

BUDOWNICTWO z. 17



P. 3343/65

SZCZEPAN BORKOWSKI

**ZGINANIE ORTOTROPOWYCH  
POWŁOK TOROIDALNYCH**

**P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A**  
**ZESZYT NAUKOWY Nr 135 – GLIWICE 1965**

## SPIS TREŚCI

	Str.
Wstęp . . . . .	3
I. Zastosowanie sił zespolonych w teorii powłok ortotropowych	
1. Określenia wstępne . . . . .	7
2. Założenia . . . . .	8
3. Strona geometryczna . . . . .	9
4. Strona statyczna . . . . .	11
5. Strona fizyczna . . . . .	13
6. Rozwiązanie w siłach zespolonych . . . . .	18
7. Szczególne przypadki ortotropii . . . . .	22
8. Powłoki obrotowe . . . . .	26
9. Stan quasi osiowo-symetryczny . . . . .	32
10. Przykład . . . . .	35
II. Zginanie łuków falistych	
11. Założenia . . . . .	38
12. Wyznaczenie funkcji ortotropii $k_1$ i $k_2$ . . . . .	39
13. Podstawowe równanie . . . . .	43
14. Całkowanie równania (13.1) . . . . .	44
15. Wyznaczenie liczby KÄRMANA . . . . .	47
16. Wyznaczenie wielkości wewnętrznych . . . . .	50
17. Kolejność rozwiązywania . . . . .	51
III. Zginanie łuków segmentowych	
18. Uwagi wstępne . . . . .	52
19. Założenia . . . . .	52
20. Funkcje ortotropii . . . . .	53
21. Całkowanie układu równań . . . . .	58
22. Kolejność rozwiązywania . . . . .	64
IV. Zastosowania praktyczne	
23. Przykłady liczbowe . . . . .	65
24. Wnioski końcowe . . . . .	77
25. Zestawienie ważniejszych oznaczeń . . . . .	80
Literatura . . . . .	83
Streszczenie . . . . .	83
Skorowidz nazwisk . . . . .	89

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 135

SZCZEPAN BORKOWSKI



P. 3343/65

**ZGINANIE ORTOTROPOWYCH POWŁOK TOROIDALNYCH**

PRACA HABILITACYJNA Nr 44

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 18. XII. 1964 r.

---

GLIWICE 1965

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

*Fryderyk Staub*

REDAKTOR DZIAŁU

*Włodzimierz Starosolski*

SEKRETARZ REDAKCJI

*Tadeusz Matula*

RECENZENCI

Prof. dr inż. Jarosław Naleszkiewicz — WAT

Prof. dr inż. Zbigniew Olesiak — IPPT PAN

Prof. dr inż. Marian Janusz — Politechnika Śląska

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej  
Gliwice, ul. Konarskiego 23

*Pjw/24/66*

---

Nakł. 100+175    Ark. wyd. 4,3    Ark. druk. 5,10    Papier offsetowy kl. V, 70x100, 70 g  
Oddano do druku 5. 4. 1965    Podpis. do druku 10. 5. 1965    Druk ukończ. w maju 1965  
Zam. 630    7. 4. 1965 F-18    Cena zł 5,40

---

Skład, fotokopie, druk i oprawę  
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

## WSTĘP

Zagadnienie zginania cienkościennych łuków o przekroju pierścieniowym (rury zakrzywionej) było rozpatrywane najpierw przez A. BANTLINA, [1]. Autor ten zajmował się zagadnieniem zginania tzw. kompensatorów lirowych. W pracy [1] wykazał, że przemieszczenia obliczone w oparciu o równanie różniczkowe prętów zakrzywionych

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \approx \frac{M}{EI} \quad (1)$$

są - w przypadku przekrojów pierścieniowych - kilkakrotnie mniejsze, niż analogiczne przemieszczenia wyznaczone na drodze doświadczalnej.

Pierwszym, który uwzględnił zmianę przekroju poprzecznego (spłaszczenie przekroju) w zginanym łuku był T. KARMÁN [10]. Wychodząc z metody RITZA-RAYLEIGHA i przyjmując, że składowa przemieszczenia stycznego może być przyjęta w postaci szeregu

$$w_t = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \sin 2n \varphi \quad (2)$$

T. KARMÁN otrzymał równanie różniczkowe osi odkształconej łuku w postaci

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \approx \frac{M}{KEI} \quad (3)$$

Występująca w równaniu (3) liczba  $K < 1$ , uwzględnia zmniejszenie sztywności łuku - w stosunku do rury prostej. Liczbę tę, zależną od liczby wyrazów szeregu (2), nazywa się dzisiaj powszechnie liczbą KARMÁNA. W porównaniu z wynikami A. BANTLINA, wyniki T. KARMÁNA odbiegały już tylko o 20% od danych doświadczalnych.

Następne lata przynoszą bardzo dużą liczbę publikacji. Obszerny przegląd prac do lat 1949-1955 można znaleźć w literaturze [3], [7], [8a], [18].

Obecnie przejdziemy do omówienia nowszych prac poświęconych temu zagadnieniu.

Z prac doświadczalnych wymienimy badania J.H. FORDA i C.E. TURNERA, [6] oraz A.G. KAMERSZTEINA [31a]. Badania te dotyczyły łuków gładkich i segmentowych. Jak to wynika z pracy

[31a] dla łuków o dużej krzywiznie istnieją pewne rozbieżności między danymi doświadczalnymi, a wynikami np. CLARKA-REISSNERA. Zatem badania, odnoszące się do zagadnienia zginania łuków takiej klasy, są w dalszym ciągu aktualne.

Prace teoretyczne, które się ostatnio pojawiły dotyczyły: metod asymptotycznego całkowania, uogólnienia rozważań na zagadnienie niejednorodne (obciążenie łuku ciśnieniem zewnętrznym lub wewnętrznym), rozpatrzenia stanów sprężysto-plastycznych, rozwoju teorii nieliniowej, i wreszcie - zagadnień pełzania. Przejdziemy teraz do krótkiego omówienia tych wyników.

Problematykę nieliniową podejmują w swoich pracach E. REISSNER i R.A. CLARK. Obszerne omówienie wyników tych autorów znajduje się w pracy E. REISSNERA [15a]. Do tej grupy należą również dalsze prace E. REISSNERA [15b] i [15c].

Za kontynuację prac E. REISSNERA uważać należy prace E.L. AKSELRADA [21]. W pracy [21a] rozpatrzone zagadnienie zginania łuku przy dużych ugięciach - dla profilu otwartego, zaś w [21b] uzyskano równania dla łuku o dowolnym przekroju i dla dużych ugięć. Praca [21c] obejmuje tematykę, dotyczącą zginania łuku o przekroju pierścienia kołowego, w ramach teorii nieliniowej, wreszcie w pracy [21d] rozpatrzone przypadek obciążeń zewnętrznych (ciśnienie).

Łuki obciążone ciśnieniem od wewnątrz były również rozpatrywane przez R.A. CLARKA, por. [15a] oraz przez P.G. KAFKĘ i M.B. DUNNA [9].

Dla przekrojów zbliżonych do pierścienia kołowego i obciążonych ciśnieniem, istnieją rozwiązania D.L. KOSTOWIECKIEGO, [32], w ramach teorii liniowej [32a] oraz dla dużych ugięć, [32b]. Przypadek utraty stateczności (dla przekrojów jak powyżej), został rozpatrzony w pracy [32c].

Ciekawy sposób ogólniejszego podejścia do omawianej tutaj problematyki, dla specjalnych stanów odkształcenia i przy pewnych ogólniejszych obciążeniach brzegowych, przedstawione w pracy K.F. CZERNYCHA [27].

Dalsze rozwinięcie metod asymptotycznego całkowania znajdujemy w pracy S.A. TUMARKINA [37], stabelaryzowanie zaś pewnych funkcji, podstawowych dla tej metody - w pracach L.N. NOSOWEJ i S.A. TUMARKINA [34] oraz L.I. OSIPOWEJ i S.A. TUMARKINA [36].

Za próbę analitycznego wyznaczenia naprężeń w łukach segmentowych możemy uważać pracę M.I. ESTRINA [29].

Zginanie tzw. rurek (sprężyn) BOURDONA, rozpatrywane również przez W.I. FIEDOS'JEWĄ, omówiła w swojej pracy L.E. ANDREJEWA [20].

Zginanie łuków o przekroju soczewkowym, dla przypadku, gdy dolna i górna część soczewki są różnej grubości i posiadają różne promienie, rozpatrywane było przez Z. OLESIAKA [14]

Wpływ wręgów przy zginaniu rur o przekroju kołowym rozpatrywał J. NOWIŃSKI w pracy [13].

W pracach L.M. KACZANOWA [30a] oraz W.S. TURKINA [38], było rozpatrywane zagadnienie zginania sprężysto-plastycznego. Pełzaniem łuków zginanych zajmował się L.M. KACZANOW w pracy [30b].

Istnieją wreszcie - z punktu widzenia teorii powłok - zagadnienia bliskie zagadnieniu T. KARMANA: są to powłoki toroidalne otwarte lub zamknięte, które w zastosowaniach spotykamy w różnych działach budowy maszyn, względnie - innych konstrukcjach. Zagadnienia te są przedmiotem osobnej grupy prac, dość szczegółowo omówionych w monografii W.W. NOWOZIŁOWA [35] pracy W.I. BULGAKOWA [23] oraz pracy przeglądowej K.F. CZERNYCHA i W.A. SZAMINY [28].

Z podanego przeglądu literatury wynika, że problemy ortotropowe, w takim ujęciu jak to przedstawiono dalej, nie były do tej pory rozpatrywane teoretycznie. Czy należy to uzasadnić? Wydaje się, że główną przyczyną braku prac na ten temat, to trudność przyjęcia modelu teoretycznego, który w jakimś stopniu byłby adekwatny do obiektu rzeczywistego. Innymi słowy zasadniczą trudność - to uwzględnienie w badaniach teoretycznych skomplikowanej powierzchni takich łuków, jeżeli przyjmować się będzie za bazę wyjściową - równania teorii powłok izotropowych. Z uwagi na to, że poruszany tutaj temat jest ważny w zastosowaniach, istnieją pewne prace doświadczalne, poświęcone tej tematyce. E.T. COPE i E.A. WERT, [4] badali doświadczalnie grubościenną łuki faliste. Z podanych wyników badań można wyciągnąć wniosek, że łuki te posiadają znacznie mniejszą liczbę KARMANA, niż analogiczne łuki gładkie. W przedstawionej powyżej pracy autorzy nie badali łuków cienkościennych oraz nie zajmowali się analizą naprężeń. Łuki segmentowe były badane przez A.G. KAMERSZTEINA [31b] oraz A.A. SKWORCOWA [39]. Z ostatnich doświadczeń wynika, że łuki segmentowe posiadają nieco większą liczbę KARMANA niż analogiczne łuki gładkie. W przypadku większej liczby segmentów, pole naprężeń i odkształceń łuków segmentowych zbliżone jest do analogicznego pola łuków gładkich.

Na tle przedstawionego powyżej zarysu historii badań teoretycznych i doświadczalnych, odnoszących się do zginania łuków cienkościennych, możemy uwypuklić niektóre, oryginalne zdaniem autora, wyniki zawarte w niniejszej rozprawie.

W pracy rozwiązano zagadnienie zginania łuków ortotropowych, w oparciu o równania teorii powłok ortotropowych. W związku z tym tematem wyłoniła się problematyka budowy równań ogólniejszych, dla analizowania innych przypadków obciążeń. Pozwoliło to autorowi sformułować pojęcie ortotropii pierwszego rodzaju oraz wyprowadzić równania teorii takich powłok. Do rozwiązania tak postawionego zagadnienia zastosowano metodę sił zespolonych - tutaj odpowiednio uogólnioną. Końcowe równania (równania zasadnicze) otrzymano w formie, która u-

możliwia pominięcie małych wpływów. W ten sposób uzyskano pewną metodę, która pozwala na zapisanie równań zasadniczych w najprostszej postaci. Jako logiczną konsekwencję tego sposobu otrzymano pewien prostszy wariant równań teorii powłok izotropowych.

Przejdziemy teraz do zwięzłego omówienia treści rozdziałów. Całość rozprawy jest podzielona na cztery rozdziały. W rozdziale pierwszym wyprowadzono równania teorii powłok ortotropowych, przy uwzględnieniu obciążeń powierzchniowych i wpływów termicznych. Zagadnienie traktuje się jako liniowe w sensie geometrycznym i fizycznym. Stosuje się wszystkie założenia klasycznej teorii powłok, zmieniając tylko stronę fizyczną. W tej ostatniej stosuje się uogólnione prawo HOOKE'a dla zagadnień ortotropii pierwszego rodzaju.

W rozdziale drugim rozpatruje się zginanie łuku falistego, a w trzecim - zginanie łuku segmentowego.

Wreszcie rozdział czwarty obejmuje niektóre zastosowania podanych poprzednio wyników, zawiera również wnioski końcowe i podaje zestawienie używanych tutaj symboli. W zakończeniu pracy podano cytowaną literaturę, skorowidz nazwisk oraz przytoczono obszernie streszczenie całej pracy.

Rozprawa niniejsza jest syntetycznym ujęciem prac autora [2].



## R o z d z i a ł I

### ZASTOSOWANIE SIŁ ZESPOLONYCH W TEORII POWŁOK ORTOTROPOWYCH

#### 1. Określenia wstępne

W niniejszym rozdziale zostały wyprowadzone podstawowe równania teorii powłok ortotropowych. Przedstawione zagadnienie ujmuje się jak najogólniej, przyjmując sześć funkcji charakteryzujących omawianą tutaj ortotropię. Otrzymane równania stosują się zarówno do ortotropii naturalnej (własność materiału), jak i do ortotropii konstrukcyjnej pojętej możliwie ogólnie (powłoki uźebrowane, pofałdowane, o zmiennej grubości itp.),

W pewnych zagadnieniach teorii powłok występuje ortotropia, która może być określona jako właściwość posiadania różnych własności sprężystych, przez pewne skończone elementy zawierające pofałdowania (uźebrowania). W ten sposób określoną ortotropię nazywać będziemy ortotropią konstrukcyjną pierwszego (drugiego) rodzaju.

Do istniejącej w rzeczywistości powierzchni środkowej powłoki danej, można przyporządkować powierzchnię umowną, tj. taką powierzchnię, względem której wystąpią np. pofałdowania. Jeżeli powierzchnia umowna może być określona analitycznie, znacznie prościej, niż powierzchnia środkowa powłoki danej, wtedy możemy w przybliżeniu analizować stan odkształcenia i naprężenia powłoki umownej, obciążonej jak powłoka dana, z warunkiem ekwiwalentności odkształceń obydwu powłok. Można to osiągnąć traktując powłokę umowną jako powłokę ortotropową, o odpowiednio dobranych funkcjach ortotropii. Funkcje te możemy wyznaczyć, porównując odkształcenia elementu powłoki danej i powłoki ortotropowej umownej. Należy tutaj wprowadzić konstrukcyjne wartości modułów YOUNGA, KIRCHHOFFA oraz liczb POISSONA. Tak ujętą ortotropię stosowano do tej pory wyłącznie dla powłok obrotowych [2a], i to dla stanu quasi osiowo - -symetrycznego, wprowadzonego przez E. REISSNERA [15a]. Uwaga badaczy kierowała się prawie wyłącznie na powłoki warstwowe i uźebrowane, o czym świadczą dwie - reprezentatywne dla tego kierunku badań - bogate monografie S.A. AMBARCUMIANA [19] i I.A. BIRGERA [22]. Analogiczną tematykę w teorii płyt reprezentują monografie M.T. HUBERA, [8b], S.G. LECHNICKIEGO [42] S. TIMOSHENKI i WOJNOWSKIEGO-KRIEGERA, [17] oraz praca M. SOKOŁOWSKIEGO, [16].

Wpływy termiczne dla powłok izotropowych, w równaniach W.W. NOWOŻIŁOWA, uwzględniali J.M. GRIGORIENKO i L.A. ILIN [26]. W niniejszym rozdziale wpływy termiczne traktuje się analogicznie jak to uczynił W.Z. WIASOW w pracy [40]

Przedstawiona tutaj tematyka, wypłynęła przy badaniu przez autora zagadnień, związanych ze zginaniem cienkościennej łuków ortotropowych. Zagadnienia te można w przybliżeniu rozwiązać, stosując teorię powłok ortotropowych dla stanu quasi osiowo-symetrycznego. Niniejszy rozdział ma na celu wyprowadzenie równań ogólniejszych, do badań stanów dowolnych, z uwzględnieniem wpływów termicznych. Zwrócono tutaj szczególną uwagę na to, aby końcowe układy równań były jak najbardziej operatywne a zatem przydatne do zastosowań.

Obliczanie naprężeń w powłokach pofałdowanych, z uwagi na skomplikowany kształt tych ostatnich, jest bardzo uciążliwe a nieraz wręcz niemożliwe. Zachodzi więc pytanie: czy stosując teorię ortotropii konstrukcyjnej pozbywamy się tej trudności? W tym przypadku trudność niejako przenosi się na zagadnienie wyznaczenia funkcji ortotropii, jednak te ostatnie mogą być w wielu przypadkach wyznaczone a następnie aproksymowane pewnymi przybliżonymi funkcjami, co pozwala dla ważnych praktycznie przypadków znaleźć przybliżone rozwiązania.

## 2. Założenia

1. Przedstawione tutaj równania ważne są dla powłok, których powierzchnia środkowa sparametryzowana jest współrzędnymi krzywoliniowymi, odniesionymi do kierunków głównych.

2. Pofałdowanie (uźebrowanie) powierzchni środkowej powłoki danej powinno być takie aby kierunki ortotropii pokrywały się z liniami krzywizn głównych. Zatem pofałdowania lub uźebrowania powinny być równoległe do linii  $\alpha_1$  lub  $\alpha_2$ . Przykłady takiej ortotropii podano na rys. 3. Przypadek, w którym powłoka jest pofałdowana (uźebrowana) krzyżowo, a zachowuje przy tym ortotropię, może być również analizowany, uprzednio jednak, należy doświadczalnie określić wszystkie funkcje ortotropii.

3. Przyjmujemy, że zależności strony statycznej i geometrycznej teorii powłok ortotropowych, są takie same jak w powłokach izotropowych, przy czym te ostatnie przyjmuje się zgodnie z zapisem W.W. NOWOZIŁOWA [35].

4. Rozkład temperatury jest funkcją liniową wzdłuż elementu normalnego powłoki, a przepływ ciepła jest ustalony, wtedy por. np. [8c] [12], [33]

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2, z) = t_0(\alpha_1, \alpha_2) + zt(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1)$$

gdzie

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_z + t_w), \quad t = \frac{1}{h}(t_z - t_w) \quad (2.2)$$

W równaniach (2,1), (2,2)  $t_z$  oznacza temperaturę powierzchni powłoki dla  $z = +\frac{h}{2}$  (rys. 2), a  $t_w$  - dla  $z = -\frac{h}{2}$ ,  $t_0$  jest temperaturą powierzchni środkowej powłoki,  $\alpha_1, \alpha_2$  są ortogonalnymi współrzędnymi krzywoliniowymi. Przyjmuje się również średnie wartości dla modułów sprężystości, jako niezależne od temperatury.

5. Wyniki uzyskane na podstawie przytoczonych tutaj równań będą tym dokładniejsze im odchylenia powierzchni środkowej powłoki danej od przyporządkowanej jej powierzchni umownej będą mniejsze.

6. Występujące tutaj składowe wektora obciążenia powierzchniowego  $X_j, Z$  są tylko funkcjami współrzędnych  $\alpha_1, \alpha_2$ .

7. Rozpatruje się tylko małe odkształcenia i ugięcia (teoria liniowa fizycznie i geometrycznie). Materiał zaś podlega prawu HOOKE'a, które określone jest relacjami (5.1).

8. Występujący tutaj indeks  $j$  przebiega liczby 1, 2.

### 3. Strona geometryczna

Odształcenie elementu powłoki  $\epsilon_j$ , kąt odkształcenia postaciowego  $\omega$ , zmiany krzywizny linii głównych  $\kappa_j$ , skreślenie elementu powierzchni  $\tau$  wynoszą, por [35]

$$\epsilon_j = \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_j A_{3-j}} \cdot \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} u_{3-j} + \frac{w}{R_j},$$

$$\omega = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right),$$

$$\kappa_j = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} - \frac{u_j}{R_j} \right) -$$

$$-\frac{1}{A_j A_{3-j}} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \left( \frac{1}{A_{3-j}} \frac{\partial w}{\partial \alpha_{3-j}} - \frac{u_{3-j}}{R_{3-j}} \right),$$

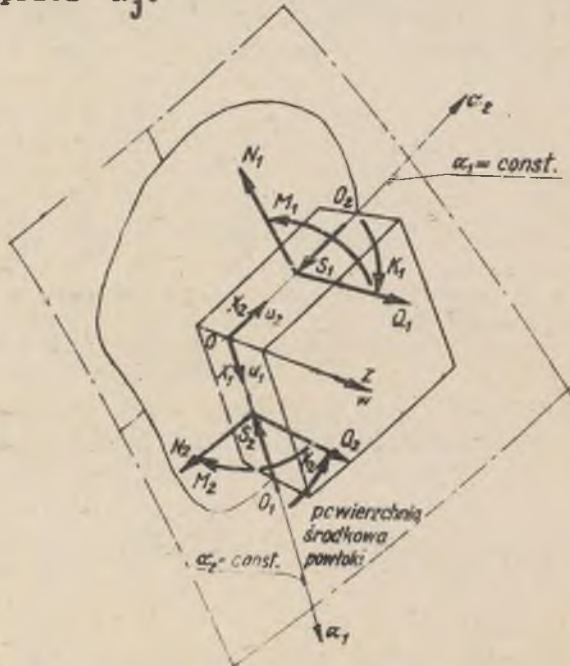
$$\tau = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) -$$

$$-\frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right) - \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right).$$

Powyższym składowym stanem odkształcenia odpowiadają następujące warunki nierozdzielności przemieszczeń, wyprowadzone przez A.L. GOLDENWEIZERA [25].

$$\begin{aligned}
 & A_{3-j} \frac{\partial \alpha_{3-j}}{\partial \alpha_j} + (\kappa_{3-j} - \kappa_j) \frac{\partial \Delta_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tau \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} - \\
 & - \frac{1}{R_j} \left[ A_{3-j} \frac{\partial \varepsilon_{3-j}}{\partial \alpha_j} + (\varepsilon_{3-j} - \varepsilon_j) \frac{\partial \Delta_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_{3-j}} + \omega \left( 1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] = 0 \\
 & \frac{\alpha_1}{R_2} + \frac{\alpha_2}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[ A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] + \frac{1}{2} A_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[ A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] + \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega \Bigg\} = 0 \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Występujące w równaniach (3.1) składowe  $u_j$ , w wektora przemieszczenia, posiadają wartości dodatnie dla przyjętego układu osi, podanego na rys. 1. Promienie krzywizny linii  $\alpha_j$  oznaczono tutaj przez  $R_j$ .



Rys. 1

Stan, zwany tutaj quasi osiowo-symetrycznym może być o-  
określony równaniami [15a]

$$u_1 = u = u(\alpha), \quad u_2 = v = k\varrho, \quad w = w(\alpha). \quad (3.3)$$

Wtedy też, jak to wynika z równań (3.1)<sub>2</sub>, (3.1)<sub>4</sub>, będzie

$$\omega = 0, \quad \tau = 0 \quad (3.4)$$

Dla takiego przypadku zmiany krzywizny linii głównych wynoszą

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d\phi}{d\alpha}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2} (k + \phi \operatorname{ctg} \alpha), \quad (3.5)$$

gdzie

$$\phi = - \frac{1}{R_1} \left( \frac{dw}{d\alpha} - u \right), \quad (3.6)$$

przedstawia zmianę kąta nachylenia stycznej do południka.

Stan osiowo-symetryczny otrzymujemy, przyjmując

$$k = 0 \quad (3.7)$$

#### 4. Strona statyczna

Warunki równowagi dla układu linii ortogonalnych pokrywa-  
jących się z krzywiznami głównymi, zgodnie z A.E.H. LOVE'EM,  
[11] mają postać:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_j A_{3-j}} \left[ A_{3-j} \frac{\partial N_j}{\partial \alpha_j} + (N_j - N_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial S_{3-j}}{\partial \alpha_{3-j}} + \right. \\ & \left. + (S_{3-j} + S_j) \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_{3-j}} \right] + \frac{Q_j}{R_j} + X_j = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + Z = 0,$$

$$\frac{1}{A_j A_{3-j}} \left[ A_{3-j} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_j} + (M_j - M_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial K_{3-j}}{\partial \alpha_{3-j}} + (K_{3-j} + K_j) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{3-j}} \right] - Q_j = 0, \quad (4.1)$$

cd.

$$S_1 - \frac{K_2}{R_2} = S_2 - \frac{K_1}{R_1}$$

Występujące w powyższych równaniach wszystkie wielkości wewnętrzne oraz współrzędne wektora obciążenia powierzchniowego, przedstawiają wartości dodatnie, gdy posiadają zwroty takie jak na rys. 1. Eliminacja sił poprzecznych  $Q_j$  z układu (4.1), daje

$$\begin{aligned} & A_{3-j} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_j} + (N_j - N_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3-j}} + 2S \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{3-j}} + \\ & + \frac{1}{R_j} \left[ A_{3-j} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_j} + (M_j - M_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + 2A_j \frac{\partial K}{\partial \alpha_{3-j}} + \right. \\ & \left. + 2 \left( 1 + \frac{R_1}{R_{3-j}} \right) K \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{3-j}} \right] = - A_j A_{3-j} X_j, \end{aligned} \quad (4.1')$$

$$\begin{aligned} & \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[ A_2 \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + (M_1 - M_2) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \\ & + A_1 \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} + 2K \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left. \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[ A_1 \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + (M_2 - M_1) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \right. \\ & \left. \left. + A_2 \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} + 2K \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] \right\} = Z \end{aligned}$$

gdzie, por. [35]

$$S = S_1 - \frac{K_2}{R_2} = S_2 - \frac{K_1}{R_1}, \quad K = \frac{1}{2} (K_1 + K_2)$$

Stan quasi lub osiowo-symetryczny występować będzie wtedy gdy wszystkie wielkości wewnętrzne oraz składowe  $X_1 = X$ ,  $Z$  będą jedynie funkcjami  $\alpha$  zaś składowa  $X_2$  będzie równa zeru.

