorze i ich natężenie przepływu są stałe.

Założenia te prowadzą do następujących równań bilansu masowego i energetycznego (por. Aris [2]):

$$\Theta \frac{dc}{dt} = c_f - c - \Theta r \tag{1.1}$$

$$\Theta \frac{dT}{dt} = T_f - T + \Theta J r - \varkappa (T - T_{cf}) \tag{1.2}$$

gdzie:

q – natężenie przepływu objętościowego reagentów przez reaktor,

V – objętość reaktora,

$\Theta = V/q$ – czas przejścia,

T_{cf} – temperatura czynnika chłodzącego,

T – temperatura produktów,

T_f – temperatura surowców,

c_f – stężenie reagentu w strumieniu surowców,

c – stężenie reagentu w strumieniu produktu,

$\varkappa$ – wypadkowy współczynnik przenikania ciepła,

r – prędkość reakcji,

J – stała kinetyczna.

Stałą r można przedstawić w postaci:

$$r = k\,c$$

gdzie:

$k = A \exp(-E/RT)$

k - stała Arrheniusa

A - współczynnik częstości stałej Arrheniusa

E - energia aktywacji

R - stała gazowa.

Stała J jest równa:

$$J = \frac{-\Delta H}{C_p}$$

gdzie:

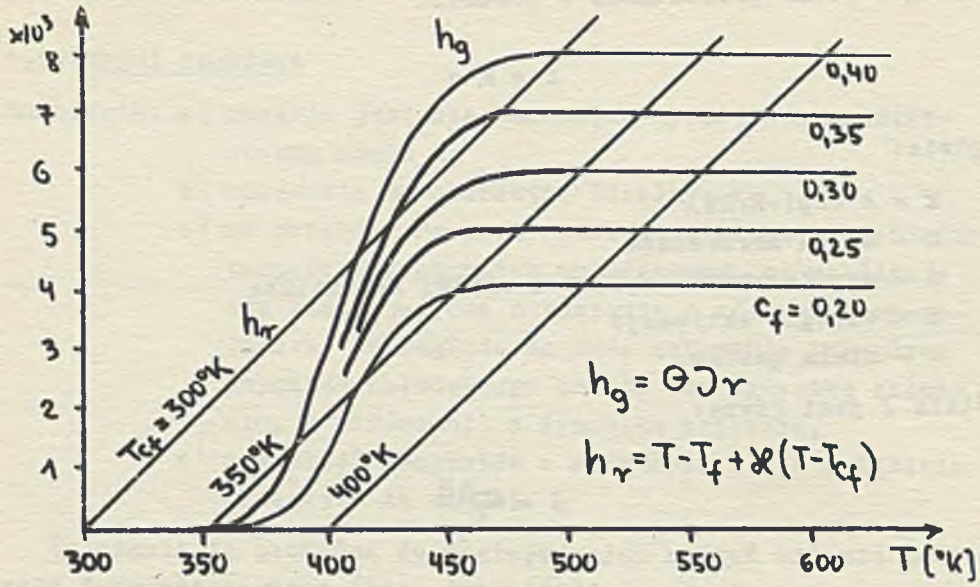
ΔH - ciepło reakcji

C_p - pojemność cieplna reagentów

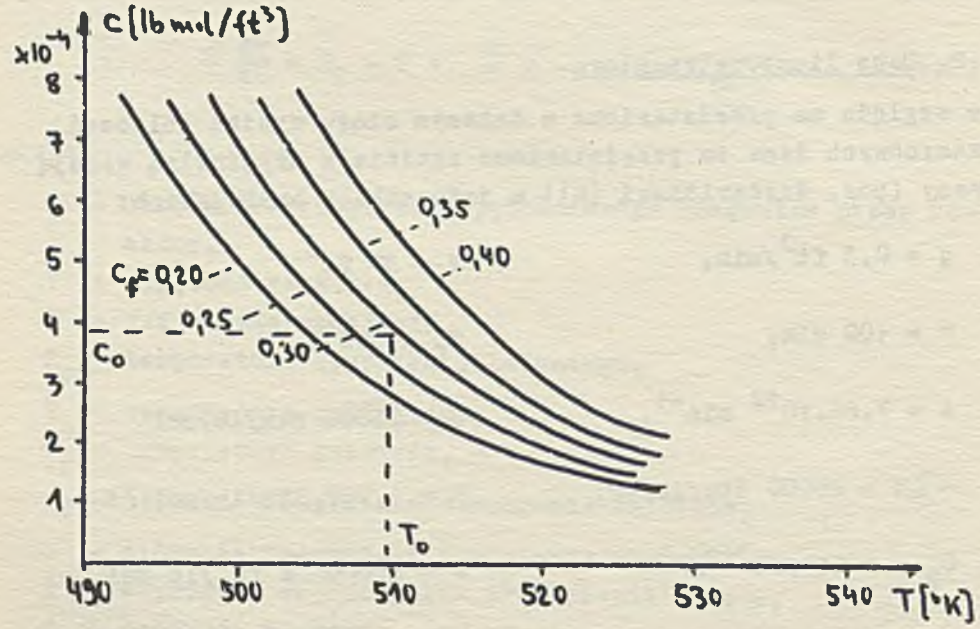
1.2. Dane liczbowe reaktora

Ze względu na przedstawione w dalszym ciągu wyniki obliczeń maszynowych dane te przedstawiono zgodnie z oryginalną wersją pracy (por. Niederliński [6]) w jednostkach brytyjskich:

