ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: AUTOMATYKA z. 14 Nr kol. 267

R.S. Michalski
Instytut Automatyki PAN

3.3. MINIMALIZACJA FUNKCJI LOGICZNYCH ZA POMOCĄ METODY POKRYCIA

Wstęp

Tzw. problem pokrycia, czyli problem "pokrywania" zadanego zbioru obiektów pewnymi jego podzbiorami tak, aby uzyskać minimum przyjętej funkcji celu, jest jednym z podstawowych problemów syntezy automatów cyfrowych. Problem tego rodzaju występuje na przykład przy syntezie układów logicznych (automatów jednostanowych[1]) opisywanych minimalnymi normalnymi wyrażeniami funkcji logicznej zarówno jedno- jak i wielowyjściowej, minimalnymi wyrażeniami funkcji w innych systemach zupełnych jak "NOR" lub"NAND" itp. Ponieważ synteza automatów wielostanowych (wielotaktowych[2]) sprowadza się na ostatnim etapie do syntezy automatów jednostanowych, więc problem ten jest ważny również dla syntezy dowolnych automatów. Problem pokrycia występuje także w szeregu zagadnieniach poza dziedziną teorii automatów, jak na przykład przy sterowaniu sieciami łączności, w badaniach operacyjnych, w niektórych zagadnieniach ekonomicznych, w zagadnieniach rozpoznawania.

Jak wynika z ostatnich prac, na przykład [1], ścisłe rozwiązanie problemu pokrycia już nawet przy niewielkiej liczbie zmiennych (ok. 10) może wymagać liczby operacji nierealizowanej nawet na najszybszych maszynach matematycznych. Uzyskanie ścisłego rozwiązania problemu pokrycia jest związane w ogólnym

---

1) Używane są też nazwy: "automaty bez pamięci", "układy kombinacyjne".

2) Używane są też nazwy: "automaty z pamięcią", "układy sekwencyjne".

przypadku z przeglądem tzw. wyrażeń nieredukowalnych[1]. Wiadomo jednak z oszacowań, że maksymalna liczba $\tau_{(n)}$ wyrażeń nieredukowalnych przy danej liczbie zmiennych n może osiągać bardzo wielkie wartości już przy stosunkowo niewielkiej liczbie zmiennych, na przykład przy n = 8 – $\tau(n) > 10^{11}$, a przy n = 15 – – $\tau(n) > 10^{44}$. Choć często można uniknąć przeglądu pewnej części wyrażeń nieredukowalnych, to jednak pozostała ich liczba nadal może być zbyt wielka.

Z tego powodu aktualną obecnie tendencją jest poszukiwanie metod dostarczających rozwiązanie przybliżone, ale wymagających znacznie zmniejszonej liczby operacji, a przede wszystkim nie wymagających przeglądu wyrażeń nieredukowalnych. Choć istnieje już kilka metod przybliżonego rozwiązania problemu [2,3,4 i in.], to jednak nie dają one oszacowania odległości otrzymanego rozwiązania do rozwiązania minimalnego, co jest ich istotną wadą.

W niniejszym artykule opisuje się pewien algorytm rozwiązania ogólnie postawionego problemu pokrycia, który dostarcza – bez wykonywania operacji przeglądu – tzw. pokrycie quasi – minimalne wraz z oszacowaniem maksymalnej możliwej różnicy w liczbie elementów i w złożoności między tym pokryciem a pokryciem minimalnym. Następnie pokazuje się jak zastosować powyższy algorytm do zagadnień syntezy automatów cyfrowych zarówno jedno- jak i wielostanowych.

1. Ogólne sformułowanie problemu pokrycia w oparciu o płaski model geometryczny

Problem pokrycia formułuje się zwykle następująco:
Dana jest macierz binarna:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i = 1, \ldots, p \\ j = 1, \ldots, r}} \qquad (1)$$

1) Wyrażeniem nieredukowalnym nazywa się wyrażenie, w którym skreślenie dowolnego składnika lub dowolnej litery (zmiennej w postaci prostej lub zanegowanej) powoduje, że wyrażenie przestaje być ekwiwalentne danej funkcji.

zawierająca w każdej kolumnie przynajmniej jedną "1". Należy znaleźć minimalny podzbiór wierszy $I \leqslant \left\{1, \ldots, p\right\}$ taki, że dla każdego j:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} > 1 \tag{2}$$

Mówiąc poglądowo chodzi więc o znalezienie minimalnego podzbioru wierszy, który "pokrywa" wszystkie kolumny. Ogólniejsze sformułowanie problemu polega na przypisaniu każdemu wierszowi pewnej liczby naturalnej nazywanej złożonością (lub ceną) i wówczas poszukuje się podzbioru wierszy, który spełniając warunek (2) posiada minimalną sumaryczną złożoność. Przy syntezie minimalnych dysjunkcyjnych normalnych wyrażeń (m.d.n.w.) funkcji logicznych kolumnom odpowiadają w tej macierzy składniki jedynkowe funkcji, a wierszom - proste implikanty.

Powyższe sformułowanie problemu pokrycia posiada jednak tę istotną wadę,że zakłada się tu z góry znajomość macierzy A. Rozmiary tej macierzy mogą być w praktyce bardzo wielkie i samo jej określenie będzie wówczas stanowić poważny problem obliczeniowy.

Okazuje się, że problem pokrycia może być rozwiązany w oparciu o znajomość jedynie przepisu pozwalającego tworzyć poszczególne wiersze macierzy, bez uprzedniego utworzenia całej macierzy.

W niniejszym artykule opisuje się takie właśnie podejście do rozwiązania problemu pokrycia, w związku z czym sam problem formułuje się w sposób odmienny, stosując przy tym pewien płaski model geometryczny.

Niech dana jest tablica, będąca dowolnym prostokątem podzielonym na $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ wierszy oraz $2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$ kolumn, gdzie $\left[\frac{n}{2}\right]$ - część całkowita liczby $\frac{n}{2}$, n - pewna ustalona liczba naturalna. O elementarnym polu tej tablicy, powstałym przez przecięcie się dowolnego wiersza z dowolną kolumną, zakładamy dla ścisłości rozważań, że nie zawiera ono punktów ani prostych dzielących prostokąt ani jego konturu. Przypiszmy poszczególnym polom tablicy kolejne numery $0,1,2, \ldots, 2^n-1$ licząc z lewa na prawo i z góry w dół, tak jak to w przypadku $n = 6$ przedstawiono na rys. 1. Numer pola e będziemy oznaczać przez γe, a pole o numerze j przez e^j. Zbiór numerów pól $e \in E$ będziemy oznaczać przez $\gamma(E)$.

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Rys. 1. Rozkład numerów pól w tablicy przy $n = 6$

Niech dane jest odwzorowanie f zbioru $\gamma = \{0,1,\ldots,2^n-1\}$ w zbiór $\{0,1,*\}^m$, to jest zbiór ciągów o długości m o elementach $0,1$ lub $*$, gdzie $*$ oznacza pewną wartość nieokreśloną tzw. obojętną:

$$f : \gamma \longrightarrow \{0,1,*\}^m \qquad (3)$$

Jeżeli $m = 1$ to odwzorowanie f będziemy nazywać jednowyjściowym, a gdy $m > 1$ - wielowyjściowym.

