ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: AUTOMATYKA z. 15 Nr kol. 287

ADAM MACURA

Katedra Informatyki

ZASTOSOWANIE TEORII NIELINIOWYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH DO ZAGADNIENIA ROZDZIAŁU ŚRODKÓW W SIATKACH CZYNNOŚCI

Streszczenie. W pracy wykazano, że w siatkach czynności, w których zależność między natężeniem środka realizacji czynności y_k a czasem trwania czynności τ_k ma charakter $y_k = a_k \tau_k^n$ minimum ilości środka koniecznego do realizacji przedsięwzięcia w ustalonym czasie T otrzymuje się wtedy, gdy natężenia środka spełniają I prawo Kirchhoffa.

Przedstawiono analogię jaka istnieje między siatkami czynności a nieliniowymi obwodami elektrycznymi. Analogia ta umożliwia stosowanie przy analizie siatek czynności niektórych metod stosowanych w teorii nieliniowych obwodów elektrycznych, a w szczególności metod umożliwiających otrzymanie optymalnych rozkładów natężeń środków realizacji. Szereg twierdzeń pozwala na wnioski o charakterze ogólnym dotyczących np. związku między czasem trwania przedsięwzięcia i ilością środków realizacji, wpływem czasów zapasu na ilość środków realizacji itp.

1. Wstęp

Przy planowaniu przedsięwzięć pojawia się problem optymalizacji przedsięwzięcia z określonego punktu widzenia. Celem optymalizacji mogą być np. najkrótszy czas realizacji przedsięwzięcia T lub minimalny koszt realizacji przedsięwzięcia K, względnie bardziej złożone funkcje celu.

Zmiennymi od których zależy funkcja celu mogą być m.in. środki finansowe, materiałowe, produkcyjne i ludzkie przeznaczone do realizacji projektu.

Zadanie optymalizacji sprowadza się do określenia ekstremum funkcji celu. Ograniczymy się tu do rozpatrywania zagadnień optymalizacji funkcji celu, zależnej jedynie od tzw. środków realizacji oraz od czasu realizacji.

Ilością środka realizacji Q nazwiemy ogólnie ilość środków o charakterze środków finansowych, materiałowych, produkcyjnych wzgl. ludzkich. Wielkość Q ma zatem charakter ilości pewnego czynnika koniecznego do realizacji danego przedsięwzięcia (mierzonego np. w złotych, tonach, ilości maszyn lub ilości pracowniko-godzin).

Natężeniem środka y nazwiemy stosunek ilości środków realizacji Q do czasu w którym środki te były stosowane

$$y = \frac{Q}{t} \tag{1}$$

Jeżeli dane przedsięwzięcie można podzielić na przedsięwzięcia prostsze - tzw. czynności, to przyjmiemy w dalszym ciągu, że każdej k-tej czynności odpowiada pewna ilość środków realizacji Q_k, pewien czas realizacji $\tau_k = t_i - t_j$ (przy czym t_i - początek realizacji danej czynności, t_j koniec realizacji danej czynności), pewne natężenie środka y_k.

Między tymi wielkościami zachodzą związki, które w przypadku stałego natężenia środków w czasie realizacji danej czynności przybierają postać:

$$y_k = \frac{Q_k}{\tau_k} \tag{2}$$

oraz

$$Q_k = y_k \tau_k \tag{3}$$

Poza tym istnieje określona zależność między czasem trwania danej czynności τ_k a nastężeniem środka realizacji:

$$y_k = f_k(\tau_k) \tag{4}$$

Zależność ta którą nazwiemy krótko charakterystyką danej czynności może być podana graficznie lub analitycznie. Charakteryzuje ona zależność natężenia środka realizacji konieczną do wykonania danej czynności w czasie τ_k od tegoż czasu. Z (3) oraz (4) wynika, że

$$Q_k = \tau_k f_k(\tau_k) \tag{5}$$

Na podstawie powyższych określeń można stwiedzić, że dana czynność może być określona jednoznacznie albo zależnością natężenia środka y_k od czasu realizacji τ_k (4) albo zależnością ilości środka realizacji Q_k od czasu realizacji τ_k (5).