$q = 0{,}5\ ft^3/min$,	$V = 50\ ft^3$
$\theta = 100\ min$,	$T_f = 300^oK$
$A = 7{,}86 \cdot 10^{12}\ min^{-1}$,	$E = 28000\ Btu/lb/mol$
$-\Delta H = 20000\ Btu/lb/mol$	$R = 1{,}987\ Btu/lb/mol\ ^oK$
$C_p = 1\ Btu/ft^3\ ^oK$	$J = 20000\ ^oK\ ft^3/lb\ mol$
$\varkappa = 37{,}5$	



Rys. 1.2.1. Charakterystyki generacji ciepła h_g oraz charakterystyki odprowadzenia ciepła h_r rozpatrywanego reaktora



Rys. 1.2.2. Krzywe stężenia wyjściowego c w funkcji temperatury T i stężenia wejściowego c_f

Rys. 1.2.1 przedstawia charakterystyki generacji ciepła h_g i charakterystyki odprowadzania ciepła h_r dla różnych wartości c_f i T_{cf} (por. Aris, [2]). Punkt pracy reaktora znajduje się na górnej poziomej części charakterystyki h_g. Rys. 1.2.2 przedstawia krzywe stężenia wyjściowego w funkcji temperatury T i stężenia wejściowego c_f.

1.3. Wymagania dla układu regulacji

Reaktor zaprojektowano do pracy ustalonej w punkcie:

$c_o = 3{,}8.10^{-4}$ lb mol/ft^3, $T_o = 510^oK$

$c_{fo} = 0{,}3$ lb mol/ft^3 $T_{cfo} = 350^oK$

$k_o = 7{,}863$ min^{-1}

Zaburzenia oddziaływujące na reaktor są następujące:

a) zmiana stężenia wejściowego:

$$c_f = (0{,}3 \pm 0{,}1) \text{lb mol/ft}^3$$

b) zmiana stałej Arrheniusa wywołana obecnością zanieczyszczeń w strumieniu surowców:

$$k = (7{,}863 \pm 3{,}0) \text{ min}^{-1}$$

Zaburzenia te zmieniają się w sposób ciągły i wolny dzięki zastosowaniu zbiornika buforowego.

Stężenie wyjściowe c należy utrzymać jak najbliżej wartości zadanej $c_d = 3{,}8.10^{-4}$ lb/mol/ft^3, przy czym dokładność statyczna regulacji stężenia uzyskana przez stabilizację temperatury reakcji na wartości $T_o = 510^oK$ (odchyłka maksymalna $\Delta c = 1{,}2.10^{-4}$ lb mol/ft^3 przy zaburzeniu $c_{f.max}$ - por. rys. 1.2.2, oraz odchyłka $\Delta c_{f.max.max} = 2.10^{-4}$ lb mol/ft^3 przy zaburzeniu $c_{f.max}$ i k_{max}) jest niewystarczająca.

Regulacja konwencjonalna oparta na pomiarze stężenia wyjściowego c jest w rozpatrywanym przypadku nie do zrealizowania gdyż stężenie c jest niemierzalne w sposób wystarczająco dokładny i szybki dla uzyskania pożądanej dokładności regulacji.

1.4. Zarys rozwiązania

Wymienione trudności skłoniły do zastosowania cyfrowego układu estymacji wartości stężenia wyjściowego na podstawie zakłóconego szumem pomiaru temperatury reakcji oraz znajomości modelu reaktora. Pociąga to za sobą konieczność estymacji zakłóceń Δc_f i Δk. Zrealizowano to w oparciu o metodę filtru Kalmana. Trudności związane z aproksymacją wpływu zmian Δk w podanym zakresie przy pomocy zależności liniowej zmusiły do adaptacji filtru Kalmana w miarę zdobywania dokładniejszych informacji o Δk.

Na podstawie znajomości modelu procesu uzyskanej w procesie identyfikacji określono przy pomocy metody programowania dynamicznego optymalne prawo sterowania temperaturą czynnika chłodzącego. Ponieważ prawo to okazało się bardzo czułe na zmianę zakłóceń Δc_f i Δk, zaszła konieczność jego adaptacji w miarę zdobywania dokładniejszej informacji o tych zakłóceniach.