Obecnie założymy, że f jest odwzorowaniem jednowyjściowym, lecz później rozważymy również przypadek odwzorowania wielowyjściowego.

Przypiszmy każdemu polu e tablicy wartość $f(\gamma(e))$.

Definicja 1

Zbiór pól tablicy wraz z przypisanymi w powyższy sposób wartościami ze zbioru $\{0,1,*\}$ nazywa się obrazem odwzorowania f i oznacza się przez $T(f)$. Podzbiory pól obrazu $T(f)$ o wartościach $0,1,*$ będziemy oznaczać odpowiednio przez F^0, F^1, F^*.

Załóżmy, że dana jest funkcja φ odwzorowująca rodzinę 2^γ wszystkich podzbiorów zbioru γ w zbiór $\{0,1\}$:

$$\varphi : 2^\gamma \longrightarrow \{0,1\} \qquad (4)$$

Definicja 2

Dowolny zbiór pól E taki, że $\varphi(\gamma(e)) = 1$ nazywa się zespołem pól.

Funkcja φ jest dodpowiednio określona dla każdego konkretnego sformułowania problemu pokrycia. Problemy pokrycia w różnych zagadnieniach będą charakteryzowały się różnymi określeniami funkcji φ, a więc tym samym różnymi określeniami pojęcia zespołu. I tak na przykład w zagadnieniach syntezy układów logicznych zespołami będą zbiory pól, którym odpowiadają funkcje logiczne realizowane na 1 funktorze. Przy określaniu wyrażeń dysjunkcyjnych normalnych będą to zbiory pól odpowiadające pojedynczym koniunkcjom, przy określaniu tzw. wyrażeń dysjunkcyjno-progowych - zbiory pól odpowiadające funkcjom progowym. Przy zagadnieniu na przykład układania testów diagostycznych dla maszyn - zespołem będzie zbiór pól odpowiadający zbiorowi elementów maszyny, których pracę można skontrolować za pomocą 1 testu.

Każdemu zespołowi E przypisuje się pewną liczbę naturalną $z(E)$ nazywaną złożonością. Na funkcję złożoności w przypadku odwzorowań jednowyjściowych nakłada się warunek, by na zespołach uporządkowanych relacją inkluzji $\subset$ przyjmowała wartości malejące.
Oznacza to, że jeśli $E_1 \subset E_2$, to $z(E_1) > z(E_2)$.

Definicja 3

Zbiór zespołów $D(T) = \{E_j\}_{j=1}^{p}$ nazywa się pokryciem obrazu $T(f)$, jeśli spełnia on warunek:

$$F^1 \leqslant \bigcup_{j=1}^{p} E_j \leqslant F^1 \cup F^* \qquad (5)$$

z powyższej definicji wynika, że aby pewien zbiór zespołów był pokryciem, jego suma mnogościowa musi pokrywać[1] w całości

[1] to znaczy zawierać w sobie.

zbiór F^1 oraz może pokrywać także niektóre pola zbioru F^*, który pełni rolę jakby "marginesu". Nie może ona natomiast pokrywać żadnego pola zbioru F^0.

Definicja 4

Złożonością pokrycia $D(T) = \{E_j\}_{j=1}^{p}$ nazywa się sumę:

$$z(D(T)) = \sum_{j=1}^{p} z(E_j) \tag{6}$$

Definicja 5

Pokryciem minimalnym M(T) obrazu T(f) nazywa się pokrycie, które posiada minimalną liczbę zespołów i przy tej liczbie zespołów posiada minimalną złożoność.

Definicja 6

Zespół E spełniający warunki:

$$E \leqslant F^1 \cup F^*, \quad E \cap F^1 \neq \Theta \tag{7}$$

gdzie Θ - zbiór pusty, nazywa się zespołem maksymalnym w obrazie T(f), jeśli jest on maksymalny względem inkluzji[1].

Zespoły maksymalne w obrazie T(f) będziemy oznaczać przez L_i, i = 1,2, ... łatwo jest wykazać, że każde pokrycie minimalne składa się wyłącznie z zespołów maksymalnych. Twierdzenie to wynika bezpośrednio z założenia o funkcji złożoności, z którego wynika, że zespół maksymalny posiada minimalną złożoność wśród wszystkich zespołów będących jego podzbiorami.

[1] Przez zbiór o własności W maksymalny (minimalny) względem inkluzji rozumie się zbiór, którego żaden nadzbiór (podzbiór) nie posiada własności W. W omawianym wyżej przypadku własnością W zbioru jest to, że jest on zespołem i spełnia warunki (7).

Definicja 7

Zespół maksymalny L_1 w obrazie T(f) nazywa się jądrowym zespołem maksymalnym, jeśli istnieje pole $e \in L_1 \cap F^1$, którego nie pokrywa żaden inny zespół maksymalny w obrazie T(f).

Definicja 8

Zbiór wszystkich jądrowych zespołów maksymalnych nazywa się jądrem pokrycia obrazu T(f).

Ponieważ zespoły jądrowe są jedynymi zespołami pokrywającymi pewne pola zbioru F^1, więc jądro pokrycia musi zawierać się w każdym pokryciu obrazu T(f).

Definicja 9

Pokrycie złożone z zespołów maksymalnych i minimalne względem inkluzji nazywa się pokryciem nieredukowalnym.

Zgodnie z definicją 9, usunięcie z pokrycia nieredukowalnego jakiegokolwiek zespołu maksymalnego powoduje, że przestaje ono być pokryciem. Pojęciu pokrycia nieredukowalnego odpowiada w zakresie syntezy d.n.w. nieredukowalne wyrażenie logiczne. Dany obraz T(f) może posiadać - jak o tym wspomniano we wstępie w odniesieniu do wyrażeń logicznych - bardzo wielką liczbę pokryć nieredukowalnych. Pokrycia minimalne są wśród nich.

Dla opisanego w punkcie 2 algorytmu syntezy pokryć podstawowym pojęciem jest pojęcie gwiazdy pola zbioru F^1.

Definicja 10

Gwiazdą G(e) pola $e \in F^1$ nazywa się zbiór wszystkich zespołów maksymalnych pokrywających pole e.

Zbiór wszystkich pól $e_j \in F^1$ pokrywanych przez zespoły maksymalne gwiazdy G(e) będziemy oznaczać przez $G^U(e)$. Liczbę elementów dowolnego zbioru, na przykład K będziemy oznaczać przez $c(K)$.

2. Algorytm A^q syntezy pokryć quasi-minimalnych

W niniejszym punkcie opiszemy w skrócie pewien algorytm A^q syntezy pokryć obrazu T(f) odwzorowania jednowyjściowego. Pełny opis tego algorytmu podany jest w pracy [6]. W wyniku realizacji algorytmu A^q otrzymuje się pewne pokrycie $M^q(T)$, nazywane pokryciem quasi-minimalnym, wraz z oszacowaniem maksymalnej możliwej różnicy między tym pokryciem a pokryciem minimalnym, wyrażonej liczbą elementów Δ oraz złożonością δ:

$$o(M^q(T)) - o(M(T)) \leqslant \Delta \tag{8}$$

$$z(M^q(T)) - z(M(T)) \leqslant \delta \tag{9}$$

Teoretyczna możliwość określenia maksymalnej różnicy w liczbie elementów między dowolnym pokryciem a pokryciem minimalnym wynika z następującego twierdzenia. Załóżmy, że dana jest pewna rodzina G^r gwiazd pól $e \in F^1$, która posiada taką własność, że dowolnie wybrane z niej dwie gwiazdy są zbiorami rozłącznymi.