Całe przedsięwzięcie składające się z g-1 czynności będzie zatem wymagało ilości środków realizacji[x)]

$$Q = \sum_{k=1}^{g-1} Q_k = \sum_{k=1}^{g-1} \tau_k f_k(\tau_k). \tag{6}$$

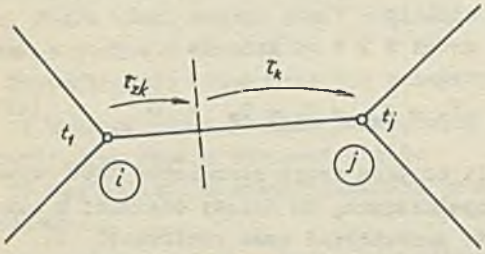
Dla określenia czasu realizacji przedsięwzięcia

$$T = T(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_{g-1}) \tag{7}$$

x) Ograniczamy się tu do przypadku w którym wszystkie środki realizacji są tego samego rodzaju.

szeroko stosowane są metody analizy drogi krytycznej pozwalające na określenie minimalnego czasu trwania przedsięwzięcia na podstawie znajomości czasu trwania poszczególnych czynności i określonego uwarunkowania jednych czynności od drugich. Uwarunkowanie to podawane jest zazwyczaj w postaci grafu - tzw. siatki czynności.

Przykład prostej siatki przedstawiono na rys. 2a, gdzie droga krytyczna oznaczona jest grubszą linią,



Rys. 1

W wyniku analizy siatki czynności (grafu) metodą drogi krytycznej mogą się pojawić w poszczególnych zdarzeniach (węzłach grafu) tzw. czasy zapasu. Dla dalszych rozważań stosować będziemy pojęcia tzw. niezależnego czasu zapasu i będziemy czasy zapasu przyporządkowali odpowiednim czynnościom (gałęziom grafu) a nie zdarzeniom[x]. Jeżeli zatem w węźle "i" istniał czas zapasu, to można przyporządkować go np. k-tej gałęzi wychodzącej z tegoż węzła (rys. 1) przy czym

$$t_j - t_i = \tau_k + \tau_{zk} \tag{8}$$

Celem uproszczenia dalszych rozważań wprowadzimy dla czasów realizacji i niezależnych czasów zapasu strzałki (analogicznie do strzałek napięcia w obwodach elektrycznych), przy czym strzałka posiada swój początek w zdarzeniu poprzedzającym a koniec (grot strzałki) w zdarzeniu następującym (rys. 1).

Jeżeli niezależne czasy zapasu zostały w odpowiedni sposób przyporządkowane czynnościom, to można każdemu zdarzeniu (węzłowi) "i" przyporządkować jeden czas t_i. Można też stwierdzić, że wzdłuż jakiejkolwiek drogi w siatce od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego - suma czasów realizacji czynności τ_c i niezależnych czasów zapasu τ_{zk} musi być zawsze równa czasowi realizacji przedsięwzięcia T.

Wprowadźmy do siatki czynności dodatkową czynność uzupełniającą g, łączącą zdarzenie początkowe ze zdarzeniem końcowym. Czynności tej przypisujemy czas T.

---

x) Przyporządkowanie niezależnych czasów zapasu czynnościom na ogół nie jest jednoznaczne, to znaczy w danej sieci można rozdzielić zapasy czynności w różny sposób pomiędzy jej czynności. W niniejszej pracy fakt ten nie ma jednak znaczenia, gdyż optymalizacja prowadzi na ogół do zupełnego wyeliminowania czasów zapasu.