2. Wstępne przekształcenie modelu reaktora

2.1. Linearyzacja o rozszerzenie przestrzeni stanu

Realizacja filtru Kalmana przy pomocy maszyny cyfrowej wymaga znajomości liniowego modelu różnicowego układu z przestrzenią stanu rozszerzoną o identyfikowane parametry Δc_f i Δk. Model ten otrzymuje się ze zlinearyzowanego modelu różnicowego:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta c_f \\ \Delta k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C & D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta c_f \\ \Delta k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T_{of} \qquad (2.1.1)$$

$$z = [H] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta c_f \\ \Delta k \end{bmatrix} + \Delta n$$

gdzie

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta T \end{bmatrix}$$

$$[H] = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Δz - sygnał zakłóconego szumem Δn pomiaru temperatury i przyjęto zakłócenia Δc_f = const oraz Δk = const. Linearyzacja modelu (1.1), (1.2) wokół punktu pracy ustalonej c_o, T_o, c_{fo} i k_o daje:

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\theta} + k_o\right) & -k_o\, c_o \frac{E}{R\, T_o^2} \\ J\, k_o & -\frac{(1+\varkappa)}{\theta} + J\, k_o\, c_o \frac{E}{R\, T_o^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7{,}873 & -0{,}161 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}157 \cdot 10^{6} & 2{,}852 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varkappa}{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}375 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -c_o \\ J\, c_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}38 \cdot 10^{-3} \\ 7{,}6 \end{bmatrix}$$

2.2. Określenie pożądanego punktu równowagi reaktora

Dla stanu ustalonego przy idealnej stabilizacji stężenia wyjściowego jest:

$$\Delta\dot{x} = 0, \qquad \Delta c = 0, \qquad \Delta T = \Delta T_d$$

co po wprowadzeniu do (2.1.1) dla przypadku $\Delta k = 0$ daje:

$$S = \frac{\Delta T_d}{\Delta c_f} = \frac{R\,T_o^2}{k_o\,c_o\,E\,\theta} = 61{,}805 \qquad (2.2.1)$$

A więc stabilizacja stężenia wyjściowego wymaga zmiany temperatury reakcji T proporcjonalnie do zmian stężenia wejściowego.

2.3. Liniowy model różnicowy

odpowiadający równaniu (2.1.1) posiada postać:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{n+1} \\ \Delta c_{f,n+1} \\ \Delta k_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & F & G \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta c_{f,n} \\ \Delta k_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T_{cf,n} \qquad (2.3.1)$$

$$\Delta z_n = [H] \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta c_{f,n} \\ \Delta k_n \end{bmatrix}$$

gdzie (por. Ogata [6]):

$$\phi = e^{AT}, \qquad \Gamma = \phi\left(\int_0^T e^{-A\tau}\, d\tau\right)B$$

$$F = \phi\left(\int_0^T e^{-A\tau}\, d\tau\right)C, \qquad G = \phi\left(\int_0^T e^{-A\tau}\, d\tau\right)D$$

Dla czasu impulsowania T = 0,1 min otrzymuje się metodą rozwinięcia w szereg potęgowy następujące wyrażenie dla macierzy ϕ

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3822 & -0{,}1241 \\ 0{,}1206.10^{5} & 1{,}205 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}283.10^{-6} \\ 0{,}4237.10^{-1} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6301.10^{-3} \\ 7{,}336 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2967.10^{-4} \\ 0{,}5802 \end{bmatrix}$$

2.4. Weryfikacja założenia liniowości

Rozpatrywany zakres zmian Δk jest za duży by móc przedstawić ich wpływ na o i T w postaci wyrażenia liniowego jak to przyjęto w p. 2.1. Stąd konieczność uaktualnienia parametrów modelu różnicowego ze zmianami stałej k. W tym celu przeprowadzono numeryczną analizę czułości parametrów tego modelu tabelaryzu-

jąc ich wartości dla kolejnych wartości $k_0 + \Delta k$ ($-3{,}0 \leqslant \Delta k \leqslant 3{,}0$) w odstępach $\Delta k = 0{,}2$. Otrzymane zależności wskazywały na możliwość analitycznej aproksymacji przy pomocy wielomianu stopnia trzeciego. Metodą najmniejszych kwadratów otrzymano następujące zależności dla parametrów modelu różnicowego:

$$\phi_{11} = 0{,}3822-0{,}5369.10^{-1}\Delta k+0{,}2297.10^{-2}(\Delta k)^2-0{,}2621.10^{-4}(\Delta k)^3$$

$$\phi_{21} = 0{,}1206.10^{5}+0{,}1142.10^{4}\Delta k-0{,}45.10^{2}(\Delta k)^2 + 0{,}4246(\Delta k)^3$$

$$\phi_{12} = -0{,}1241.10^{-4}-0{,}1176.10^{-5}\Delta k+0{,}4669.10^{-7}(\Delta k)^2 + - 0{,}3127.10^{-9}(\Delta k)^3$$

$$\phi_{22} = 1{,}204+0{,}2282.10^{-1}\Delta k-0{,}9555.10^{-3}(\Delta k)^2 + 0{,}1851.10^{-4}(\Delta k)^3$$

$$\Gamma_1 = -0{,}2832.10^{-6}-0{,}3127.10^{-7}\Delta k+0{,}8454.10^{-9}(\Delta k)^2 + + 0{,}2717.10^{-10}(\Delta k)^3$$