5. Strona fizyczna

Prawo HOOKE'A dla rozpatrywanej tutaj ortotropii przyjmujemy w postaci następującej

$$\sigma_j = \frac{E_{jr}}{1-\nu_{jr} \nu_{3-j,r}} \left[ \epsilon_j + \nu_{3-j,r} \epsilon_{3-j} - (1+\nu_{3-j,r}) \alpha_t t_0 \right] + z \frac{E_{jz}}{1-\nu_{jz} \nu_{3-j,z}} \left[ \kappa_j + \nu_{3-j,z} \kappa_{3-j} - (1+\nu_{3-j,z}) \alpha_t t \right]^* \quad (5.1)$$

$$\tau_z = \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \omega + 2z \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \tau.$$

Występujące w (5.1) naprężenia pokazane są na rys. 2. Indeksy r, (z) odnoszą się do rozciągania (zginania) a s(k) - do ścinania (skręcania). Budowa równań (5.1) to wynik przyjęcia przez nas liniowego rozkładu naprężeń na elemencie normalnym powłoki (rys.3)

Wprowadźmy teraz sztywności: rozciągania - ściskania, zginania, ścinania oraz skręcania

$$C_j = \frac{E_{jr} \cdot h}{1-\nu_{jr} \nu_{3-j,r}},$$

$$C_{j,3-j} = C_j \nu_{3-j,r} = C_{3-j,j},$$

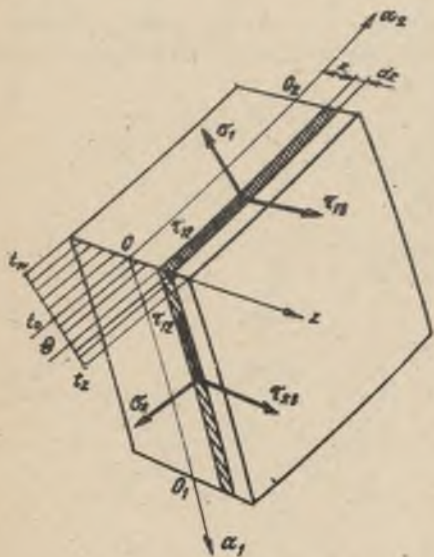
$$D_j = \frac{E_{jz} h^3}{12(1-\nu_{jz} \nu_{3-j,z})},$$

(5.2)

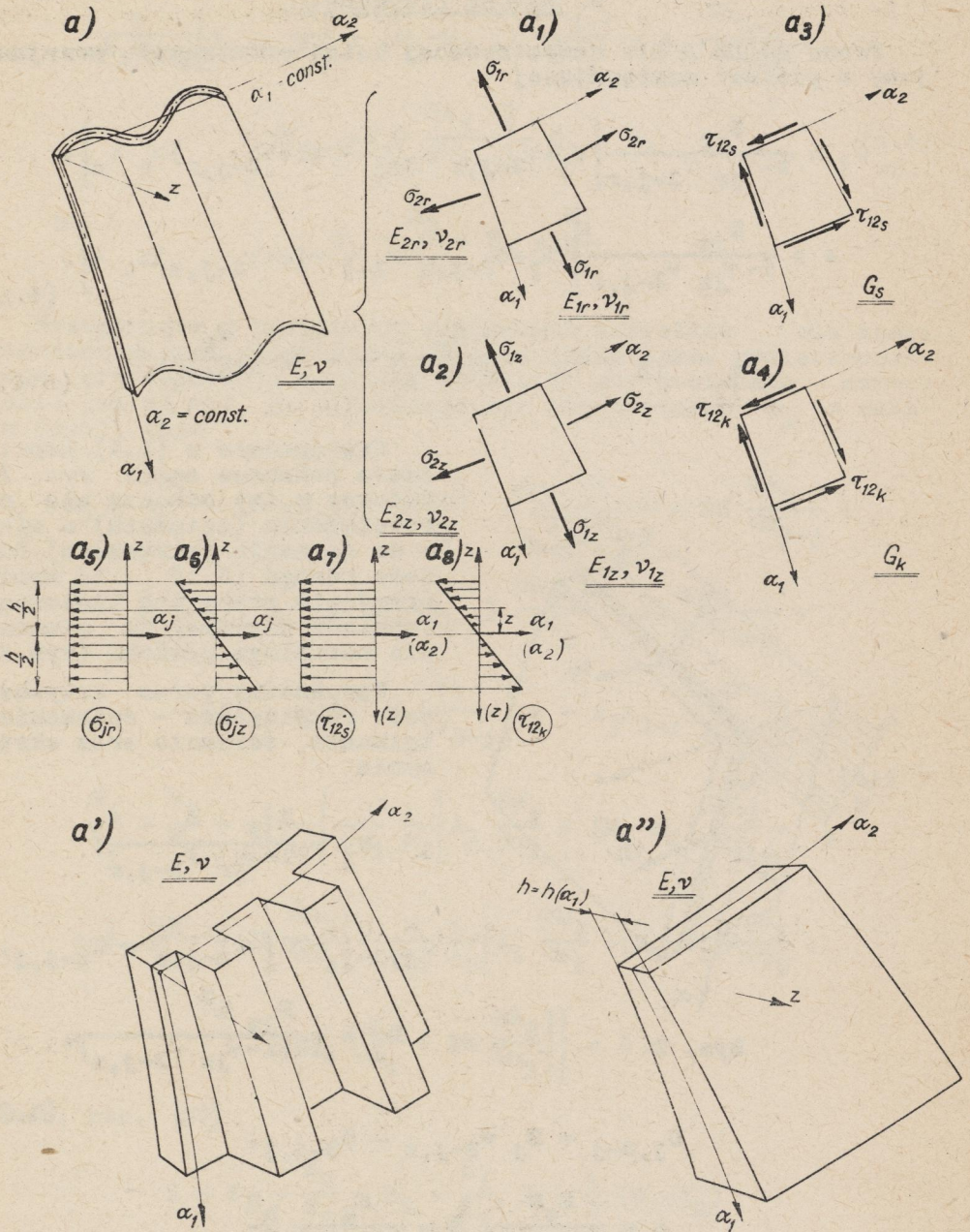
$$D_{j,3-j} = D_j \nu_{3-j,z} = D_{3-j,j},$$

$$A = \frac{E_s h}{2(1+\nu_s)}, \quad B = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \frac{h^3}{6}$$

\*) Przecinek wprowadzono dla rozdzielenia dwóch indeksów, nie oznacza on zatem - w tym przypadku - różniczkowania.



Rys. 2



Rys. 3



Zależności (5.2)<sub>2</sub> i (5.2)<sub>4</sub> wynikają z zastosowania zasady BETTIEGO dla układów podanych na rys. 3a<sub>1</sub>, 3a<sub>2</sub>. Podstawiając (5.2) do (5.1) otrzymujemy

$$\sigma_j = \sigma_{j,r} + z \sigma_{j,z}, \quad \tau_z = \frac{A}{h} \omega + z \frac{12B}{h^3} \tau, \quad (5.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_{j,r} &= \frac{1}{h} \left[ C_j \varepsilon_j + C_{j,3-j} \varepsilon_{3-j} - (C_j + C_{j,3-j}) \alpha_t t_0 \right] \\ \sigma_{j,z} &= \frac{12}{h^3} \left[ D_j \kappa_j + D_{j,3-j} \kappa_{3-j} - (D_j + D_{j,3-j}) \alpha_t t \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Obecnie określimy siły wewnętrzne w przekrojach powłoki następującymi przybliżonymi równaniami

$$\begin{aligned} N_j &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j dz, \quad S_j \approx \int_{-h/2}^{h/2} \tau_z \left( 1 + \frac{z}{R_{3-j}} \right) dz, \\ M_j &\approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j z dz, \quad K_j \approx \int_{-h/2}^{h/2} \tau_z z dz \end{aligned} \quad (5.5)$$

Podstawiając (5.3), (5.4) do (5.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} N_j &= C_j \varepsilon_j + C_{3-j,j} \varepsilon_{3-j} - (C_j + C_{3-j,j}) \alpha_t t_0 \\ S_j &= A \omega + \frac{B}{R_{3-j}} \tau, \quad S = A \omega, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$M_j = D_j \kappa_j + D_{3-j,j} \kappa_{3-j} - (D_j + D_{3-j,j}) \alpha_t t$$

$$K = K_1 = K_2 = B \tau.$$

Przybliżone równości (5.5) są tak zapisane, że zależności (5.6), przy założeniu izotropii i braku wpływów termicznych przechodzą w relacje W.W. NOWOŻIŁOWA.

Przekształcając układ równań (5.6) w ten sposób, aby składowe odkształcenia wyrażały się przez siły wewnętrzne, otrzymamy

$$\epsilon_j = \epsilon_j N_j - \epsilon_{3-j,j} N_{3-j} + \alpha_t t_0,$$

$$\alpha_j = \delta_j M_j - \delta_{3-j,j} M_{3-j} + \alpha_t t, \quad (5.7)$$

$$\omega = \frac{1}{A} S, \quad \tau = \frac{1}{B} K,$$

tutaj

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= \frac{C_{3-j}}{C_j C_{3-j} - C_{j,3-j}^2}, & \epsilon_{3-j,j} &= \frac{C_{1,3-j}}{C_j C_{3-j} - C_{j,3-j}^2}, \\ \delta_j &= \frac{D_{3-j}}{D_j D_{3-j} - D_{j,3-j}^2}, & \delta_{3-j,j} &= \frac{D_{1,3-j}}{D_j D_{3-j} - D_{j,3-j}^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Zamiast konstrukcyjnych modułów YOUNGA, wprowadzamy niekiedy funkcje ortotropii, które definiujemy równaniami

$$\begin{aligned} k_{1r}(\alpha_1, \alpha_2) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_{1r}}{E}, \quad \frac{1}{k_{2r}(\alpha_1, \alpha_2)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_{2r}}{E}, \\ k_{1z}(\alpha_1, \alpha_2) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_{1z}}{E}, \quad \frac{1}{k_{2z}(\alpha_1, \alpha_2)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_{2z}}{E}, \\ k_s(\alpha_1, \alpha_2) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_s(1+\nu)}{E(1+\nu_s)}, \quad k_k(\alpha_1, \alpha_2) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{E_k(1+\nu)}{E(1+\nu_k)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Obecnie postaramy się jakościowo ocenić występujące tutaj konstrukcyjne moduły  $E(\ )$ ,  $\nu(\ )$  oraz funkcje ortotropii  $k(\ )$ . Jako pierwszy przypadek rozpatrzmy pofałdowanie względem linii  $\alpha_2$  (rys. 3a). Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 E_{1r} \geq E : k_{1r} \geq 1, & \quad E_{2r} < E : k_{2r} \geq 1, \\
 E_{1z} \geq E : k_{1z} \geq 1, & \quad E_{2z} < E : k_{2z} \geq 1, \\
 G_s \geq G : k_s \geq 1, & \quad G_k \geq G : k_k \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Jeżeli chodzi o nierówności (5.10)<sub>9</sub> - (5.10)<sub>12</sub>, to relacje te należy ustalać doświadczalnie, względnie na podstawie obliczeń.

W przypadku pofałdowań względem linii  $\alpha_1$ , możemy ustalić analogiczne do (5.10) nierówności.

$$\begin{aligned}
 E_{1r} < E : k_{1r} \leq 1, & \quad E_{2r} \geq E : k_{2r} \leq 1, \\
 E_{1z} \leq E : k_{1z} \leq 1, & \quad E_{2z} \geq E : k_{2z} \leq 1, \\
 G_s \geq G : k_s \geq 1, & \quad G_k \geq G : k_k \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

W przypadku pofałdowań nie pokrywających się z linią  $\alpha_1$ , ( $\alpha_2$ ), lecz przy zachowaniu ortotropii, to jak już wspomniano należy wszystkie funkcje ortotropii wyznaczyć doświadczalnie.

Stosując zasadę BETTIEGO do układu podanego na rys. 2a<sub>1</sub>, 2a<sub>2</sub>, otrzymujemy przybliżone zależności

$$\nu_{2r} = \frac{\nu_{1r}}{k_{1r} k_{2r}}, \quad \nu_{2z} = \frac{\nu_{1z}}{k_{1z} k_{2z}}
 \tag{5.12}$$

W przypadku pofałdowań względem linii  $\alpha_2$ , możemy przyjąć, że

$$\nu_{1r} \approx \nu_{1z} \approx \nu,
 \tag{5.13}$$

zaś przy pofałdowaniach względem linii  $\alpha_1$

$$\nu_{2r} \approx \nu_{2z} \approx \nu
 \tag{5.14}$$

Zależności (5.12) - (5.14) mają taką samą budowę jak w teorii płyt o ortotropii konstrukcyjnej, por. np., [20].

W przypadku powłoki posiadającej uźebrowanie      pokrywające się np. z linią  $\alpha_1$  (rys. 3a) otrzymamy

$$\begin{aligned} E_{1r} > E : k_{1r} > 1, & \quad E_{2r} \approx E : k_{2r} \approx 1, \\ E_{1z} > E : k_{1z} \geq 1, & \quad E_{2z} \approx E : k_{2z} \approx 1, \\ G_s \approx G : k_s \approx 1, & \quad G_k \approx G : k_k \approx 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Funkcje zaś  $k_{1r}$ ,  $k_{1z}$ , jak to wynika z porównania odkształceń powłoki ortotropowej i izotropowej, mogą być przedstawione w postaci ilorazów odpowiednich powierzchni oraz - momentów bezwładności. Określenie funkcji dla takiej ortotropii obszernie omówiono w pracy [22].

Dla określenia funkcji ortotropii pierwszego rodzaju (dla powłok mało wyniosłych) można stosować wzory podane w pracy [20]. Dla innej klasy powłok funkcje te, jak już zaznaczono, należy otrzymywać z porównania odkształceń, a w przypadkach gdy to jest ze względów obliczeniowych niemożliwe - doświadczalnie.

W przypadku ortotropii naturalnej, funkcje te ustala się doświadczalnie.

## 6. Rozwiązanie w siłach zespolonych

Końcowe równania teorii powłok możemy zapisać w przemieszczeniach, w siłach lub w postaci mieszanej (połączenie funkcji naprężeń i przemieszczeń). Jeżeli analizować wyszczególnione powyżej możliwości rozwiązania przedstawionego zagadnienia, to z uwagi na to, że występujące tutaj sztywności  $A$ ,  $B$ ,  $C_j$ ,  $C_{3-j,j}$ ,  $D_j$ ,  $D_{3-j,j}$  mogą być w najogólniejszym przypadku funkcjami zmiennych  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - metoda przemieszczeniowa prowadzi do bardzo skomplikowanych operatorów równań przemieszczeniowych. Niektóre przypadki takich układów dla szczególnego rodzaju powłok zostały rozpatrzone w pracy S.A. AMBARCUMIANA [19]. Podobnie i metoda mieszana prowadzi do złożonych układów równań. Dla ortotropii drugiego rodzaju układy takie przedstawiono w pracy V. VISARIONA i C. STĂNESCU [24]. Zastosowanie sił zespolonych do omawianego tutaj zagadnienia posiada jeszcze tę cenną zaletę, że pozwala na wyeliminowanie wielkości małych w równaniach zasadniczych.

Zatem, gdy siły zewnętrzne nie są funkcjami przemieszczeń, jedynym operatywnym rozwiązaniem jest rozwiązanie w siłach wewnętrznych, które można przedstawić w postaci trzech równań różniczkowych, zawierających - wprowadzone przez W.W. NOWOZIŁOWA siły zespolone (tutaj odpowiednio uogólnione) oraz siły zespolone sprzężone. W szczególnym przypadku izotropii siły

zespolone sprzężone nie wchodzą do rozpatrywanych równań: są one bowiem mnożone przez pewne funkcje, które w tym przypadku można przyjąć jako równe zeru.

W wielu przypadkach w powłokach ortotropowych możemy przyjąć pewne uproszczenia, które sprowadzają równania do względnie prostej postaci, analogicznej do układu równań W.W. NOWOZIŁOWA.

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia podstawowych równań teorii powłok ortotropowych, przy wykorzystaniu formalnie wprowadzonych sił zespolonych i sił zespolonych sprzężonych. Wprowadzmy stałą, znaną z teorii powłok izotropowych

$$c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad (6.1)$$

a następnie pomnożmy równania (3.2) przez stałą

$$\Omega_1 = Ehc_1, \quad 1 = \sqrt{-1}, \quad (6.1')$$

i wprowadźmy do tego układu zależności (5.7)<sub>1</sub>, (5.7)<sub>3</sub>.

Podobnie, wprowadźmy do układów (4.1') zamiast momentów  $M_j$ ,  $K$  wielkości określone zależnościami (5.6)<sub>4</sub>, (5.6)<sub>5</sub>. Następnie dodając te dwa układy otrzymamy

$$\begin{aligned} & A_{3-j} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_j} a_{j1} + N_j \frac{\partial A_{3-1}}{\partial \alpha_j} a_{j2} - N_{3-j} \frac{\partial A_{3-1}}{\partial \alpha_j} a_{j3} + A_j \frac{\partial S}{\partial x_{3-j}} a_{j4} + \\ & + 2S \frac{\partial A_1}{\partial x_{3-j}} a_{j5} - \Omega_1 \frac{A_{3-1}}{R_j} i \frac{\partial N_{3-1}}{\partial \alpha_j} - 1 \Omega \frac{A_{3-1}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} + \\ & + \Omega_1 (A_{3-j} \frac{\partial x_{3-1}}{\partial \alpha_j} b_{j1} + x_{3-j} \frac{\partial A_{3-1}}{\partial \alpha_j} b_{j2} - x_j \frac{\partial A_{3-1}}{\partial \alpha_j} b_{j3} + A_j \frac{\partial \tau}{\partial x_{3-j}} b_{j4} + \\ & + 2\tau \frac{\partial A_1}{\partial x_{3-j}} b_{j5}) + \frac{A_{3-1} D_1}{R_j} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} - \frac{A_{3-1}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} [(D_j + D_{3-j}, j) t] - \\ & - \alpha_t \frac{\partial A_{3-1}}{\partial \alpha_j} \frac{D_1 - D_{3-1}}{R_j} t = - A_j A_{3-j} X_j \end{aligned} \quad (6.2)$$

Występujące w równaniach (6.2) pomocnicze funkcje  $a_{jk}, b_{jk}$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) zestawiono w tabelicy 1.

Jeżeli teraz wprowadzimy do układu (6.2) poniższe, w sposób formalny zdefiniowane siły zespolone i zespolone sprzężone

$$\begin{aligned} \tilde{N}_j &\stackrel{\text{df}}{=} N_j + i\Omega(x_{3-j} - \alpha_t t) = N_j + i\Omega(\mathcal{D}_{3-j} M_{3-j} - \mathcal{D}_{3-j,j} M_j), \\ \tilde{\bar{N}}_j &\stackrel{\text{df}}{=} N_j - i\Omega(x_{3-j} - \alpha_t t) = N_j - i\Omega(\mathcal{D}_{3-j} M_{3-j} - \mathcal{D}_{3-j,j} M_j) \quad (6.3) \end{aligned}$$

$$\tilde{S} \stackrel{\text{df}}{=} S + i\Omega\tau = S + \frac{i\Omega}{B} K, \quad \tilde{\bar{S}} \stackrel{\text{df}}{=} S - \frac{i\Omega}{B} K,$$

to wtedy układ (6.2) przyjmie postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Lambda_j \Lambda_{3-j}} &\left\{ (a_{j1} + b_{j1}) \Lambda_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (a_{j2} + b_{j2}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} N_j - (a_{j3} + b_{j3}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{N}_{3-j} + \right. \\ &+ (a_{j4} + b_{j4}) \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2(a_{j5} + b_{j5}) \frac{\partial \Lambda_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} - i\Omega \mathcal{E}_{3-j} \frac{\Lambda_{3-j}}{R_j} \left. \right\} \cdot \\ &\cdot \left[ \left(1 + \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{E}_{3-j}}\right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \left(1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \mathcal{E}_{3-j}}\right) \frac{\partial \tilde{\bar{N}}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] + p_j \Big] = -X_j + X_{jt} \end{aligned} \quad (6.4)$$

W równaniu (6.4) oznaczono przez

$$\begin{aligned} p_j &= (a_{j1} - b_{j1}) \Lambda_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (a_{j2} - b_{j2}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} N_j - (a_{j3} - b_{j3}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} \tilde{N}_{3-j} + \\ &+ (a_{j4} - b_{j4}) \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2(a_{j5} - b_{j5}) \frac{\partial \Lambda_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S}, \quad (6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{jt} &= \frac{1}{\Lambda_j \Lambda_{3-j}} \left\{ \frac{D_j - D_{3-j}}{R_j} \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} \alpha_t t + \frac{\Lambda_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[ (D_j + D_{3-j,j}) t \right] - \right. \\ &\left. - i\Omega \Lambda_{3-j} \alpha_t \left[ \left(b_{j1} - \frac{D_j}{\Omega R_j}\right) \frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{\Lambda_{3-j}} \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} (b_{j2} - b_{j3}) t \right] \right\} \end{aligned}$$

W podobny sposób otrzymamy trzecie równanie: w tym celu łączymy równanie (4.1)<sub>2</sub> z pomnożonym przez  $i\Omega$  równaniem (3.2)<sub>2</sub>

przy wykorzystaniu związków (5.6), (5.7), (4.1')<sub>1</sub> i (3.2)<sub>1</sub> oraz (6.3), tak iż w wyniku końcowym otrzymujemy

$$\frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{P_1}{\Lambda_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{P_2}{\Lambda_2} \right) \right] = Z - Z_t \quad (6.6)$$

W równaniu (6.6) przyjęto oznaczenia

$$P_j = R_j \left[ \Lambda_j \Lambda_{3-j} X_j + \Lambda_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{2} (C_{j1} + C_{j3}) \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + (C_{j2} + C_{j4}) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} + \frac{1}{2} (C_{j1} - C_{j3}) \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + (C_{j2} - C_{j4}) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} \right] \quad (6.7)$$

$$Z_t = 1 \Omega \alpha_t \left\{ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t + \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{R_1 \Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial t}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{R_2 \Lambda_1}{\Lambda_2} \frac{\partial t}{\partial \alpha_2} \right) \right] \right\}$$

W najogólniejszym przypadku ortotropii dysponujemy więc układami równań (6.4) - (6.7). W zastosowaniach bardzo często spotykamy się z pewnymi szczególnymi przypadkami ortotropii. Rozpatrzeniem takich przypadków zajmiemy się dalej. Obecnie przejdziemy do obliczenia sił wewnętrznych, przemieszczeń oraz kątów obrotu.

Wychodząc z równań (6.3), możemy wyznaczyć siły wewnętrzne przy pomocy zależności

$$N_j = \operatorname{Re} \tilde{N}_j, \quad S = \operatorname{Re} \tilde{S}, \quad (6.8)$$

$$M_j = \frac{1}{\Omega} \operatorname{Im} (D_j \tilde{N}_{3-j} + D_{3-j, j} \tilde{N}_j), \quad K = \frac{B}{\Omega} \operatorname{Im} \tilde{S}$$

Do wyznaczenia współrzędnych wektora przemieszczenia, możemy się posłużyć układem równań, otrzymanym z połączenia zależności (3.1)<sub>1,2</sub>, (5.7) oraz (6.8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda_j} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{\Lambda_j \Lambda_{3-j}} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_{3-j}} u_{3-j} + \frac{w}{R_j} = \\ & = \ell_j \operatorname{Re} \tilde{N}_j - \ell_{3-j, j} \operatorname{Re} \tilde{N}_{3-j} + \alpha_t t_0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$- \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{\Lambda_1} \right) - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{\Lambda_2} \right) = \frac{1}{\Lambda} \operatorname{Re} \tilde{S}$$

Całkując powyższy układ równań otrzymamy składowe  $u_j$ ,  $w_j$ ; dalej możemy obliczyć kąty obrotu stycznych do linii  $\alpha_j$  wokół stycznych do linii  $\alpha_{3-j}$ , tj.

$$v_j = -\frac{1}{\Lambda_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} + \frac{u_j}{R_j} \quad (6.10)$$

Obecnie przejdziemy do omówienia pewnych szczególnych przypadków ortotropii.