Twierdzenie 1

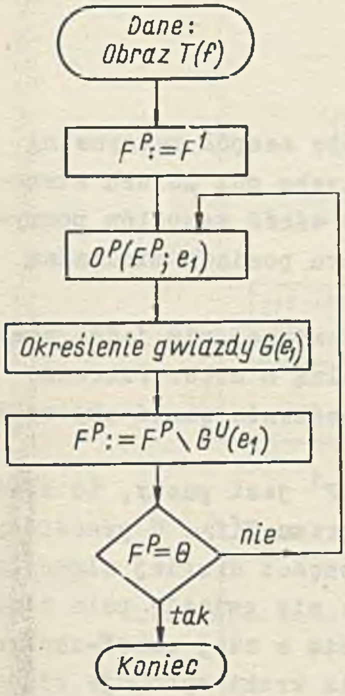
Liczba elementów $o(M(T))$ pokrycia minimalnego obrazu T(f) spełnia warunek:

$$o(M(T)) \geqslant \varrho \tag{10}$$

gdzie

$$\varrho = c(G^r)$$

Dowód tego twierdzenia znajduje się w/w pracy [6]. Rodzinę G^r będziemy nazywać rodziną gwiazd rozłącznych. Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli posiadamy pewne pokrycie D(T) oraz znamy liczbę elementów ϱ rodziny gwiazd rozłącznych, to różnicę $\Delta = o(D(T)) - \varrho$ można traktować jako oszacowanie maksymalnej różnicy w liczbie elementów między tym pokryciem, a pokryciem minimalnym. Na rys. 2 przedstawiono algorytm R syntezy rodziny gwiazd rozłącznych. Gwiazdy G(e) określane w trakcie wykonywania algorytmu tworzą pewną maksymalną względem inkluzji rodzinę gwiazd rozłącznych. Przez: = oznaczono operację podstawienia (jak w języku Algol), która oznacza, że zmienna z lewej strony znaku przyjmuje nową wartość wynikającą z operacji zapisanej po prawej stronie znaku. Zmienna F^p jest to zmienna pomocnicza, której wartościami są zbiory. Przez $O^p(F^p; e_1)$ oznaczono operację wyboru ze zbioru określonego aktualną wartością F^p (krótko zbioru F^p) pola o najniższym numerze i przypisania mu oznaczenia e_1. W algorytmie R zakłada się, że sposób generowania gwiazdy danego pola jest znany. Jeśli mamy konkretny problem pokrycia, to określone jest wówczas pojęcie zespołu i algorytmu generowania gwiazdy można zawsze skonstruować. Jeśli algorytm R powtórzyć generując gwiazdy dla innych pól niż pola o najniższym numerze wówczas wartość ϱ może wypaść większa. Twierdzenie 1 będzie wtedy obowiązywać dla nowej wartości ϱ, dając możliwość poprawienia oszacowania Δ.



Rys. 2. Algorytm R

Idea konstrukcji algorytmu A^q jest następująca. Generuje się kolejno gwiazdy rozłączne, wybiera się z nich pewien zespół maksymalny L^2, nazywany quasi-ekstremalą (zob. def. 9) oraz wykonuje się operacje:

$$F^1 := F^1 \setminus L^q, \quad F^* := F^* \cup L^q, \quad M^q := M^q \cup L^q \qquad (11)$$

Przez F^1, F^*, M^q rozumie się tu zmienne, których wartościami są zbiory. Na początku wykonywania algorytmu wartościami F^1 i F^* są zbiory zdefiniowane poprzednio jako F^1 i F^*. Wartością M^q jest zbiór zawierający wybrane do danego momentu quasi-ekstremale. Wykonywanie operacji (11) ma ten sens, że po włączeniu zespołu L^q do zbioru M^q, pola F^1 pokrywane przez ten zespół można od tej chwili traktować jako pola o wartości * , to jest pola zbioru F^*. Następnie wybierane zespoły mogą je bowiem pokrywać, ale nie muszą.

Definicja 9

Quasi-ekstremala gwiazdy $G\ e_j$ nazywa się zespół maksymalny $L^q \in G(e_j)$, który pokrywa maksymalną liczbę pól zbioru stanowiącego aktualną wartość[1] zmiennej F^1 i wśród zespołów pokrywających taką samą liczbę pól tego zbioru posiada minimalną złożoność.

Jeśli w danej gwieździe znajduje się więcej niż jedna quasi-ekstremala, to wówczas wybiera się dowolną z nich. Pierwsza część algorytmu kończy się z chwilą określenia quasi-ekstremali w ostatniej gwieździe rozłącznej.

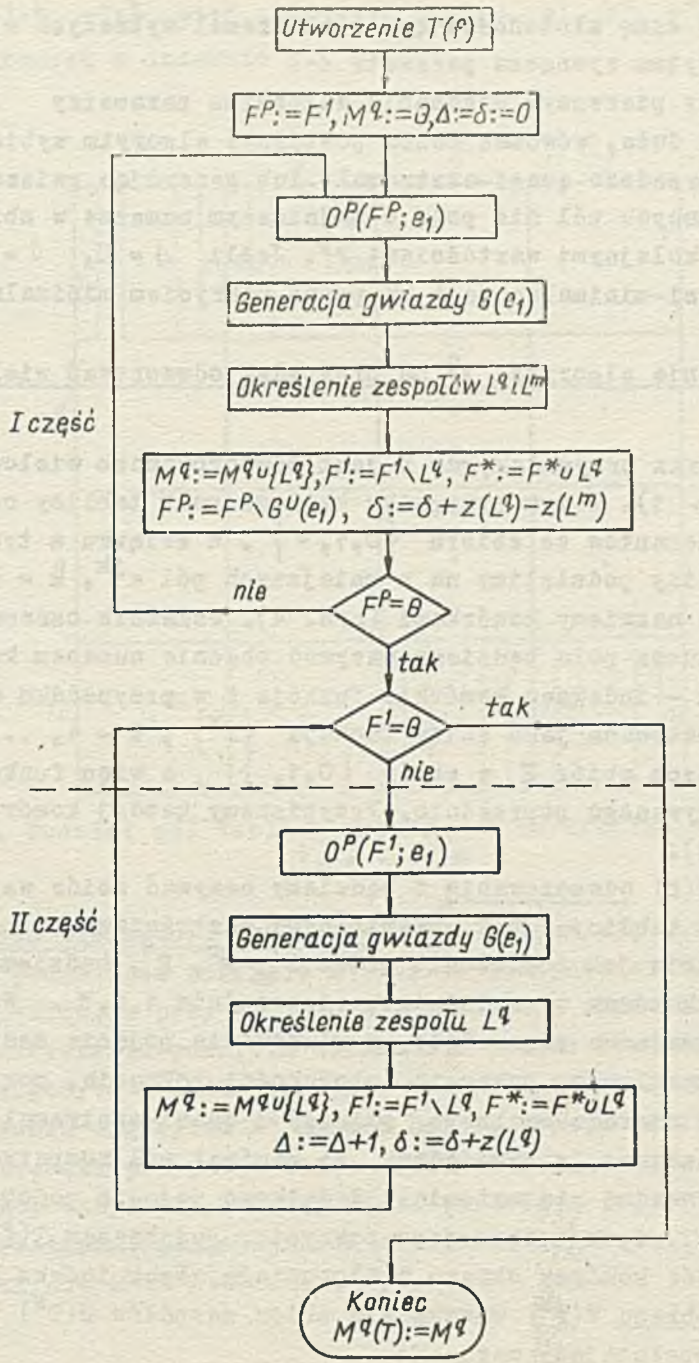
Jeśli po wykonaniu tej części zbiór F^1 jest pusty, to zbiór M^q stanowi pokrycie quasi-minimalne, obrazu $T(f)$. W przeciwnym przypadku przechodzi się do wykonania części drugiej algorytmu.