$$\Gamma_2 = 0{,}4240.10^{-1}+0{,}6168.10^{-3}\Delta k-0{,}1737.10^{-4}(\Delta k)^2 + - 0{,}5448.10^{-6}(\Delta k)^3$$

$$F_1 = 0{,}6303.10^{-3}-0{,}4101.10^{-4}\Delta k+0{,}1066.10^{-5}(\Delta k)^2 + + 0{,}3485.10^{-7}(\Delta k)^3$$

$$F_2 = 7{,}337+0{,}81\Delta k-0{,}2187.10^{-1}(\Delta k)^2-0{,}6853.10^{-3}(\Delta k)^3$$

$$G_1 = -0{,}2969.10^{-4}+0{,}9250.10^{-6}\Delta k-0{,}2355.10^{-7}(\Delta k)^2 + - 0{,}8528.10^{-9}(\Delta k)^3$$

$$G_2 = 0{,}5805-0{,}1827.10^{-1}\Delta k+0{,}4819.10^{-3}(\Delta k)^2+0{,}1535.10^{-4}(\Delta k)^3$$

$$S = 51{,}33-7{,}705\Delta k+1{,}168(\Delta k)^2-0{,}1522(\Delta k)^3.$$

2.5. Stabilność, sterowalność i obserwowalność modelu różnicowego

Zastosowanie znanych kryteriów (por. Ogata [6]) prowadzi do następujących wniosków:

a) model jest stabilny w całym zakresie zmian Δk,

b) model nie jest całkowicie sterowalny. Sterowalną jest część modelu otrzymana w wyniku usunięcia dodatkowych składowych wektora stanu Δk i Δc_f. Właściwość ta jest w rozpatrywanym przypadku oczywista,

c) obserwowalność modelu jest wątpliwa co objawia się silną niestabilnością macierzy obserwowalności (wyznacznik tej macierzy jest równy zeru przy obliczeniach "zgrubnych" i równy wartości b. dużej przy obliczeniach dokładnych). Właściwość ta charakteryzuje również model różniczkowy (2.1.1), nie została więc wprowadzona przez impulsowanie. Dalsza analiza wykazuje że usunięcie składowej Δk przywraca modelowi pełną obserwowalność. Sygnalizuje to pewne trudności z identyfikacją Δk co w dalszej części pracy znalazło potwierdzenie.

3. Estymacja stanu i identyfikacja parametrów przy pomocy filtru Kalmana

W celu estymacji składowych Δc i ΔT wektora stanu oraz identyfikacji parametrów Δk i Δc_f na podstawie zakłóconego szumem pomiaru temperatury reakcji zastosowano filtr Kalmana (por. Dodatek I) do modelu różnicowego (2.3.1).

3.1. Stabilność filtru i warunki początkowe

Problem ten był badany przez Kalmana (por. [7] lub Deutsch [3]) który doszedł do następujących wyników:

Jeżeli układ

$$x_{k+1} = \phi\, x_k$$

$$z_{k+1} = H\, x_{k+1} + n_{k+1}$$

jest całkowicie obserwowalny i sterowalny, to:

a) filtr Kalmana jest asymptotycznie stabilny
b) każde rozwiązanie P_k równania wariancji stanu układu (por. Dodatek I), otrzymane w wyniku zainicjalizowania przy pomocy warunku początkowego P_0 w postaci macierzy symetrycznej nieujemnej jest zbieżne jednostajnie do pewnej macierzy dodatniej.

Ponieważ w badanym układzie warunki powyższe nie są spełnione, zbieżność filtru Kalmana będzie zależała od wyboru warunku początkowego P_0. W wyniku doświadczeń numerycznych uzyskano następującą macierz P_0 zapewniającą zbieżność filtru:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3{,}0.10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33.10^{-4} & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Elementy diagonalne macierzy wariancji P_k przedstawiają od góry patrząc wariancje Δc, ΔT, Δc_f i Δk. Oznaczmy je przez $P_k(\Delta c)$, $P_k(\Delta T)$, $P_k(\Delta c_f)$, i $P_k(\Delta k)$. Jak wykazał Sorenson [9] analiza przebiegu wartości tych elementów diagonalnych w funkcji liczby iteracji może służyć do określenia dokładności estymacji i identyfikacji osiągniętej przy pomocy filtru. Odpowiednie wykresy zmian wartości elementów diagonalnych macierzy P_k przedstawiono na rys. 3.1.1. Jakiekolwiek próby przyspieszenia zbieżności $P_k(\Delta k)$ na drodze wyboru mniejszej wartości $P_0(\Delta k)$ prowadziły nieuchronnie albo do pojawienia się ujemnych elementów diagonalnych w macierzy P_k, albo do wartości rozbieżnych. Słaba zbieżność $P_k(\Delta k)$ widoczna na rysunku jest uwarunkowana trudnościami związanymi z obserwowalnością układu (por. p. 2.5).