### 7. Szczególne przypadki ortotropii

Z relacji (6.4), (6.5)<sub>1</sub>, (6.7) wynika, że podstawowe równania upraszczają się w sposób zasadniczy, jeżeli przyjmiemy poniższe równości

$$a_{jk} \approx b_{jk} \approx c_{j,l} \approx 1, \quad (k = 1, 2, \dots, 5, \quad l = 1, 2, \dots, 4) \quad (7.1)$$

słuszne zawsze dla pewnej klasy powłok izotropowych i ortotropowych. W tym przypadku wszystkie pomocnicze funkcje, zestawione w tabelicy 1, mogą być przyjęte jako równe jedności, z błędem nie przekraczającym wartości  $h/R_j$ . Błąd ten jest wynikiem stosowania w teorii powłok (ściślej w pewnej klasie powłok izotropowych) hipotezy LOVE'A-KIRCHHOFFA. W tym przypadku odpowiednie równania mogą być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} & \Lambda_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 \frac{\partial \Lambda_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} - \\ & - \frac{1}{2} 1 \Omega \ell_{3-j} \frac{\Lambda_{3-j}}{R_j} \left[ \left(1 + \frac{D_j}{\Omega^2 \ell_{3-j}^2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \left(1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \ell_{3-j}^2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] = \\ & = - \Lambda_j \Lambda_{3-j} (X_j - X_{jt}), \end{aligned} \quad (7.2)$$

tutaj

$$\begin{aligned} X_{jt} = & \frac{1}{\Lambda_j \Lambda_{3-j}} \left\{ \frac{D_j - D_{3-j}}{R_j} \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} \alpha_t + \frac{\Lambda_{3-j}}{R_j} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[ (D_j + D_{3-j, j})^t \right] - \right. \\ & \left. - 1 \Omega \Lambda_{3-j} \alpha_t \left( \frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.3)$$



Zestawienie pomocniczych funkcji  $a_{jk}, b_{jk}, c_{jl}$  ( $j=1,2; l=1,\dots,4; k=1,\dots,5$ ) Tablica 1

	Powłoka ortotropowa	Powłoka izotropowa
$a_{j1}$	$1 + \epsilon_{3-j,j} \frac{\Omega}{R_j} i$	$1 + \frac{\nu c}{R_j} i$
$a_{j2}$	$1 + \epsilon_j \frac{\Omega}{R_j} i \left( 1 + \frac{\epsilon_{3-j,j}}{\epsilon_j} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{\epsilon_j} \frac{\partial \epsilon_{3-j,j}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1+\nu)c}{R_j} i$
$a_{j3}$	$1 + \epsilon_{3-j} \frac{\Omega}{R_j} i \left( 1 + \frac{\epsilon_{3-j,j}}{\epsilon_{3-j}} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{\epsilon_{3-j}} \frac{\partial \epsilon_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1+\nu)c}{R_j} i$
$a_{j4}$	$1 - \frac{\Omega}{AR_j} i$	$1 - 2 \frac{(1+\nu)c}{R_j} i$
$a_{j5}$	$1 - \frac{\Omega}{2AR_j} i \left( 1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} - \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1+\nu)c}{R_j} i \left( 1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right)$
$b_{j1}$	$1 - \frac{D_{3-j,j}}{\Omega R_j} i$	$1 - \frac{\nu c}{R_j} i$
$b_{j2}$	$1 + \frac{D_{3-j}}{\Omega R_j} i \left( 1 - \frac{D_{3-j,j}}{D_{3-j}} - \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{D_{3-j}} \frac{\partial D_{3-j,j}}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1-\nu)c}{R_j} i$
$b_{j3}$	$1 + \frac{D_j}{\Omega R_j} i \left( 1 - \frac{D_{3-j,j}}{D_j} + \frac{A_{3-j}}{\partial A_{3-j} / \partial \alpha_j} \frac{1}{D_j} \frac{\partial D_j}{\partial \alpha_j} \right)$	$1 + \frac{(1-\nu)c}{R_j} i$
$b_{j4}$	$1 - \frac{2B}{\Omega R_j} i$	$1 - 2 \frac{(1-\nu)c}{R_j} i$
$b_{j5}$	$1 - \frac{B}{\Omega R_j} i \left( 1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} + \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1-\nu)c}{R_j} i \left( 1 + \frac{R_j}{R_{3-j}} \right)$
$c_{j1}$	$1 - \frac{i\Omega}{2AR_j}$	$1 - \frac{(1+\nu)c}{R_j} i$
$c_{j2}$	$1 - \frac{i\Omega}{2AR_j} \left( \frac{R_j}{R_{3-j}} - \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1+\nu)c}{R_{3-j}} i$
$c_{j3}$	$1 - \frac{iB}{\Omega R_j}$	$1 - \frac{(1-\nu)c}{R_j} i$
$c_{j4}$	$1 - \frac{iB}{\Omega R_j} \left( \frac{R_j}{R_{3-j}} + \frac{A_j}{\partial A_j / \partial \alpha_{3-j}} \frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial \alpha_{3-j}} \right)$	$1 - \frac{(1-\nu)c}{R_{3-j}} i$

Trzecie równanie ma postać identyczną jak w (6.6), z tym że ulega teraz zmianie funkcja  $P_j$

$$P_j = R_j \left[ A_j A_{3-j} X_j + A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tilde{S} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{3-j}} \right] \quad (7.4)$$

Uwzględniając w (7.4) zależność (7.2), otrzymamy

$$P_j = R_j A_j A_{3-j} \left\{ X_{jt} + 1 \cdot \Omega \frac{\ell_{3-j}}{2R_j A_j} \left[ \left( 1 + \frac{D_j}{\Omega^2 \ell_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \left( 1 - \frac{D_j}{\Omega^2 \ell_{3-j}} \right) \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} \right] \right\} \quad (7.4)$$

Dalsze uproszczenie otrzymuje się w przypadku, gdy spełniona jest równość

$$D_j \approx \Omega^2 \ell_{3-j} \quad (7.5)$$

słuszna zawsze dla powłok izotropowych oraz dla pewnej klasy powłok ortotropowych. Równania (7.2) przyjmują postać

$$A_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial A_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + A_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2\tilde{S} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{3-j}} - 1 \cdot \Omega \ell_{3-j} \frac{A_{3-j}}{R_j} \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j} = - A_j A_{3-j} (X_j - X_{jt}) \quad (7.6)$$

Trzecie równanie ma postać taką samą jak w (6.6) z tym, że ulega teraz zmianie funkcja  $P_j$

$$P_j = R_j A_j A_{3-j} (X_{jt} + 1 \cdot \Omega \frac{\ell_{3-j}}{R_j A_j} \frac{\partial \tilde{N}_{3-j}}{\partial \alpha_j}) \quad (7.7)$$

Funkcje  $X_{jt}$  i  $Z_t$  określone są teraz zależnościami (7.3), (6.7)<sub>2</sub>

Wreszcie ostatni szczególny przypadek to powłoka izotropowa. W tym przypadku otrzymujemy

$$C_j = C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, C_{3-j,j} = \nu C, \mathcal{C}_j = \frac{1}{Eh}, \mathcal{C}_{3-j,j} = \frac{\nu}{Eh}, \quad (7.8)$$

$$D_j = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, D_{3-j,j} = \nu D, \mathcal{D}_j = \frac{12}{Eh^3}, \mathcal{D}_{3-j,j} = \frac{12\nu}{Eh^3}.$$

Uwzględniając zależności (7.8) w równaniach (7.6), (7.3) otrzymujemy

$$\Lambda_{3-j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) + \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + 2 \frac{\partial \Lambda_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} -$$

$$- \frac{\Lambda_{3-j} c}{R_j} 1 \frac{\partial N_{3-j}}{\partial \alpha_j} = - \Lambda_j \Lambda_{3-j} (X_j - X_{jt}), \quad (7.9)$$

$$X_{jt} \approx - \frac{1 \Omega \alpha_t}{\Lambda_j} \left( \frac{\partial t}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j} \right)$$

Ponieważ w wyniku przeprowadzonej tutaj analizy otrzymujemy, w przypadku powłoki izotropowej, równania, które różnią się od równań W.W. NOWOŻIŁOWA, należy wykazać, że różnica ta jest zgodna z uproszczeniami (7.1) słusznymi zawsze dla powłok izotropowych. Równanie (7.9) jest w budowie prostsze, niż analogiczne równanie podane w pracy [35].

Dodajmy i odejmijmy w lewej stronie równania (7.9)<sub>1</sub> wyrażenie  $\frac{\Lambda_{3-j} c}{R_j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j}$  a otrzymamy (po podzieleniu przez  $\Lambda_j \Lambda_{3-j}$ ):

$$\frac{1}{\Lambda_j \Lambda_{3-j}} \left[ \Lambda_{3-j} \left( 1 + \frac{c}{R_j} \right) \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} + (\tilde{N}_j - \tilde{N}_{3-j}) \frac{\partial \Lambda_{3-j}}{\partial \alpha_j} + \Lambda_j \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_{3-j}} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial \Lambda_j}{\partial \alpha_{3-j}} \tilde{S} \right] - \frac{c}{\Lambda_j R_j} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial \alpha_j} = -X_j + X_{jt} \quad (7.10)$$

gdzie  $\tilde{N} = \tilde{N}_j + \tilde{N}_{3-j}$

W równaniu (7.10) funkcję  $1+c/R_j$  można przyjąć jako równą jedności, a otrzymane tak układy równań odpowiadają układom podanym w pracy [35]. Zatem postać (7.9)<sub>1</sub>, w świetle uproszczeń (7.1), jest równowarto układowi (7.10) a jako prostsza może być używana w obliczeniach.

Trzecie równanie otrzymamy wstawiając do (6.6) funkcje (7.4) przy czym w tej ostatniej równości możemy uwzględnić (7.9), to wtedy otrzymamy

$$\frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1c}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha_2} \right] = Z - Z_t -$$

$$- \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (R_1 A_2 X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (R_2 A_1 X_{2t}) \right], \quad (7.11)$$

albo równość (7.10), to wówczas

$$\frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + 1c \sqrt{2} \tilde{N} \approx Z - Z_t - \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (R_1 A_2 X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (R_2 A_1 X_{2t}) \right], \quad (7.12)$$

gdzie:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(\ )}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(\ )}{\partial \alpha_2} \right] \right\}.$$

Równanie o postaci (7.12) spotykamy w pracy [35].

### 8. Powłoki obrotowe

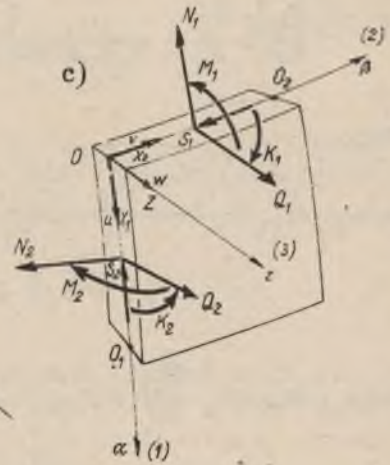
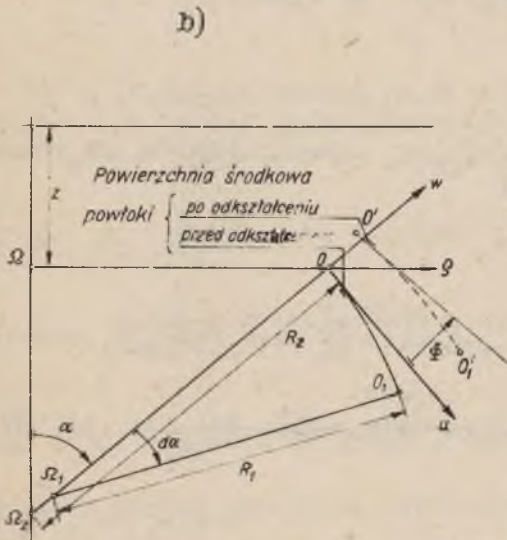
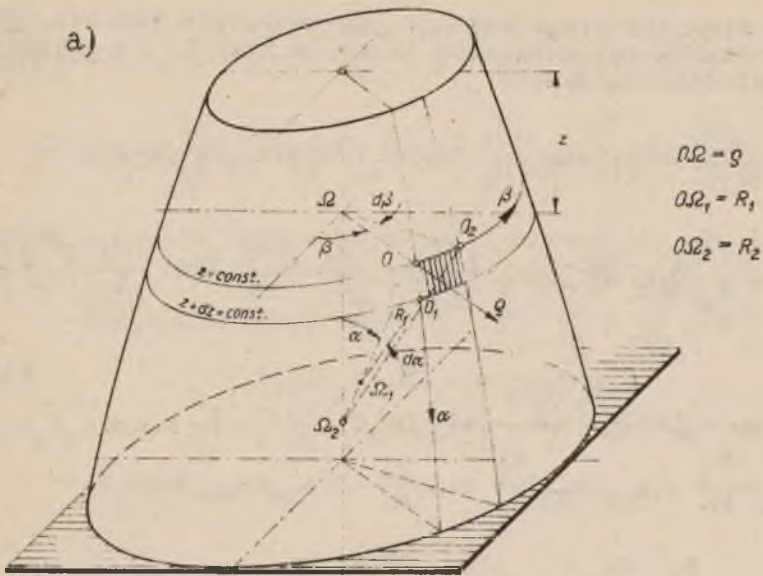
W przypadku powłok obrotowych liniami krzywizn głównych są południki i równoleżniki. Za współrzędne krzywoliniowe wybie-rzemy teraz kąty  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 4). Współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni, mają znaną postać

$$A_1 = R_1, \quad A_2 = \varrho = R_2 \sin \alpha. \quad (8.1)$$

W równaniach (8.1)  $\varrho$  oznacza promień równoleżnika, okreś-lonego kątem  $\alpha$ , zaś  $R_1, R_2$  promienie krzywizn południka i rów-noleżnika. Ponieważ współczynniki  $A_1, A_2$  są tylko funkcjami kąta  $\alpha$ , to równania GAUSSA-CODAZZIEGO sprowadzają się do jed-nej zależności

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = R_1 \cos \alpha \quad (8.2)$$

Przytoczymy teraz podstawowe równania teorii powłok orto-tropowych obrotowych. Układy te otrzymamy z zależności (6.4) - (6.7). Przy czym uczynimy założenie, że ortotropia w powłok-



Rys. 4

kach obrotowych jest tego rodzaju, iż wszystkie funkcje, które ją charakteryzują są zależne tylko od kąta  $\alpha$ . Po uwzględnieniu powyższego otrzymamy

$$\begin{aligned} & (a_{11}+b_{11})\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (a_{12}+b_{12})\frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_1 - (a_{13}+b_{13})\frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \tilde{N}_2 + \\ & + (a_{14}+b_{14})\frac{R_1}{R_2 \sin \beta} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} - 1 \Omega \ell_2 \frac{1}{R_1} \left[ \left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} \right] + \\ & + \frac{P_1}{R_2 \sin \alpha} = -2R_1(X_1 - X_{1t}) \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} & (a_{21}+b_{21})\frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + (a_{24}+b_{24})\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2(a_{25}+b_{25}) \cos \alpha \tilde{S} - \\ & - 1 \Omega \ell_1 \frac{1}{R_2} \left[ \left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} \right] + \frac{P_2}{R_1} = -2R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}), \\ & \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{P_1}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} \right) \right] = Z - Z_t \end{aligned}$$

tutaj

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_{11}-b_{11})R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (a_{12}-b_{12})R_1 \cos \alpha \tilde{N}_1 - (a_{13}-b_{13})R_1 \cos \alpha \tilde{N}_2 + \\ & + (a_{14}-b_{14})R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha}, \\ P_2 &= (a_{21}-b_{21})R_1 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + (a_{24}-b_{24})R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2(a_{25}-b_{25})R_1 \cos \alpha \tilde{S}, \\ \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin \alpha X_1 + R_2 \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2)R_1 \cos \alpha + \frac{1}{2}(c_{11}+c_{13})R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} + \\ & + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{13})R_1 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} = R_1 R_2 X_2 + \frac{R_1}{\sin \alpha} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{1}{2} (c_{21} + c_{23}) R_2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} +$$

$$+ (c_{22} + c_{24}) R_1 \operatorname{ctg} \alpha \tilde{S} + \frac{1}{2} (c_{21} - c_{23}) R_2 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + (c_{22} - c_{24}) R_1 \operatorname{ctg} \alpha \tilde{S}.$$

$$X_{1t} R_1 R_2 \sin \alpha = (D_1 - D_2) \cos \alpha \alpha_t t + \frac{R_2}{R_1} \alpha_t \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (D_1 + D_{12}) t \right] -$$

$$- 1 \Omega R_2 \alpha_t \sin \alpha \left[ (b_{11} - \frac{D_1}{\Omega R_1}) \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (b_{12} - b_{13}) t \right],$$

$$X_{2t} R_1 R_2 \sin \alpha = \frac{R_1}{R_2} \alpha_t \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ (D_2 + D_{12}) t \right] - 1 \Omega R_1 \alpha_t \left[ (b_{21} - \frac{D_2}{\Omega R_2}) \frac{\partial t}{\partial \beta} -$$

$$- \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right],$$

$$Z_t = 1 \Omega \alpha_t \left\{ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_2 \sin \alpha \frac{\partial t}{\partial \alpha}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{R_1}{\sin \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) \right\}.$$

(8.4)

Po scałkowaniu układu (8.3) siły wewnętrzne obliczamy z zależności (6.8), przemieszczenia zaś - po uwzględnieniu (8.1) (8.2) - z układu równań

$$\frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right) = \ell_1 \operatorname{Re} \tilde{N}_1 - \ell_{12} \operatorname{Re} \tilde{N}_2 + \alpha_t t_0,$$

$$\frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} u = \ell_2 \operatorname{Re} \tilde{N}_2 - \ell_{12} \operatorname{Re} \tilde{N}_1 + \alpha_t t_0, \quad (8.5)$$

$$- \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{R_2 \sin \alpha} \right) = \frac{1}{A} \operatorname{Re} \tilde{S}$$

Kąty obrotu stycznych obliczamy przy pomocy równań

$$v_1^* = - \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \right), \quad v_2^* = - \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - v \right).$$

Jeżeli dla rozpatrywanego tutaj przypadku będą słuszne równości (7.1), to układy równań (8.3) - (8.4) będą mieć postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{1\Omega}{2R_1} \ell_2 \left[ \left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} \right] = -R_1 (X_1 - X_{1t}), \\ \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{1\Omega}{2R_2} \ell_1 \left[ \left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} \right] = -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}), \\ \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{P_1}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} \right) \right] = Z - Z_t, \end{aligned} \quad (8.7)$$

tutaj

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin \alpha \left\{ \frac{1\Omega}{2R_1^2} \ell_2 \left[ \left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 \ell_2}\right) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} \right] + X_{1t} \right\}, \\ \frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} &= R_1 R_2 \left\{ \frac{1\Omega}{2R_2^2 \sin \alpha} \ell_1 \left[ \left(1 + \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \left(1 - \frac{D_2}{\Omega^2 \ell_1}\right) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} \right] + X_{2t} \right\}, \\ X_{1t} &= \frac{D_1 - D_2}{R_1 R_2} \alpha_t t \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\alpha_t}{R_1^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ (D_1 + D_{12}) t \right] - \frac{1\Omega}{R_1} \alpha_t \left( \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right), \\ X_{2t} &= \frac{\alpha_t}{R_2^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ (D_2 + D_{12}) t \right] - \frac{1\Omega}{R_2 \sin \alpha} \alpha_t \left( \frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \quad (8.8)$$

funkcja zaś  $Z_t$  określona jest równaniem (8.4)<sub>7</sub>. Jeżeli w powłoce obrotowej spełniona jest dodatkowo równość (7.5), wtedy z (8.7) otrzymujemy



$$\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{1\Omega}{R_1} \varrho_2 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} = -R_1 (X_1 - X_{1t}),$$

$$\frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{1\Omega}{R_2} \varrho_1 \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} = -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}).$$

(8.9)

W równaniach (8.9)  $X_{1t}$  i  $X_{2t}$  określone są relacjami (8.8)<sub>3</sub> i (8.8)<sub>4</sub>. Trzecie równanie określone jest zapisem (8.7)<sub>3</sub>, z tym, że funkcje  $P_1/R_1$  i  $P_2/R_2$  mają nieco inną postać:

$$\frac{P_1}{R_1} = R_1 R_2 \sin \alpha \left( \frac{1\Omega}{R_1} \varrho_2 \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} + X_{1t} \right),$$

(8.10)

$$\frac{P_2}{R_2 \sin \alpha} = R_1 R_2 \left( \frac{1\Omega}{R_2} \sin \alpha \varrho_1 \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + X_{2t} \right).$$

Funkcję  $Z_t$  określa w tym przypadku równanie (8.4)<sub>7</sub>.

Wreszcie jako ostatni przypadek rozpatrzmy powłoki izotropowe. Uwzględniając w równaniach (8.9) - (8.10) oraz (8.7)<sub>3</sub> zależności (7.8) otrzymujemy

$$\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} - \frac{1c}{R_1} \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} = -R_1 (X_1 - X_{1t}),$$

(8.11)

$$\frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + 2 \cos \alpha \tilde{S} - \frac{1c}{R_2} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} = -R_2 \sin \alpha (X_2 - X_{2t}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1c}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{R_1}{R_2 \sin \alpha} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} \right) \right] = \\ = Z - Z_t - \frac{1c}{R_1 R_2 \sin \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_1 R_2 \sin \alpha X_{1t}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (R_1 R_2 X_{2t}) \right], \end{aligned}$$

tutaj

$$X_{1t} \approx -\frac{1\Omega}{R_1} \alpha_t \left( \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial t_0}{\partial \alpha} \right),$$

(8.12)

$$X_{2t} \approx -\frac{1\Omega}{R_2 \sin \alpha} \alpha_t \left( \frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial t_0}{\partial \beta} \right).$$

W rozpatrywanym tutaj przypadku, funkcja  $Z_t$  jest określona relacją (8.4)<sub>7</sub>.

### 9. Stan quasi osiowo-symetryczny

Stan ten charakteryzuje się tym, że pochodne cząstkowe wszystkich sił wewnętrznych, obciążeń i wpływów termicznych, podług zmiennej  $\beta$  są równe zeru. Dodatkowo należy przyjąć, że składowa  $X_2 = 0$  oraz że siła  $S = 0$ . W przypadku gdy przemieszczenia  $u$ ,  $w$  będą tylko funkcjami zmiennej  $\alpha$  a przemieszczenie  $v = 0$ , to odpowiedni stan określa się jako osiowo-symetryczny.

W rozpatrywanym tutaj przypadku z równań (8.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (a_{11}+b_{11}) \frac{d\tilde{N}_1}{d\alpha} + (a_{12}+b_{12}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha \tilde{N}_1 - (a_{13}+b_{13}) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha \tilde{N}_2 - \\ & - \frac{1}{R_1} \varrho_2 \left[ \left(1 + \frac{D_1}{\Omega^2 \varrho_2}\right) \frac{d\tilde{N}_2}{d\alpha} + \left(1 - \frac{D_1}{\Omega^2 \varrho_2}\right) \frac{d\tilde{N}_2}{d\alpha} \right] + \frac{P_1}{R_2 \sin\alpha} = -2R_1(X_1 - X_{1t}), \\ & \frac{\tilde{N}_1}{R_1} + \frac{\tilde{N}_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{P_1}{R_1} \right) = z - z_t \end{aligned} \quad (9.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_{11}-b_{11})R_2 \sin\alpha \frac{d\tilde{N}_1}{d\alpha} + (a_{12}-b_{12})R_1 \cos\alpha \tilde{N}_1 - (a_{13}-b_{13})R_1 \cos\alpha \tilde{N}_2, \\ X_{1t} R_1 R_2 \sin\alpha &= (D_1 - D_2) \alpha_t t \cos\alpha + \frac{R_2}{R_1} \alpha_t \sin\alpha \frac{d}{d\alpha} \left[ (D_1 + D_2) t \right] - \\ & - 1 \Omega R_2 \alpha_t \sin\alpha \left[ \left(b_{11} - \frac{D_1}{\Omega R_1}\right) \frac{dt}{d\alpha} - \frac{1}{R_1} \frac{dt}{d\alpha} + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha (b_{12} - b_{13}) t \right], \\ z_t &= 1 \Omega \alpha_t \left[ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) t + \frac{1}{R_1} \frac{d^2 t}{d\alpha^2} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{R_2} \frac{dt}{d\alpha} \right], \\ \frac{P_1}{R_1} &= R_1 R_2 \sin\alpha X_1 + R_2 \sin\alpha \frac{d\tilde{N}_1}{d\alpha} + (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) R_1 \cos\alpha. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Przedstawiony powyżej układ równań (9.1) zawiera dwie niewiadome funkcje (siły zespolone)  $\tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ , które obliczyć można po scałkowaniu tego układu, przy odpowiednich warunkach brzegowych.

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem stanu opisanego równaniami (9.1). Wprowadźmy mianowicie zależności (3.5), (3.6)

do układu (6.3), pomijając przy tym wpływy termiczne, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= N_1 + \frac{1\Omega}{R_2}(\Phi \text{ctg}\alpha + k), \\ \tilde{N}_2 &= N_2 + \frac{1\Omega}{R_1} \frac{d\Phi}{d\alpha}\end{aligned}\tag{9.3}$$

Jeżeli wprowadzimy do równań (9.3), funkcję naprężeń  $\psi$  przy pomocy której siły wewnętrzne określone są równaniami

$$N_1 = \frac{\Omega}{R_2} \text{ctg}\alpha\psi, \quad N_2 = \frac{\Omega}{R_1} \frac{d\psi}{d\alpha}\tag{9.4}$$

wtedy zamiast (9.3) otrzymamy

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= \frac{\Omega}{R_2} [\text{ctg}\alpha(\psi + 1\Phi) + k], \\ \tilde{N}_2 &= \frac{\Omega}{R_1} \frac{d}{d\alpha} (\psi + 1\Phi)\end{aligned}\tag{9.5}$$

Jeżeli dalej wprowadzimy do układu (9.5) zespoloną funkcję naprężeń

$$\tilde{\psi} \frac{df}{d\alpha} \quad \psi + 1\Phi\tag{9.6}$$

wtedy równania (9.5) zapiszemy

$$\tilde{N}_1 = \frac{\Omega}{R_2} (\tilde{\psi} \text{ctg}\alpha + 1k), \quad \tilde{N}_2 = \frac{\Omega}{R_1} \frac{d\tilde{\psi}}{d\alpha}\tag{9.7}$$

Dalej - już przez analogię - siły zespolone sprzężone określimy relacjami

$$\tilde{N}_1^{\alpha} = \frac{\Omega}{R_2} (\tilde{\psi}^{\alpha} \text{ctg}\alpha + 1k), \quad \tilde{N}_2^{\alpha} = \frac{\Omega}{R_1} \frac{d\tilde{\psi}^{\alpha}}{d\alpha}\tag{9.8}$$

gdzie

$$\tilde{\psi}^{\alpha} = \psi - 1\Phi.\tag{9.9}$$

Jeżeli założymy dalej, że układ równań (9.1) jest jedno-rodny ( $X_1=Z=0$ ) oraz brak jest wpływów termicznych, to wtedy, wprowadzenie (9.7), (9.8) do układu (9.1) daje tylko jedno (drugie spełnia się tożsamościowo) równanie, przedstawiające rozwiązanie zagadnienia: będzie to równanie

$$\begin{aligned}
 & (a_{11}+b_{11})\left(\frac{\text{ctg}\alpha}{R_2}\tilde{\psi}\right)' + (a_{12}+b_{12})\frac{R_1}{R_2}\text{ctg}^2\alpha\tilde{\psi} - \\
 & -(a_{13}+b_{13})\frac{\text{ctg}\alpha}{R_2}\tilde{\psi}' - \frac{1\Omega}{R_1}\epsilon_2\left[\left(1+\frac{D_1}{\Omega^2\epsilon_2}\right)\left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1}\right)' + \right. \\
 & \left. +\left(1-\frac{D_1}{\Omega^2\epsilon_2}\right)\left(\frac{\tilde{\psi}}{R_1}\right)'\right] + \frac{P_1}{\Omega R_2\sin\alpha} = -ik\left[(a_{11}+b_{11})\left(\frac{1}{R_2}\right)' + \right. \\
 & \left. + (a_{12}+b_{12})\frac{R_1}{R_2}\text{ctg}\alpha\right], \frac{d(\quad)}{d\alpha} = (\quad)'
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \frac{P_1}{\Omega} &= (a_{11}-b_{11})R_2\sin\alpha\left(\frac{\text{ctg}\alpha}{R_2}\tilde{\psi}\right)' + (a_{12}-b_{12})\frac{R_1\cos^2\alpha}{R_2\sin\alpha}\tilde{\psi} - \\
 & -(a_{13}-b_{13})\cos\alpha\tilde{\psi}' + (a_{11}-b_{11})R_2\sin\alpha ik\left(\frac{1}{R_2}\right)' + \\
 & + (a_{12}-b_{12})\frac{R_1}{R_2}ik\cos\alpha.
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Jeżeli przyjmiemy równości (7.1) w układach (9.10), (9.10') to otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\Omega\epsilon_2R_2\sin\alpha\left[\left(1+\frac{D_1}{\Omega^2\epsilon_2}\right)\left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1}\right)' + \left(1-\frac{D_1}{\Omega^2\epsilon_2}\right)\left(\frac{\tilde{\psi}}{R_1}\right)'\right] - \\
 & - R_1\tilde{\psi}'\sin\alpha = kR_1\cos\alpha.
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Przyjmując zaś równość (7.5) otrzymujemy, zamiast (9.11)

$$\Omega\epsilon_2R_2\sin\alpha\left(\frac{\tilde{\psi}'}{R_1}\right)' - R_1\tilde{\psi}'\sin\alpha = kR_1\cos\alpha \tag{9.12}$$

Wreszcie w przypadku powłoki izotropowej otrzymujemy z (9.12)

$$o R_2 \sin \alpha \left( \frac{\tilde{\psi}'}{R_1} \right) - R_1 \tilde{\psi} \sin \alpha = k R_1 \cos \alpha. \quad (9.13)$$

Przedstawione w tym punkcie równania (9.10) - (9.13), są różnymi wariantami równań E. REISSNERA [15], które przy przyjęciu  $k=0$  przechodzą w równania stanu osiowo-symetrycznego. W tym ostatnim przypadku otrzymujemy klasyczne równania E. MEISSNERA i H. REISSNERA.