W pierwszym kroku tej części określa się gwiazdę pola o najniższym numerze w zbiorze F^1, wybiera się z niej quasi-ekstremalę i wykonuje operacje (11). Następnie kroki wykonuje się analogicznie tak długo, aż $F^1 = \Theta$, Otrzymamy wówczas zbiór M^q stanowi pokrycie quasi-minimalne obrazu $T(f)$. Liczba kroków wykonanych w części II algorytmu określa parametr Δ we wzorze (8).

Schemat operacyjny algorytmu przedstawiono na rys. 3. W celu określenia parametru δ (wzór 9) w algorytmie tym oblicza się dodatkowo sumę różnic między złożonościami wybieranych quasi-ekstremal, a złożonościami zespołów o minimalnej złożoności w poszczególnych gwiazdach oznaczanych przez L^m. Suma ta

---

[1] Zbiory stanowiące aktualne wartości zmiennych F^1, F^* , M^q będziemy w dalszym opisie algorytmu nazywać krótko zbiorami F^1, F^*, M^q.



Rys. 3. Algorytm A^q

zwiększona o sumę złożoności quasi-ekstremal wybranych w II części algorytmu wyznacza parametr δ.

Jeśli przy pierwszym wykonaniu algorytmu parametry Δ i δ wypadną zbyt duże, wówczas można powtórzyć algorytm wybierając inne niż poprzednio quasi-ekstremale lub generując gwiazdy rozłączne dla innych pól niż pola o najniższym numerze w zbiorach określonych kolejnymi wartościami F^p. Jeśli $\Delta = 0$, $\delta = 0$, to pokrycie quasi-minimalne jest na pewno pokryciem minimalnym.

3. Rozszerzenie algorytmu A^q na przypadek odwzorowań wielowyjściowych

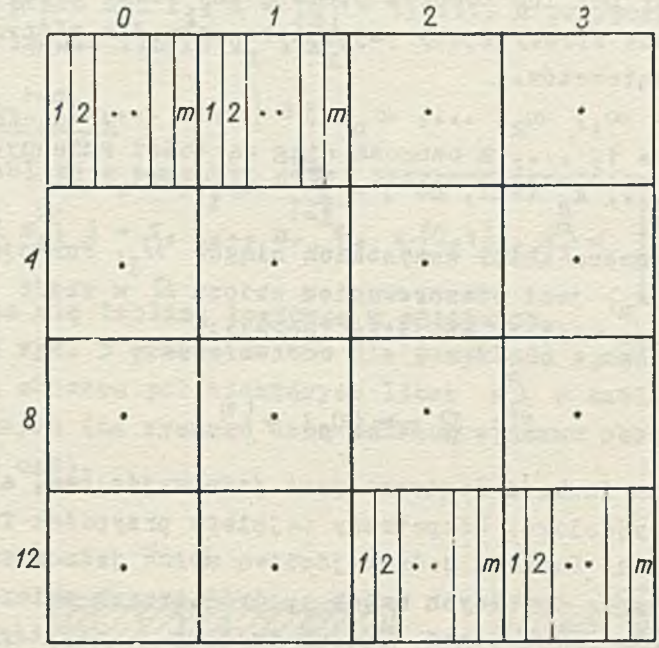
Rozważymy teraz przypadek, gdy f jest odwzorowaniem wielowyjściowym ($m > 1$). W tym przypadku każdemu polu tablicy odpowiada ciąg m elementów ze zbioru $\{0,1,*\}$. W związku z tym każde pole e^j tablicy podzielimy na m mniejszych pól e^{jk}, $k = 1,2,\ldots,m$, które nazwiemy komórkami (rys. 4). Wskaźnik oznaczający poprzednio numer pola będziemy nazywać obecnie numerem komórki, a wskaźnik k - indeksem komórki. Funkcja f w przypaddku $m > 1$ może być traktowana jako zbiór funkcji $\{f^k\}$, $k = 1, \ldots, m$ odwzorowujących zbiór γ w zbiór $\{0,1, \}$, a więc funkcji typu rozpatrywanego poprzednio. Przypiszemy każdej komórce $c^{j,k}$ wartość $f^k(j)$.

Obrazem T(f) odwzorowania f będziemy nazywać zbiór wszystkich komórek tablicy z tak przypisanymi wartościami.

Analogicznie jak poprzednio przez F^1, F^0, F^*, będziemy oznaczać zbiory komórek o wartościach odpowiednio 1,0,*. Wszystkie pojęcia wprowadzone poprzednio, a mianowicie pojęcie zespołu, zespołu maksymalnego, pokrycia, złożoności pokrycia, pokrycia minimalnego, nieredukowalnego, gwiazdy i quasi-ekstremali pozostają bez zmiany, z tym jednak, że zamiast pól rozpatrujemy komórki. Wprowadza się natomiast dodatkowo pojęcie podobrazu $T(f^k)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ oraz jego pokrycie. Podobrazem $T(f^k)$ nazywa się zbiór komórek obrazu T(f) posiadających indeks k. Pokryciem podobrazu $T(f^k)$ nazywa się zbiór zespółów $D(T^k) = \{E_j\}_{j=1}^{p}$ spełniający warunek:

$$F^{1,k} \leqslant \bigcup_{j=1}^{p} E_j \leqslant F^{1,k} \cup F^{*,k} \qquad (12)$$

gdzie $F^{1,k}$, $F^{0,k}$, $F^{*,k}$ podzbiory zbiorów F^{1}, F^{0}, F^{*} składające się z komórek o indeksie k.



Rys. 4. Podział pól tablicy przy n = 4 na komórki o indeksach 1,2, ..., m

<u>Pokryciem minimalnym podobrazu</u> $T(f^{k})$ nazywa się pokrycie $M(T^{k})$ będące podzbiorem pokrycia M(T) i posiadające minimalną liczbę elementów, a przy tej liczbie elementów minimalną złożoność.