3.2. Reinicjalizacja filtru

Ponieważ w modelu procesu przyjęto stałe wartości zaburzeń Δc_f = const i Δk = const., przedstawiona wersja filtru pracuje zadawalająco tylko przy stałych zaburzeniach, lecz nie potrafi nadążać ze zmianami zaburzeń. Wadę tą można łatwo usunąć reinicjalizując filtr po pewnej ilości iteracji, tzn. przyjmując po pewnej ilości k_{max} iteracji ponownie wielkość P_o i uważając ostatnie obliczone w poprzednim cyklu wartości składowych wektora stanu za nowe warunki początkowe. W rozpatrywanym przypadku przyjęto k_{max} = 20, tzn. reinicjalizację przeprowadzono w odstępach 2 minutowych. Tak zmodyfikowany filtr nadąża bez trudności za zmianami zaburzeń Δc_f i Δk.

3.3. Adaptacja filtru

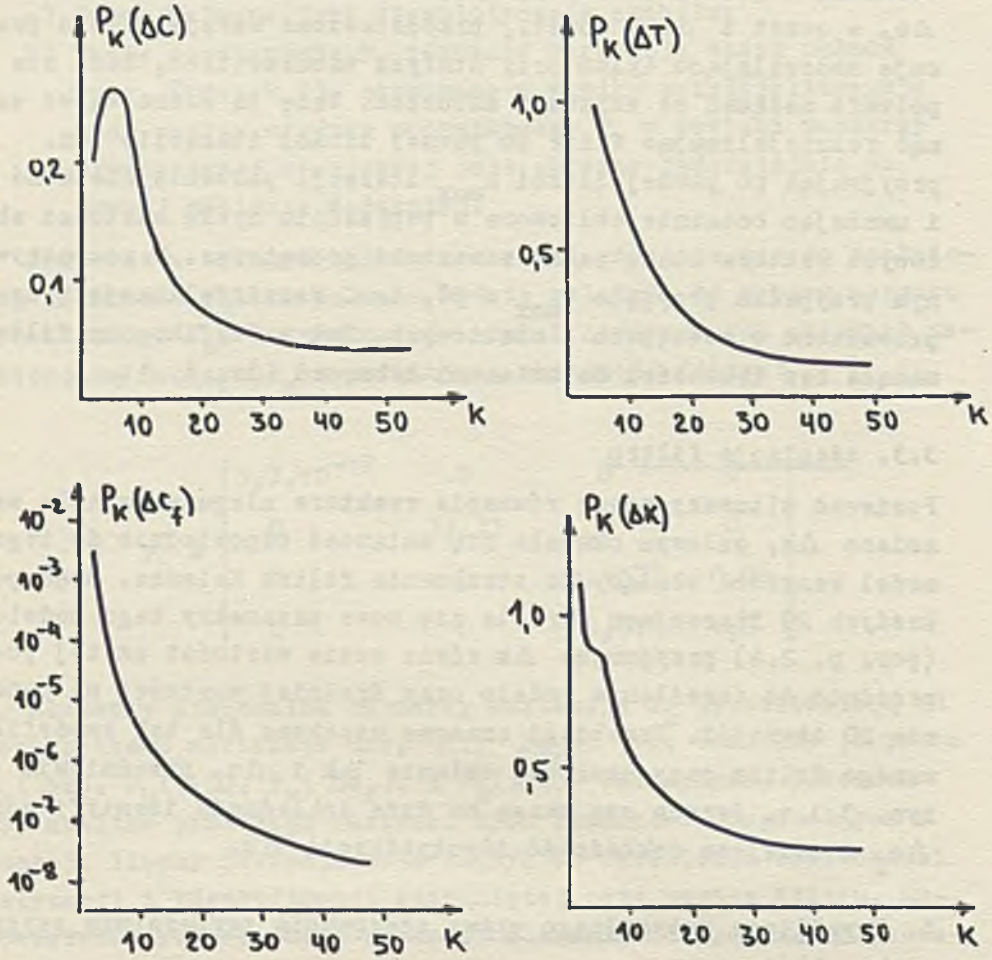
Ponieważ zlinearyzowane równania reaktora ulegają zmianie ze zmianą Δk, celowym okazało się zmieniać odpowiednio do tego model reaktora służący do otrzymania filtru Kalmana. Stąd po każdych 20 iteracjach określa się nowe parametry tego modelu (por. p. 2.4) przyjmując Δk równe sumie wartości użytej poprzednio do określenia modelu oraz średniej wartości za ostatnie 20 iteracji. Przebiegi czasowe uzyskane dla tak zmodyfikowanego filtru przy skokowej zmianie Δk i Δc_f przedstawia rys. 3.3.1. Zwraca się uwagę na dużą dokładność identyfikacji Δc_f i mniejszą dokładność identyfikacji Δk.

