

Reginald Krzyżanowski  
Katedra Urządzeń  
i Układów Automatyki

## 2.5. TRANSFORMACJA $F = \exp [1-p^{-1}]$ I JEJ ZASTOSOWANIE DO WYZNACZANIA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH OBIEKTÓW CIEPLNYCH O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono pewien typ transformacji, podającej związek między układami o parametrach skupionych a układami o parametrach rozłożonych. Transformacja ta jest szczególnie przydatna dla wyznaczenia własności dynamicznych obiektów cieplnych. W artykule przedstawiono kilka przykładów zastosowania.

### 1. Podstawy teoretyczne

Wśród jednoparametrowych obiektów, zwłaszcza obiektów cieplnych, istnieją obiekty opisane pewną klasą równań różniczkowych, cząstkowych, liniowych, które po stransformowaniu według osasu, dla zerowych warunków początkowych, mogą być sprowadzone do postaci operatorowej (1):

$$\frac{dY(x,p)}{dx} = A(p) \cdot Y(x,p) \quad (1)$$

Przy warunkach brzegowych:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla: } x = 0 \quad Y(0,p) = Y_{we}(p) \\ \text{dla: } x = 1 \quad Y(1,p) = Y_{wy}(p) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Występująca w tych zależnościach współrzędna  $x$ , to względna, bezwymiarowa współrzędna długości, odniesiona do całkowitej długości rozpatrywanego obiektu. Obiekt opisany takim równaniem (1) jest obiektem o parametrach rozłożonych równomiernie

na długości. Wyrażenie operatorowe  $A(p)$ , niezależne od  $x, Y$ , powstające w wyniku transformacji według czasu, układu równań różniczkowych liniowych, po wyeliminowaniu innych zmiennych oprócz  $Y(x, p)$ , powinno spełniać dodatkowe warunki zapewniające stabilność rozwiązań równania (1). Warunki te są oczywiście spełnione dla rzeczywiście istniejących, praktycznych, stabilnych obiektów technicznych.

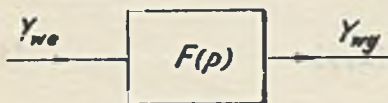
Rozwiązanie równania (1) przy warunkach brzegowych (2) ma postać:

$$Y_{wy}(p) = Y_{we}(p) \cdot \exp [A(p)]$$

Można zdefiniować transmitancję (funkcję przejścia) operatorową obiektu, opisanego równaniem (1) przy warunkach (2) jako:

$$F(p) = \frac{Y_{wy}(p)}{Y_{we}(p)} = \exp [A(p)] \quad (3)$$

Transmitancja ta informuje nas, jak sygnał wielkości wejściowej, jest przenoszony przez ten obiekt o parametrach rozłożonych (rys. 1).



Rys. 1

Takiemu obiektowi o parametrach rozłożonych, można przyporządkować odpowiadający mu obiekt o parametrach skupionych, opisany równaniem operatorowym (4), powstającym tak, że w miejsce  $Y(x, p)$  wsta-

wiamy w równaniu (1), wyrażenie niezależne od  $x$  mianowicie  $Y_k(p)$ , a w miejsce  $\frac{dY(x, p)}{dx}$  wstawiamy różnicę  $Y_k(p) - Y_p(p)$ <sup>x)</sup>

$$Y_k(p) - Y_p(p) = A(p) Y_k(p) \quad (4)$$

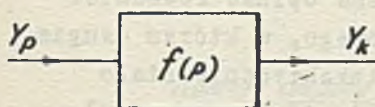
<sup>x)</sup> Uwaga: ściślej powinniśmy wstawić  $\frac{Y_k(p) - Y_p(p)}{1}$ , to znaczy różnicę podzieloną przez oalkowitą długość, która w jednostkach względnych jest równa 1.



Obiekt opisany równaniem (4) jest obiektem o parametrach skupionych na długości  $x$  (nie zależy  $Y_k(p)$  od  $x$ , a różni się tylko dla  $x = 0$  (na początku obiektu), gdzie wynosi  $Y_p(p)$ ). Dla takiego obiektu możemy zdefiniować transmitancję jako:

$$f(p) = \frac{Y_k(p)}{Y_p(p)} = \frac{1}{1-A(p)} \quad (5)$$

Transmitancja  $f(p)$  informuje nas o przenoszeniu sygnałów przez obiekt o parametrach skupionych (rys. 2).



Rys. 2

Oczywiście wyrażenie  $f(p)$  musi spełniać warunki stabilności (wszystkie bieguny  $f(p)$  muszą mieć ujemną część rzeczywistą), co zapewnia np. realizowalność pomiaru charakterystyki amplitudowo-fazowej  $f(j\omega)$ .

Pomiędzy transmitancją (funkcją przejścia) obiektu o parametrach skupionych a transmitancją obiektu o parametrach rozłożonych, istnieje w oparciu o wzory (3) i (5) prosta relacja:

$$F(p) = \exp[1 - f(p)^{-1}] \quad (6)$$

Wzór (6) stanowi pewną transformację (przekształcenie), która przekształca transmitancję obiektu o parametrach skupionych, danego wzorem (4), w transmitancję analogicznego co do wymiarów obiektu, ale traktowanego jako obiekt o parametrach rozłożonych na długości.