Do określenia pokrycia obrazu T(f) można bezpośrednio zastosować algorytm A^{q}. Aby określić pokrycia podzbiorów $T(f^{k})$, przy wykonywaniu algorytmu A^{q} należy każdej kolejno znalezionej quasi-ekstremali przypisać zbiór indeksów $I \leqslant \{1, \dots, m\}$ zawierający wszystkie indeksy które posiadają jej pola. Zbiór quasi-ekstremal posiadających w zbiorze indeksów indeks k tworzy pokrycie $M^{q}(T^{k})$ obrazu $T(f^{k})$.

4. Zastosowanie algorytmu A^q w zagadnieniach strukturalnej syntezy automatów

Przy ogólnym sformułowaniu problemu pokrycia pojęcie zespołu oznaczało zbiór pól lub komórek spełniających pewne założone warunki. Obecnie sprecyzujemy pojęcie zespołu dla różnych zagadnień syntezy automatów.

Niech $\Omega_j = \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, $j \in \{0,1, \ldots, 2^{n-1}-1\}$, $\omega \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$ oznacza ciąg wartości zmiennych wejściowych $x_1, \ldots, x_n$ taki, że $j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot 2^{n-1}$.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich ciągów Ω_j. Funkcja logiczna $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest odwzorowaniem zbioru Ω w zbiór $\{0,1,*\}^m$ gdzie $*$ oznacza wartość obojętną funkcji:

$$f : \Omega \longrightarrow \{0,1,*\}^m$$

Jeśli $m = 1$, to funkcja logiczna jest jednowyjściowa, a gdy $m > 1$ – wielowyjściowa. Rozpatrzmy najpierw przypadek funkcji jednowyjściowych. Funkcję jednowyjściową można jednoznacznie określić za pomocą dowolnych dwóch spośród trzech zbiorów Ω^1, Ω^0, Ω^* oznaczających ciągi Ω_j lub indeksy j, na których funkcja f przyjmuje wartość odpowiednio $1, 0\ *$.

Jeśli polom e tablicy przypisać wartość $f(\Omega_{\gamma(e)})$, to obraz $F(f)$ jednoznacznie opisuje funkcję logiczną. Przy syntezie d.n.w. pojęciu zespołu odpowiada 1 koniunkcja liter. Pokażemy, że tablicę pól można opisać w ten sposób, że pojęcie zespołu uzyskuje wówczas przejrzystą interpretację geometryczną.

1. Prostą poziomą, która dzieli zbiór wszystkich pól tablicy na dwa równoliczne zbiory pól nazywa się osią zmiennej x_1. Górnemu zbiorowi przyporządkowuje się literę $\bar{x}_1$, a dolnemu literę x_1. Proste poziome, które z kolei dzielą każdy z powyższych zbiorów na dwa równoliczne podzbiory nazywa się osiami zmiennej x_2. Zbiorowi zawierającemu pola górnych podzbiorów przyporządkowuje się literę $\bar{x}_2$, a zbiorowi zawierającemu pola dolnych podzbiorów literę x_2. Analogicznie definiuje się osie zmiennych x_i, $i = 3,4, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ oraz zbiory pól, którym przyporządkowuje się litery $\bar{x}_i$ oraz x_i.

2. Proste pionowe, które dzielą zbiór pól tablicy w sposób analogiczny jak w punkcie 1, nazywa się osiami zmiennych $x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \dots x_n$.

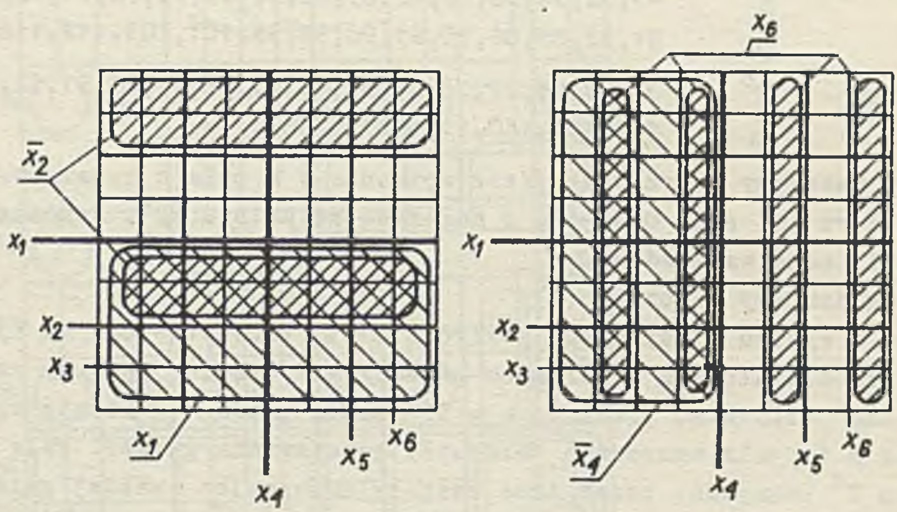
Zbiorem pól zawierającym pola podzbiorów leżących na lewo i na prawo osi x_i, $i = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \dots, n$ przyporządkowuje się odpowiednio litery $\bar{x}_i$ i x_i.

Definicja 10

Tablicę z opisanym wyżej przyporządkowaniem zbiorom pól liter $x_i^{\sigma_i}$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{jeśli } \sigma_i = 0 \\ x_i, & \text{jeśli } \sigma_i = 1 \end{cases}$

nazywa się tablicą logiczną n zmiennych.

Na rys. 5 przedstawiono dla przykładu sposób przyporządkowania zbiorom pól niektórych liter $x_i^{\sigma_i}$ w tablicy logicznej 6 zmiennych (na rysunku daną zmienną wpisano obok tylko jednej z jej osi).



Rys. 5. Zbiory pól tablicy logicznej 6 zmiennych, którym przyporządkowano litery x_1 i $\bar{x}_2$ a oraz x_4 i x_6 (b)

Działaniom logicznym na literach odpowiadają w tablicy logicznej działania teorio-mnogościowe na zbiorach pól przyporządkowanym tym literom. Negacji odpowiada dopełnienie do zbioru wszystkich pól tablicy, dysjunkcji - suma (połączenie) zbiorów pól, a koniunkcji - iloczyn (przecięcie) zbiorów pól.

Funkcja φ jest w tym przypadku funkcją, która przyjmuje wartość 1 dla podzbiorów pól odpowiadających 1 koniunkcji liter oraz wartość 0 - dla pozostałach podzbiorów pól. Zespoły są zbiorami powstającymi przez przecięcie się dowolnych zbiorów, którym przyporządkowane są litery $x_i^{\delta_i}$.

Można łatwo pokazać [6], że zespoły tworzą w tablicy logicznej charakterystyczne konfiguracje, co ułatwia ich rozpoznawanie. Prostemu implikantowi funkcji logicznej odpowiada zespół maksymalny w obrazie T(f). Jako złożoność zespołu E_i, przyjmuje się liczbę liter koniunkcji $\alpha(E_i)$ odpowiadającej temu zespołowi.