4. Określenie optymalnego prawa sterowania temperaturą czynnika chłodzącego

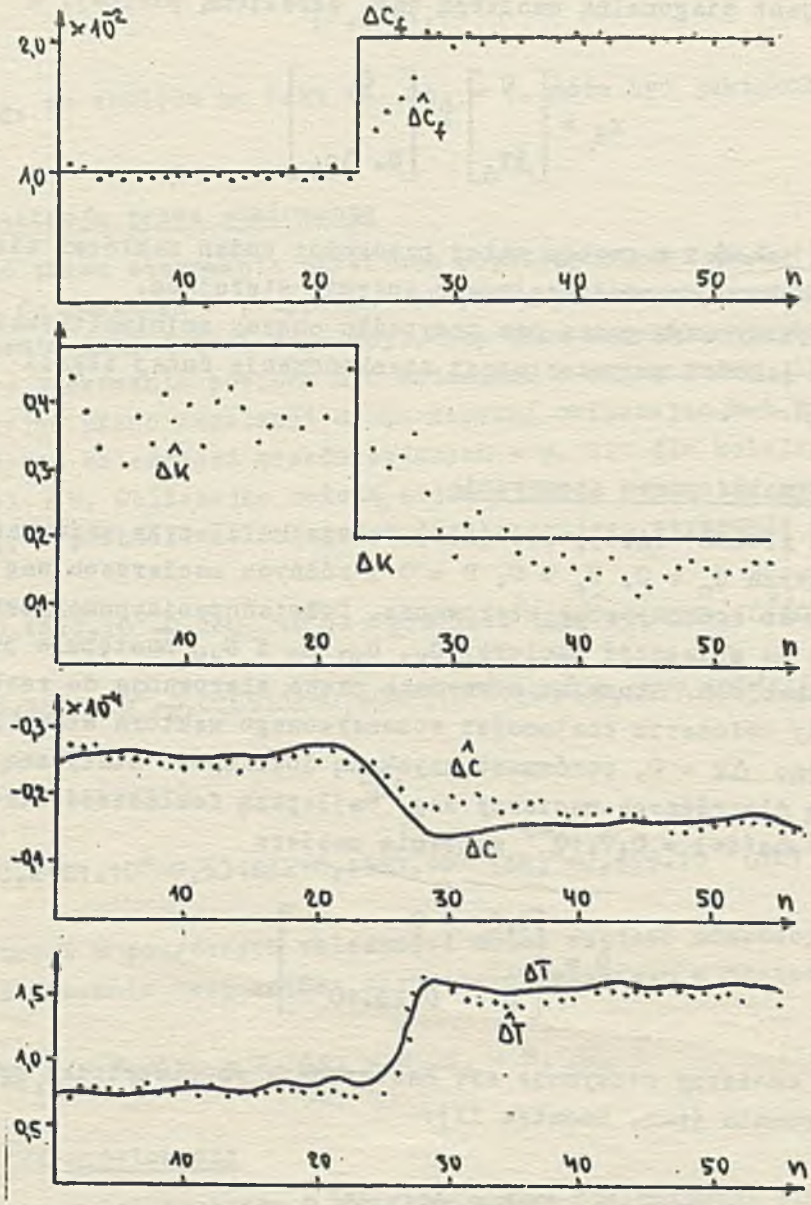
4.1. Wskaźnik jakości

Nawiązując do dyskusji w p. 1.3 wybiera się następujący wskaźnik jakości:

$$\sum_{i=0}^{M} (\Delta x_i - \Delta x_d)^T Q(\Delta x_i - \Delta x_d)$$



Rys. 3.1.1. Przebiegi wartości elementów diagonalnych macierzy P_k w funkcji ilości iteracji k



Rys. 3.3.1. Przebiegi czasowe wielkości rzeczywistych $\Delta(\ )$ i estymowanych przy pomocy adaptacyjnej filtru Kalmana $\Delta(\ )\hat{}$ w przypadku skokowej zmiany Δk i Δc_f

gdzie Q jest diagonalną macierzą wag, określoną poniżej, a

$$x_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S.\ \Delta c_f \end{bmatrix}$$

Wskaźnik jakości z powodu małej prędkości zmian zakłóceń nie zawiera członu przedstawiającego energię sterującą.

W rozpatrywanym przez nas przypadku chcemy zminimalizować wskaźnik jakości na przestrzeni nieskończenie dużej ilości kroków, $M \to \infty$.

4.2. Optymalne prawo sterowania

Iteracja równań (A.1), ... (A.4) z Dodatku II przy warunkach początkowych $G_0 = 0$, $U_0 = 0$, $R = 0$ i różnych macierzach wag Q prowadzi do rodziny praw sterowania. Doświadczenia numeryczne wykazały że zbieżność macierzy G_N, U_N, B_N i B_{dN} następuje już po 8 iteracjach. Stosując otrzymane prawa sterowania do reaktora przy założeniu znajomości rozszerzonego wektora stanu i zakładając $\Delta k = 0$, porównano uzyskaną dokładność statyczną uzyskaną dla różnych macierzy wag. Najlepszą dokładność statyczną $\Delta c(\infty) = 0{,}7.10^{-7}$ zapewnia macierz

$$Q = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0{,}25.10^{-8} \end{bmatrix}$$

Dla tej macierzy otrzymuje się następujące współczynniki prawa sterowania (por. Dodatek II):

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}1617.10^{6} \\ -0{,}2954.10^{2} \end{bmatrix} \qquad (4.2.1)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} B_{d1} \\ 0{,}2181.10^2 \end{bmatrix} \qquad (4.2.2)$$

gdzie B_{d1} ze względu na fakt że $\Delta o_d = 0$, może być jakiekolwiek.