Jeśli w miejsce  $p$  podstawimy  $j\omega$ , to zależności będą obowiązywać nadal i będą podawać związek między odpowiadającymi sobie punktami charakterystyk amplitudowo-fazowych obiektu skupionego i obiektu o parametrach rozłożonych. Ostatnią zależność można wykorzystać praktycznie budując np. model elektryczny aparatu cieplnego, traktowanego jako układ o parametrach skupionych, mierząc znanymi metodami charakterystykę amplitudowo-fazową  $f(j\omega)$ , a następnie korzystając z transformacji (6), wyznaczyć charakterystykę rzeczywistą obiektu o parame-



trach rozłożonych. Wykonanie wprost modelu o parametrach rozłożonych jest utrudnione, model taki można wykonać dzieląc cały aparat na kilkanaście lub kilkadziesiąt części, stosować potrzeba elektronowe separatory i trzeba przeprowadzić skomplikowaną dyskusję dokładności modelowania. Model obiektu o parametrach skupionych jest prosty, składa się z niewielkiej liczby elementów biernych (oporów elektrycznych i kondensatorów) i co najważniejsze nie wymaga stosowania skomplikowanych separatorów. Metoda ta została przedstawiona przez autora na IV Krajowej Konferencji Automatyki [1] i rozpracowana szczegółowo dla przegrzewacza pary [2].

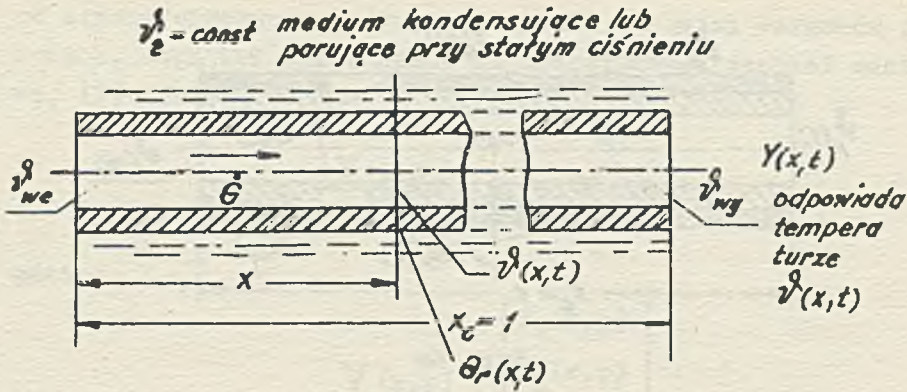
Typowymi obiektami cieplnymi, które można opisać równaniem (1) są np. fragment wymiennika ciepła rurowego, w którym drugie medium ulega kondensacji lub odparowaniu (praktycznie stała temperatura 2 medium przy stałym ciśnieniu), izolowana ciepłonie rura instalacji doprowadzającej parę lub ciecz, regulacyjny odcinek przegrzewacza pary itp. Są to obiekty z wymuszonym, turbulentnym przepływem medium w aparacie o dominującym wymiarze w kierunku przepływu medium (dużym stosunku wymiaru podłużnego do poprzecznego). Schematycznie na rys. 3 przedstawiono kolejno: fragment wymiennika ciepła ze zmianą stanu skupienia drugiego medium (rys. 3a), odcinek izolowanej rury instalacji technologicznej (rys. 3b) i regulacyjny wycinek przegrzewacza pary (rys. 3c).

W tych aparatach temperatura czynnika płynącego odpowiada  $Y(x,t)$ .

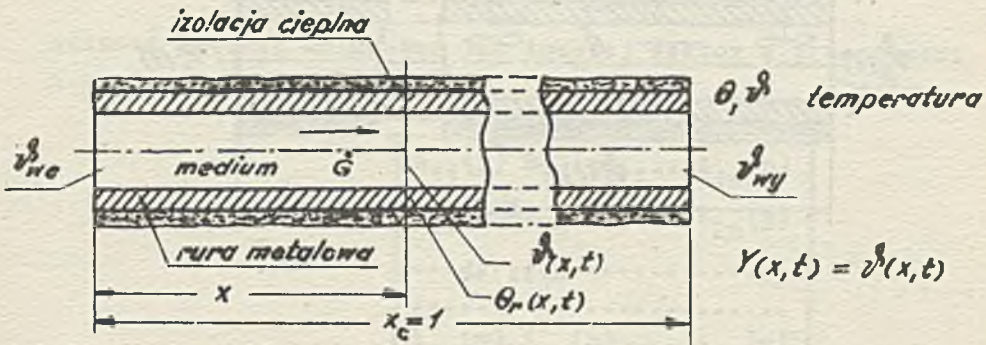
Na rys. 4a,b,c, przedstawiono kolejno te same aparaty traktowane jako obiekty o parametrach skupionych na długości (z idealnym mieszaniem na długości aparatu).

Postępująco podobnie można dla obiektów wieloparametrowych (o kilku wejściach i wyjściach), przedstawić zależności pozwalające ustalić związek między obiektami o parametrach skupionych, a obiektami traktowanymi jako układy o parametrach rozłożonych. Dla obiektów wielowejsciowych (wielowymiarowych), należy posłużyć się zapisem macierzowym.

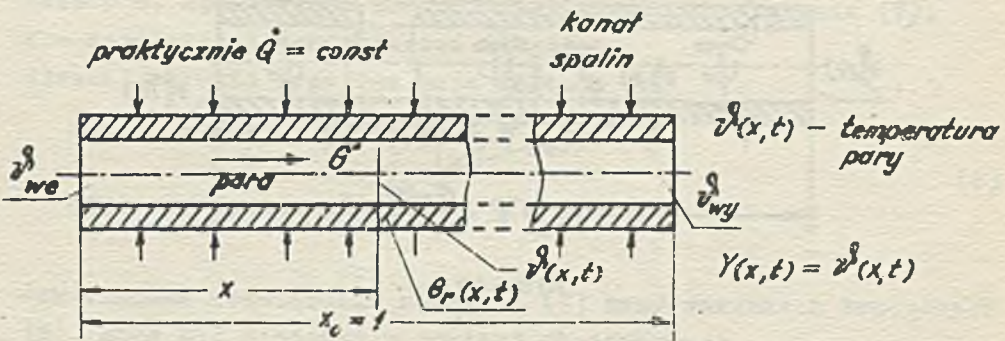
Wśród obiektów wielowymiarowych istnieją obiekty opisane pewną klasą równań różniczkowych cząstkowych, liniowych, które