Przykład 1

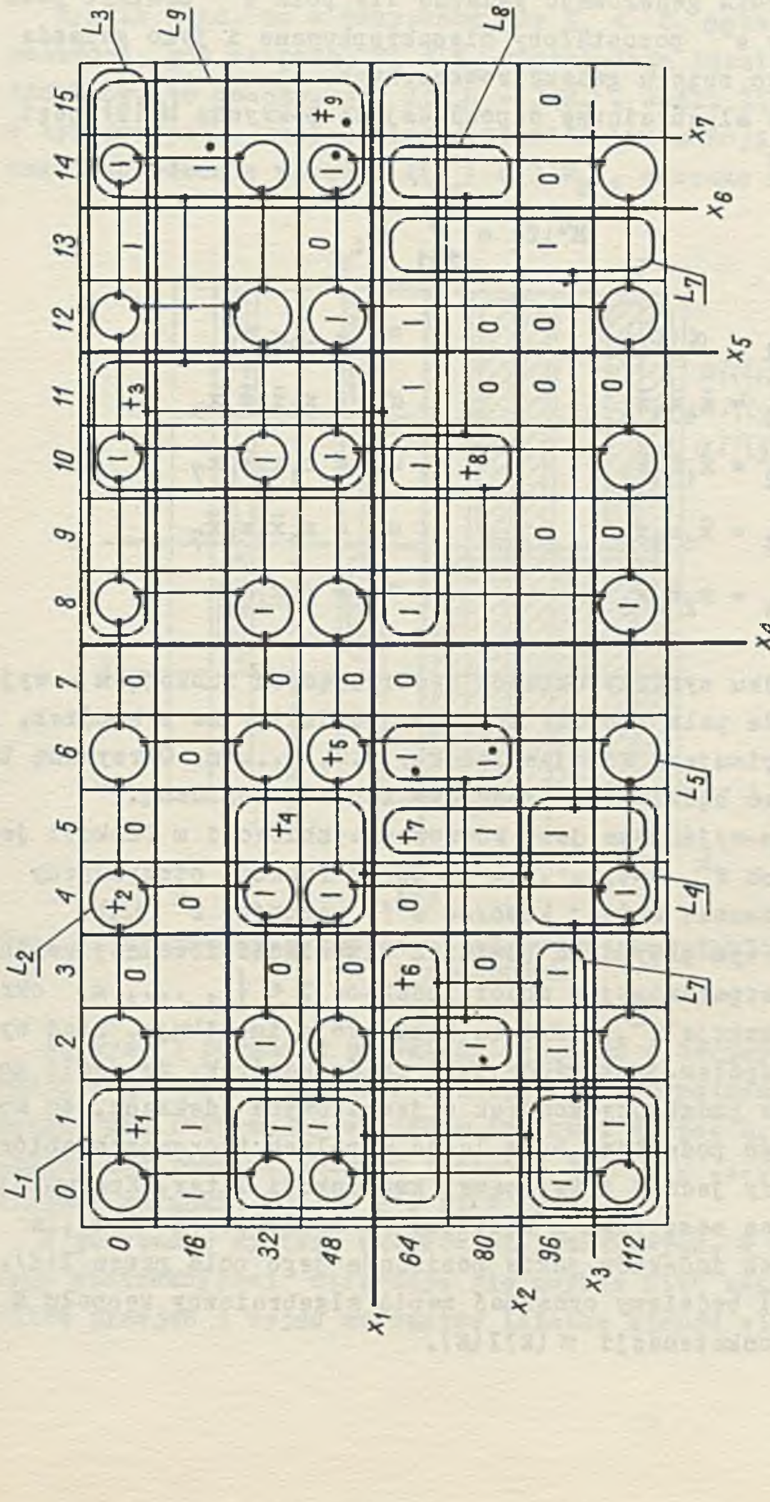
Określić wyrażenie quasi-minimalne funkcji 7 zmiennych f dla której: $\Omega^1 = \{1,4,10,11,13,14,16,17,30,33,34,36,37,40,42,48,$
$49,52,54,58,60,62,63,66,67,69,70,72,74,75,76,$
$81,82,85,86,90,93,96,98,99,101,109,113,116,120\}$

oraz $\Omega^0 = \{3,5,7,20,22,35,39,51,55,61,68,71,83,91,92,105,$
$107,108,110,111,121,123\}$.

Tworzymy obrez T(f) przez wpisanie 1 w pola o numerach ze zbioru Ω^1 oraz 0 w pola o numerach ze zbioru Ω^0. Pozostałe pola mają wartość $*$.

Realizujemy algorytm A^q.

W wyniku otrzymujemy pokrycie $M^q(T)$ przedstawione na rys. 6. Pola dla których generowano gwiazdy w I etapie gwiazdy rozłączne oznaczono przez +, a w II etapie przez $*$. Liczby wpisane w te pola oznaczają kolejność generowania gwiazd. Pola zbioru F^1 pokrywane przez inne zespoły maksymalne każdej gwiazdy niż wybrana z niej quasi-ekstremala tzn. pola zbioru $(G^u(e) \setminus L^q) \cap F^1$ oznaczono kropką. W II etapie algorytmu określono gwiazdę pola e^{30} zawierającą quasi-ekstremalę L_9. Tak więc $\Delta = 1$, $\delta = z(L_9) = 3$. Łatwo się można przekonać, że jest to jednak pokrycie ściśle minimalne, ponieważ w przypadku gdyby



Rys. 6. Pokrycie $M^q(T)$ obrazu funkcji z przykładu 1

w trzecim kroku generowano gwiazdę dla pola e^{13} zamiast pola e^{11}, to pole e^{30} pozostałoby niezakropkowane i jako gwiazda należałaby do zbioru gwiazd rozłącznych.

Wyrażenie algebraiczne odpowiadające pokryciu $M^q(T)$ jest następujące:

$$M^q(f) = \bigvee_{i=1}^{g} \alpha_i$$

gdzie: $\alpha_i = \alpha(L_i)$

$$\alpha_1 = \bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6 \qquad \alpha_5 = x_2x_3\bar{x}_7$$

$$\alpha_2 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_7 \qquad \alpha_6 = x_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$$