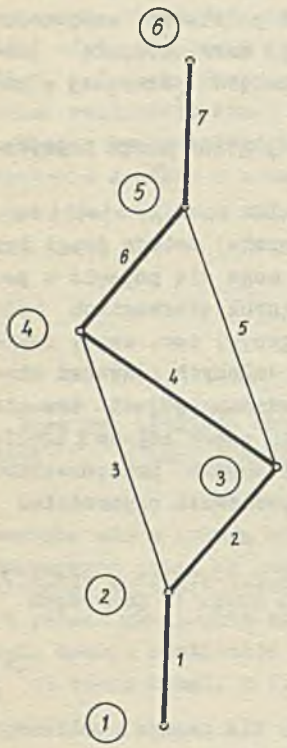
W takiej sieci można stwierdzić, że suma czasów realizacji i niezależnych czasów zapasu wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej w siatce musi być zawsze równa zeru:

$$\sum_{o} (\tau_k, \tau_{zk}) = 0 \tag{9}$$

gdzie symbol $\sum_{o}$ oznacza sumowanie wzdłuż zamkniętej drogi z uwzględnieniem kierunku strzałek).

Np. dla drogi 2 3 4 na rys. 2a

$$\tau_3 + \tau_{z3} - \tau_4 - \tau_2 = 0 \tag{10}$$



Rys. 2a

Jeżeli częścią drogi zamkniętej jest czynność uzupełniająca, to należy dla niej w równaniu (9) przewidzieć czas realizacji T.

Równania typu (9) będziemy w dalszym ciągu nazywali równaniami II prawa Kirchhoffa z uwagi na analogię z obwodami elektrycznymi.

Jeżeli przyjmiemy dla dalszych rozważań, że możliwość zmiany rozdziału ilości środków pomiędzy poszczególne czynności występuje tylko w określonych czasach t_i odpowiadających zdarzeniom (natężenie środka jest więc stałe w czasie realizacji każdej z czynności), to okaże się że istnienie niezależnego czasu zapasu w czynności prowadzi do strat Q_{zk} z powodu niewykorzystania środka:

$$Q_{zk} = \tau_{zk} y_k \tag{11}$$

podczas gdy użyteczne środki Q_k wynoszą:

$$Q_k = \tau_k y_k \tag{12}$$

Razem na wykonanie k-tej czynności trzeba więc przewidzieć środki w ilości

$$Q_{sk} = Q_{zk} + Q_k \tag{13}$$

Na całe przedsięwzięcia zatem potrzeba

$$Q_s = \sum_{k=1}^{g-1} Q_{sk} = \sum_{k=1}^{g-1} Q_{zk} + \sum_{k=1}^{g-1} Q_k \tag{14}$$

Z różnych przesłanek (zależnych od charakteru środka) wynika celowość utrzymania dla danego przedsięwzięcia $y = const$ w czasie trwania przedsięwzięcia (np. stała ilość pracowników pracująca w czasie przedsięwzięcia, stała ilość maszyn itp.) względnie założnie określonego przebiegu natężenia środka w czasie.

Optymalizacja sieci może być przeprowadzona jako:

1) Minimalizacja środków potrzebnych do wykonania przedsięwzięcia przy ograniczonym czasie wykonania, albo

2) Minimalizacja czasu wykonania przedsięwzięcia przy ograniczonych środkach.

Zagadnienie pierwsze można sformułować jak następuje:
Przy założeniu że:

1) przedsięwzięcie składa się z g czynności uwarunkowanych wzajemnie według danej siatki czynności,

2) każda czynność określona jest przez jej charakterystykę

$$y_k = f_k(\tau_k)$$

3) natężenie środka realizacji danej czynności jest stałe w czasie jej trwania

$$y_k = const \quad dla \quad t_i < t < t_j$$

gdzie t_i czas rozpoczęcia czynności, t_j czas ukończenia czynności,

4) natężenie środka realizacji całego przedsięwzięcia jest stałe w czasie jego trwania

$$y_z = const \quad dla \quad 0 < t < T$$

5) czas realizacji jest ograniczony

$$T \leqslant T_M$$

znaleźć minimalną ilość środków Q_m dla realizacji przedsięwzięcia.