Rys. 3a

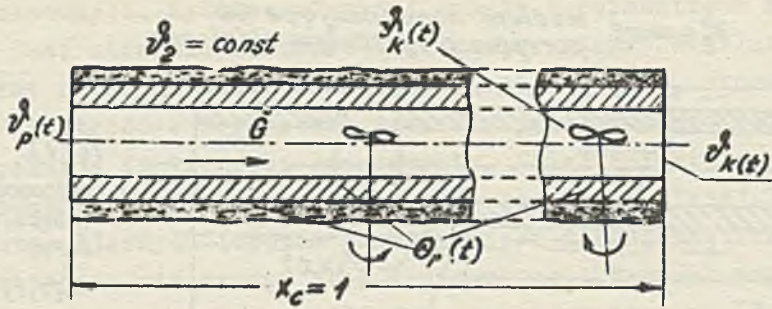


Rys. 3b

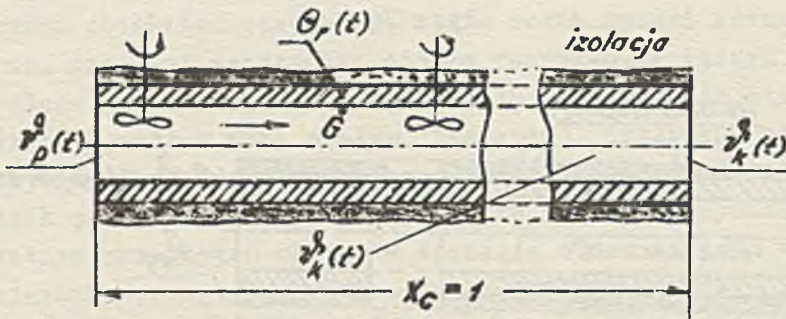


Rys. 3c

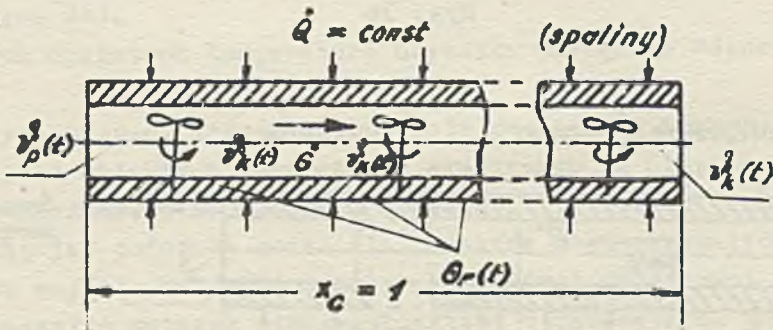




Rys. 4a



Rys. 4b



Rys. 4c

po transformowaniu według osasu, dla zerowych warunków początkowych, mogą być sprowadzone do operatorowej postaci macierzowej (7)

$$\frac{dY(x,p)}{dx} = A(p) Y(x,p) \quad (7)$$

gdzie:

$$Y(x,p) = \begin{bmatrix} Y_1(x,p) \\ Y_2(x,p) \\ \dots \\ Y_n(x,p) \end{bmatrix}$$

stanowi macierz kolumnową lub inaczej wektor w przestrzeni n-wymiarowej.

$$A(p) = \begin{bmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) & \dots & A_{1n}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) & \dots & A_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(p) & A_{n2}(p) & \dots & A_{nn}(p) \end{bmatrix}$$

stanowi macierz kwadratową, której wyrazami są wyrażenia operatorowe, spełniające warunki stabilności rozwiązania (7).

$x$  - współrzędna bezwymiarowa długości.

Niechaj warunki brzegowe mają postać:

$$\text{dla: } x = 0 \quad Y(0,p) = Y_{we}(p) \quad (8)$$

$$\text{dla: } x = 1 \quad Y(1,p) = Y_{wy}(p)$$

Jak wiadomo rozwiązanie równania (7) przy warunkach brzegowych (8), może być zapisane w postaci macierzowej:

$$Y_{wy}(p) = \exp[A(p)] Y_{we}(p)$$



gdzie:  $\exp[\mathbf{A}]$  jest macierzą kwadratową stopnia  $n$  i może być wyznaczona gdy znamy  $\mathbf{A}$ , jako:

$$\exp[\mathbf{A}] \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

lub stosując wzór Sylwestra.

Można zdefiniować macierz transmitancji:

$$\mathbf{F}(p) = \exp[\mathbf{A}(p)] \quad (9)$$

Wyrazami tej macierzy transmitancji są transmitancje operatorowe między poszczególnymi wejściami  $Y_{1we}(p)$ , a sygnałami wyjściowymi  $Y_{jwy}(p)$

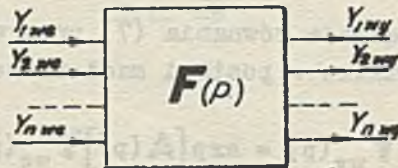
$$Y_{jwy}(p) = F_{ji}(p) \cdot Y_{iwe}(p)$$

Jeśli przyjąć odpowiadający temu obiektowi, opisanemu równaniem (7) i warunkami (8), obiekt skupiony opisany w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Y}_k(p) - \mathbf{Y}_p(p) = \mathbf{A}(p) \mathbf{Y}_k(p) \quad (10)$$

$$[\mathbf{1} - \mathbf{A}(p)] \mathbf{Y}_k(p) = \mathbf{Y}_p(p) \quad (10')$$

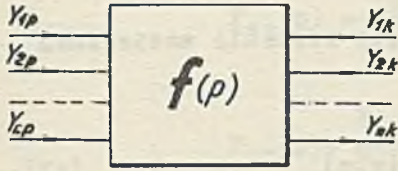
$$\mathbf{Y}_k(p) = \mathbf{f}(p) \cdot \mathbf{Y}_p(p) \quad (11)$$



Rys. 5



Macierz  $f(p)$  - nazywamy macierzą transmitancji obiektu skupionego. O macierzy kwadratowej stopnia  $n$  należy założyć, że jest to macierz nieosobliwa (rys. 6).