W zakończeniu tego punktu podkreślamy, że w pewnych rodzajach ortotropii mogą być spełnione tylko niektóre równości (7.1), (7.5). Oznaczać to będzie, że pozostałe funkcje pomocnicze (nie spełniające tych równości) należy w zasadniczych równaniach uwzględnić. W charakterze przykładu wyjaśniającego ten punkt widzenia, przeprowadzimy analizę ogólną równania powłoki toroidalnej ortotropowej. Równanie to będzie zastosowane w rozdziale II do rozwiązania zagadnienia zginania łuku falistego.

### 10. Przykład

Rozpatrzmy teraz przypadek powłoki toroidalnej ortotropowej, w quasi osiowo-symetrycznym stanie naprężenia, scharakteryzowanej funkcjami ortotropii, (por. rozdz. II):

$$\begin{aligned} C_1 &\approx E h k_1, \quad C_2 \approx \frac{E h}{k_2}, \quad C_{12} \approx \frac{E h}{\nu} k_1, \\ D_1 &\approx \frac{E h^3}{12} k_2, \quad D_2 \approx \frac{E h^3}{12 k_1}, \quad D_{12} \approx \frac{\nu E h^3}{12 k_1} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Występujące w (10.1) funkcje  $k_1, k_2$  (por. tabl. 2) są większe od jedności. Promienie krzywizny powłoki toroidalnej  $R_1$  i  $R_2$  określone są równaniami

$$R_1 = r_0, \quad R_2 = R \frac{1 + \lambda \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad (\lambda = \frac{r_0}{R}). \quad (10.2)$$

W tabelicy 2 zestawiono wszystkie funkcje pomocnicze  $a_{1k}, b_{1k}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), wchodzące do podstawowego równania (9.9). Jak wynika z tej tabelicy funkcje te możemy określić przybliżonymi równościami:

$$a_{1k} = b_{1k} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2 \\ 1 + \frac{10}{\lambda r_0 \cos \alpha} \left[ (1 + \lambda \sin \alpha) k_2 \right], & k = 3 \end{cases} \quad (10.3)$$

Pomocnicze funkcje  $a_{1k}, b_{1k}, (k=1,2,3)$   
(powtoki obrotowe - stan osiowo-symetryczny)

Tablica 2

Powtorka obrotowa	$a_{11}$	$1 + \epsilon_{12} \frac{\Omega}{R_1} i$
	$a_{12}$	$+ \epsilon_1 \frac{\Omega}{R_1} i \left( 1 + \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\epsilon_1} \epsilon_{12}' \right)$
	$a_{13}$	$+ \epsilon_2 \frac{\Omega}{R_1} i \left( 1 + \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\epsilon_2} \epsilon_2' \right)$
	$b_{11}$	$1 - \frac{D_{12}}{\Omega R_1} i$
	$b_{12}$	$+ \frac{D_2}{\Omega R_1} i \left( 1 - \frac{D_{12}}{D_2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{D_2} D_{12}' \right)$
	$b_{13}$	$+ \frac{D_1}{\Omega R_1} i \left( 1 - \frac{D_{12}}{D_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{D_1} D_1' \right)$
Powtorka obrotowa to odcialna (przykład)	$a_{11}$	$1 + \frac{\nu c}{k_1 r_0} i$
	$a_{12}$	$1 + \frac{c}{r_0 k_1} i \left[ 1 + \nu + \frac{\nu \rho_0 (1 + \lambda)}{k_1 (1 + \lambda \sin \alpha)} \right]$
	$a_{13}$	$1 + \frac{ic}{\lambda r_0 \cos \alpha} \left[ (1 + \lambda \sin \alpha) k_2 \right]^2$
	$b_{11}$	$1 - \frac{\nu c}{k_1 r_0}$
	$b_{12}$	$1 + \frac{c}{r_0 k_1} i \left[ 1 - \nu - \frac{\nu \rho_0 (1 + \lambda)}{k_1 (1 + \lambda \sin \alpha)} \right]$
	$b_{13}$	$1 + \frac{ic}{\lambda r_0 \cos \alpha} \left[ (1 + \lambda \sin \alpha) k_2 \right]^2$

Funkcje ortotropii dla powtorki toroidalnej w rozpatrywanym przykładzie wynoszą (por. (12.9), (12.11)):

$$k_{2r} - k_{2z} = k_1 = \frac{\rho_0 (1 + \lambda)}{1 + \lambda \sin \alpha} \geq 1, \quad \rho_0 \leq 1,5, \quad \alpha = 2/2 - \varphi,$$

$$k_{2r} - k_{1z} = k_2 = \mu_1 - \rho_2 \sin \alpha > 1. \quad *) \text{ przyjęto } 1 \pm \frac{\nu}{k_1 k_2} \approx 1$$

Ponieważ równość (7.5) jest też spełniona, to równanie (9.10), po szeregu przekształceń, przyjmuje postać końcową

$$\left[ (1 + \lambda \sin \alpha) k_2 \tilde{\psi}' \right]^2 - \mu i \tilde{\psi} \sin \alpha = \mu k \cos \alpha, \quad (10.4)$$
$$\mu = \sqrt{12} \cdot \frac{r_0^2}{Rh}.$$

Równanie (10.4), było podstawowym równaniem, na którym oparto rozwiązanie zginania łuku falistego (por. [2a]). To uproszczone równanie otrzymano w cytowanej wyżej pracy na nieco innej drodze (przez całkowanie równania dokładnego). Zatem przedstawiony w niniejszej pracy sposób eliminacji małych wpływów, w równaniach zasadniczych, jest znacznie wygodniejszy przy rozwiązywaniu zagadnień ortotropowych.

## R o z d z i a ł II

### ZGINANIE ŁUKÓW FALISTYCH

#### 11. Założenia

W niniejszym rozdziale podano sposób wyznaczania liczby KARMANA oraz przytoczono wzory na naprężenia występujące w łukach falistych. Z uwagi na bardzo skomplikowany kształt takich łuków, zrezygnowano z dokładnego opisu powierzchni środkowej łuku, przyjmując powierzchnię toroidalną pofalowaną sinusoidalnie. W pracy stosuje się następujące założenia dotyczące samej powierzchni:

1) powierzchnia środkowa łuku jest powierzchnią toroidalną o promieniach  $r = r_0 + (H_w + H_z)/4$ ,  $R = R_0 - (H_w - H_z)/4$ , gdzie  $r_0$ ,  $R_0$  są promieniami łuków giętych bez pofalowania,

2) pofalowanie jest sinusoidalne,

3) wszystkie fałdy są jednakowe i symetryczne względem płaszczyzny środkowej łuku,

4) wysokość pofalowania zmienia się zgodnie z zależnością (12.7),

5) amplituda  $H$  oraz okres pofalowania  $l$  powinny być znacznie mniejsze niż promień powłoki toroidalnej  $r$ ,

6) łuk poddany jest tylko działaniu momentu zginającego, i moment ten posiada charakter statyczny,

7) zakłada się, że istnieje ortotropia konstrukcyjna scharakteryzowana funkcjami  $k_1$ ,  $k_2$ ,

8) zachowuje się tutaj znakovanie takie jak na rys. 5, a więc nieco inne niż w rozdziale I.

Inne założenia upraszczające będą omówione kolejno w miarę rozwiązywania zagadnienia.

Jest rzeczą oczywistą, że w świetle przyjętych uproszczeń wzory określające naprężenia mają charakter wyłącznie orientacyjny: występujące naprężenia mają charakter naprężeń średnich.

Podane tutaj rozwiązanie może być potraktowane jako uogólnienie rozwiązania KARMANA [10] oraz CLARKA-REISSNERA [3], na przypadek zginania łuku ortotropowego (ortotropia konstrukcyjna).



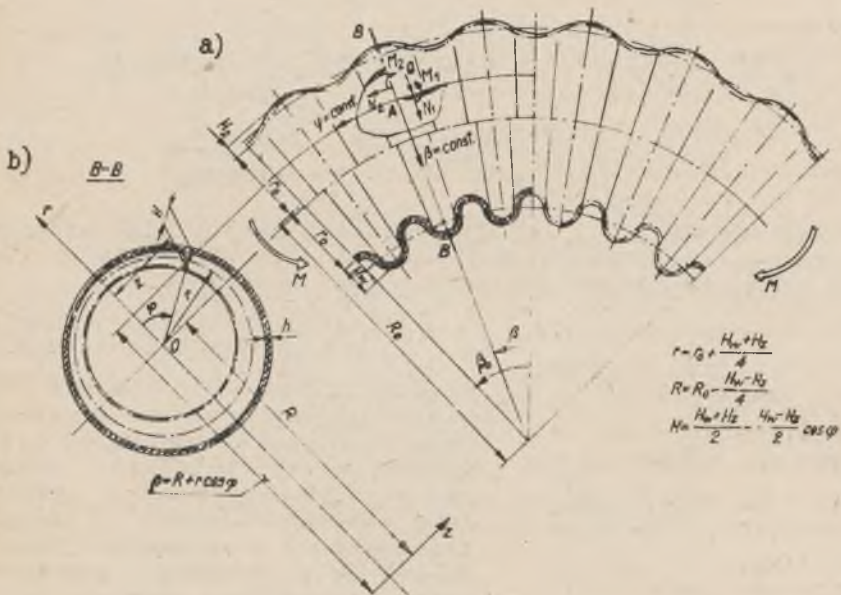
12. Wyznaczenie funkcji ortotropii  $k_1$  i  $k_2$

Jeżeli dla wyciętych elementów, które potraktujemy jako małe w stosunku do innych wymiarów łuku falistego, przyjmujemy, że ich środkowe powierzchnie są elementami płaskimi, to będziemy mogli zastosować dla rozpatrywanego tutaj zagadnienia wzory podane w pracy [20]

$$E_{1r} = k_1 E, \quad E_{2r} = \frac{E_2}{k_2}, \quad E_{1z} = E k_2, \quad E_{2z} = \frac{E}{k_1}, \quad (12.1)$$

$$\nu_{1r} = \nu_{1z} = \nu, \quad \nu_{2r} = \nu_{2z} = \frac{\nu}{k_1 k_2}.$$

Warto tutaj przy sposobności nadmienić, że tak określoną ortotropię konstrukcyjną, w przypadku powłoki walcowej, przyjmował już L.H. DONNELL [5].



Rys. 5

Jeżeli pofałdowanie powierzchni jest sinusoidalne o amplitudzie  $H$  (rys. 5), to dla dowolnego przekroju określonego kątem  $\varphi = \text{const.}$  funkcje  $k_1$  i  $k_2$  mają postać [20]

$$k_1 = \frac{S}{l} = \frac{2E(a)}{\pi\sqrt{1-a^2}}, \quad (12.2)$$

$$k_2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[ \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)K(a) + \left(2 - \frac{1}{a^2}\right)E(a) \right] + \frac{2}{\pi} \sqrt{1-a^2} K(a)$$

Po prostych przekształceniach funkcję  $k_2$  przedstawimy za pomocą wzoru

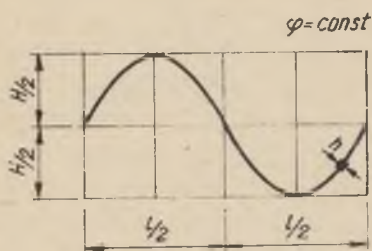
$$k_2 = \left(\frac{1}{h}\right)^2 g_1(a) + g_2(a), \quad (12.3)$$

gdzie

$$g_1(a) = \frac{2}{\pi^3}(1-a^2)^{-\frac{3}{2}} \left\{ K(a) - E(a) - a^2 \left[ 2E(a) - K(a) \right] \right\}, \quad (12.4)$$

$$g_2(a) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-a^2} K(a), \quad a^2 = \frac{(\pi H/l)^2}{1+(\pi H/l)^2}$$

We wzorach (12.2) i (12.4) symbolami  $K(a)$  i  $E(a)$  oznaczono całki eliptyczne zupełne pierwszego i drugiego rodzaju. Znaczenie pozostałych symboli podane jest na rys. 6.



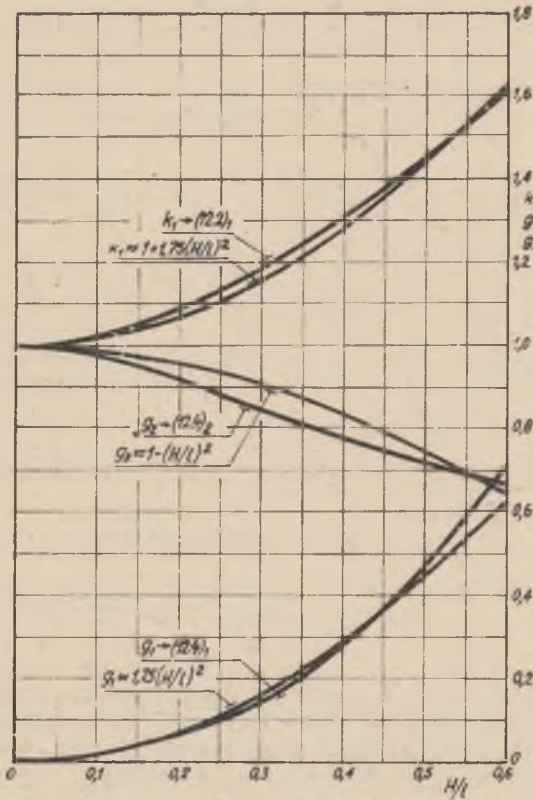
Rys. 6

Posługując się tutaj funkcjami  $k_1$ ,  $k_2$  musimy pamiętać o założeniach, na podstawie których zostały one wyprowadzone w pracy [20] oraz o przyjętej płaskości elementu powłoki. Ostatnie założenie jest równoznaczne z przyjęciem powłoki walcowej (ściślej tarczownicy) o zmiennej tworzącej, której przekrój poprzeczny jest wielobokiem, zamiast występującego w rzeczywistości wycinka powłoki toroidalnej. Funkcje  $k_1$  i  $k_2$  określone za pomocą wzorów

(12.2)<sub>1</sub>, (12.3) nie nadają się w tej postaci do dalszych obliczeń, i muszą być zastąpione prostszymi funkcjami. W tym celu sporządzono wykresy funkcji (12.2)<sub>1</sub>, (12.4) a następnie otrzymane krzywe aproksymowano parabolami typu  $A(H/l)^2 + B$

Aproksymację przeprowadzono w taki sposób, aby odchylenia od krzywej rzeczywistej były jak najmniejsze (są rzędu 5%). Wybrany typ równania paraboli  $A(H/l)^2 + B$  okazuje się w dalszych obliczeniach bardzo korzystny. Przybliżone wzory określające funkcje  $k_1$  i  $k_2$  mają teraz zgodnie z rys. 7 postać następującą:

$$k_1 \approx 1 + 1,75(H/l)^2, \quad k_2 \approx 1 + 1,75(H/h)^2 - (H/l)^2 \quad (12.5)$$



Rys. 7

Równania (12.5) należałoby właściwie ustalać dla każdego łuku osobno: zwiększyłyby to oczywiście dokładność samej aproksymacji. W niniejszej pracy zrezygnowano z tego sposobu, zadowalając się przybliżonymi równaniami. Występujące w  $(12.5)_2$  wyrażenie  $1,75(H/h)^2 - (H/l)^2 = 1,75(H/h)^2 [1 - (1/1,75)(h/l)^2]$ ,

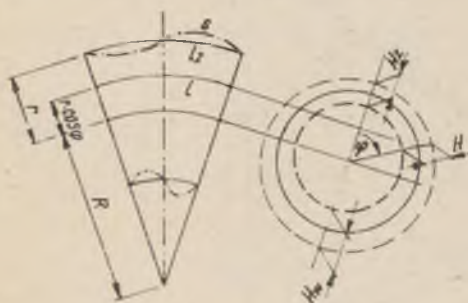
może być (ze względu na to, że  $h/l < 1/10$ ) zastąpione wyrażeniem  $1,75(H/h)^2$  i wtedy z (12.5)<sub>2</sub> otrzymamy

$$k_2 \approx 1 + 1,75(H/h)^2 \quad (12.6)$$

Założmy, iż wysokość pofałdowania  $H$  zmienia się według następującej funkcji:

$$H = H_1 - H_2 \cos \varphi, \text{ gdzie } H_1 = \frac{H_w + H_z}{2}, H_2 = \frac{H_w - H_z}{2} \quad (12.7)$$

Pozostaje teraz ustalić funkcję zmiany długości  $l$  z rys. 8 otrzymujemy



Rys. 8

$$l = l_z \frac{1 + \lambda \cos \varphi}{1 + \lambda}, \quad (12.8)$$

$$\text{gdzie } \lambda = \frac{r}{R}.$$

Podstawiając teraz (12.8) do (12.2)<sub>1</sub> otrzymamy

$$k_1 = p_0 \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda \cos \varphi}, \quad (12.9)$$

przy czym

$$1 < p_0 = \frac{S}{l_z} < 1,5. \quad (12.10)$$

Powyżej skorzystaliśmy z podkreślonej części wzoru (12.2)<sub>1</sub>, gdyż jest on wygodniejszy przy dalszych przekształceniach. Przyjęto również, że długość pofałdowania  $S$  jest stała. Podstawiając zaś (12.7) do (12.6) otrzymamy

$$k_2 = p_1 - p_2 \cos \varphi + p_3 \cos 2\varphi \quad (12.11)$$

gdzie

$$p_1 = 1 + \frac{5,28}{8} \left[ \left( \frac{H_w}{h} \right)^2 + \left( \frac{H_z}{h} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{H_w}{h} \frac{H_z}{h} \right], \quad (12.12)$$

$$p_2 = \frac{3,5}{4} \left[ \left( \frac{H_w}{h} \right)^2 - \left( \frac{H_z}{h} \right)^2 \right], \quad (12.12)$$

$$p_3 = \frac{1,75}{8} \left( \frac{H_w - H_z}{h} \right)^2$$

Ostatecznie więc funkcje  $k_1$  i  $k_2$  jako zależne od zmiennych  $\varphi, \lambda, H_w/h$  i  $H_z/h$  będziemy określać z równań (12.9) i (12.11).

Teraz możemy obliczyć (por. (5.2)) sztywności rozciągania

$$C_1 \approx E_{1r} h = E h k_1, \quad C_2 \approx E_{2r} h = \frac{E h}{k_2}, \quad (12.13)$$

$$C_{12} \approx \frac{E_{2r} h}{\nu_{2r}} = \frac{E_{1r} h}{\nu_{1r}} = \frac{E h k_1}{\nu}$$

i zginania

$$D_1 = \frac{E_{1z} h^3}{12} = \frac{E h^3}{12} k_2, \quad D_2 \approx \frac{E_{2z} h^3}{12} = \frac{E h^3}{12 k_1}, \quad (12.14)$$

$$D_{12} = \nu_{2z} D_1 = \nu_{1z} D_2 \approx \frac{E h^3 \nu}{12 k_1}$$

W równaniach (12.14) przyjęto  $1 - \nu(\ ) \nu(\ ) \approx 1$ . Nie powoduje to istotnego błędu, a w sposób zasadniczy upraszcza całkowanie równania różniczkowego.

### 13. Podstawowe równanie

Przy rozpatrywaniu zginania łuku falistego będziemy stosować równanie stanu quasi osiowo-symetrycznego w postaci uproszczonej, zgodnie z wynikami podanymi w punkcie 10. Równanie to, po uwzgl. p. 8 założeń ma postać następującą

$$\left[ (1 + \lambda \cos \varphi) (p_1 - p_2 \cos \varphi + p_3 \cos 2\varphi) \tilde{\psi}' \right]' + \mu \cos \varphi \cdot \tilde{\psi} = -\mu k \sin \varphi. \quad (13.1)$$

Do dalszej analizy będą nam potrzebne wzory, określające wielkości wewnętrzne; równania te otrzymujemy z zależności

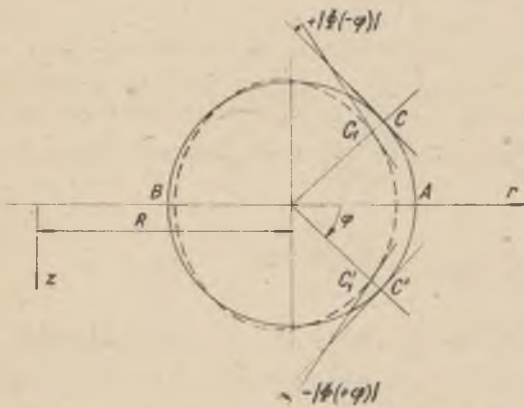
(9.7) przy wykorzystaniu związków (9.3), (3.5), (5.6)<sub>4</sub> oraz p. 8 założeń. Relacje te mają postać

$$N_1 = -\frac{\Omega}{R} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \operatorname{Re} \tilde{\psi}, \quad N_2 = \frac{\Omega}{r} \operatorname{Re} \tilde{\psi}',$$

$$M_1 = \frac{\Omega h}{r} k_2 \operatorname{Im} \tilde{\psi}, \quad M_2 \approx 0 \quad (13.2)$$

#### 14. Całkowanie równania (13.1)

Ze względu na to, że powłoka jest zamknięta w przekrojach  $\beta = \text{const}$ , funkcje  $\phi$  i  $\psi$  muszą być funkcjami okresowymi o okresie  $2\pi$ . Taki sam okres musi posiadać i funkcja  $\tilde{\psi}$ . Jak można



Rys. 9

wnioskować na podstawie rys. 9, funkcja  $\phi$  jest funkcją nieparzystą:

$-\phi(\varphi) = \phi(-\varphi)$  w przedziale  $-\pi < \varphi < \pi$  względem punktu  $A(R+r, 0)$ , tj. względem  $\varphi=0$ . Dodatkowo funkcja  $\phi$  powinna być równa zero w punktach  $\varphi=0, \pm\pi$ . Funkcja  $N_2$  jest parzystą  $[N_2(\varphi) = N_2(-\varphi)]$  względem  $\varphi=0$ ,

gdyż elementy przekroju określone kątami  $\varphi, -\varphi$  są albo rozciągane albo ściśnięte. Na podstawie wzoru (13.2)<sub>1</sub> możemy wnioskować,

że funkcja  $\psi$  musi być nieparzystą względem  $\varphi=0$ . Biorąc więc pod uwagę to, że zarówno funkcja  $\psi$  jak

i  $\phi$  są nieparzyste i okresowe, możemy zespoloną funkcję  $\tilde{\psi}$  przyjąć w postaci funkcyjnego szeregu FOURIERA dla funkcji nieparzystych

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\varphi, \quad \text{gdzie } B_n = B_{nR} + i B_{nI} \quad (14.1)$$

Zakładając ciągłość funkcji (14.1), w całym przedziale  $0 < \varphi \leq 2\pi$ , a następnie podstawiając do równania (13.1), otrzymujemy układ  $n$  równań liniowych o  $n+3$  niewiadomych i

o współczynnikach zespolonych lub rzeczywistych, który przy wykorzystaniu konwencji sumacyjnej może być zapisany następująco

$$A_{kl} B_l = C_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, n, \dots, n+3 \quad (14.2)$$

gdzie  $A_{kl}$  są elementami macierzy

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (14.3)$$

W ostatnim wierszu elementami niezerowymi są liczby  $A_{nj}$  dla  $j = n \pm 3, n \pm 2, n \pm 1, n$ . Zgodnie z (14.1) należy w równaniach (14.2) odrzucić współczynniki  $B_n$  z ujemnymi indeksami. Elementami macierzy prostokątnej (14.3) są następujące liczby rzeczywiste lub zespolone

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= f_0 n^2, \quad A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = -f_1 n(n+1) - \mu_1, \\ A_{n,n+2} &= A_{n+2,n} = f_2 n(n+2), \\ A_{n,n+3} &= A_{n+3,n} = f_3 n(n+3), \end{aligned} \quad (14.4)$$

Występujące w (14.4) symbole  $f_0, \dots, f_3$  oznaczają

$$\begin{aligned} f_0 &= 2p_1 - \lambda p_2, \quad f_1 = p_2 - \lambda \left( p_1 + \frac{1}{2} p_3 \right), \\ f_2 &= p_3 - \frac{1}{2} \lambda p_2, \quad f_3 = \frac{1}{2} \lambda p_3 \end{aligned} \quad (14.5)$$

W równaniu (14.2) wyrazy wolne określone są równościami

$$C_k = \begin{cases} 2\mu_k, & k = 1 \\ 0 & k = 2, 3, \dots, n+3 \end{cases} \quad (14.6)$$

Rozważmy jeszcze warunki brzegowe na brzegach  $\beta = \beta_0$ . Wobec tego, że moment  $M_2$  możemy przyjąć w przybliżeniu jako równy zero, to na brzegach  $\beta = \beta_0$  będą występowały jedynie siły  $N_2$ . Zatem wypadkowa z tych sił musi być równa zero, moment zaś od sił  $N_2$  musi być zrównoważony obciążeniem zewnętrznym, czyli

$$\int_0^{2\pi} N_2 r d\varphi = \Omega \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \tilde{\varphi}' d\varphi = 0$$

$$M = \int_0^{2\pi} N_2 r^2 \cos\varphi d\varphi = \Omega r \int_0^{2\pi} \cos\varphi \operatorname{Re} \tilde{\varphi}' d\varphi. \quad (14.7)$$

Podstawiając do (14.7) wyrażenie (14.1) otrzymamy tożsamościowe spełnienie pierwszej równości, drugie zaś równanie daje

$$M = \pi r \Omega \operatorname{Re} \tilde{B}_1 \quad (14.8)$$

Jeżeli w (14.8) przyjmiemy

$$\operatorname{Re} \tilde{B}_1 = \mu k \mathcal{K}, \quad (14.9)$$

to równanie (14.8) przyjmie postać równania różniczkowego osi odkształconej łuku:

$$\frac{k}{R} = \frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} = \frac{M}{\mathcal{K}EI} \quad \text{gdzie } I = \pi r^3 h \quad (14.10)$$

Równanie (14.10) jest identyczne z równaniem (3), stąd następujący wniosek: występująca tutaj liczba KARMANA  $\mathcal{K}$  ma analogiczne znaczenie jak w zagadnieniu zginania łuku izotropowego.