Zagadnienie drugie można sformułować następująco:

Przy założeniach 1-4 znaleźć dla ograniczonej z góry ilości środków

$$Q \leqslant Q_m$$

minimalny czas realizacji projektu.

Rozwiązywanie powyższych zagadnień przeprowadzone jest w literaturze różnymi metodami [1] - [5].

W poniższej pracy do zagadnienia tego zastosowano analogię między siatkami czynności, a nieliniowymi obwodami elektrycznymi.

2. Analogia między siatkami czynności a nieliniowymi obwodami

Jeżeli jest dana siatka czynności w której wyznaczono drogę krytyczną oraz określono wszystkie niezależne czasy zapasu oraz przyporządkowano je odpowiednim czynnościom, to można siatce tej przyporządkować obwód elektryczny stosując następujące analogie:

czas t_i $\hat{=}$ potencjał V_i

różnica czasów $\tau_k = t_i - t_j$ $\hat{=}$ różnicy potencjałów $V_i - V_j$
czyli napięciu $U_k = V_i - V_j$

natężenie środków y_k $\hat{=}$ natężenie prądu J_k

ilość środków Q_k $\hat{=}$ moc P_k

czas zapasu niezależny τ_{zk} $\hat{=}$ siła elektromotoryczna E_{zk}

czas wykonania przedsięwzięcia T = siła elektromotoryczna zasilająca obwód E

Dla celów niniejszej pracy można przyjąć współczynniki skalowe równe jedności, wtedy z pominięciem wymiarów można napisać