4.3. Adaptacja prawa sterowania

Stosując prawo sterowania określone współczynnikami (4.2.1) i (4.2.2) do reaktora w przypadku $\Delta k \neq 0$ uzyskuje się poważne pogorszenie dokładności regulacji. Aby temu zapobiec optymalne prawo sterowania powinno być zmieniane w miarę zmian Δk. Adaptacyjne prawo regulacji można uzyskać obliczając B i B_d przy użyciu zależności przedstawionych w p. 2.4 dla kolejnych wartości Δk. Obliczając metodą najmniejszych kwadratów aproksymację w postaci wielomianu stopnia trzeciego otrzymuje się:

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}1617.10^6 - 0{,}2606.10^5 \Delta k + 0{,}3825.10^3 (\Delta k)^2 + 0{,}8111.10^2 (\Delta k)^3 \\ -0{,}2954.10^2 - 0{,}02691 \Delta k + 0{,}2082.10^{-1} (\Delta k)^2 - 0{,}8977\ 10^{-3} (\Delta k)^3 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} B_{d1} \\ 0{,}2181.10^2 - 0{,}6318 \Delta k + 0{,}1983.10^{-1} (\Delta k)^2 + 0{,}999.10^{-3} (\Delta k)^3 \end{bmatrix}$$

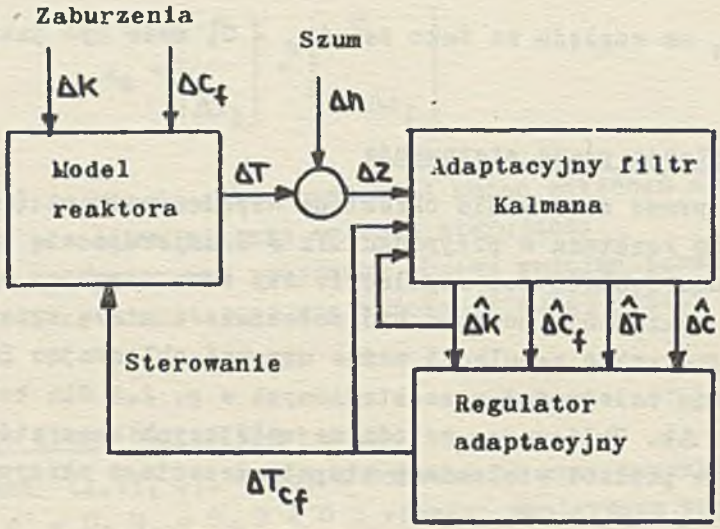
Korzystając z powyższych zależności można zapisać adaptacyjne prawo sterowania temperaturą czynnika chłodzącego w postaci:

$$\Delta T_{cf,n} = B.\ \Delta x_n + B_d\ \Delta x_d = B\ \Delta x_n + B_d\ \Delta o_f\ S \qquad (4.3.1)$$

5. Wyniki modelowania

Różnicowy model reaktora z uwzględnieniem nieliniowego wpływu Δk, adaptacyjny filtr Kalmana i adaptacyjny układ sterowania zostały zamodelowane na maszynie cyfrowej IBM 1130. Schemat blokowy modelowanego układu przedstawia rys. 5.1. Szum zakłóca-

jący pomiar temperatury miał charakter gaussowski o średniej równej zeru i wariancji R = 0,1. Układ badano przy skokowych



Rys. 5.1. Schemat blokowy modelowanego układu

zaburzeniach w postaci zmian Δk i Δc_f. Zadawalające estymaty Δc, ΔT i Δc_f osiągało się w zasadzie po trzeciej iteracji od momentu zainicjalizowania filtru. Estymacja Δk z powodu słabej zbieżności odpowiedniej wariancji wymagała znacznie więcej czasu i w zasadzie dopiero po dwóch reinicjalizacjach (40 iteracji) osiągało się wartość quasiustaloną, różną od rzeczywistej o błąd nieprzekraczający ok. 25%. Najważniejszym wskaźnikiem charakteryzującym pracę układu jest dokładność stabilizacji stężenia wyjściowego c. Dokładność ta przy zaburzeniach Δc_f rzędu 0,1 jest rzędu 10^{-5} (w stanie nieustalonym) i rzędu 10^{-6} (w stanie ustalonym), a więc blisko o dwa rzędy lepsza od teoretycznie możliwej do osiągnięcia przy stabilizacji temperatury reakcji.

Dodatek I

Filtr Kalmana

Problem: dla układu dynamicznego

$$x_{k+1} = \phi x_k + \Delta w_k$$

$$z_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1}$$

gdzie x_k jest wektorem n wymiarowym, z_k - wektorem m wymiarowym (przy czym $m < n$), a w_k i v_k są niezależnymi ciągami stochastycznymi o rozkładzie gaussowskim, należy określić optymalną estymatę $\hat{x}_k$ wartości x_k na podstawie pomiaru ciągu wektorów $z_1, z_2, \ldots, z_k$ oznaczanego przez Z^k.