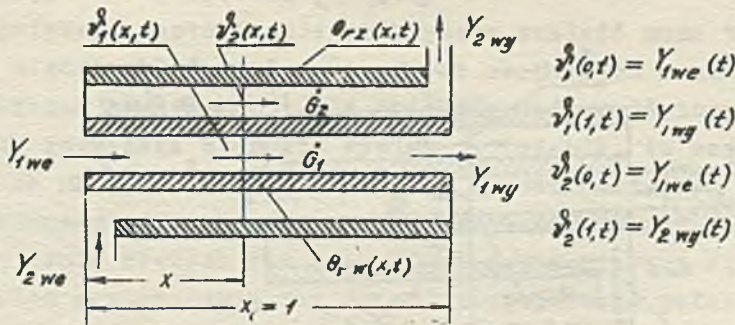
Rys. 6

Korzystając z (11), (10') i (9) otrzymuje się związek między macierzą transmitancji obiektu o parametrach skupionych i macierzą transmitancji tego samego obiektu traktowanego jak układ o parametrach rozłożonych.

$$F(p) = \exp [1 - f(p)^{-1}] \quad (12)$$

Otrzymuje się wzór macierzowy analogiczny do wzoru (6) (dla obiektów jednowejściowych).

Ostatni związek może być praktycznie wykorzystany do wyznaczenia własności dynamicznych bardzo popularnych w przemyśle aparatów, jakimi są rurowe dwumediowe wymienniki ciepła. Dla współprądowego wymiennika ciepła typu "rura w rurze", macierzowa zależność (12) podaje związek między transmitancjami wymiennika analogicznego, ale traktowanego jako układ o parametrach skupionych na długości, a transmitancjami rzeczywistymi wymiennika o parametrach rozłożonych na długości (rys. 7).



Rys. 7

Ponieważ wymienniki o parametrach rozłożonych wyróżniają kierunki przepływu mediów (współprąd lub przeciwpład), a wymiennik traktowany jako układ o parametrach skupionych nie jest w stanie tego wyróżnić, dla wymienników przeciwpładowych należy wprowadzić pewną modyfikację.

Dla przeciwpładowego wymiennika ciepła równanie macierzowe ma postać:

$$\frac{d\mathbf{Y}(x,p)}{dx} = \mathbf{A}_m(p) \mathbf{Y}(x,p) \quad (13)$$

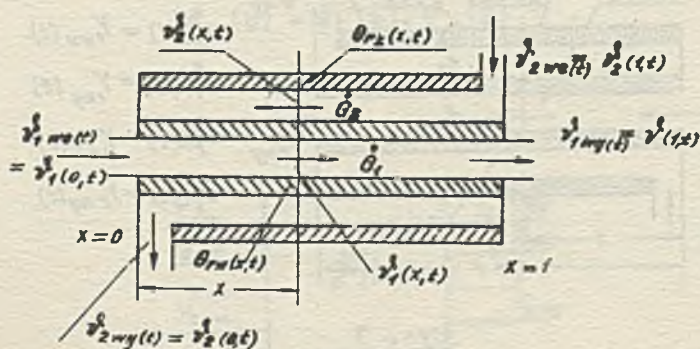
gdzie zmodyfikowana macierz  $\mathbf{A}_m(p)$  jest macierzą, której wyrazy pierwszego wiersza są identyczne z wyrazami macierzy  $\mathbf{A}(p)$ , a wyrazy drugiego wiersza macierzy  $\mathbf{A}_m(p)$  mają przeciwny znak do odpowiednich wyrazów macierzy  $\mathbf{A}(p)$  tzn.  $A_{1jm}(p) = A_{1j}(p)$ ;  $A_{2jm}(p) = -A_{2j}(p)$ .

Warunki brzegowe wymiennika przeciwpładowego są następujące (rys. 8)

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla: } x = 0 \quad Y_1(0,p) = Y_{1we}(p); \quad Y_2(0,p) = Y_{2wy}(p) \\ \text{dla: } x = 1 \quad Y_1(1,p) = Y_{1wy}(p); \quad Y_2(1,p) = Y_{2we}(p) \end{array} \right\} (14)$$

Obowiązuje dla równania (13) zależność:

$$\mathbf{Y}(1,p) = \exp[\mathbf{A}_m(p)] \mathbf{Y}(0,p)$$



Rys. 8



Zmodyfikowana macierz  $\exp [A_m(p)]$  podaje związek pomiędzy sygnałami  $Y_1, Y_2$  na początku, a sygnałami  $Y_1, Y_2$  na końcu wymiennika. Macierz tę można oznaczyć przez  $F_m(p)$ . Związek między wyrazami macierzy transmitancji, a macierzy  $F_m$ , można podać w oparciu o zależności (14). Można zapisać je w postaci:



$$\left. \begin{aligned} F_{11}(p) &= \frac{F_{11m}(p)F_{22m}(p) - F_{12m}(p)F_{21m}(p)}{F_{22m}(p)} \\ F_{12}(p) &= \frac{F_{12m}(p)}{F_{22m}(p)} \\ F_{21}(p) &= -\frac{F_{21m}(p)}{F_{22m}(p)} \\ F_{22}(p) &= \frac{1}{F_{22m}(p)} \end{aligned} \right\} (15)$$

Metoda ta jest szczególnie wygodna dla nietypowych poprzecznych kształtów geometrycznych wymienników ciepła. Można wtedy zastosować metodę modelowania obiektu skupionego za pomocą tzw. analizatorów polowych (analizatorów siatkowych) lub inaczej mówiąc za pomocą sieci oporowo-pojemnościowej [3], [4], [2], [1].

W tabelicy T.1 zestawiono zależności dla układów jednowęściowych (jednoparametrowych) i wielowęściowych (wieloparametrowych).