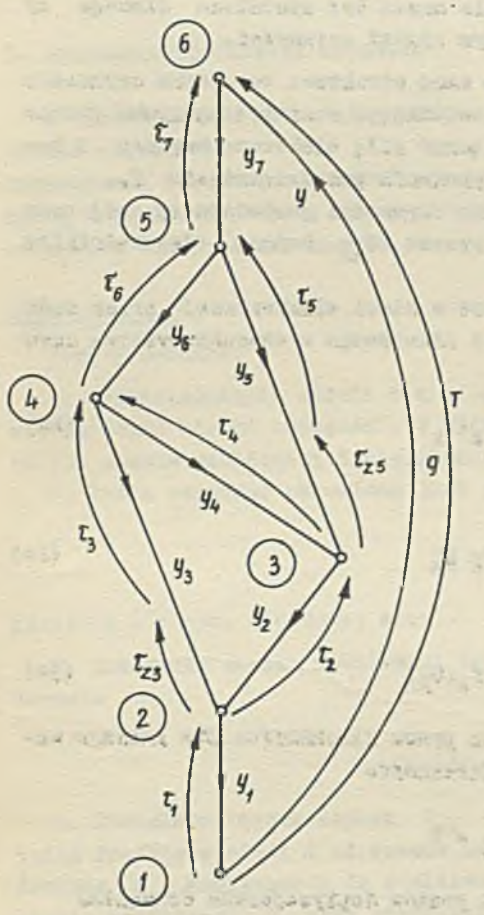
$$t_i = V_i$$

$$\tau_k = t_i - t_j = V_i - V_j = U_k$$

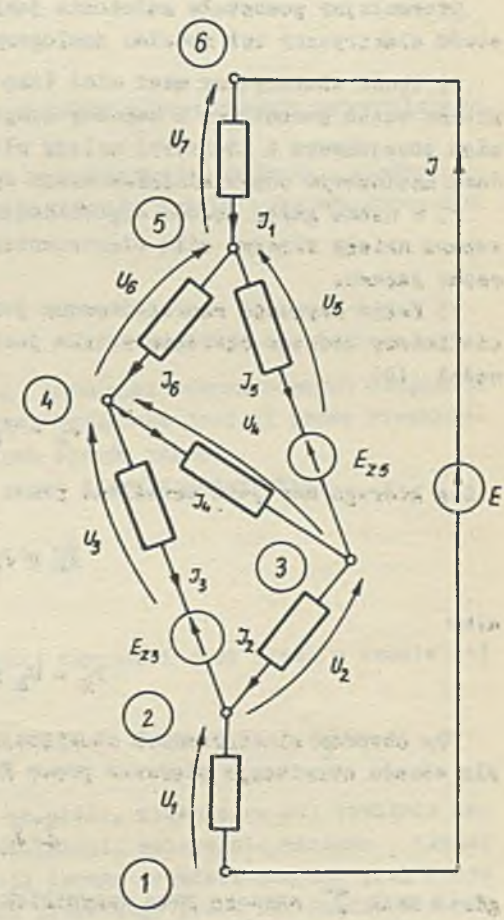
$$y_k = J_k$$

$$Q_k = P_k$$

$$\tau_{zk} = E_{zk}$$


6
5
4
3
2
1
τ_7
y_7
y
τ_6
y_6
τ_5
y_5
τ_4
τ_{z5}
y_4
τ_3
y_3
y_2
τ_2
τ_{z3}
τ_1
y_1
T
g

Rys. 2b


6
5
4
3
2
1
U_7
J
J_1
U_6
U_5
J_6
J_5
U_4
E_{z5}
E
J_4
U_3
J_3
E_{z3}
J_2
U_2
U_1

Rys. 3

Na rys. 2b przedstawiona jest siatka czynności z oznaczoną drogą krytyczną. Odpowiednie czasy zapasu przyporządkowano czynnościom 3 i 5. Na rysunku 3 przedstawiony jest obwód elektryczny będący modelem analogowym siatki czynności.

Sformułujmy pozostałe założenia jakie muszą być spełnione dlatego by obwód elektryczny był modelem analogowym siatki czynności.

1) Obwód elektryczny musi mieć taką samą strukturę co siatka czynności: Między węzeł początkowy i końcowy (odpowiadające w siatce czynności zdarzeniom początkowym i końcowym) należy włączyć siłę elektromotoryczną E będącą analogowym odpowiednikiem czasu wykonania przedsięwzięcia T.

2) W każdą gałąź obwodu odpowiadającą czynności posiadającej swój czas zapasu należy włączyć siłę elektromotoryczną E_{zk} będącą odpowiednikiem czasu zapasu.

3) Każda czynność reprezentowana jest w sieci elektrycznej przez opór nieliniowy którego charakterystyka jest identyczna z charakterystyką czynności (4)

$$J_k = f_k(U_k) \tag{4a}$$

a dla którego moc jest określona przez

$$P_k = J_k U_k \tag{2a}$$

albo

$$P_k = U_k f_k(U_k) \tag{5a}$$

Dla obwodów elektrycznych obowiązują prawa Kirchhoffa. Dla każdego węzła obwodu obowiązuje pierwsze prawo Kirchhoffa

$$\sum J_k = 0$$

gdzie znak $\sum$ oznacza sumę wszystkich prądów dopływających do węzła.

Dla każdego oczka obwodu obowiązuje drugie prawo Kirchhoffa

$$\sum_o (U_k, E_{zk}) = 0$$

gdzie znak $\sum_o$ oznacza sumę wszystkich napięć (w tym również sił elektromotorycznych) w zamkniętym oczku.

O ile konieczność spełnienia drugiego prawa Kirchhoffa również i w siatce czynności (z uwzględnieniem oczywiście czasów zapasu) nie budzi wątpliwości, wymagając jedynie przyjęcia odpowiedniej konwencji strzałkowania czasów τ_k, to konieczność spełnienia pierwszego prawa Kirchhoffa

w siatce czynności dla natężeń środków nie jest tak oczywista. Można jednak wykazać, (patrz rozdz. 3) że w określonych przypadkach spełnienie pierwszego prawa Kirchhoffa w siatce czynności może dać pewne korzyści przy rozpatrywaniu zagadnień optymalizacji siatek czynności.