Jeżeli więc zamiast współczynników  $B_n$  wprowadzimy nieco inne, które zdefiniujemy równaniami

$$\frac{B_n}{\mu k \mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} b_1 = 1 + 1b_{1I}, & n = 1, \\ b_n = b_{nR} + 1b_{nI}, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (14.11)$$



oraz uwzględnimy fakt, że w przypadku zachowania  $j$  wyrazów w szeregu (14.1) współczynniki  $b_{j+1} = b_{j+2} = b_{j+3} = 0$ , to zamiast (14.2) otrzymamy

$$A_{kl} b_l = C_k, \quad k, l = 1, 2, \dots, j \quad (14.12)$$

### 15. Wyznaczenie liczby KÁRMÁNA

Jeżeli podzielimy równanie (14.12) przez  $kf_0$  oraz przyjmiemy

$$b_l = \frac{b_l^*}{f_0}, \quad a_{kl} = \frac{A_{kl}}{kf_0}, \quad C_k^* = \frac{C_k}{kf_0}, \quad (\text{nie sumować}) \quad (15.1)$$

to otrzymamy

$$a_{kl} b_l^* = C_k^* \quad (15.2)$$

gdzie  $a_{kl}$  są elementami macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{jj} \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

przy czym elementami niezerowymi w ostatnim wierszu są elementy  $a_{lj}$  dla  $l = j-3, j-2, j-1, j$ . Przyjmujemy założenie, że macierz nie jest osobliwa. Elementy tej macierzy mają postać

$$a_{kk} = 1, \quad a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{f_0 k(k+1)} 1, \quad (15.4)$$

$$a_{k,k+2} = a_{k+2,k} = \frac{f_2}{f_0}, \quad a_{k,k+3} = a_{k+3,k} = \frac{f_3}{f_0}.$$

Wreszcie  $b_1^*$  i  $c_1^*$  są elementami macierzy jednokolumnowych

$$B = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_1^* \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\mathcal{K}f_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.5)$$

Rozwiązując równanie (15.2) otrzymamy

$$\mathcal{K} = \frac{2}{f_0} \operatorname{Re} \frac{D_{11}}{D}. \quad (15.6)$$

W równaniu (15.6) przez  $D$  oznaczono wyznacznik macierzy  $A$ , a przez  $D_{11}$  minor wyznacznika  $D$ , otrzymany przez skreślenie pierwszej kolumny i pierwszego wiersza. Rozpisując w sposób wyraźny wyznaczniki  $D$  i  $D_{11}$  otrzymamy

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{1.2f_0} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{2.3f_0} & 1 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \frac{f_3}{f_0} & \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{3.4f_0} & 1 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \frac{f_3}{f_0} & \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{4.5f_0} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix} = d_3 - id_4$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{2.3f_0} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{3.4f_0} & 1 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \frac{f_3}{f_0} & \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{4.5f_0} & 1 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \frac{f_3}{f_0} & \frac{f_2}{f_0} & -\frac{f_1}{f_0} - \frac{\mu}{5.6f_0} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix} = d_1 - id_2$$

(15.7)

Elementy w ostatnim wierszu obu wyznaczników idąc od prawej ku lewej mają postać  $1, -\frac{f_1}{f_0} - \mu 1/(j-1)j f_0, \frac{f_2}{f_0}, \frac{f_3}{f_0}$ . W (15.7)

kropkami umieszczonymi pośrodku wierszy wyznaczników, zaznaczono wyrazy symetrycznie położone względem głównej przekątnej. Zagadnienie zbieżności szeregów (14.1) zostanie rozpatrzone dalej. Jeżeli więc będzie określona ilość elementów wyznaczników (15.7) (liczba  $j$ ), to można obliczyć ich wartość a następnie rozbić na część rzeczywistą i zespoloną. Jeżeli tak określone liczby ( $d_3 - id_4, d_1 - id_2$ ) podstawimy do (15.6), to otrzymamy

$$\mathcal{K} = \frac{2}{f_0} \cdot \frac{d_1 d_3 + d_2 d_4}{d_3^2 + d_4^2} \quad (15.8)$$

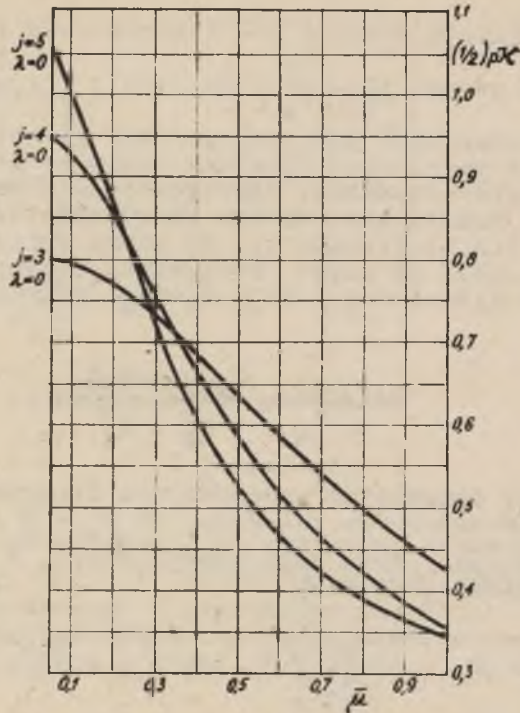
Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia zbieżności szeregu (14.1). Dla uproszczenia założymy, że  $H_z = 0$  (pofałdowanie na stronie zewnętrznej łuku jest bardzo małe). Wtedy po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{1}{2} \mathcal{K} p f_0 = \frac{d_1 d_3 + d_2 d_4}{d_3^2 + d_4^2}, \text{ gdzie } p = \frac{3.5}{8} \left(\frac{H_w}{h}\right)^2 \quad (15.9)$$

Liczby  $d_1, \dots, d_4$  otrzymamy obliczając wartość wyznaczników (15.7), w których współczynniki  $f_0, \dots, f_3$  będą miały teraz nieco inną postać:

$$\begin{aligned} f_0 &= 3 - 2\lambda + \frac{2}{p} \approx 3 - 2\lambda, \\ f_1 &= \frac{1}{4} (8 - 7\lambda) - \frac{\lambda}{p} \approx \frac{1}{4} (8 - 7\lambda) \\ f_2 &= \frac{1}{2} - \lambda, \quad f_3 = \frac{1}{4} \lambda, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{p}. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Ostatnie przybliżone równości są słuszne dla  $p \gg 1$ . Na rys.10 podano wykres zależności (15.9). Wykres ten daje orientację o szybkości zbieżności szeregu. Dla  $\bar{\mu} < 1$  szereg jest wolnozbieżny, natomiast dla  $\bar{\mu} > 1$ , a zwłaszcza dla  $\bar{\mu} \gg 1$  zbieżność jest dosyć dobra i wystarczy uwzględnić dwa lub trzy wyrazy szeregu. Na rys. 10 wykresy - z uwagi na dużą czasochłonność - zakończono dla wartości  $\bar{\mu} = 1$ .



Rys. 10

### 16. Wyznaczenie wielkości wewnętrznych

Podstawiając do równań (13.2) zależności (14.1), (14.10) i (14.11) otrzymamy wzory określające naprężenia południkowe  $\sigma_{1r}$ ,  $\sigma_{1z}$  i równoleżnikowe  $\sigma_{2r}$ . Ponieważ pomijamy naprężenia styczne (siła  $Q$  jest bardzo mała), to naprężenia  $\sigma_{1r} \pm \sigma_{1z}, \sigma_{2r}$  należy traktować jako naprężenia główne. Odpowiednie równania przedstawiają się następująco

$$\sigma_{1r} = \frac{N_1}{h} = -\lambda \sigma \frac{\sin \varphi}{1 + \lambda \cos \varphi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi,$$

$$\sigma_{1z} = -\frac{6M_1}{h^2} = \sqrt{3} \sigma (p_1 - p_2 \cos \varphi + p_3 \cos 2\varphi) \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \cos n\varphi, \quad (16.1)$$

$$\sigma_{2r} = \frac{N_2}{h} = \sigma \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \cos n\varphi,$$

gdzie

$$\sigma = \frac{M \cdot r}{I} \quad (16.2)$$

Liczby wzrostu (w stosunku do rury prostej) naprężeń południkowych i równoleżnikowych zdefiniujemy odpowiednio

$$n_1 \stackrel{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_{1z}}{\sigma} \right|, \quad n_2 \stackrel{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_{2r}}{\sigma} \right| \quad (16.3)$$

### 17. Kolejność rozwiązywania

Jeżeli jest podana geometria łuku falistego, tj. gdy są określone wartości  $R, R_0, r, r_0, h, H_w, H_z$  to możemy z równań (12.12) obliczyć współczynniki  $p_1, p_2, p_3$  zaś z zależności (14.5) współczynniki  $f_0, f_1, f_2, f_3$ . Następnie przyjmujemy liczbę  $j, i$  rozwiązujemy układ równań (15.2), przy określonych relacjach (15.4) współczynnikach. Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy wartości współczynników  $b_j^*$  lub  $b_j$  oraz liczbę KARMANA. Teraz już łatwo przy pomocy zależności (16.1), sporządzić wykresy naprężeń oraz ustalić liczby zwiększenia odpowiednich naprężeń (rów. (16.3)). W przypadkach bardziej złożonych wykresów naprężeń należy dodatkowo sporządzić wykres naprężeń zredukowanych. Odpowiedni przykład numeryczny zostanie podany w rozdziale IV.

## R o z d z i a ł    III

### ZGINANIE ŁUKÓW SEGMENTOWYCH

#### 18. Uwagi wstępne

Przytoczone w tym rozdziale rozwiązanie dotyczy bardzo ważnego przypadku zginania łuków ortotropowych, a mianowicie, tzw. łuków segmentowych. Łuki takie otrzymuje się przez spawanie odpowiednio ukosowanych elementów, wykonanych z powłoki obrotowo-walcowej. Otrzymaną w ten sposób powłokę można traktować jako powłokę toroidalną o odpowiedniej ortotropii konstrukcyjnej.

Jeżeli powłokę poddamy działaniu momentu zginającego, leżącego w płaszczyźnie osi łuku, to analizę takiego zagadnienia możemy rozpatrywać w ramach stanu quasi osiowo-symetrycznego. Jest rzeczą oczywistą, że taki sposób potraktowania zagadnienia jest przybliżony. Stan naprężenia, szczególnie w pewnym obszarze zawierającym linię zetknięcia powłok walcowych, jest bardzo niejednorodny, i ściśle może być opisany tylko funkcją dwóch zmiennych. W przypadku przez nas rozpatrywanym, gdy łuk posiada dwa lub więcej segmentów, to pole naprężeń - a jeszcze bardziej odkształceń - w takich łukach, zbliżone jest do odpowiedniego pola łuków toroidalnych, o odpowiednio określonych krzywiznach.

#### 19. Założenia

Podane w dalszych punktach rozwiązanie otrzymano dla następujących warunków:

- 1) ilość segmentów w łuku powinna być większa lub równa dwa,
- 2) łuk poddany jest tylko działaniu momentu zginającego, który posiada charakter statyczny,
- 3) nie rozpatruje się tutaj naprężeń nieciągłości (efektów brzegowych linii zetknięcia segmentów),
- 4) rozwiązanie oparte jest na teorii powłok, w której zakłada się względną grubość  $h/r \leq 1/20$ ,
- 5) stosuje się pojęcie ortotropii konstrukcyjnej scharakteryzowanej funkcjami  $k_{2r}$ ,  $k_{1z}$ ,

6) pomija się funkcje ortotropii  $k_{2z}$ ,  $k_{1r}$  oraz wielkości  $Q$ ,  $N_1$ ,  $M_2$  i przyjmuje  $1 + \lambda \cos \varphi \approx 1$ . W rzeczywistości wielkości  $Q$ ,  $N_1$ ,  $M_2$  istnieją, lecz naprężenia, uwarunkowane tymi siłami, są bardzo małe, o ile zagadnienie traktuje się tak jak to uczyniono tutaj. Założenie to jest wynikiem analogicznych rozważań jak w punkcie 10,

7) zachowuje się tutaj znakowanie takie jak na rys. 11.

### 20. Funkcje ortotropii

Funkcję ortotropii  $k_{2r}$  możemy w przybliżeniu obliczyć jako iloraz długości segmentu 1 tworzącej powłoki toroidalnej (rys. 11), tj.

$$k_{2r} = \frac{\rho \operatorname{tg} \nu}{\rho \nu} \approx 1 \quad (20.1)$$

Ostatnia przybliżona równość jest słuszna, gdyż zgodnie z p.1 założen kąt  $\nu \leq \pi/12$ . Dla tych też wartości błąd wynosi mniej niż 2%. Decydujący wpływ będzie mieć jednak funkcja  $k_{1z}$ , którą obliczymy z równania

$$k_{1z} \approx \frac{I_{x1}}{I_{x2}}. \quad (20.2)$$

Momenty bezwładności  $I_{x1}$ ,  $I_{x2}$  odpowiednich przekrojów segmentu powłoki toroidalnej względem osi, przechodzących przez środki ciężkości tych przekrojów, tj. osi  $x_1$ ,  $x_2$  (rys. 11c) obliczymy prosto metodami geometrii mas:

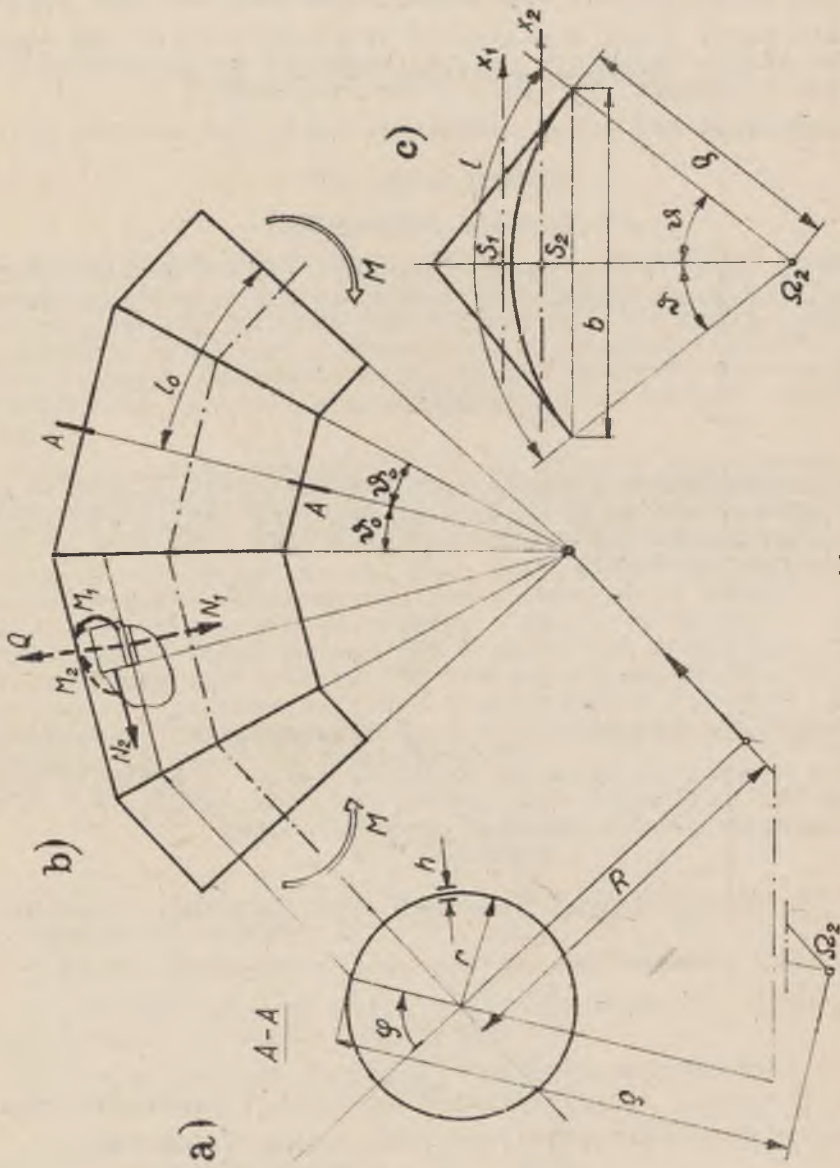
$$I_{x1} = \frac{1}{12} bh^3 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2h} \right)^2 f_1(\nu) \right] \cos \nu, \quad (20.3)$$

gdzie

$$f_1(\nu) = \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{\cos^2 \nu}, \quad (20.4)$$

oraz

$$I_{x2} = \frac{1}{12} bh^3 \left[ f_3(\nu) + \left( \frac{1}{2h} \right)^2 f_2(\nu) \right] \cos \nu, \quad (20.5)$$



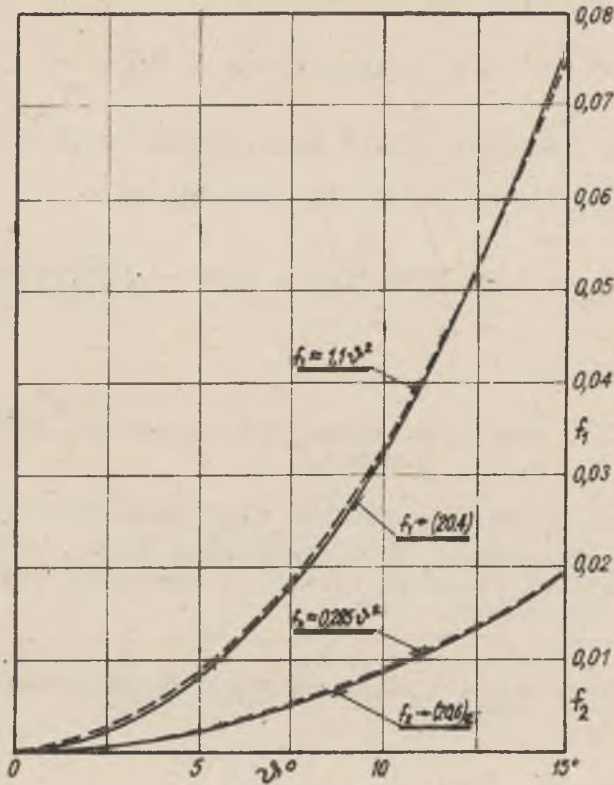
Rys. 11



gdzie

$$f_3(\nu) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{\sin 2\nu} \right) \approx 1,$$

$$f_2(\nu) = 12 \left[ \frac{1}{2\sin^2 \nu} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{\sin 2\nu} \right) - \frac{2}{\nu \sin 2\nu} \right] \quad (20.6)$$



Rys. 12

Na rys. 12 podano wykresy funkcji  $f_1$  i  $f_2$ ; otrzymane krzywe aproksymujemy następującymi przybliżonymi funkcjami

$$f_1 \approx 1,1 \nu^2, \quad f_2 \approx 0,285 \nu^2, \quad \nu \leq \pi/12 \quad (20.7)$$

Jeżeli teraz (20.3) i (20.5), przy uwzględnieniu (20.6)<sub>1</sub>, (20.7), podstawimy do równania (20.2), wówczas otrzymamy przybliżoną postać funkcji ortotropii

$$k_{1z} = \frac{1+1,1\left(\frac{1\nu^*}{2h}\right)^2}{1+0,285\left(\frac{1\nu^*}{2h}\right)^2} \quad (20.8)$$

Pozostaje teraz ustalić zależność kąta  $\nu^*$ , oraz długości  $l$  od kąta  $\varphi$ . Z rys. 11 otrzymujemy:

$$\nu^* \approx \nu_0^* \cos \varphi, \quad l \approx l_0 \approx 2\nu_0^* R \quad (20.9)$$

Przybliżone równości (20.9) są wynikiem uwzględnienia punktu 6 założeń.

Podstawiając (20.9) do (20.8) otrzymujemy

$$k_{1z} = 3,86 - 2,86 F(\varphi) = 3,86 - \frac{5,72}{2+p+p\cos 2\varphi}, \quad (20.10)$$

gdzie

$$F(\varphi) = \frac{1}{1+p\cos^2 \varphi}, \quad p^* = 0,285 \left(\frac{R \nu_0^{*2}}{h}\right)^2$$

Występująca w (20.10)<sub>2</sub> funkcja  $F(\varphi)$  jest funkcją parzystą o okresie  $\pi$ . Rozwijając ją w odpowiedni szereg FOURIERA i zachowując cztery pierwsze wyrazy, a następnie podstawiając do (20.10)<sub>1</sub>, otrzymamy

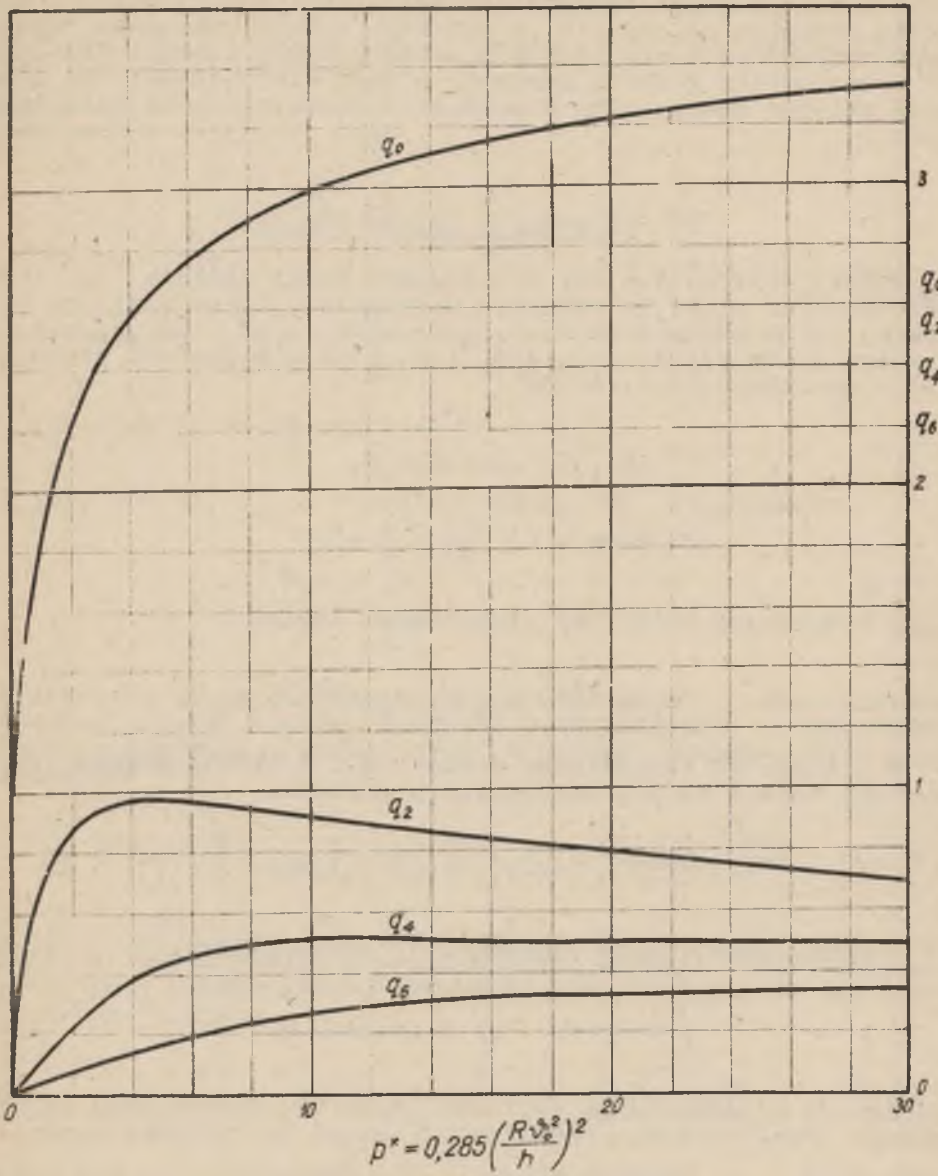
$$k_{1z} \approx q_0 + q_2 \cos 2\varphi - q_4 \cos 4\varphi + q_6 \cos 6\varphi \quad (20.11)$$

gdzie,

$$q_0 = 3,86 - \frac{2,86}{\sqrt{1+p}}, \quad q_2 = 5,72 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{2}{p} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) \right],$$

$$q_4 = 5,72 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{8}{p} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) - \frac{8}{p^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) \right],$$

$$q_6 = 5,72 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+p}} - \frac{18}{p} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) - \frac{48}{p^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) - \frac{32}{p^3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) \right].$$



Rys. 13

W zastosowaniach funkcje (20.12) należy odczytywać z wykresu podanego na rys. 13. W tym celu należy uprzednio obliczyć wartość  $p^*$  z rów. (20.10). Wprowadzony tutaj parametr  $p^*$  oraz używany później parametr  $\mu$  będą wielkościami, od których zależęć będzie stan naprężenia i odkształcenia zginanego łuku.