Największe zastosowanie praktyczne znaleźć może transformacja między układami o parametrach skupionych a układami o parametrach rozłożonych, dla obiektów jednowęściowych. Jeśli obiekty rozważane stanowią wymienniki ciepła, to wzmożeni w takich układach jest nie większe od jedności [2]. Dla obiektów jednowęściowych można przedstawić na płaszczyźnie Grassa  $f(j\omega)$  linie równych faz i amplitud z płaszczyzny  $F(j\omega)$ , pod warunkiem ograniczenia się do najwyżej jednego pełnego obiegu początku układu na płaszczyźnie  $F(j\omega)$ .

Tablica 1

	Układy jednowejściowe (jednoparametrowe)	Układy wielowejściowe (wieloparametrowe)
Transmitancja układu skupionego (macierz transm.)	$f(p)$	$f(p)$
Transmitancja układu o parametrach rozłożonych (macierz)	$F(p)$	$F(p)$
Transformacja przekształcająca układ o par. skupion. w układ o par. rozł.	$F(p) = \exp [1 - f(p)^{-1}]$	$F(p) = \exp [1 - f(p)^{-1}]$
Przykład technologiczny	 <p>Przegrzewacz pary</p>	 <p>Współprądowy rurowy wymiennik ciepła</p>

Jeśli oznaczyć  $\varphi$  - kąt fazowy w radianach na płaszczyźnie  $F(j\omega)$ , a  $A$  - amplitudę wyrażenia  $F(j\omega)$  na płaszczyźnie  $F(j\omega)$ , to w óparciu o zależność (6) dla  $|\varphi| < 2\pi$ , można zapisać

$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2\varphi}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\varphi}\right)^2$$

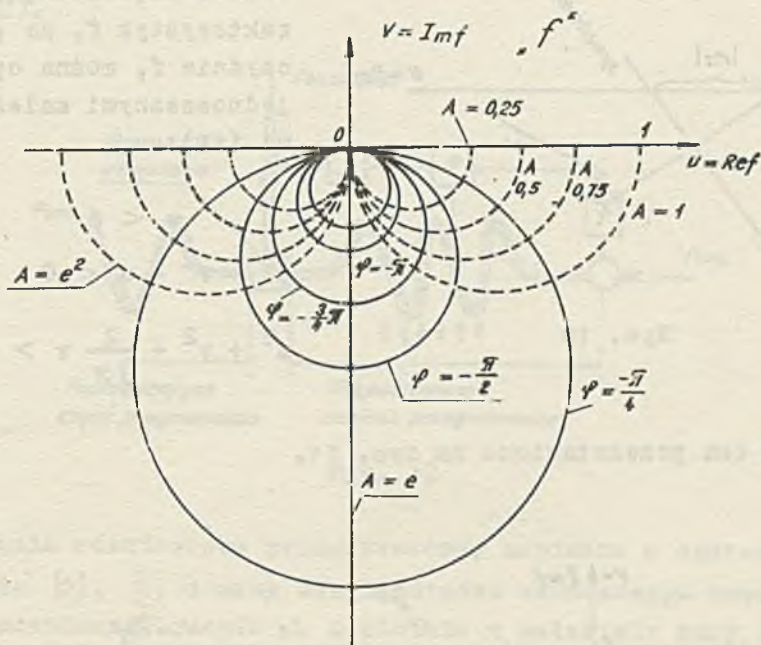
$$\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$
(16)

gdzie:  $A = e^{1-a}$ ;  $u = \text{Re}f$ ;  $v = \text{Im}f$ .

Są to okręgi przechodzące przez początek układu, których środki leżą kolejno na osiach  $v$ ,  $u$ , a ich promienie są odpowiednio równe  $\left|\frac{1}{2\varphi}\right|$ ;  $\left|\frac{1}{2a}\right|$ . Podaje to rys. 9.



Zależności (16) pozwalają podać prostą i wygodną metodę przeniesienia punktów z płaszczyzny  $f(j\omega)$ , na odpowiadające



Rys. 9

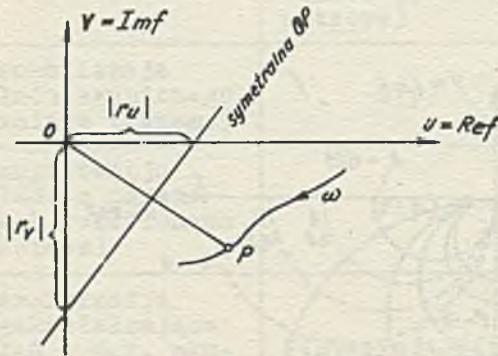
im punkty charakterystyki na płaszczyźnie  $F(j\omega)$ . W tym celu dany punkt  $P$  charakterystyki  $f$ , łączy się prostą z początkiem układu współrzędnych i do tak powstałego odcinka  $OP$  wystawia się symetralną, która przecina półosie  $OU$  i  $OV$  odpowiednio w punktach o współrzędnych:  $r_u, r_v$  (rys. 10).

Między tymi wielkościami, a współrzędnymi biegunowymi punktu charakterystyki  $F$  istnieją relacje:

$$\varphi = \frac{1}{2r_v}; \quad A = e^{1 - \frac{1}{2r_u}} \quad (17)$$

Dla obiektów, w których wzmocnienie dla dowolnej częstotliwości jest mniejsze od jedności oraz gdy ograniczymy się do wy-

znaczenia charakterystyki  $F$  w trzech pierwszych ćwiartkach płaszczyzny Gaussa, licząc w kierunku matematycznie ujemnym, (naj-

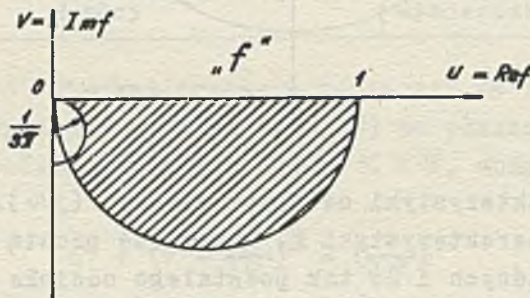


Rys. 10

bardziej istotne dla potrzeb automatyki [2]), to obszar odpowiadających charakterystyk  $f$ , na płaszczyźnie  $f$ , można opisać jednocześnie zależnościami (18):

$$\left. \begin{aligned} v &< 0 \\ u^2 + v^2 - u &< 0 \\ u^2 + v^2 + \frac{2}{3\pi} v &> 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

Obszar ten przedstawiono na rys. 11.