3. Optymalizacja siatek czynności

W tym rozdziale udowodnimy kilka twierdzeń ułatwiających optymalizację siatek czynności.
Twierdzenia te, łatwe do intuicyjnego zrozumienia w obwodach elektrycznych, mogą być najlepiej wyprowadzone w oparciu o opis siatek czynności za pomocą obu praw Kirchhoffa.

Twierdzenie 1

Przy założeniu:

1. Przedsięwzięcie składa się z g czynności uwarunkowanych wzajemnie według danej siatki czynności, w której spełnione jest II prawo Kirchhoffa dla czasów realizacji i niezależnych czasów zapasu.
2. Każda czynność określona jest przez jej charakterystykę

$$y_k = a_k \tau_k^n$$

gdzie n = const. dla danej sieci.

3. Natężenie środka realizacji danej czynności jest stałe w czasie jej trwania

$$y_k = \text{const} \qquad \text{dla} \quad t_i < t < t_j$$

4. Niezależne czasy zapasu τ_{zk} są stałe, niezależne od rozkładu natężeń środków w sieci i od czasów realizacji, osiąga się minimum ilości środków Q_m koniecznych do realizacji danego przedsięwzięcia przy danym czasie realizacji T przy spełnieniu pierwszego prawa Kirchhoffa dla natężeń środków w każdym zdarzeniu (węźle sieci) oraz drugiego prawa Kirchhoffa dla czasów realizacji i niezależnych czasów zapasu dla każdej zamkniętej drogi w sieci (dla każdego oczka sieci).

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadzić można przy użyciu pewnych związków znanych w teorii obwodów elektrycznych.

Dla siatki, uzupełnionej czynnością łączącą zdarzenie początkowe ze zdarzeniem końcowym, posiadającej g czynności i w zdarzeń można napisać $g - w + 1$ niezależnych równań według drugiego prawa Kirchhoffa.
Przyjmując jedno z możliwych drzew grafu siatki za podstawę, można bo-

wiem utworzyć $g - w + 1$ niezależnych oczek dla których równania drugiego prawa Kirchhoffa można zapisać macierzowo jako

$$\underline{\varphi} = \underline{C}_t(\underline{\tau} + \underline{\tau}_z) = 0$$

gdzie:

$\underline{\varphi} = [\varphi_j]$ - macierz typu $(g - w + 1) \times 1$

$\underline{C} = [\alpha_{ij}]$ - macierz (oczka-gałęzie) typu $g \times (g - w + 1)$

$\underline{\tau} = [\tau_j]$ - macierz czasów realizacji czynności typu $g \times 1$, ostatni z elementów tej macierzy jest równy zeru,

$\underline{\tau}_z = [\tau_{zj}]$ - macierz niezależnych czasów zapasu typu $g \times 1$, ostatni element tej macierzy jest równy czasowi realizacji przedsięwzięcia T.

Wykażemy w jakich warunkach suma środków realizacji poszczególnych czynności r (6)

$$Q = \sum_{k=1}^{g} Q_k = \sum_{k=1}^{g} \tau_k f_k(\tau_k) \tag{6}$$

jest minimalna.

Przy zastosowaniu metody Lagrange'a do obliczania ekstremum funkcji Q jako funkcji g zmiennych τ_k, przy równoczesnym spełnieniu g-w+1 warunków danych równaniem (16) obliczamy ekstremum funkcji

$$\phi = Q - \sum_{j=1}^{g-w+1} \lambda_j \varphi_j \tag{17}$$

Ponieważ dotychczas nie poczyniono żadnych założeń dotyczących związków między natężeniami środków, można zamiast współczynników λ_j przyjąć g-w+1 natężeń środków y_{oj} w gałęziach łączących grafu czynnościach nie należących do wybranego drzewa) pomnożonych przez stałą liczbę $b \neq 0$

$$\lambda_j = b\, y_{oj} \tag{18}$$

Założenie takie jest dopuszczalne, gdyż w każdej siatce można przyjąć g-w+1 niezależnych natężeń środków gałęzi łączących [6][7].