Rozwiązanie przedstawionego problemu można uzyskać metodami probabilistycznymi, obliczając zależność rekurencyjną pomiędzy funkcją gęstości prawdopodobieństwa warunkowego a priori $p(x_k|Z^k)$ i uaktualnioną na podstawie (k+1)-ego pomiaru funkcją gęstości prawdopodobieństwa warunkowego a posteriori $p(x_{k+1}|Z^{k+1})$. Wymienioną relację można otrzymać z twierdzenia Bayes'a:

$$p(x_{k+1}|Z^{k+1}) = \frac{p(x_{k+1}Z^{k+1})}{p(Z^{k+1})}$$

oraz z pewnego wyniku teorii decyzji zgodnie z którymi minimalizację funkcji

$$\int \|x - \hat{x}\|^2 \, p(x|z) \, dx$$

osiąga się dla $\hat{x}$ będącego średnią zmiennej stochastycznej a posteriori $(x|z)$

$$\hat{x} = E(x|z)$$

Odpowiednie wyprowadzenie (por. Aoki [1]) doprowadza do następującego równania filtru Kalmana:

$$\hat{x}_{k+1} = \phi \hat{x}_k + K_k(z_{k+1} - H \phi \hat{x}_k)$$

gdzie wzmocnienie filtru K_k jest dane relacją rekurencyjną:

$$K_{k+1} = P_{k+1} H^T R^{-1}$$

i

$$P_{k+1} = M_{k+1} - M_{k+1} H^T(H M_{k+1} H^T + R)^{-1} H M_{k+1}$$

oraz

$$M_{k+1} = \phi P_k \phi^T + \Lambda Q \Lambda^T$$

gdzie R jest kowariancją szumu v_k, a Q - kowariancją szumu w_k.

Dodatek II

Prawo optymalnego sterowania

Problem: dla układu dynamicznego

$$x_{n+1} = \phi x_n + \Gamma u_n$$

należy znaleźć taki ciąg wektorów sterowania u_n $n = 0,1, \ldots$ by zminimalizować wskaźnik jakości

$$\sum_{n=0}^{N} \left[(x_n - x_d)^T Q(x_n - x_d) + u_n^T R u_n\right]$$

Stosując metodę programowania dynamicznego (por. Kalman-Englar [6]) otrzymuje się w przypadku $N \to \infty$ prawo optymalnego sterowania w postaci:

$$u_{n.opt} = B\, x_n + B_d\, x_d$$

gdzie B i B_d są granicami do których dąży dla $N \to \infty$ odpowiednio macierz B_N i B_{dN}, określone następującym układem równań rekurencyjnych:

$$B_N = -(R + \Gamma^T G_{N-1}\, \Gamma)^{-1}\, \Gamma^T\, G_{N-1} \phi \qquad \text{(A.I)}$$

$$B_{dN} = (R + \Gamma^T G_{N-1}\, \Gamma)^{-1}\, \Gamma^T\, U_{N-1} \qquad \text{A.II)}$$

gdzie

$$G_N = Q + B_N^T\, R\, B_N + (\phi + \Gamma B_N)^T\, G_{N-1} (\phi + \Gamma B_N) \qquad \text{(A.III)}$$

$$U_N = Q - B_N^T\, R\, B_{dN} - (\phi + \Gamma B_N)^T (G_{N-1}\, \Gamma B_{dN} - U_{N-1}) \qquad \text{(A.IV)}$$

$$S_N = Q + B_{dN}^T\, R\, B_{dN} + B_{dN}^T\, \Gamma^T (G_{N-1}\, \Gamma B_{dN} + U_{N-1}) + S_{N-1} \qquad \text{(A.V)}$$

przy warunkach początkowych:

$$G_o = 0, \quad U_o = 0, \quad S_o = 0$$

LITERATURA

[1] Aoki M.,- Optimization of stochastic systems, Academic Press, New York, 1967.

[2] Aris R. - Introduction to the analysis of chemical reactors, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[3] Deutsch R., - Estimation techniques, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[4] Joseph, P.D., Tou J.T. - On linear control, Trans AIEE, part II, vol. 80, 1961. str. 193-196.

[5] Kalman R.E., Englar T.S., - A user's manual for the automatic synthesis program, NASA Contractor Report, NASA CR-475, 1966.

[6] Niederliński A. - Adaptive control of a continuous stirred tank chemical reactor, Project for the Certificate of Postgraduate Study, University of Cambridge, 1968.

[7] Ogata K., - State space analysis of control systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[8] Sorenson H.W. - Kalman Filtering Techniques, w pracy Advances in Control Systems, Vol. 3, 1966, Academic Press.

[9] Sorenson H.W. - On the error behaviour in linear minimum variance estimation problems, IEE Trans. on Automatic Control, October 1967.