$$\alpha_3 = \bar{x}_1x_4x_6 \qquad \alpha_7 = x_1x_5\bar{x}_6x_7$$

$$\alpha_4 = x_2\bar{x}_4\bar{x}_6 \qquad \alpha_8 = x_1\bar{x}_2x_6\bar{x}_7$$

$$\alpha_9 = \bar{x}_1x_4x_6$$

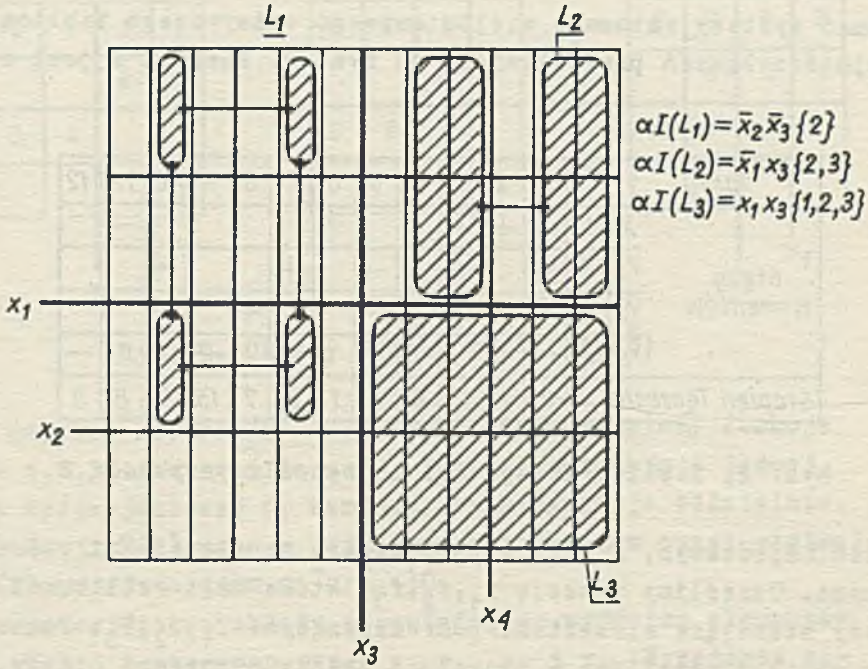
W przypadku syntezy układów realizujących funkcję m - wyjściową, każde pole tablicy logicznej dzielimy na m komórek, którym przypisujemy kolejne indeksy 1,2, ..., m. Otrzymaną tablicę nazywać będziemy m-wyjściową tablicą logiczną.

Funkcja m-wyjściowa jest równoważna zbiorowi m funkcji jednowyjściowych f^k, k=1,2, ..., m. Obraz funkcji otrzymujemy przez przypisanie każdej komórce $e^{j,k}$ wartości $f^k(\Omega_j)$.

Zespół w tym przypadku powinien odpowiadać dowolnej koniunkcji liter zaopatrzonej w zbiór indeksów $I \leqslant \{1, ..., m\}$ określających funkcje f^k, które ta koniunkcja implikuje. Stąd wynika, że zespołem jest każdy taki zbiór komórek, że jeśli go rozbijemy na podzbiory komórek o jednakowych ideksach, to komórki każdego podzbioru będą leżeć w polach tworzących zbiór odpowiadający jednej i tej samej koniunkcji liter. Koniunkcję odpowiadającą zespołowi E będziemy oznaczać przez $\alpha(E)$, a zbiór różnych indeksów jakie posiadają jego pola przez I(E). Przez $\alpha I(E)$ będziemy oznaczać zapis algebraiczny zespołu E w postaci konkatenacji $\alpha(E)I(E)$.

Złożoność $z(E)$ zespołu E określa się jako sumę liczby liter w koniunkcji $\alpha(E)$ oraz liczby indeksów w zbiorze $I(E)$.

Wynika stąd, że w przypadku gdy $E_1 \subset E_2$ relacja $z(E_1) > z(E_2)$ zachodzi, gdy zespołom E_1 i E_2 odpowiadają identyczne zbiory indeksów, to znaczy, gdy $I(E_1) = I(E_2)$. Jeśli $I(E_1) \neq I(E_2)$, co w tym przypadku musi oznaczać równość koniunkcji $\alpha(E_1) = \alpha(E_2)$ oraz zachodzenie reakcji $I(E_1) \subset I(E_2)$, wówczas $z(E_1) < z(E_2)$.



Rys. 7. Przykłady zespołów w trójwyjściowej tablicy logicznej 4 zmiennych

Na rys. 7 pokazano przykłady zespołów w trójwyjściowej tablicy logicznej 4 zmiennych. Zespołem maksymalnym w obrazie $T(f)$ nazywa się maksymalny względem inkluzji zespół L, charakteryzujący się pewnych zbiorem indeksów $I \leqslant \{1, ..., m\}$ i spełniający warunki: $L \in F^1 \cup F^*$, $L \cap F^1 \neq \Theta$.

W przypadku syntezy układów wielotaktowych, w wyniku, syntezy abstrakcyjnej otrzymuje się zwykle albo zakodowaną tablicę przejść i wyjść automatów (siatkę stanów elementów pośredniczących i wyjściowych) lub tablicę kolejności łączeń [5]. W obu przypadkach powstaje wówczas problem syntezy układu logicznego o tylu wyjściach ile jest elementów pośredniczących i wyjściowych w automacie. Jest to zatem omówiony już poprzednio problem syntezy układu realizującego funkcję wielowyjściową.

Przykład 2[1])

Dokonać syntezy automatu wielostanowego opisywanego tablicą kolejności łączeń przedstawioną na rys. 8. Element X jest ele-

Takty			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Stany elementów	X	1	—	+	—			+					—	
	Y_1	2	—		+		—		+			—		
	Y_2	4	—			+	—			+		—		
	Y_3	8	—								+			—
Stopień łączenia			0	1	2	6	0	1	3	7	15	9	8	0

Rys. 8. Tablica kolejności łączeń dla przykładu 2

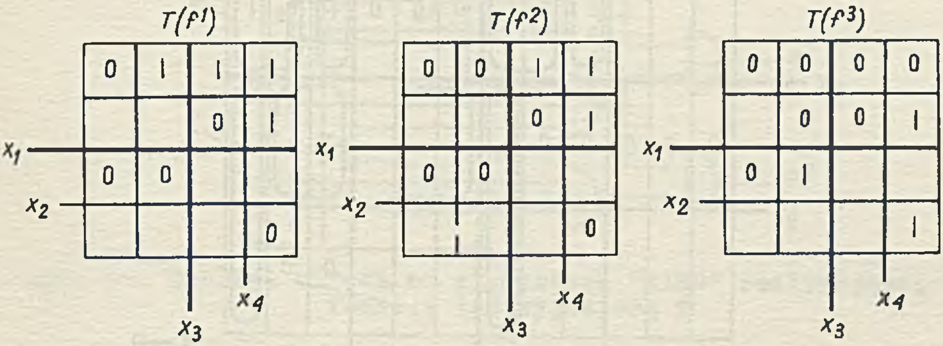
mentem wejściowym, a elementy Y_1,Y_2,Y_3 są elementami pośredniczącymi. Określimy funkcję f_1,f_2,f_3, które mają realizować układy sterujące elementami pośredniczącymi Y_1,Y_2,Y_3. Funkcje $f^k, k = 1,2,3$ określimy w oparciu o zbiory numerów j ciągów Ω j na których przyjmują one wartości 1 i 0. Oznaczmy te zbiory odpowiednio przez $\Omega^{1,k}$ i $\Omega^{0,k}$. Zbiór $\Omega^{1,k}$ składa się z numerów (stopni łączenia) odpowiadających stanom włączenia elementu Y_k, włączając stan poprzedzający włączenie[2]) i wyłączając stan poprzedzający wyłączenie[3]).

[1])Zaczerpnięty z pracy [5].

[2])Ponieważ w stanie poprzedzającym włączenie powstają warunki włączenia elementu.

[3])Analogicznie

Zbiór $\Omega^{o,k}$ składa się z numerów (stopni łączenia) odpowiadających stanom wyłączenia, włączając stan poprzedzający wyłączenie i wyłączając stan poprzedzający włączenie. Obrazy $T(f^k)$, $k = 1,2,3$ przedstawiono na rys. 9. Pola puste odpowiadają wartościom obojętnym.