### 21. Całkowanie układu równań

Jeżeli przeanalizujemy występujące tutaj funkcje ortotropii oraz ich wpływ na równania zasadnicze, to po analizie podobnej jak w punkcie 10 r. I, otrzymamy - po uwzględnieniu założeń niniejszego rozdziału, i po rozbiciu postaci zespolonej - poniższy układ równań

$$\begin{aligned} (k_{1z} \bar{\phi}')' + \mu \psi \cos \varphi &= 0, \\ \psi'' - \mu \bar{\phi} \cos \varphi &= -\sigma \frac{\sqrt{12}}{Eh} r \frac{1}{\mathcal{K}} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (21.1)$$

Siły wewnętrzne obliczymy przy pomocy równań

$$M_1 = \frac{Eho^2}{r} k_{1z} \bar{\phi}', \quad N_2 = \frac{Q}{r} \bar{\psi}', \quad (21.2)$$

W niniejszym zagadnieniu funkcje  $\psi$  i  $\bar{\phi}$  układu równań (21.1) powinny czynić zadość następującym warunkom

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\varphi) &= -\bar{\phi}(-\varphi), \quad \bar{\phi}(\varphi) = \bar{\phi}(\varphi + \pi n), \\ \psi(\varphi) &= -\psi(-\varphi), \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \psi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \quad \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi n) \end{aligned} \quad (21.3)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi' d\varphi = 0, \quad \Omega \varrho \int_0^{2\pi} \psi' \cos \varphi d\varphi = M,$$

zgodnym z interpretacją fizyczną przedstawionego tutaj zagadnienia. Powyższym warunkom czynią zadość następujące funkcje

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \sigma \frac{\varrho}{Ec} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin 2m\varphi, \quad \text{gdzie } b_{2m} = \frac{B_{2m}}{2m}, \\ \psi &= \sigma \frac{\varrho}{Ec} \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1} \sin(2m-1)\varphi, \quad a_1 = 1, \quad a_{2m-1} = \frac{A_{2m-1}}{2m-1} \end{aligned} \quad (21.4)$$

Przyjęcie postaci (21.4) zamiast formy tradycyjnej (np.  $\varphi = \sum_1^{\infty} b_{2m} \sin 2m\varphi$ ), wynika wprost z zapisu (21.2), (21.3). Zależności (21.4) czynią zadość wszystkim warunkom (21.3), a podstawione do (21.2) dają

$$M_1 = \frac{6h^2}{6} \sqrt{3} k_{1z} \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \cos 2m\varphi$$

$$N_2 = 6h \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \cos(2m-1)\varphi$$
(21.5)

Przechodząc teraz do naprężeń otrzymamy

$$\sigma_1 = \pm (\sigma_1)_{z,w} = \pm \frac{6M_1}{h^2} = \pm \sqrt{3} k_{1z} \sigma \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \cos 2m\varphi$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{h} = \sigma \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1} \cos(2m-1)\varphi$$
(21.6)

W naszym przypadku naprężenia (21.6) będą naprężeniami głównymi. Liczbę wzrostu naprężeń południkowych, równoleżnikowych i naprężeń zredukowanych określamy podobnie jak w r.II równaniami

$$n_1 \stackrel{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_1}{\sigma} \right|, n_2 \stackrel{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_2}{\sigma} \right|, n_{red} \stackrel{df}{=} \max \left| \frac{\sigma_{red}}{\sigma} \right|$$
(21.7)

Podstawiając z kolei (21.4) do układu (21.1) otrzymujemy nieskończony układ równań o nieskończonej ilości niewiadomych, który, przy wykorzystaniu konwencji sumacyjnej, może być zapisany następująco

$$\delta_{uv} B_v = C_u, \quad (u, v=2, 4, \dots, 2m, \dots, 2j)$$
(21.8)

Występujące w równaniach (21.8) współczynniki  $\delta_{uv}$  mają postać następującą

$$\delta_{uv} = \delta_{vu} = \begin{cases} 0 & : v > 2m+6 \\ \delta_{2m, 2m+1}, 1=2, 4, 6 & : v \leq 2m+6 \end{cases}$$
(21.9)

gdzie

$$\delta_{2m,2m}^{\delta} = 2q_0 + \frac{r_m + R_m}{4m^2},$$

$$\delta_{2m,2m-2}^{\delta} = q_2 + \frac{R_m}{2m(2m-2)}, \quad \delta_{2m,2m+2}^{\delta} = q_2 + \frac{r_m}{2m(2m+2)},$$

$$\delta_{2m,2m-4}^{\delta} = \delta_{2m,2m+4}^{\delta} = -q_4, \quad \delta_{2m,2m-6}^{\delta} = \delta_{2m,2m+6}^{\delta} = q_6,$$

$$r_m = \begin{cases} \frac{\mu^2}{2(2m+1)^2} & : m < j, \\ 0 & : m = j, \end{cases}$$

$$R_m = \begin{cases} 0 & : m = 1, \\ \frac{\mu^2}{2(2m-1)^2} & : 1 < m \leq j, \end{cases} \quad (21.10)$$

$$C_u = \begin{cases} \frac{\mu}{2} & : u = 2, \\ 0 & : 2 < u \leq 2j, \quad j \geq 2 \end{cases}$$

Występująca w (21.8) - (21.10) liczba  $j$  określa ilość niewiadomych  $B_{2j}$  układu równań (21.8). Powyżej rozpatrzono przypadek  $j \geq 2$  aby nie komplikować zapisu. Przypadek  $j = 1$  daje  $\delta_{22}^{\delta} = 2q_0$ ,  $C_2 = \mu/2$  a układ równań (21.8) sprowadza się do jednego równania  $\delta_{22}^{\delta} B_2 = C_2$ . Przypadek ten może mieć znaczenie nie tylko dla bardzo małych wartości  $\mu$ .

Zestawienie współczynników  $\delta_{uv}^{\delta}$  dla przypadków obejmujących układy równań od dwóch ( $j=2$ ) do sześciu niewiadomych ( $j=6$ ) podano w tabelicy 3.

Dalsze niewiadome oblicza się z równań

$$A_{2m-1} = \begin{cases} 1 & : m = 1, \\ -\frac{\mu}{2(2m-1)} \left( \frac{B_{2m-2}}{2m-2} + \frac{B_{2m}}{2m} \right), & 1 < m \leq j \end{cases} \quad (21.11)$$

Tablica 3

$\lambda$		$\lambda < 0,2$			$\lambda = 0,2 - 0,3$		$\lambda = 0,3 - 0,5$
		2	3	4	5	6	
$\sigma_{uv}$	j						
$\delta_{22}$		$2q_0 + \frac{\mu^2}{72}$					
$\delta_{44}$		$2q_0 + \frac{\mu^2}{288}$	$2q_0 + \frac{17}{3600} \mu^2$				
$\delta_{66}$			$2q_0 + \frac{\mu^2}{1800}$	$2q_0 + \frac{37}{44100} \mu^2$			
$\delta_{88}$				$2q_0 + \frac{\mu^2}{6272}$	$2q_0 + \frac{65}{254016} \mu^2$		
$\delta_{10,10}$					$2q_0 + \frac{\mu^2}{32400}$	$2q_0 + \frac{101}{980000} \mu^2$	
$\delta_{12,12}$						$2q_0 + \frac{\mu^2}{34848}$	
$\delta_{24} = \delta_{42}$		$q_2 + \frac{\mu^2}{144}$					
$\delta_{24} = \delta_{42}$				$-q_4$			
$\delta_{28} = \delta_{82}$					$q_6$		
$\delta_{2,10} = \delta_{10,2}$					0		
$\delta_{2,12} = \delta_{12,2}$						0	
$\delta_{46} = \delta_{64}$				$q_2 + \frac{\mu^2}{1200}$			
$\delta_{48} = \delta_{84}$				$-q_4$			
$\delta_{4,10} = \delta_{10,4}$					$q_6$		
$\delta_{4,12} = \delta_{12,4}$					0		
$\delta_{68} = \delta_{86}$				$q_2 + \frac{\mu^2}{4704}$			
$\delta_{4,10} = \delta_{10,4}$				$-q_4$			
$\delta_{6,12} = \delta_{12,6}$					$q_6$		
$\delta_{8,10} = \delta_{10,8}$				$q_2 + \frac{\mu^2}{12960}$			
$\delta_{8,12} = \delta_{12,8}$					$-q_4$		
$\delta_{10,12} = \delta_{12,10}$					$q_2 + \frac{\mu^2}{29040}$		

Tablica 4

$j$	2	3	4	5	6
$A_1$	1				
$A_3$	$-\frac{\mu}{12} \left( B_2 + \frac{1}{2} B_4 \right)$				
$A_5$	$-\frac{\mu}{20} \left( \frac{B_4}{2} + \frac{B_6}{3} \right)$				
$A_7$	$-\frac{\mu}{28} \left( \frac{B_6}{3} + \frac{B_8}{4} \right)$				
$A_9$	$-\frac{\mu}{36} \left( \frac{B_8}{4} + \frac{B_{10}}{5} \right)$				
$A_{11}$	$-\frac{\mu}{44} \left( \frac{B_{10}}{5} + \frac{B_{12}}{6} \right)$				

W tablicy 4 zestawiono wartości  $A_{2m-1}$ , dla przypadków  $j=2+6$ . Liczbę KÄMMANA  $\mathcal{K}$  obliczamy z zależności

$$\frac{1}{\mathcal{K}} = 1 + \frac{\mu}{4} B_2 \quad (21.12)$$

Właściwie, podstawiając (21.4) do (21.1) otrzymujemy dwa układy równań z dwiema grupami niewiadomych  $B_{2m}$ ,  $A_{2m-1}$ . Następnie obliczając z jednego układu wartości  $A_{2m-1}$  (por. (21.11)) i podstawiając do drugiego otrzymujemy dopiero układ (21.8). Wykorzystanie faktu iż  $A_1=1$  prowadzi do zależności (21.12).

Przeanalizujemy teraz przypadek, gdy otrzymany tutaj nieskończony układ równań jest układem zupełnym i regularnym. Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że  $q_4 \approx q_6 \approx 0$ . Przeprowadźmy, por. [41], sumowanie wyrazów

$$c_m = \sum_{v=2}^{2m-2} \left| \frac{\delta_{uv}}{\delta_{uu}} \right| + \sum_{v=2m+2}^{\infty} \left| \frac{\delta_{uv}}{\delta_{uu}} \right|. \quad (21.13)$$



Jeżeli do (21.13) podstawimy zależności (21.9), (21.10) to otrzymamy

$$C_m = 1 - \varrho_m, \quad (21.14)$$

gdzie

$$\varrho_m = \begin{cases} \frac{\mu^2/144+2q_0-q_2}{\mu^2/72+2q_0}, & m = 1, \\ -\frac{\mu^2}{4m^2} \frac{1}{(m^2-1)(4m^2-1)} + 2q_0 - 2q_2, & m > 1 \end{cases} \quad (21.14')$$

Wyrażenia zaś  $|C_u/\delta_{uu}|$  spełniają relację

$$\left| \frac{C_u}{\delta_{uu}} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{2(2q_0+\mu^2/72)} : u = 2 \\ 0 \quad \quad \quad u > 2 \end{array} \right\} \leq K^* \quad (21.15)$$

gdzie

$$K^* = \frac{\mu}{2(2q_0+\mu^2/72)}$$

Jak nietrudno zauważyć, wyrażenia (21.14) są zawsze mniejsze od jedności, co przy warunku (21.15) pozwala wnioskować, że układ (21.8) jest zawsze układem regularnym posiadającym rozwiązanie

$$|B_{2m-1}| < K^* \quad (21.16)$$

Jeżeli dodatkowo wśród liczb (21.14) znajduje się taka liczba  $\theta^* = \varrho_{m_0} > 0$ , iż  $\varrho_m > \theta^*$ , wtedy też będzie  $C_m \leq 1 - \theta^*$  i rozpatrywany układ (21.8) będzie zupełnym i regularnym, a zatem posiadającym zawsze jednoznaczne i ograniczone rozwiązanie, które może być wyznaczone, np. metodą kolejnych przybliżeń.

## 22. Kolejność rozwiązywania

Jeżeli jest określona geometria łuku zginanego (wartości  $r, R, h, \nu_0$ ), wtedy przy pomocy równań (20.10)<sub>3</sub>, (10.4)<sub>2</sub> obliczamy wartości  $p^*$  i  $\mu$ . Na podstawie wykresu przytoczono-ego na rys. 13 znajdujemy wartości współczynników  $q_0, q_2, q_4, q_6$ . Następnie dla przyjętej liczby niewiadomych  $j$ , por. p. 16 wniosków końcowych, obliczamy według tablicy 3 współczynniki  $\sigma_{uv}^*$ . Dalej rozwiązujemy układ równań (21.8), skąd otrzymujemy wartości  $B_{2m}$ . Następnie z równań (21.6)<sub>1</sub>, przy uwzględnieniu (20.10)<sub>1</sub>, otrzymujemy równanie określające naprężenia południkowe  $\sigma_1$ . Z równania zaś (21.12) otrzymujemy liczbę KARMANA  $K$ . Na podstawie tablicy 4 ustalamy wartości współczynników  $\Lambda_{2m-1}$ , co pozwala teraz - w oparciu o równanie (21.6) ustalić naprężenia równoleżnikowe  $\sigma_2$ . Po sporządzeniu wykresów ilorazów naprężeń  $\sigma_1/\sigma, \sigma_2/\sigma, \sigma_{red}/\sigma$ , możemy w oparciu o równanie (21.7) ustalić odpowiednie liczby wzrostu naprężeń.

## R o z d z i a ł IV

### ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE

#### 23. Przykłady liczbowe

##### Przykład 1

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy zginanie łuku falistego badanego przez E.T. COPEGO i E.A. WERTA [4]. Łuk ten jest łukiem grubościennym. Wyżej cytowani Autorzy nie określili wszystkich wymiarów, które charakteryzują geometrię tego łuku. W pracy tych autorów podano tylko wartości  $r_1$ ,  $R_1$ ,  $H_W + H_Z$  oraz nominalną grubość rurociągu (bez spęczenia) -  $h_1$ . W przykładzie przyjęto 20% spęczenie grubości ścianki w czasie wykonywania łuku, tak że łuk posiada grubość  $h \approx 1,2h_1$ . Takie wartości wzrostu grubości ścianki podane są na innych łukach badanych przez tych Autorów. Dla rozbicia wartości  $H_W + H_Z$  na wysokość  $H_Z$  i  $H_W$  przyjęto w przybliżeniu, że pofałdowanie składa się z łuków koła. Zatem geometria tego łuku może być określona w przybliżeniu wielkościami

$$\begin{aligned} H_Z &= 1,29'' = 32,8 \text{ mm}, & H_W &= 1,64'' \approx 41,6 \text{ mm}, \\ R_1 &= 43'' \approx 1090 \text{ mm}, & r_1 &= 6,78'' \approx 172 \text{ mm}, \\ h &= 0,6'' \approx 15,2 \text{ mm} \end{aligned} \quad (23.1)$$

Cały przebieg obliczeń ujęto przy pomocy schematu przedstawionego w tablicy 5, zaś wykresy naprężeń przytoczono na rys. 14. Tablica ta jest czytelna, po uwzględnieniu uwag zawartych w punkcie 17. Liczbę zwiększenia naprężeń zredukowanych ustalono dla hipotezy M.T. HUBERA.

Jeżeli rozpatrzmy łuk gładki geometrycznie podobny (posiadający tę samą wartość  $\mu$ ), wtedy liczba KÁRMÁNA  $\mathcal{K}_1$  może być obliczona dla  $\mu < 10$  przy pomocy zależności

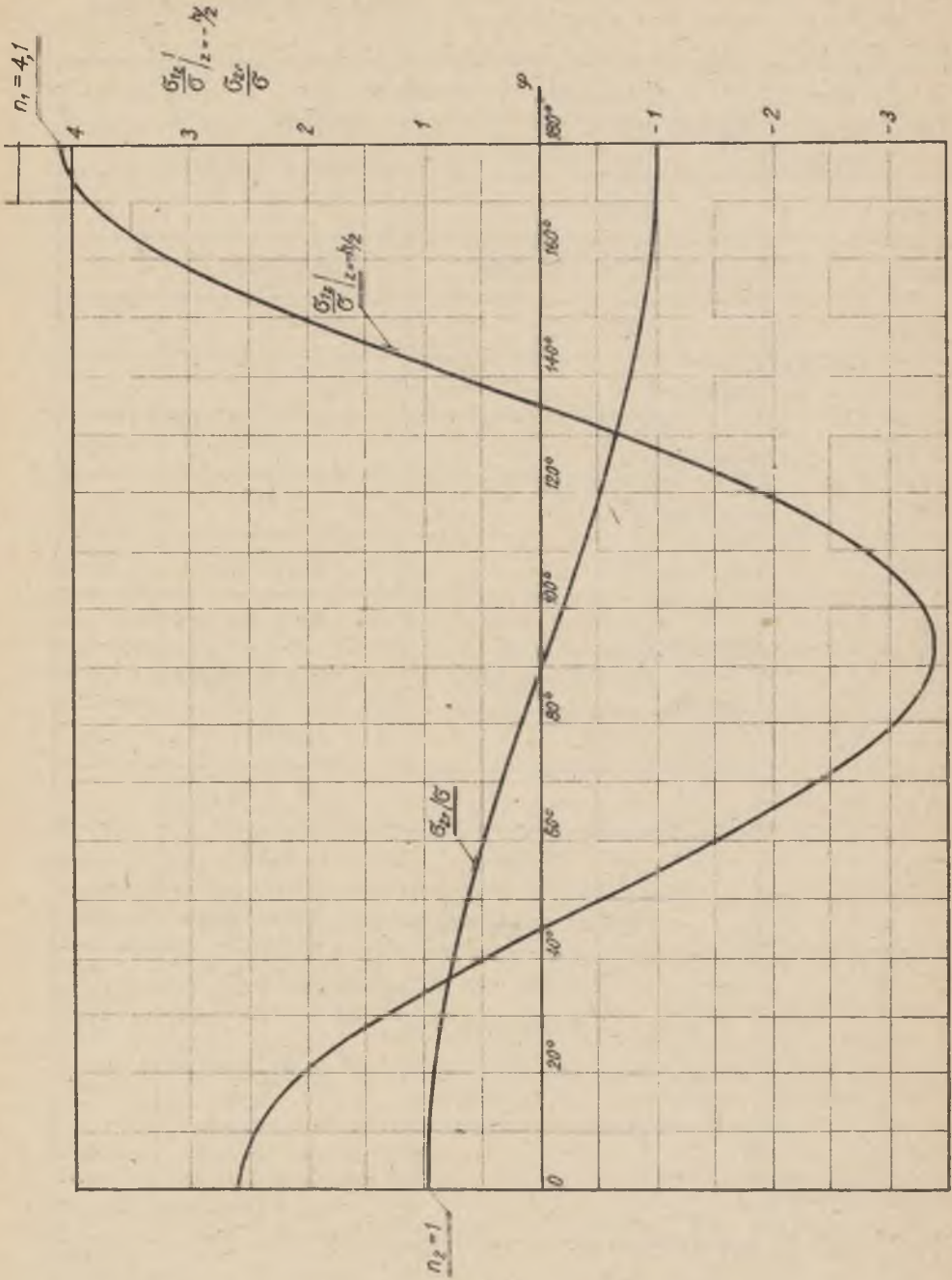
$$\mathcal{K}_1 = \frac{16}{16 + \mu^2} \quad (23.2)$$

Tablica 5

Lp.	Rów. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba $j$		Wymiar
			$j = 2$	$j = 4$	
1.	Rys. 5	$H_z$	32,8		mm
2.		$H_w$	41,6		mm
3.		$R_o$	1090		mm
4.		$r_o$	172		mm
5.		$h$	15,2		mm
6.		$r$	191		mm
7.		$R$	1088		mm
8.	(10.2) <sub>3</sub>	$\lambda$	0,176		
9.	(10.4) <sub>2</sub>	$\mu$	7,65		
10.	(12.12)	$p_1$	11,6		
11.		$p_2$	2,5		
12.		$p_3$	0		
13.	(14.5)	$f_o$	22,76		
14.		$f_1$	0		
15.		$f_2$	0		
16.		$f_3$	0		
17.	(15.4)	$a_{11}$	1	1	
18.		$a_{22}$	1	1	
19.		$a_{33}$		1	

Tablica 5 (ciąg dalszy)

Lp.	Rów. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba $j$	
			$j=2$	$j=4$
20.	(15.4)	$a_{44}$		1
21.		$a_{12} = a_{21}$	- 0,168 $i$	- 0,168 $i$
22.		$a_{13} = a_{31}$		0
23.		$a_{14} = a_{41}$		0
24.		$a_{23} = a_{32}$		- 0,056 $i$
25.		$a_{24} = a_{42}$		0
26.		$a_{34} = a_{43}$		- 0,028 $i$
27.	(15.2)	$b_1 =$ $-b_{1R} + i b_{1I}$	1 + 0 $i$	1 + 0 $i$
28.		$b_2 =$ $= b_{2R} + i b_{2I}$	0 + 0,168 $i$	0 + 0,167 $i$
29.		$b_3 =$ $-b_{3R} + i b_{3I}$		0,009 + 0 $i$
30.		$b_4 =$ $= b_{4R} + i b_{4I}$		0 + 0 $i$
31.		$K$	0,086	0,086
		Dalej przeprowadza się obliczenia dla $j=2$		
32.	(16.1) <sub>2</sub>	$\frac{\sigma_{12}}{\sigma} \Big _{z = \frac{h}{2}}$	- 0,364 cos $\varphi$ + 3,38 cos 2 $\varphi$ - - 0,364 cos 3 $\varphi$	
33.	(16.1) <sub>3</sub>	$\frac{\sigma_{2r}}{\sigma}$	cos $\varphi$	
34.	Rys.14 (16.3)	$n_1$	4,1	
35.		$n_2$	1	
36.		$n_{1ed}$	4,7	



Rys. 14

Powyższy wzór odpowiada pierwszemu przybliżeniu KÁRMÁNA dla łuków gładkich. Jeżeli przyjąć łuk gładki o wymiarach  $R_1, r_1, h = 0,5, (\mu_1 = 7,07)$  wtedy liczba KÁRMÁNA (por. (23.2)) wynosi  $\mathcal{K}' = 0,242$ . Zaś dla  $h_1 = 0,6$   $\mathcal{K}_1'' = 0,314$ . Zatem iloraz liczb KÁRMÁNA dla łuku gładkiego i falistego wynosi

$$\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}} = \frac{0,242}{0,086} = 2,82, \\ \frac{\mathcal{K}_1''}{\mathcal{K}} = \frac{0,314}{0,086} = 3,65 \end{cases} \quad (23.3)$$

Z badań zaś E.T. COPEGO i A.E. WERTA wynika, że przemieszczenia rurociągu (posiadającego łuki faliste jak w rozpatrywanym tutaj przykładzie), otrzymane na drodze doświadczalnej, są od 2,2 - 2,6 razy większe niż analogiczne przemieszczenia obliczone teoretycznie. Przy czym przez obliczenia teoretyczne rozumieć należy obliczenia tradycyjne z uwzględnieniem liczby KÁRMÁNA dla łuków falistych jak dla łuków gładkich. Otrzymane więc powyżej liczby 2,82 + 3,65 odpowiadają liczbom 2,2 ÷ 2,6. Z uwagi na brak ścisłych danych w przytoczonych badaniach doświadczalnych oraz na fakt, że rozpatrywany łuk jest grubościenny, porównanie to traktujemy jedynie jako pewien wskaźnik, sam zaś przykład - jako ilustrację numeryczną sposobu rozwiązywania takich łuków.

### Przykład 2.3

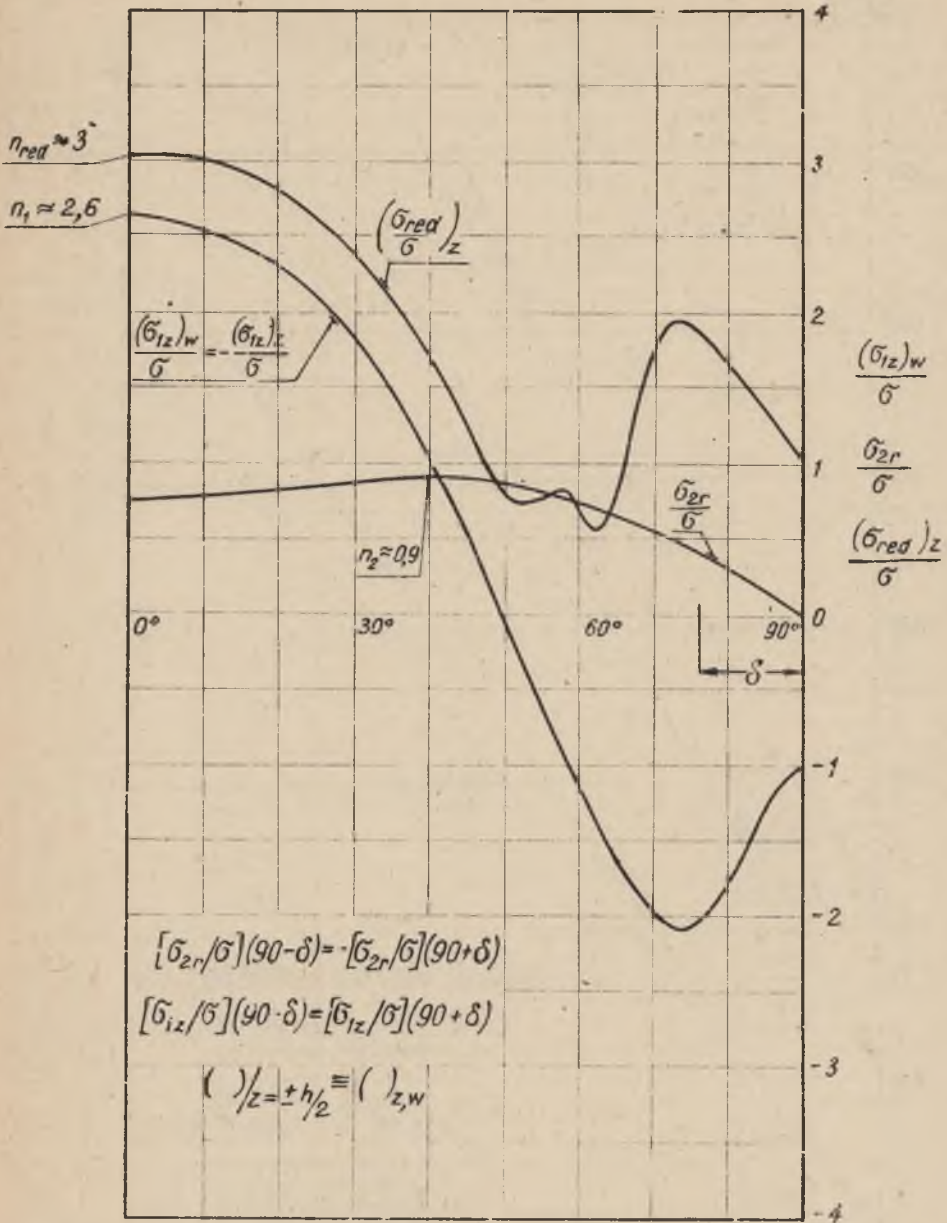
Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem konkretnych przykładów liczbowych, dotyczących dwóch segmentowych łuków zginanych: jeden o dużym promieniu "gięcia" ( $R = 8r$ ), drugi posiada promień  $R = 2,5r$ . Przytoczone tutaj przykłady dotyczą łuków, dla których ustalono doświadczalnie liczby KÁRMÁNA, (por. A.A. SKWORCOW [39]). Porównanie wyników otrzymanych na podstawie przytoczonego tutaj rozwiązania, z wynikami doświadczalnymi daje błędy rzędu 15% (dla liczby KÁRMÁNA).