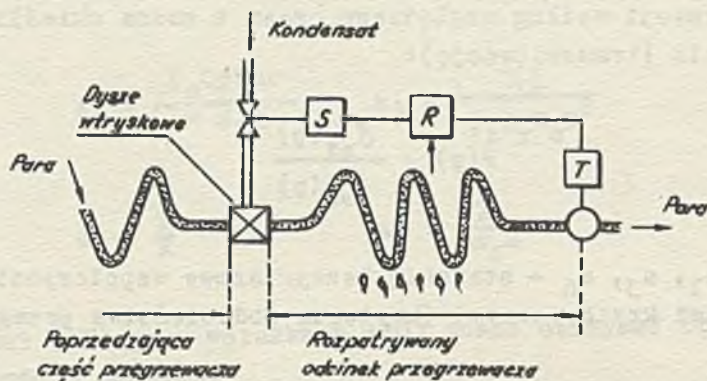
Rys. 11

## 2. Przykłady

Zależność (6) może być wykorzystana przy wyznaczaniu własności dynamicznych przegrzewacza pary, nawet uwzględniając skończony współczynnik przewodzenia ciepła radialnie w materiale rury przegrzewacza [2], [1]. Znajomość charakterystyki amplitudo-fazowej od zmiany temperatury pary na wlocie do regulacyjnego wycinka przegrzewacza pary do zmiany temperatury na wy-



locie, jest najważniejsza przy doborze układu regulacji temperatury pary sterowanej poprzez zmiany wtrysku kondensatu [2] (rys. 12).



Rys. 12

Równania różniczkowe przegrzewacza, napisane w oparciu o założenia [5], [6] i przy uwzględnieniu skożozonego współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  radialnie w materiale rury [2], przy założeniu tylko zmiany temperatury na wlocie do regulacyjnej oszłości przegrzewacza, mają postać:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} \right] a_1 + \vartheta(x,t) - \theta_x(x,t) = 0 \\ & a_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \frac{\partial \theta(x,t,\eta)}{\partial \eta} \right] = \eta \frac{\partial \theta(x,t,\eta)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

przy warunkach brzegowych:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } \eta = 1 & \quad \frac{\partial \theta(x,t,\eta)}{\partial \eta} = 0 \\ \text{dla } \eta = a_5 & \quad \theta(x,t,\eta) = \theta_x(x,t) \\ \text{dla } \eta = a_5 & \quad a_6 \frac{\partial \theta(x,t,\eta)}{\partial \eta} = \theta_x(x,t) - \vartheta(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } x = 0 \quad \vartheta(0, t) = \vartheta_{we}(t) \\ \text{dla } x = 1 \quad \vartheta(1, t) = \vartheta_{wy}(t) \end{array} \right\} \quad (20)$$

Po transformacji według względnego czasu  $t$  można określić funkcję przejścia (transmitancję):

$$F(p) = \frac{\vartheta_{wy}(p)}{\vartheta_{we}(p)} \quad (21)$$

gdzie  $a_1, a_3, a_5, a_6$  - stanowią bezwymiarowe współczynniki będące liczbami kryterialnymi (kryteria podobieństwa przegrzewaczy),

- $\vartheta$  - temperatura względna pary,
- $\Theta$  - " " rury,
- $\Theta_r$  - " wewnętrznej powierzchni rury,
- $x$  - współrzędna geometryczna podłużna względna  $x = \frac{\xi}{L}$
- $\xi$  - długość [m],
- $t$  - czas względny  $t = \frac{\tau}{T_k}$ ;  $T_k = \frac{L}{W_0}$ ;  $\tau$  - czas [s],
- $L$  - ośkowita długość rozpatrywanego regulacyjnego wycinka przegrzewacza [m],
- $W_0$  - średnia prędkość pary [m/s]
- $\eta$  - współrzędna geometryczna radialna względna  $\eta = \frac{g}{R}$ ,
- $R$  - zewnętrzny promień rury [m],
- $r$  - wewnętrzny promień rury [m],
- $\varrho$  - promień bieżący [m],
- $C_p$  - ciepło właściwe pary  $\left[ \frac{J}{kg \text{ deg}} \right]$ ,
- $C_r$  - ciepło właściwe materiału rury  $\left[ \frac{J}{kg \text{ deg}} \right]$ ,
- $\gamma_p$  - gęstość pary  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ ,
- $\gamma_r$  - gęstość materiału rury  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ ,



$\lambda$  - współczynnik przewodności właściwej materiału rury

$$\left[ \frac{\text{J}}{\text{smdeg}} \right],$$

$\alpha_0$  - współczynnik wnikania ciepła między parą a rurą  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{sm}^2 \text{deg}} \right]$

$$a_1 = \frac{\gamma_p C_p W_0 r}{2 \alpha_0 L}$$

$$a_3 = \frac{\lambda L}{\gamma_r C_r W_0 R^2}$$

$$a_5 = \frac{r}{R}$$

$$a_6 = \frac{\lambda}{\alpha_0 R}$$

Z równań (19) przy warunkach (20) można otrzymać operatorową zależność o postaci:

$$\frac{d \psi(x, p)}{dx} = A(p) \psi(x, p)$$

gdzie:

$$A(p) = -p - \frac{C(p)}{a_1 [1+C(p)]}$$

$$C(p) = a_6 k_2 \frac{Y_0'(k_1) J_0'(k_2) - J_0'(k_1) Y_0'(k_2)}{J_0(k_1) Y_0'(k_2) - Y_0(k_1) J_0'(k_2)}$$

$$k_1 = a_5 j \sqrt{\frac{p}{a_3}}; \quad k_2 = j \sqrt{\frac{p}{a_3}} \quad j^2 = -1$$