Rys. 9. Obrazy $T(f^1)$, $T(f^2)$, $T(f^3)$

Aby uzyskać minimalną[1] realizację układu należy funkcje f^k, $k = 1,2,3$ traktować łącznie, jako odpowiadające jednej funkcji trójwyjściowej f, zamiast rozpatrywać je oddzielnie. Obraz funkcji $T(f)$ wraz z zaznaczonym pokryciem quasi-minimalnym $M^q(T)$ przedstawiono na rys. 10.

Zmienne wejściowe układu odpowiadające wyjściom elementów X, Y_1, Y_2 i Y_3 oznaczono przez x, y_1, y_2 i y_3. Wyrażenie algebraiczne odpowiadające pokryciu $M^q(T)$ jest następujące:

$$M^q(f) = \bigvee_{i=1}^{4} \alpha I(L_i) \qquad 13$$

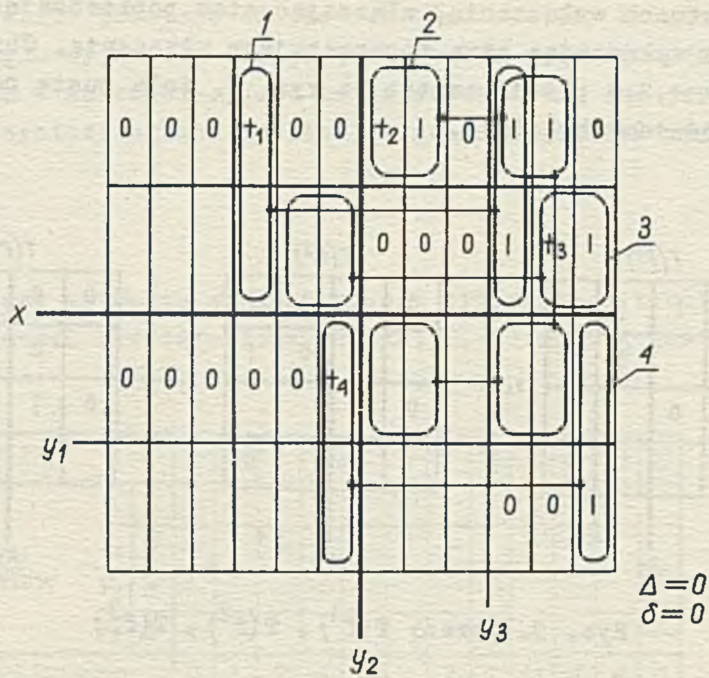
gdzie $\alpha I(L_1) = \bar{x} y_3 \ \{1\}$ $\qquad$ $\alpha I(L_3) = \bar{x} y_1 y_3 \ \{2,3\}$

$\alpha I(L_2) = \bar{y}_1 y_2 \ \{1,2\}$ $\qquad$ $\alpha I(L_4) = x y_3 \ \{3\}$

Ponieważ $\Delta = 0$ i $\delta = 0$ więc jest to wyrażenie minimalne.

---

[1] Nie rozpatrujemy tu zagadnień hazardu i wyścigu.



Rys. 10. Obraz T(f) wraz z zaznaczonym pokryciem $M^q(T)$

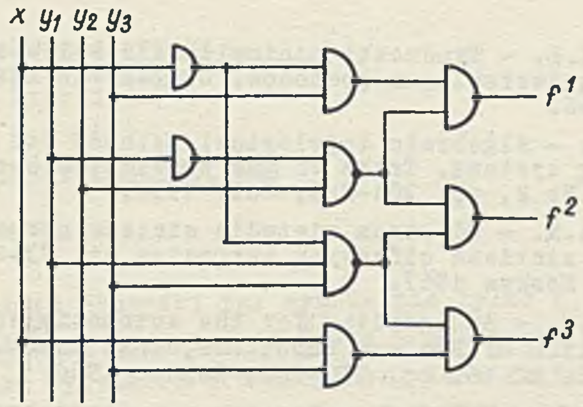
Z wyrażenia $M^q(f)$ otrzymujemy wyrażenia $M^q(f^k)$, k = 1,2,3, odpowiadające pokryciem podobrazów $T(f^k)$, jako sumy takich koniunkcji $\alpha(L_i)$, że $I(L_i)$ zawiera indeks k:

$$M^q(f^1) = \bar{x}y_3 \vee y_1y_2$$

$$M^q(f^2) = \bar{y}_1y_2 \vee \bar{x}y_1y_3$$

$$M^q(f^3) = \bar{x}y_1y_3 \vee xy_3$$

Układ logiczny odpowiadający powyższym wyrażeniom i zbudowany na elementach "NAND" przedstawiono na rys. 11.



Rys. 11. Schemat układu na elementach "NAND" realizującego funkcję trójwyjściową f

Zawiera on 9 elementów i 17 wejść na nie. Łatwo sprawdzić, że minimalna realizacja funkcji f^k, k = 1,2,3 rozpatrywanych oddzielnie wymagałaby 11 elementów i 21 wejść.

Zakończenie

Opisany w pracy quasi-minimalny algorytm określania pokryć może być łatwo realizowany ręcznie przy obrazach funkcji zawierających do około 300–400 pól (komórek).

W zagadnieniach syntezy automatów może być on więc realizowany ręcznie przy funkcjach jednowyjściowych do ok. 8 zmiennych, a przy funkcjach na przykład sześciowyjściowych – do ok. 6 zmiennych. Maszynowa realizacja algorytmu, konieczna przy bardziej złożonych problemach pokrycia, również jest prosta.

W celu sprawdzenia użyteczności algorytmu dla automatycznej syntezy pokryć został on zaprogramowany w języku Lapas na maszynę cyfrową Odra 1204 w Centrum Obliczeniowym PAN. Działający obecnie program umożliwia syntezę pokryć przy funkcjach do 31 zmiennych. Wyniki przeprowadzonych badań oraz opisy różnych modyfikacji algorytmu będą przedmiotem oddzielnej publikacji.

LITERATURA

[1] Wasilew I.Ł. - Trudnosti minimalizacji bulewych funkcij na osnowie uniwersalnych pochodow, Dokłady AN SSSR, tom 171, No 1, 1966.

[2] Roth I.P. - Algebraic topological methods for synthesis of switching systems. Trans of the Americ. Mathematic Society, vol. 88, No 2, pp. 301-326, July 1958.

[3] Kukinow A.M. - Od odnom mietodie sinteza normalnych form. Problemy sintieza cifrowych awtomatow ss. 73-83, Izd. "Nauka", Moskwa 1967.

[4] Necula N.N. - An agorithm for the automatic approximate minimization of Boolean functions, IEEE Trans. on Computers, vol. EC-16. pp. 770-782, August 1968.

[5] Siwiński J. - Układy przełączające w automatyce, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1968.

[6] Michalski R.S. - Synteza wyrażeń minimalnych i rozpoznawanie symetrii funkcji logicznych, Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska 1969 ukaże się w formie rozszerzonej jako publikacja w Pracach Instytutu Automatyki PAN w IV kw. 1969 r. .