Cały tok obliczeń ujęto przejrzyste przy pomocy tablic 6,7. Wykresy zaś naprężeń podano na rys. 15, 17. Na rys. 16, 18 podano wyniki badań A.A. SKWORCOWA, dla rurociągu płaskiego posiadającego łuki o wymiarach, jak w przeliczonym przykładzie. Zgodność więc obliczeń teoretycznych i badań doświadczalnych jest dobra w przypadku podpór rolkowych. Aby w przypadku podpór bez rolek, otrzymać zgodność z danymi doświadczalnymi należy w obliczeniach uwzględnić współczynnik tarcia. Nie zmienia to oczywiście faktu, że liczba KÁRMÁNA w obu przypadkach wynosi  $\mathcal{K} = 0,5$  (doświadczalnie) lub  $\mathcal{K} \approx 0,55$

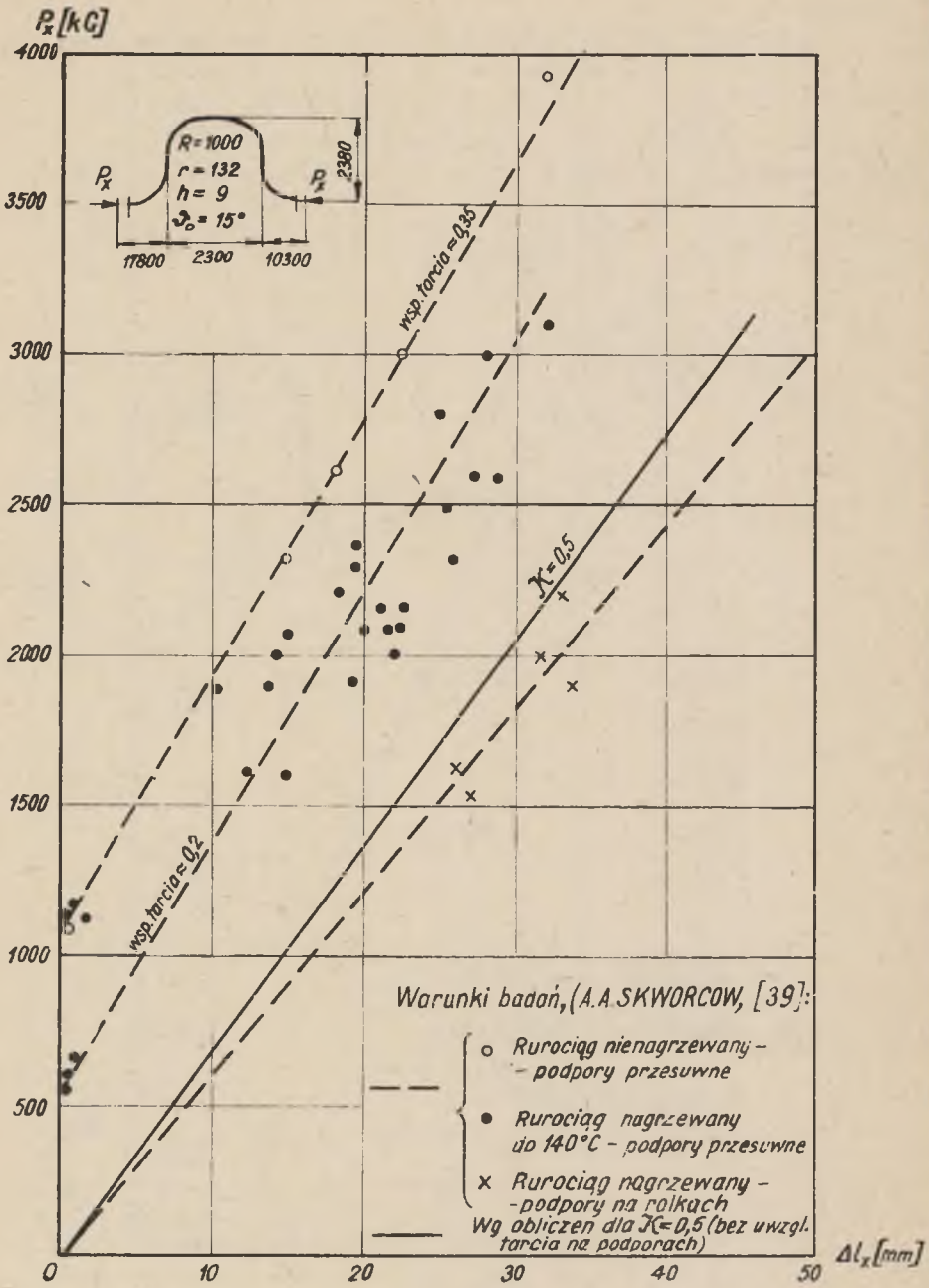
Tablica 6

Lp.	Rów. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba $j$		Wymiar
			$j=1$	$j=2$	
1.	Rys. 11	$R$	1000		mm
2.		$r$	132		mm
3.		$h$	9		mm
4.		$v_D$	0,2618		rd
5.	$(10.4)_2$	$\mu$	6,71		
6.	$(20.10)_3$	$\rho^*$	16,45		
7.	Rys. 13	$q_0$	3,18		
8.		$q_2$	0,84		
9.		$q_4$	0,50		
10.		$q_6$	0,32		
11.	Tabl. 3	$\delta_{22}$	6,36 000	6,98533	
12.		$\delta_{44}$		6,51633	
13.		$\delta_{24} = \delta_{42}$		1,15267	
14.	$(21.8)$	$B_2$	0,528	0,495	
15.		$B_4$		-0,088	
16.	Tabl. 4	$A_1$	1	1	
17.		$A_3$		-0,253	
18.	$(21.12)$	$\mathcal{K}$	0,53	0,547	
19.			Dalej przeprowadz się obliczenia dla $j=2$		
20.	$(21.6)_1$	$\frac{\sigma_{1z}}{\sigma} / z = -\frac{h}{2}$	$\pm \sqrt{3} \left( 3,86 - \frac{5,72}{18,45 + 16,45 \cos 2\varphi} \right) (0,495 \cos 2\varphi -$		
21.		$\frac{\sigma_{1z}}{\sigma} / z = +\frac{h}{2}$	$- 0,0875 \cos 4\varphi)$		
22.	$(21.6)_2$	$\frac{\sigma_{2r}}{\sigma}$	$\cos \varphi - 0,252 \cos 3\varphi$		
23.	Rys. 16	$n_1$	2,6		
24.		$n_2$	0,9		
25.		$(21.7)$	$n_{red}$	3	





Rys. 15



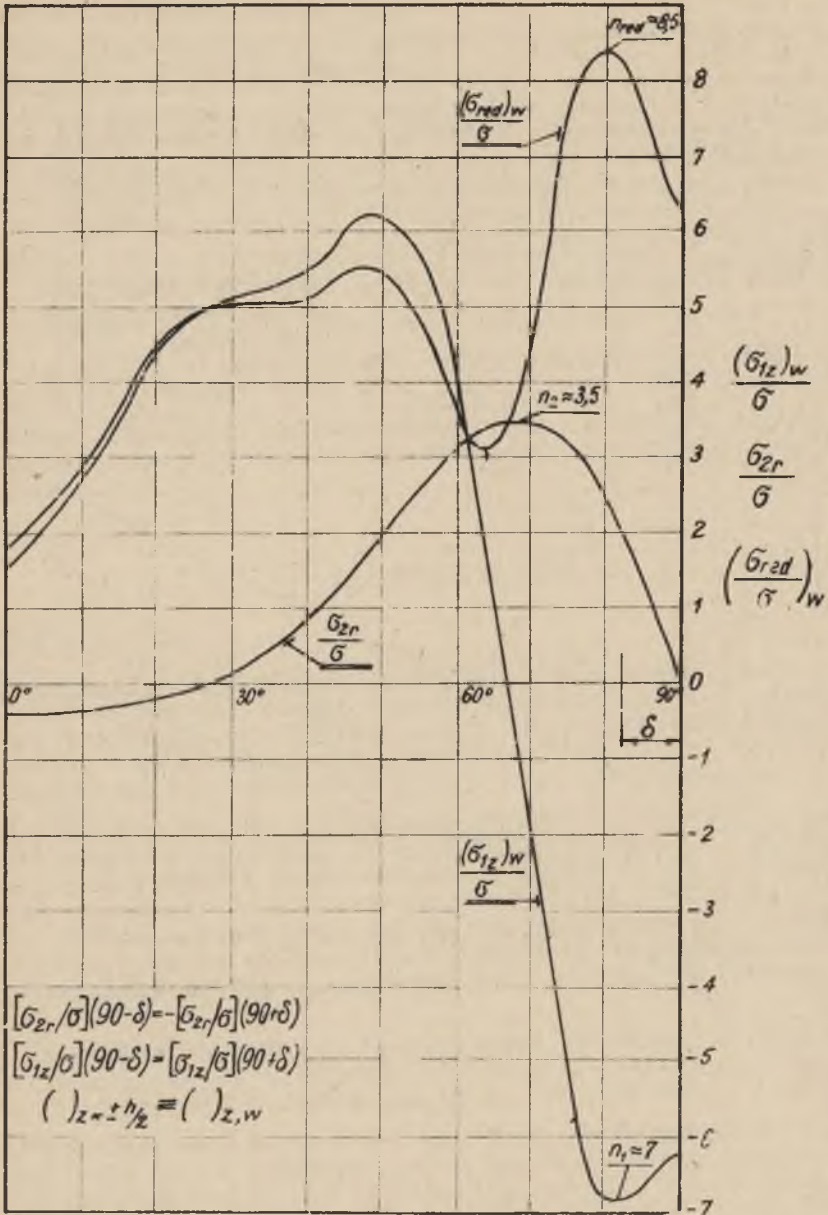
Rys. 16

Tablica 7

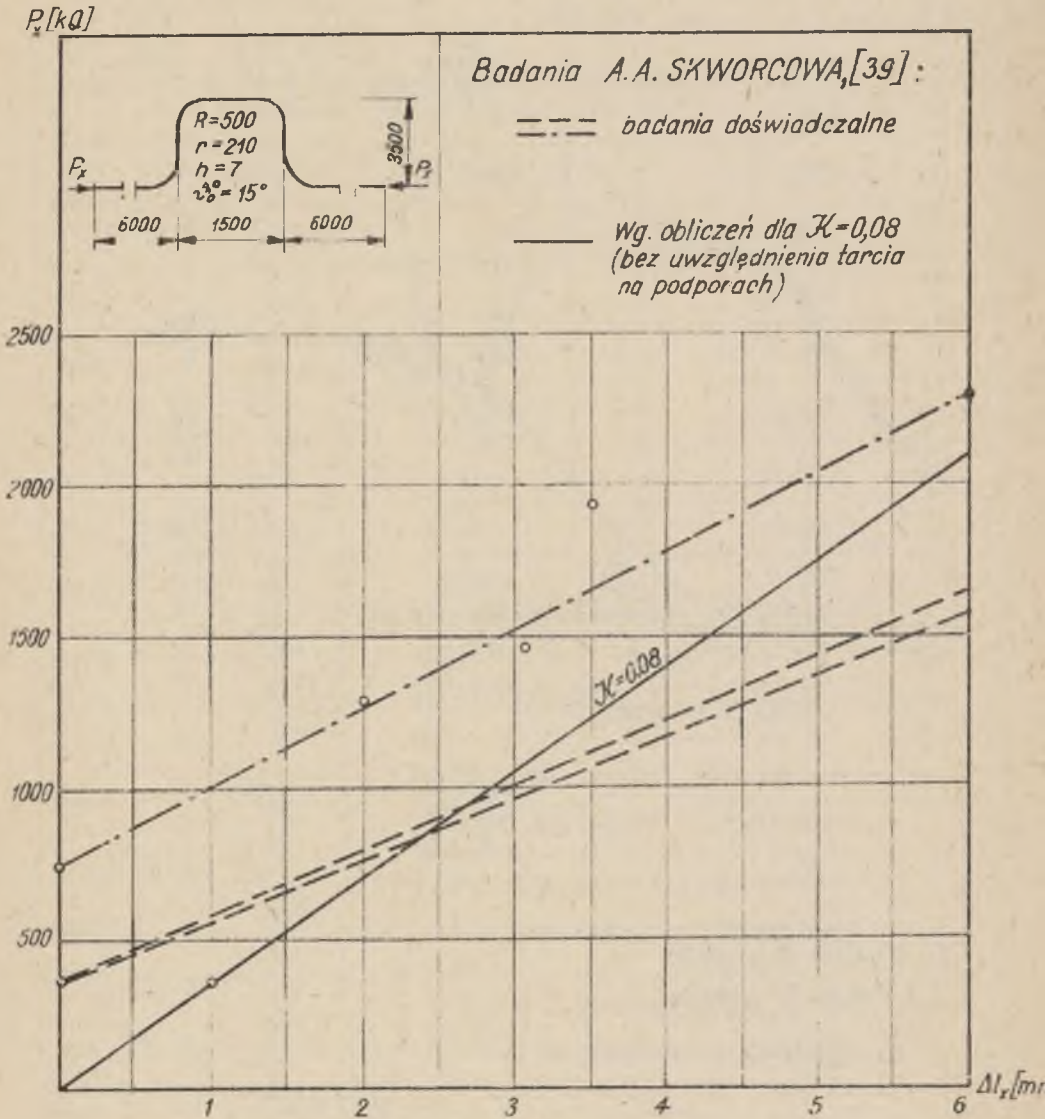
Lp.	Row. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba $j$		Wy- miar
			$j = 2$	$j = 4$	
1.	Rys.11	$R$	500		mm
2.		$r$	210		mm
3.		$h$	7		mm
4.		$r_0$	0,2618		rd
5.	$(10.4)_2$	$\mu$	43,65		
6.	$(20.10)_3$	$\rho^*$	6,83		
7.	Rys. 13	$q_0$	2,84		
8.		$q_2$	0,96		
9.		$q_4$	0,48		
10.		$q_6$	0,22		
11.	Tabl. 3	$\delta_{22}$	32,1428	32,1428	
12.		$\delta_{44}$	12,2957	14,6774	
13.		$\delta_{66}$	--	7,2786	
14.		$\delta_{88}$	--	5,9838	
15.		$\delta_{24} = \delta_{42}$	14,1914	14,1914	
16.		$\delta_{26} = \delta_{62}$	--	-0,4800	
17.		$\delta_{28} = \delta_{82}$	--	0,2200	
18.		$\delta_{46} = \delta_{64}$	--	2,5478	
19.		$\delta_{48} = \delta_{84}$	--	-0,4800	
20.		$\delta_{68} = \delta_{86}$	--	1,3650	

Tablica 7 (ciąg dalszy)

Lp.	Row. Rys. Tabl.	Symbol	Liczba $j$		Wy- miar	
			$j = 2$	$j = 4$		
21.	(21.8)	$B_2$	1,3845	1,295		
22.		$B_4$	-1,5980	-1,370		
23.		$B_6$		0,621		
24.		$B_8$		-0,299		
25.	Tabl. 4	$A_1$	1,0000	1,000		
26.		$A_3$	-2,1299	-2,220		
27.		$A_5$		1,043		
28.		$A_7$		-0,206		
29.	(21.12)	$\mathcal{K}$	0,062	0,066		
			Nizej przeprowadza się obliczenia tylko dla $j=4$			
30.		$K_{1z}$	$\sqrt{3} \left( 3,86 - \frac{5,72}{8,83+6,83 \cos 2\varphi} \right)$			
31.	(21.6) <sub>1</sub>	$\frac{(\hat{\sigma}_{1z})_w}{\hat{\sigma}}$	$K_{1z} (1,295 \cos 2\varphi - 1,370 \cos 4\varphi +$ $+ 0,621 \cos 6\varphi - 0,299 \cos 8\varphi)$			
32.		$\frac{(\hat{\sigma}_{1z})_z}{\hat{\sigma}}$	$-K_{1z} (1,295 \cos 2\varphi - 1,370 \cos 4\varphi +$ $+ 0,621 \cos 6\varphi - 0,299 \cos 8\varphi)$			
33.	(21.6) <sub>2</sub>	$\frac{\hat{\sigma}_{2r}}{\hat{\sigma}}$	$\cos \varphi - 2,20 \cos 3\varphi +$ $+ 1,043 \cos 5\varphi - 0,206 \cos 7\varphi$			
34.	Rys. 18	$n_1$	7			
35.		(21.7)	$n_2$	3,5		
36.			$n_{red}$	8,5		



Rys. 17



Rys. 18

(teoretycznie) dla przykładu drugiego. Podobnie kształtują się wyniki w przykładzie trzecim.

Po uwzględnieniu uwag zawartych w punkcie 22 tablice te nie wymagają specjalnych objaśnień.

Obecnie porównamy liczby zwiększenia naprężeń z analogicznymi liczbami otrzymanymi na drodze eksperymentalnej. Doświadczenia takie były przeprowadzone przez A.G. KAMERSZTEINA, [31b] i obejmowały zginanie łuków segmentowych, których geometria scharakteryzowana może być parametrami  $\mu \geq 11.5$ ,  $2\psi_0 = 45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $22^\circ 30'$ . Dla rozpatrywanego tutaj przykładu ( $\mu = 43,65$ ,  $2\psi_0 = 30^\circ$ ), średnie liczby zwiększenia naprężeń południkowych wynoszą  $n_1 = 6,5$ , zaś równoleżnikowych -  $n_2 = 5,5$ . Porównując te wyniki z obliczeniami teoretycznymi (rys. 18), otrzymujemy dla  $n_1$  "błąd" rzędu 10%, zaś dla  $n_2$  - 35%. Tutaj określenie błędu jest czysto umowne, gdyż właściwe porównanie pól naprężeń mogłoby być przeprowadzone na terenie teorii plastyczności.

## 24. Wnioski końcowe

### Rozdz. I

1. Rozwiązanie w siłach zespolonych umożliwia uproszczenie podstawowych równań teorii powłok ortotropowych. W każdym konkretnym przypadku ortotropii należy przeanalizować, które to pomocnicze funkcje czynią zadość równaniom (7.1), (7.5), po czym uwzględnić te związki w równaniach zasadniczych.

2. Równania teorii powłok ortotropowych upraszczają się w sposób zasadniczy, jeżeli przyjmiemy się, że dla wszystkich funkcji pomocniczych spełnione są równości (7.1). Jeżeli dodatkowo zachodzi równość (7.5), to wtedy otrzymuje się równania o budowie analogicznej do układu równań powłok izotropowych. Do tej grupy należeć będą powłoki ortotropowe, dla których funkcje ortotropii są stałe i mało różniące się od jedności.

3. Stosując konsekwentnie pomijanie w równaniach zasadniczych teorii powłok izotropowych, małych wpływów, uzyskano zapis prostszy niż w równaniach W.W. NOWOZIŁOWA.

4. W zależności od tego, które funkcje pomocnicze można przyjąć jako równe jedności, mogą wystąpić pewne uproszczenia w relacjach między siłami a odkształceniami, lub w określeniu sił poprzecznych. Jeżeli jak w przykładzie:  $a_{11} \approx a_{12} \approx 1$ , to oznacza, że te przybliżone równości można otrzymać, zakładając formalnie  $C_1 \approx C_{12} \approx 0$ . Aby jednak z tego wynikała równość  $N_1 \approx 0$ , potrzeba aby i na brzegu siła ta była równa ze-

ru. Zatem jeżeli mamy wyciągnąć pewne wnioski dotyczące pominięcia pewnych wielkości wewnętrznych, to takie uproszczenia mogą być wprowadzone, ale dopiero po rozpatrzeniu zagadnienia brzegowego, a zater dla każdej klasy zagadnień oddzielnie.

5. Zagadnienia brzegowe dla omawianych tutaj równań, należy formułować analogicznie, jak dla powłok izotropowych, tj. przez części rzeczywiste lub urojone sił zespolonych, wzgl. przez składowe przemieszczenia i kąty obrotu.

6. Jeżeli brać pod uwagę pewne niedogodności metody jak: wolniejsza zbieżność szeregów wielkości wewnętrznych, trudność formułowania w ogólnym przypadku zagadnień brzegowych w wielkościach zespolonych oraz fakt, że spotykane układy równań algebraicznych posiadają współczynniki zespolone - to niedogodności te skompensowane są: niższym rzędem równań końcowych oraz możliwością wprowadzenia uproszczeń w równaniach wyjściowych, co jest rzeczą szczególnie cenną w teorii powłok ortotropowych.

Dodatkowo, równania zasadnicze zapisane w siłach zespolonych, po wprowadzeniu powyższych uproszczeń, mają - w przyjętym tutaj zapisie - względnie prostą budowę.

## Rozdz. 11

7. W zagadnieniu zginania łuków falistych można pominąć momenty zginające  $M_2$  i odkształcenia  $\varepsilon_1$ . Jest to równoznaczne z tym, że nie ma potrzeby uwzględniać funkcji ortotropii  $k_1$ . Odpowiednio uproszczone równanie określone jest zależnością (10.4). Równanie to możemy traktować jako podstawowe przy rozwiązywaniu zagadnienia zginania łuku falistego.

8. Występująca tutaj liczba KARMANA  $\mathcal{K}$  ma analogiczne znaczenie jak w zagadnieniu zginania łuku izotropowego. Równanie różniczkowe osi odkształconej łuku jest takie same jak w przypadku zagadnienia izotropowego. Wniosek ten wpływa wprost z wniosku 7.

9. Podstawowe zależności, z których obliczamy liczbę KARMANA  $\mathcal{K}$  oraz współczynniki  $b_n^*$  szeregów naprężeń, stanowi układ równań liniowych (15.2).

10. Wysokość pofałdowania  $H_w, H_z$  oraz średnią grubość  $h$  należy pomierzyć na łuku wykonanym. Należy pamiętać, że współczynniki  $p_1, \dots, p_3$  są zależne od kwadratów wyrazów  $H_w/h$  i  $H_z/h$ .

11. Otrzymane tutaj wyniki można by uczynić dokładniejszymi uwzględniając dokładniejszą postać funkcji  $k_2$ , to zaś z kolei wymaga ściślejszego określenia powierzchni pofałdowania. Do takiego określenia można dojść po wykonaniu serii pomiarów na łukach rzeczywistych. Jest jednak rzeczą dyskusyjną, czy ściślejszy opis powierzchni będzie mógł być uwzględniony w o-



bliczeniach, a jeżeli nawet tak, to czy da on istotną poprawę wyników, jeżeli stać będziemy na gruncie ortotropii konstrukcyjnej.

12. Dla wyznaczenia naprężeń oraz liczby KÁRMÁNA należy przyjąć pewną skończoną liczbę wyrazów szeregu (14.1). Pewną orientację odnośnie do przyjęcia liczby wyrazów daje rys. 10.

13. Stosowanie metody asymptotycznego całkowania jest ze względów czysto obliczeniowych bardzo uciążliwe. Występująca w tej metodzie podstawowa funkcja, będąca pierwszym wyrazem szeregu asymptotycznego jest określona całką [37]:

$$u_0(\alpha) = \pm \left( \frac{3}{2} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{|\sin \alpha|}{(1+\lambda \sin \alpha)(p_1 - p_2 \sin \alpha - p_3 \sin 2\alpha)}} d\alpha \right)^{\frac{3}{2}} \quad (24.1)$$

która wymaga opracowania odpowiedniej tablicy. Funkcja (24.1) zależna jest od parametrów  $H_z/h$ ,  $H_w/h$  i  $\lambda$ . Ta duża ilość parametrów, i to w dodatku zależnych od siebie w sposób trudny do ustalenia teoretycznego, uniemożliwia stabelaryzowanie tej całki. Określenie takie staje się jednak możliwe dla każdego łuku indywidualnie. Jednak i w tym przypadku należy rozpatrzyć zagadnienie zbieżności szeregu asymptotycznego.

### Rozdz. III

14. Obliczenia teoretyczne dotyczące liczby KÁRMÁNA wykazują błędy rzędu 15% w stosunku do wyników doświadczalnych. Błąd ten może ulec zmniejszeniu w przypadku rozpatrywania łuków o większej liczbie segmentów.

15. Dla orientacyjnych obliczeń można zakładać, że  $q_4 \approx q_6 \approx 0$ ; pociąga to za sobą dalsze uproszczenia podstawowego układu równań (21.8). W tym przypadku rozwiązanie układu może być przedstawione przy pomocy ułamków łańcuchowych nieskończonych

$$B_v = - \frac{C_v}{|\delta_{vv}|} - \frac{\delta_{v,v+2}^2}{|\delta_{v+2,v+2}|} - \frac{\delta_{v+2,v+4}^2}{|\delta_{v+4,v+4}|} - \dots - \frac{\delta_{2j-2,2j}^2}{|\delta_{2j,2j}|} \quad (24.2)$$

gdzie

$$C_v = \begin{cases} -\frac{\mu}{2} : v = 2 \\ B_{v-2} \delta_{v-2,v} : 2 < v < 2j \end{cases}$$

16. Zaleca się przyjmować liczbę  $j$  w zależności od promienia względnego  $\lambda$  następująco

$$\lambda < 0,2 \quad j = 2 + 3,$$

$$\lambda = 0,2 + 0,3 \quad j = 3 + 4,$$

$$\lambda = 0,3 + 0,5 \quad j = 4 + 6.$$

Przytoczone powyżej zależności mają charakter wyłącznie orientacyjny; wyraźną zaś wskazówką właściwego doboru liczby  $j$  jest "zbieżność" do "zera" ciągów  $A_{2m-1}$ ,  $B_{2m}$ , tj.  $A_{2m-1} \approx 0$ ,  $B_{2m} \approx 0$ , gdy  $m \rightarrow j$ .