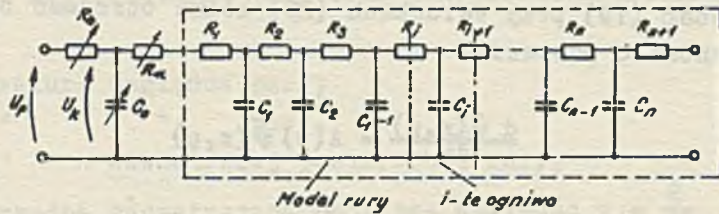
$p$  - operator względnego czasu.

$J_0, Y_0$  - funkcje Bessela zerowego rzędu pierwszego i drugiego rodzaju,

$J_0', Y_0'$  - ich pochodne podług argumentu.

Korzystając z zależności poprzednich i wstawiając w miejsce  $p$ ,  $j\omega$ , można by teoretycznie wyliczyć charakterystykę amplitudowo-fazową. Takie postępowanie jest jednak zbyt uciążliwe. Wygodniej wykonać model elektryczny jak na rys. 13, dzieląc oś rurę w kierunku radialnym na  $n$  warstw pierścieniowych (ale nie dzieląc w kierunku wzdłużnym) i modelując przez wykorzystanie analogii ciepłno-elektrycznych: temperatura odpowiada potencjałowi elektrycznemu, natężenie strumienia ciepła - natężeniu prądu elektrycznego [2], [1].

Model na rys. 13 jest modelem odpowiadającym układowi o parametrach skupionych na długości i jeśli pomiarowo wyznaczyć



Rys. 13

charakterystykę  $f(j\omega) = \frac{U_k(j\omega)}{U_p(j\omega)}$ , można przez zależność (6) przejść na rzeczywistą charakterystykę przegrzewacza  $F(j\omega)$ . Model ma skróconą skalę czasu w stosunku do obiektu, co pozwala zastosować, dokładne i wygodne metody pomiarowe stosowane przy przebiegach o częstotliwościach akustycznych. Sposób podziału rury i wartości przyjętych pojemności i oporności oraz opis metod pomiarowych można znaleźć w [2] a częściowo w [1].

Innym przykładem może być zastosowanie takiego postępowania dla wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej dwumiedziowego, współprądowego wymiennika ciepła typu "rura w rurze" jak na rys. 7. Przy założeniu dla rur tylko pojemności cieplnych a przy pominięciu oporności cieplnej ( $\lambda = \infty$ ), rów-



nania takiego wymiennika mają postać w wielkościach bezwymiarowych [7]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} &= -a_1 (\vartheta_1 - \Theta_{rw}) \\ \frac{\partial \Theta_{rw}}{\partial t} &= -b_1 (\Theta_{rw} - \vartheta_1) - b_2 (\Theta_{rw} - \vartheta_2) \\ r \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} &= -a_2 (\vartheta_2 - \Theta_{rw}) - a_3 (\vartheta_2 - \Theta_{rz}) \\ \frac{\partial \Theta_{rz}}{\partial t} &= -b_3 (\Theta_{rz} - \vartheta_2) \end{aligned} \right\} (22)$$

gdzie  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, r$  - bezwymiarowe współczynniki będące liczbami kryterialnymi (kryteriami podobieństwa wymienników ciepła).

- $\vartheta_1, \vartheta_2$  - temperatury mediów,
- $\Theta_{rw}, \Theta_{rz}$  - temperatury rury: wewnętrznej i zewnętrznej,
- $x$  - bezwymiarowa wsp. długości  $\frac{x}{L} = x$ ,
- $t$  - bezwymiarowy czas  $t = \frac{\tau}{T_k}, T_k = \frac{L}{W_1}$ ,
- $W_1$  - prędkość średnia medium 1 [m/s],
- $W_2$  - " " " 2 [m/s],
- $d_1$  - średnica wewnętrzna rury wewnętrznej [m],
- $d_2$  - " zewnętrzna rury " [m],
- $d_3$  - " wewnętrzna rury zewnętrznej [m],
- $d_4$  - " zewnętrzna rury " [m],
- $L$  - całkowita długość wymiennika [m],
- $\alpha_1$  - współczynnik wnikania ciepła do rury wewnętrznej od medium 1  $\left[ \frac{J}{sm^2 deg} \right]$ ,

$\alpha_2$  - współczynnik wnikania ciepła do rury wewnętrznej od strony medium 2  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{s m}^2 \text{deg}} \right]$ ,

$\alpha_3$  - współczynnik wnikania ciepła do rury zewnętrznej  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{s m}^2 \text{deg}} \right]$ ,

$C_1, C_2$  - ciepła właściwe medium 1 i 2  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg deg}} \right]$ ,

$C_{rw}, C_{rz}$  - ciepło właściwe materiału rury wewnętrznej i zewnętrznej  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg deg}} \right]$ ,

$G_{rw}, G_{rz}$  - masa rury wewnętrznej i zewnętrznej [kg],

$G_1, G_2$  - masa medium 1 i 2 w wymienniku [kg],

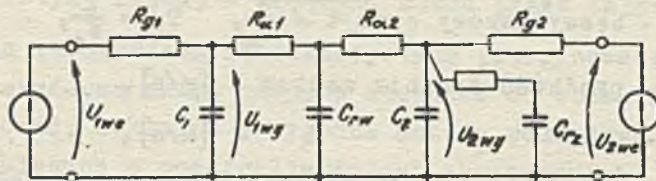
$\dot{G}_1, \dot{G}_2$  - przepływy masowe medium 1 i 2  $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$ ,

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \pi d_1 L}{\dot{G}_1 C_1} \quad a_2 = \frac{\alpha_2 \pi d_2 L}{\dot{G}_2 C_2} \quad a_3 = \frac{\alpha_3 \pi d_3 L}{\dot{G}_2 C_2}$$

$$b_1 = \frac{\alpha_1 \pi d_1 L}{G_{rw} C_{rw}} T_k \quad b_2 = \frac{\alpha_2 \pi d_2 L}{G_{rw} C_{rw}} T_k \quad b_3 = \frac{\alpha_3 \pi d_3 L}{G_{rz} C_{rz}} T_k$$

$$r_1 = \frac{W_1}{W_2}$$

Po transformacji i wyrugowaniu  $\Theta_{rw}, \Theta_{rz}$ , równanie operatorowe ma postać macierzową (7).