Przyrównując pochodne cząstkowe funkcji ϕ względem poszczególnych czasów τ_k do zera otrzyma się jako warunek ekstremum funkcji ϕ, g-w+1 równań typu

$$\frac{\partial Q_k}{\partial k} = \sum_{j=1}^{g-w+1} b\, y_{oj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau_k} \tag{19}$$

Po uwzględnieniu równań (16) otrzymamy stąd macierzowo

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \tau} = b\, \underline{C}\, \underline{y}_o \tag{20}$$

gdzie

$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial Q_k}{\partial \tau_k}\right]$ – macierz typu $g \times 1$

$\underline{y}_o = \left[y_{oj}\right]$ – macierz natężeń środka w gałęziach łączących typu $g-w+1)x1$

Jeżeli w siatce tej ma być spełnione pierwsze prawo Kirchhoffa, to musi być [6][7]:

$$\underline{y} = \underline{C}\, \underline{y}_o \tag{21}$$

z porównania 21 z 20 otrzymuje się

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \tau} = b\, \underline{y} \tag{22}$$

Równanie macierzowe (22) równoważne jest g równaniom typu

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \tau_k} = b\, y_k$$

albo po rozwinięciu lewej strony wg wzoru (12)

$$y_k + \frac{dy_k}{d\tau_k}\tau_k = b\, y_k \tag{23}$$

stąd po rozwiązaniu otrzyma się

$$y_k = a_k\, \tau_k^{\,n} \tag{24}$$

gdzie

$$b - 1 = n \qquad n \neq -1$$

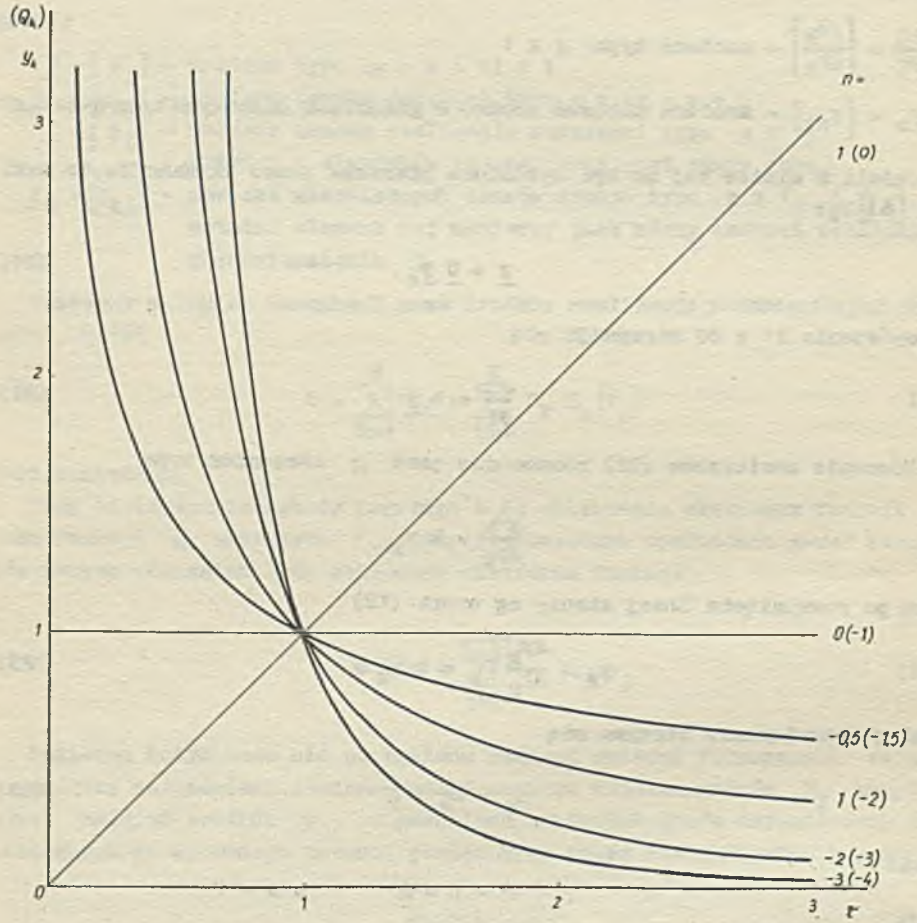
a_k – wartość stała.