### 25. Zestawienie ważniejszych oznaczeń

$N_j, Q_j, S_j, M_j, K_j$  - kolejno: siła normalna, poprzeczna, styczna, moment zginający i skręcający. Wielkości te występują w przekroju poprzecznym powłoki i są odniesione do jednostki długości linii współrzędnej  $\alpha_{3-j}$  ( $\alpha_j = \text{const}$ ).

$X_1, X_2, Z$  - składowe wektora siły, działającej na jednostkę środkowej powierzchni powłoki.

$u_j, w$  - składowe wektora przemieszczenia dowolnego punktu środkowej powierzchni powłoki,

$\alpha_j$ : współrzędne krzywoliniowe odniesione do kierunków głównych środkowej powierzchni powłoki

$\epsilon_j, \omega, \kappa_j, \tau$  - kolejno: odkształcenie wzdłuż linii  $\alpha_j$  kąt odkształcenia postaciowego, zmiana krzywizny linii  $\alpha_j$ , skręcenie powierzchni.

$\theta, t_0, t_z, t_w$  - kolejno: temperatura na powierzchni odległej od pow. środkowej o  $z$ ,  $z=0$ ,  $z = \frac{h}{2}$ ,  $z = -\frac{h}{2}$ .

$j$ : wskaźnik przebiegający liczby 1, 2 lub określający liczbę wyrazów szeregu,

$A_j$ : współczynnik pierwszej formy kwadratowej powierzchni,

$\alpha, \beta$ : kąty określające równoleżnik, południk,

$u_1 = u, u_2 = v$ , składowe wektora przemieszczenia w kierunku stycznym do południka, równoleżnika.

$k$ : zmiana krzywizny łuku  $k = R\left(\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R}\right)$ ,

$R$ : promień łuku przed odkształceniem,

$R^*$ : promień łuku po odkształceniu,

- $\rho$ : promień równoleżnika,  
 $R_j$ : promienie krzywizny linii  $\alpha_j$ ,  
 $\phi$ : zmiana kąta nachylenia stycznej do południka,  
 $S, K$ : siła styczna i średni moment skręcający wielkości określone rów. (4.2),  
 $\sigma_j$ : naprężenia normalne,  
 $\sigma_{jr}$ : naprężenie normalne od sił rozciągających,  
 $\sigma_{jz}$ : " " " od momentów zginających,  
 $\tau_z$ : naprężenie styczne,  
 $C_j, C_{3-j,j} = C_{j,3-j}$ : sztywności rozciągania - ściskania,  
 $D_j, D_{3-j,j} = D_{j,3-j}$ : sztywności zginania,  
 $A$ : sztywność ścinania  
 $B$ : sztywność skręcania,  
 $h$ : grubość powłoki,  
 $\alpha_t$ : współczynnik rozszerzalności liniowej,  
 $t$ : spadek temp. na jedn. grubości powłoki

$\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_{3-j,j}$  } funkcje występujące w związkach między od-  
 $\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_{3-j,j}$  } kształceniami a siłami wewnętrznymi,

$k_{jr}, k_{jz}, k_s, k_k$  - kolejno: funkcje ortotropii rozciągania - ściskania, zginania, ścinania, skręcania,

$E_{jr}, E_{jz}, E_s, E_k$  - kolejno: moduł YOUNGA przy ortotropii konstrukcyjnej dla ściskania - rozciągania, zginania, ścinania skręcania,

$\nu_{jr}, \nu_{jz}, \nu_s, \nu_k$  - kolejno: liczba POISSONA przy ortotropii konstrukcyjnej dla ściskania - rozciągania, zginania, ścinania, skręcania,

$G_s, G_k$ : moduły KIRCHHOFFA przy ortotropii konstrukcyjnej dla ścinania, skręcania,

$c$  - stała określona równaniem (6.1),

$\Omega$  - stała określona równaniem (6.1'),

$i = \sqrt{-1}$  - jedność urojona,

$a_{jk}, b_{jk}, c_{jl}$  - pomocnicze funkcje zestawione w tablicy 1,

$\bar{N}_j, \bar{S}$  - siły zespolone,

$N_j, \bar{S}$  - siły zespolone sprzężone,

$X_{jt}, Z_t$ : "obciążenia" termiczne,

- $P_j, p_j$ : pomocnicze funkcje,  
 $\psi_j$ : kąty obrotu stycznych do linii  $\alpha_j$  wokół stycznych do linii  $\alpha_{3-j}$ ,  
 $\tilde{N} = \tilde{N}_j + \tilde{N}_{3-j}$  suma sił zespolonych,  
 $\psi$ : funkcja naprężeń,  
 $\tilde{\psi}$ : zespolona funkcja naprężeń,  
 $\lambda$ : promień względny  $\lambda = \frac{r_0}{R}$ ,  
 $r_0, R_0$ : promienie powłoki toroidalnej,  
 $\mu$ : stała charakteryzująca geometrię łuku,  
 $H_w$ : wysokość pofałdowania przy  $\varphi = \pi$ ,  
 $H_z$ : wysokość pofałdowania przy  $\varphi = 0$ ,  
 $S$ : długość jednego pofałdowania,  
 $l$ : przyporządkowana długości  $S$  - długość równoleżnika powłoki toroidalnej dla kąta  $\varphi$ ,  
 $a^2$ : wartość stała,  
 $K(a), E(a)$ : całki eliptyczne zupełne pierwszego i drugiego rodzaju,  
 $H$ : amplituda pofałdowania dla kąta  $\varphi$ ,  
 $p_0$ : iloraz  $S/l_z$ ,  
 $l_z$ : przyporządkowana długości  $S$  - długość równoleżnika powłoki toroidalnej dla  $\varphi = 0$ ,  
 $P_1, P_2, P_3$  - pomocnicze funkcje,  
 $B_n$  - współczynnik szeregu trygonometrycznego,  
 $A_{kl}$  - elementy macierzy,  
 $C_1$  - wyrazy wolne układu równań liniowych,  
 $f_0, f_1, f_2, f_3$  - pomocnicze funkcje  
 $\mathcal{K}$  - liczba KÁRMÁNA,  
 $I$  - moment bezwładności przekroju poprzecznego łuku,  
 $b_n, (b_n^*)$  - współczynniki szeregu trygonometrycznego,  
 $a_{kl}$  - elementy macierzy,  
 $p$  - pomocnicza wielkość,  
 $\sigma_{1r}, \sigma_{2r}$ : naprężenia południkowe, równoleżnikowe,  
 $\sigma$ : naprężenia maksymalne przy zginaniu rury prostej,  
 $n_1, n_2, n_{red}$ : liczby wzrostu naprężeń południkowych, równoleżnikowych i zredukowanych,  
 $\psi, (\psi_0)$ : kąt środkowy segmentu dla kąta  $\varphi, (\varphi=0, \pi)$ ,  
 $I_{x1}, I_{x2}$ : momenty bezwładności,

$f_1(\nu)$ ,  $f_2(\nu)$ ,  $f_3(\nu)$  - pomocnicze funkcje,  
 $F(\varphi)$ : pomocnicza funkcja,  
 $p^*$ : drugi parametr charakteryzujący geometrię łuku segmen-  
towego,  
 $q_0$ ,  $q_2$ ,  $q_4$ ,  $q_6$  - pomocnicze funkcje,  
 $B_{2m}$  - współczynniki szeregu trygonometrycznego,  
 $d_{uv}^*$  - elementy macierzy  
 $r_m$ ,  $R_m$  - pomocnicze parametry,  
 $A_{2m-1}$  - współczynniki szeregu trygonometrycznego,  
 $C_m$ ,  $\varphi_m$ ,  $K^*$ ,  $\theta^*$ : wielkości występujące przy określaniu regu-  
larności układu równań.

#### LITERATURA

- [1] BANTLIN A.: Formänderung und Beanspruchung federnder Aus-  
gleichsröhren, Z.Ver.deut.Ing., 54(1910),43.
- [2] BORKOWSKI S.: a) Zginanie łuków falistych, Rozpr. Inż.,  
1,12(1964), 137. b) Zginanie łuków segmentowych, Rozpr.  
Inż.2,13(1965), (w druku) c) Zastosowanie sił zespolonych  
w teorii powłok ortotropowych, Rozpr.Inż., 2,13(1965),  
(w druku)
- [3] CLARK R.A., REISSNER É.: Bending of curved tubes, Adv.  
Appl.Mech., 2,1951,93.
- [4] COPE E.T., WERT E.A.: Load-deflection relations for lar-  
ge plain corrugated and creased pipe bends, Trans. ASME  
(Fuels a.St.Pow.),15,54(1932),115.
- [5] DONNELL L.H.: The flexibility of corrugated pipes under  
longitudinal forces and bending, Trans.ASME (Appl.Mech.),  
11,54(1932),69.
- [6] FORD J.H., TURNER C.E.: Examination of the theories for  
calculating the stresses in pipe bends subjected to in  
-plane bending, Proc.Inst.Mech.Engs, 15,171(1957),5 3.
- [7] GROSS N.: Experiments on short-radius pipe-bends bending  
of curved thin-walled tubes without internal pressure,  
Heat. Treat.Eng.,15(1953),73,106,134.
- [8] HUBER M.T.: a) Odkształcenie sprężyste rury cienkościen-  
nej o przekroju eliptycznym przy jej zginaniu, Arch.  
Mech. Stos.,1,1(1949),1. b) Probleme der Statik wichti-  
ger orthotroper Platen, Zürich, 1929. (Pisma t.II, s.117

- 234. Warszawa 1956). c) O naprężeniach wywołanych nierównomiernym ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury, Pisma t.II., s.55-67, Warszawa 1956.
- [9] KAFKA P.G., DUNN M.B.: Stiffness of curved circular tubes with internal pressure, J.Appl.Mech., 2,23(1956),247.
- [10] KÁRMÁN T.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre, Z.Ver.Ing., 55(1911) 1889.
- [11] LOVE A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge 1934.
- [12] NOWACKI W.: Zagadnienia termosprężystości, Warszawa 1960.
- [13] NOWIŃSKI J.: Wpływ wręgów przy zginaniu rur o przekroju kołowym, Prac.Gł.Inst.Lotn., 1951,49.
- [14] OLESIAK Z.: Stan naprężenia i odkształcenia sprężystego zginanej rury cienkościennej o przekroju soczewkowym, Arch. Mech. Stos., 4,7(1955), 503.
- [15] REISSNER E.: a) Rotationally symmetric problems in the theory of thin elastic shells, Proc.Th.US Nat. Congr. Appl. Mech., 1958,51. b) On the finite bending of pressurised tubes, J.Appl.Mech., 3,26(1959), 386. c) On finite pure bending of cylindrical tubes, Öster.Ing.-Arch. 15(1961),165.
- [16] SOKOŁOWSKI M.: Obliczanie stałych sprężystości dla płyt o ortotropii technicznej, Arch.Inż. Łąd., 4,3(1957), 457.
- [17] TIMOSHENKO S., WOJNOWSKY-KRIEGER S.: Teoria płyt i powłok, Warszawa 1962.
- [18] Design of piping systems, New York, 1957, (praca zbiorowa).
- [19] AMBARCUMIAN S.A.: Teoria anizotropnych obołoczek, Moskwa 1961.
- [20] ANDREJEWA L.E.: Uprugije elementy priborow, Moskwa 1962.
- [21] AKSELRAD E.L.: Izgib tonkostiennych stierżniej s razomknutym połogim profilem pri bolszych uprugich pieriemieszczeniach, Izv AN SSSR OTN Mech.Masz., 1, 1959, 150. b) Urawnienija dieformaczi obołoczek wraszczeniija i izgiba tonkostiennych stierżniej pri bolszych uprugich pieriemieszczeniach, Izv. AN SSSR OTN, Mech. Masz., 4, 1960, 84, c) Izgib tonkostiennych stierżniej pri bolszych uprugich pieriemieszczeniach Izv. AN SSSR OTN, Mech.Masz., 3, 1961, 124. d) Izgib i potierja ustojczivosti tonkostiennych trub pri gidrostaticheskom dawlenii Izv. AN SSSR OTN, Mech. Masz., 1, 1962, 98.
- [22] BIRGER I.A.: Krugłyje płastinki i obołoczki wraszczeniija Moskwa 1961.
- [23] BULGAKOW W.I.: Statika toroidalnych obołoczek, Kijew 1962.

- [24] VISARION W., STĂNESCU K.: Issledowanije kwaziinwariantow statiko-geometriczeskoj analogii dla tonkich uprugich obołoczek, Prikl. Mat. Mech., 1, 25(1961), 68.
- [25] GOLDENWEIZER A.L.: Tiejorja tonkich uprugich obołoczek, Moskwa 1953.
- [26] GRIGORIENKO J.M., ILIN L.A.: Urawnienija tiejorji tonkich obołoczek w kompleksnoj formie s ucetom tiempicraturnych wozdziejstwij, w zbiorze prac pt. Tiejpłowyje napriazienija w elementach turbomaszyn, Kijew 1962.
- [27] CZERNYCH K.F.: Zadacza Sen-Venana dla tonkostiennych trub s krugowoj os'ju, Prikl. Mat. Mech., 3, 24(1960), 423.
- [28] CZERNYCH K.F., SZAMINA W.A.: Rasczot toroobraznych obołoczek, Issled. po upr. i płast., 2, 1963, 247.
- [29] ESTEIN M.I.: Rasczot cylindriczeskoj obołoczki zakreplennoj po kosomu konturu, Izv. AN SSSR OTN, 2, 1959, 151.
- [30] KACZANOW L.M.: a) O płasticzeskom izgibie kriwych tonkostiennych trub, Izv. AN SSSR OTN, 5, 1957, 42. b) Tiejorja połzuczestii, Moskwa 1960.
- [31] KABLERSZTEIN A.G.: a) Gipkost' i napražennoje sostojanije kolen pri samokompensacii temperaturnych dieformacii w turboprowodach, Str. Trub., 5, 4(1959), 7. b) Issledowanije dieformatiwnosti i niesuszczej sposobnosti swarnych kolen, Str. Trub., 3, 9(1964), 10.
- [32] KOSTOWIECKI D.L.: a) Ob izgibie kriwoj tonkostiennoj truby, sieczenije kotoroj imiejat formu, bliskuju k krugowoj, pri naliczii wnutriennogo ili narużnogo dawlenija, Izv. AN SSSR OTN, Mech. Masz. 6, 1959, 127. b) Izgibkriwych tonkostiennych trub w obłasti bolszych uprugich pieriemieszczienij, Izv. AN SSSR OTN, Mech. Masz., 3, 1960, 49. c) Ob ustojczywosti rawnowiesija kriwoj tonkostiennoj truby krugogo sieczenija, nagrażennoj narużnym dawlenijem, Izv. AN SSSR OTN, Mech. Masz., 1, 1961, 177.
- [33] MAJZEL W.M.: Tiejpiertaturnaja zadacza tiejorji uprugosti, Kijew 1951.
- [34] NOSOWA L.N., TUMARKIN S.A.: Tablicy obobszczonnych funkcii Ejri dla assimptoticzeskogo reszenija differencjalnych urawnienij  $\epsilon(py)'+(q+\epsilon r)y=f$ , Moskwa 1961.
- [35] NOWOŻILOW W.W.: Tiejorja tonkich obołoczek, Sudpromgiz, 1962.
- [36] OSIPOWA L.I., TUMARKIN S.A.: Tablicy dla rasczota toroobraznych obołoczek, Moskwa 1963.
- [37] TUMARKIN S.A.: Assimptoticzeskoje reszenije liniejnogo nieodnorodnogo differencjalnogo urawnienija wtorigo poriadka s pieriechodnoj toczkoj i jego priłożenija k rasczotam toroobraznych obołoczek i łopastiej, Prikl. Mat. Mech., 6, 23(1959), 1083.

- [38] TURKIN W.S.: Izgib trub w uprugo-plasticzeskoj stadii, Str. Trub., 3, 5(1960), 3.
- [39] SKWORCOW A.A.: Kompensacjonnyje ustrojstwa tieplofikacjonnych truboprowodow, Gosenergoizdat 1961.
- [40] WŁASOW W.Z.: Niekotoryje zadaczi soprotiwlenja matieriałow stroitielnoj mechaniki i tieorii uprogosti, Izv. AN SSSR, 9, 1950, 1267.
- [41] KANTOROWICZ L.W., KRYŁOW W.I.: Priblizennyje metody wysszego analiza, Moskwa 1962.
- [42] LECHNICKI S.G.: Anizotropnyje płastinki, Moskwa 1957.



## STRESZCZENIE

### Rozdz. I

Przytoczone tutaj rozważania odnoszą się do teorii powłok ortotropowych, w której związek między siłami wewnętrznymi a składowymi stanu odkształcenia może być przyjęty w postaci zależności (5.1). Występujące w równaniach (5.1) sztywności określone są równaniami (5.2). W pracy zakłada się ważność związków (3.1), wyprowadzonych przez W.W. NOWOZIŁOWA dla powłok izotropowych. Równania równowagi przyjmuje się za A.E.H. LOVE'EM zgodnie z zależnościami (4.1). Następnie korzystając z analogii statyczno-geometrycznej A.L. GOLDENWEIZERA, wprowadza się formalnie określone siły zespolone i zespolone sprężone (6.3) - tutaj odpowiednio uogólnione - tak iż otrzymuje się końcowe równania (6.4) - (6.7) zapisane w siłach zespolonych. W równaniach tych uwzględnia się wpływy termiczne, przy założeniu liniowej zmiany temperatury wzdłuż normalnej do powłoki, (rów. (2.1)). Przyjmuje się również, że przepływ ciepła jest ustalony.

W pracy rozważa się dwie grupy układów równań: pierwsza, dla której słuszne są przybliżone równości (7.1), druga, w której dodatkowo zachodzi równość (7.5).

Realizując konsekwentnie odrzucanie małych członów otrzymano pewien prostszy wariant równań teorii powłok izotropowych (7.9), (7.11).

W punkcie 8 rozpatrzono powłoki obrotowe a jako szczególny przypadek otrzymano stan wprowadzony przez E. REISSNERA.

W każdym konkretnym przypadku ortotropii należy zbadać pomocnicze funkcje, zestawione w tablicy 1 i odrzucić te, które czynią zadość relacjom (7.1) lub (7.5), otrzymując w ten sposób uproszczenia podstawowego układu równań. W charakterze przykładu rozpatrzono taką analizę dla powłoki toroidalnej (por., [2a]) pracującej w stanie quasi osiowo-symetrycznym.

Niniejsza praca ma na celu podanie równań, przy pomocy których można by było rozwiązywać zagadnienia, podobne jak np. w [2a,b] lecz dla dowolnych stanów naprężania. Przytoczone równania ważne są również dla powłok uźebrowanych (rys. 3a') lub dla powłok posiadających ortotropię naturalną. Istnieje również możliwość rozwiązywania przy pomocy tych równań powłok o zmiennej grubości (rys. 3a").

## Rozdz. II

Rozdział II stanowi próbę analitycznego obliczenia liczby KÄRMÄNA oraz wielkości naprężeń występujących w zginanym łuku falistym (rys. 5). Zagadnienie traktuje się ze stanowiska teorii powłok ortotropowych (ortotropia konstrukcyjna), przy czym jako równanie wyjściowe stosuje się uproszczone równania E. REISSNERA. Funkcje ortotropii  $k_1$ ,  $k_2$  przyjmuje się przy założeniu sinusoidalnego pofałdowania powierzchni środkowej łuku, zgodnie z wzorami podanymi w pracy [20]. Powierzchnię środkową łuku traktuje się jako powierzchnię toroidalną. Po szeregu uproszczeń ostateczne postaci funkcji  $k_1$ ,  $k_2$  określone są równaniami (12.9), (12.11). W pracy wykazano, że funkcja  $k_1$  nie ma istotnego wpływu na analizowane zjawisko i może być pominięta w obliczeniach tak, że uproszczone równanie ma ostateczną postać podaną zapisem (10.4). Całkowanie tego równania prowadzi do nieskończonego układu równań liniowych (14.12), z których po rozwiązaniu otrzymujemy liczbę KÄRMÄNA oraz współczynniki  $\tilde{\delta}_n$  szeregów sił wewnętrznych (16.1). Pewną orientację w zbieżności szeregów w przypadku gdy  $H_z = 0$  daje rys. 10.

## Rozdz. III

W rozdziale tym podano przybliżony sposób rozwiązania zagadnienia zginanie łuków segmentowych. Zagadnienie rozwiązano przyjmując, że liczba segmentów powinna być większa lub równa dwa. Przyjęto również ortotropię konstrukcyjną oraz zgodnie z wynikami rozdz. I i II, pominięto wielkości wewnętrzne  $Q$ ,  $N_1$ ,  $M_2$ ; założono również, że  $1 + \lambda \cos \varphi \approx 1$ . Przyjęto dalej, iż łuk poddany jest działaniu momentu zginającego.

Punktem wyjściowym są równania stanu quasi osiowo-symetrycznego, które dla rozpatrywanego przypadku przyjmują postać układu (21.1). Z funkcji ortotropii wyraźnie różniącą się od jedności jest funkcja  $k_{1z}$  (20.2), którą po uproszczeniu przedstawić możemy przy pomocy zależności (20.11). Występujące w tej ostatniej zależności parametry  $q_0$ ,  $q_2$ , ... obliczamy z wykresu podanego na rys. 13, dla uprzednio obliczonej wartości  $p^*$  - row. (20.10)<sup>3</sup>. Podstawowe równania, z których obliczamy współczynniki szeregu naprężeń (21.5), to równania (21.8), (21.11). Liczbę KÄRMÄNA oblicza się z równania (21.12).

## Rozdz. IV

Rozdział IV zawiera przykłady liczbowe ilustrujące sposób obliczeń takich łuków. Podano tutaj cały tok numerycznych obliczeń (zastosowany w tablicach) i przytoczono wykresy naprężeń południkowych i równoleżnikowych oraz naprężeń zredukowanych. Przykłady konfrontuje się z badaniami doświadczalnymi.

SKŁOWIDZ NAZWISK

(liczby oznaczają stronicę)

Akselrad E.L., 4, 84.  
Ambarcumian S.A., 7, 18, 84.  
Andrejewa L.E., 4, 84.

Bantlin A., 3, 83.  
Betti B., 15, 17.  
Birger I.A., 7, 84.  
Borkowski S., 83.  
Bourdon, 4.  
Bułgakow W.I., 5, 84.

Clark R.A., 4, 38, 83.  
Codazzi D., 26.  
Cope E.P., 5, 65, 69, 83.  
Czernych K.F., 4, 5, 85.

Donnell L.H., 39, 83.  
Dunn M.B., 4, 84.

Estrin M.I., 4, 85.

Fieodos'jew W.I., 4.  
Fourier F.M.C., 44, 56.  
Ford J.H., 3, 83.

Gauss K.r., 26.  
Geldenweizer A.L., 10, 85, 87.  
Griżorienko J.M., 7, 85.  
Gros N., 83.

Hooke R., 6, 9, 13.

Huber M.T., 7, 65, 83.

Ilin L.A., 7, 85.

Janusz M., 2.

Kaczanow L.M., 5, 85.

Kafka P.G., 4, 84.

Kamersztein A.G., 3, 5, 77, 85.

Kármán T., 3, 5, 38, 46, 47, 51, 62, 64, 65, 69, 78, 79, 82,  
84, 88.

Kantorowicz L.W., 86.

Kirchhoff G.R., 7, 22, 81.

Kostowiecki D.L., 4, 85.

Kryłow W.I., 86.

Love A.E.H., 11, 22, 84, 87.

Lechnicki S.G., 7, 86.

Maizel W.M., 85.

Meissner E., 35.

Naleszkiewicz J., 2.

Nosowa L.N., 4, 85.

Nowacki W., 84.

Nowiński J., 5, 84.

Nowożyłow W.W., 5, 7, 8, 16, 18, 19, 25, 77, 85, 87.

Olesiak Z., 2, 4, 84.

Osipowa L.I., 4, 85.

Poisson S., 7, 81.

Rayleigh J.W., 3.

Reissner E., 4, 7, 35, 38, 83, 84, 87, 88.

Reissner H., 35.

Ritz W., 3.

Skworcow A.A., 5, 69, 71, 75, 86.

Sokółowski M., 7, 84.

Stănescu K., 18, 85.

Szamina W.A., 5, 85.

Tumarkin S.A., 4, 85.

Timoshenko S., 7, 84.

Turkin W.S., 5, 86.

Turner C.E., 3, 83.

Visarion W., 18, 85.

Wert E.A., 5, 65, 69, 83.

Własow W.Z., 7, 86.

Woinowsky-Krieger S., 7, 84.

Young T., 7, 16, 81.





ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty  
serii B:

- Budownictwo z. 1, 1956 r., s. 84, zł 13,50
- Budownictwo z. 2, 1967 r., s. 75, zł 14,25
- Budownictwo z. 3, 1960 r., s. 104, zł 28,50
- Budownictwo z. 4, 1961 r., s. 107, zł 18,75
- Budownictwo z. 5, 1962 r., s. 156, zł 12,90
- Budownictwo z. 6, 1962 r., s. 111, zł 8,90
- Budownictwo z. 7, 1961 r., s. 118, zł 9,20
- Budownictwo z. 8, 1962 r., s. 86, zł 6,25
- Budownictwo z. S, 1962 r., s. 128, zł 8,85
- Budownictwo z. 9, 1963 r., s. 80, zł 4,40
- Budownictwo z. 10, 1964 r., s. 81, zł 6,—
- Budownictwo z. 11, 1964 r., s. 78, zł 5,85
- Budownictwo z. 12, 1964 r., s. 90, zł 6,90
- Budownictwo z. 13, 1964 r., s. 143, zł 6,25
- Budownictwo z. 14, 1964 r., s. 262, zł 16,25
- Budownictwo z. 15, 1965 r., s. 111, zł 10,—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
Politechniki Śląskiej

P 3343)65

Cena zł 5,40