Rys. 14

Model elektryczny układu skupionego przedstawiono na rys. 14.

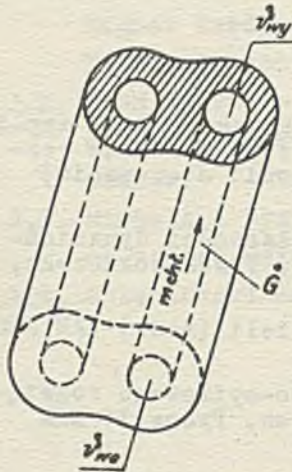
Mierząc kolejno  $\frac{U_{1wy}(j\omega)}{U_{1we}(j\omega)} = f_{11}(j\omega)$ ,  $\frac{U_{1wy}(j\omega)}{U_{2we}(j\omega)} = f_{12}(j\omega)$

itd., można wyznaczyć macierz  $f(j\omega)$ , a przenosząc punkty na płaszczyznę  $F$  (np. dla konkretnego  $\omega$  stosując wzór Sylwestra) otrzymać można łatwo macierz  $F(j\omega)$ .



Można również w modelu uwzględnić skończone  $\lambda$  materiału rur, wymaga to tylko podobnej sieci jak dla przegrzewacza.

Metoda ta jest szczególnie przydatna dla nietypowych kształtów poprzecznych wymiennika ciepła. Np. jak na rys. 15.



Rys. 15

Taki nietypowy kształt ma np. wymiennik reaktora jądowego. Ponieważ w takim reaktorze strumień ciepły reakcji jądowej zależy od pochłaniania neutronów, a praktycznie nie zależy od temperatury medium chłodzącego, więc gdy chcielibyśmy wyznaczyć trans-

mitanoję  $\frac{v_{mohł.wy}}{v_{mohł.we}}$ , możemy to łatwo wykonać modelując układ cieplny przez zastosowanie tzw. analizatorów polowych (dzieląc na wycinki w kierunku poprzecznym) i przyjmując układ analogowy elektryczny, składający się z zespołu oporków i pojemności. Należy zaznaczyć, że gdybyśmy chcieli mode-

lować układ o parametrach rozłożonych na długości (wzdłuż medium przepływającego), to poszczególne segmenty sieci musielibyśmy separować poprzez wzmacniacze np. lampowe, co powodowałoby nieporównywalne podrożenie modelu.

Na zakończenie warto poruszyć problem dokładności takiej metody. Ponieważ dokonujemy pomiaru na innym skupionym modelu i analitycznie przechodzimy na wielkości rzeczywiste punktów charakterystyki  $F$ , należy podać jak wpływa uchyb wyznaczenia  $f$  na uchyb  $F$ .

Definiując uchyb pomiaru punktu charakterystyki amplitudowo-fazowej jako  $d_1 = \left| \frac{\Delta F_{MAX}}{F} \right|$  a charakterystyki  $F$  jako  $d > \left| \frac{\Delta F_{MAX}}{F} \right|$  można podać zależność dla relacji (6)

$$d = \sqrt{1 + e^{2B} - 2e^B \cos Z}$$

gdzie  $Z = \frac{d_1}{|1-d_1|}$  dla  $d_1 < 1$ ;  $Z < \pi$



Wyprowadzenie tych zależności można znaleźć w [2]. Dla dużych dokładności pomiaru ( $d_1$ ) $f$ , ( $d_1$  może być nawet w granicach 0,5%) uzyskuje się wystarczającą dokładność wyznaczenia charakterystyki  $F$ .

## LITERATURA

- [1] Krzyżanowski R. - Metoda wyznaczania charakterystyk amplitudowo-fazowych pewnego typu obiektów o parametrach rozłożonych. Prace IV KKA T. 1 (sekcja teorii sterowania) str. 215-232, Kraków 1967.
- [2] Krzyżanowski R. - Metoda wyznaczania własności dynamicznych grubościennych przegrzewaczy pary. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1965.
- [3] Gutenmaoher L.J. - Elektrischeske modielei (ros.) IAN SSSR Moskwa 1949.
- [4] Auer A. - Wybrane zagadnienia analogowo-cyfrowego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Prace IV KKA T. 4 str. 7-13, Kraków 1967.
- [5] Profos P. - Die Regelung von Dampfanlagen. Berlin Springer 1962.
- [6] Takahashi Y. - Regeltechnische Eigenschaften von Gleich- und Gegenstromwärmeaustauschern. Regelungstechnik 1953, Heft 2.
- [7] Krzyżanowski R. - Temperaturowe funkcje przejścia wymiennika ciepła. Praca dyplomowa magisterska, Gliwice 1958 (niepublikowane).

TRANSFORMATION  $F = \exp [1-f^{-1}]$  AND ITS APPLICATION IN DETERMINATION OF DYNAMIC PROPERTIES OF DISTRIBUTED PARAMETERS THERMAL PROCESSES

## S u m m a r y

In the paper a transformation was presented, which determines the interrelation between systems of concentrated parameters and those of distributed parameters. The transformation is particularly useful in determination of dynamic properties of thermal processes. Application of the transformation was illustrated with several examples.