Tym samym zostało udowodnione twierdzenie 1.

Jedynym wyjątkiem są tu siatki czynności, w których wszystkie czynności posiadają charakterystyki $y_k = a_k\, \tau_k^{-1}$.

Dla takich czynności ilość środków

$$Q_k = \tau_k\, y_k = a_k = \text{const}$$



Rys. 4

a tym samym ilość środków potrzebnych do realizacji przedsięwzięcia nie zależy od tego czy I prawo Kirchhoffa jest spełnione czy nie. Tym niemniej spełnienie I prawa Kirchhoffa daje w tym przypadku wynik, który może mieć wartość praktyczną, a poza tym umożliwia stosowanie do obliczeń metod stosowanych w analizie obwodów nieliniowych oraz następnych twierdzeń.

Interesującym jest fakt, że warunek minimum mocy jest równoważny warunkom I prawa Kirchhoffa tylko dla siatek składających się z czynności o charakterystykach czynności tego samego rodzaju opisanych równaniem (24)(przy czym a_k może być dowolne). W tych przypadkach zależność ilości środka realizacji Q_k od czasu realizacji τ_k wyraża się równaniem

$$Q_k = a_k \tau_k^{n+1} \tag{25}$$

Na rys. 4 przedstawione są typowe przykłady funkcji y_k i Q_k (wartości dla Q_k w nawiasach) dla różnych n. Dla $n = -1$ $Q_k = a_k$ =const, czyli ilość środka konieczna dla realizacji czynności jest niezależna od czasu jej trwania. Dla $n < -1$ ilość środka konieczna do realizacji danej czynności jest malejącą funkcją jej czasu trwania. Oba przypadki są często spotykane w zagadnieniach praktycznych.

Twierdzenie 2

W siatce czynności, w której spełnione są oba prawa Kirchhoffa, ilość środków konieczna do realizacji przedsięwzięcia może być obliczona jako iloczyn czasu trwania przedsięwzięcia T i natężenie środków y_g (przyporządkowanych gałęzi dodatkowej łączącej zdarzenie początkowe z końcowym),

$$Q_s = T\, y_g \tag{26}$$

ilość ta jest równa sumie ilości środków koniecznych do realizacji wszystkich $g - 1$ czynności oraz ilości środków niewykorzystanych w czasach zapasu:

$$Q_s = \sum_{k=1}^{g-1} Q_{zk} + \sum_{k=1}^{g-1} Q_k \tag{27}$$

Twierdzenie 3

Dla sieci spełniającej oba prawa Kirchhoffa, której elementy mają równania $y_k = a_k \tau_k^n$, przy czym $n < 0$, minimum ilości środka dostarczonej przez źródło występuje przy czasach zapasu równych zeru.

Dowód:

Niech dana będzie siatka czynności spełniająca jedynie II prawo Kirchhoffa, w której istnieją czasy zapasu. Zmniejszając w każdej gałęzi cza-

sy zapasu τ_{zk} do zera przy równoczesnym wydłużeniu czasów trwania czynności τ_k, ale przy zachowaniu warunku $\tau_{ks} = \tau_{zk} + \tau_k = const$ dla danej czynności, otrzymamy nową siatkę spełniającą nadal II prawo Kirchhoffa, ale wymagającą mniejszej ilości środków niż poprzednia siatka. Dla każdej czynności mamy bowiem:

$$Q_{sk} = Q_k + Q_{zk} = (\tau_{zk} + \tau_k)\, y_k = \tau_{ks}\, a_k (\tau_{ks} - \tau_{zk})^n \tag{28}$$

funkcja $Q_{sk} = Q_{sk}(\tau_{zk})$ jest w przedziale $0 < \tau_{zk} < \tau_{ks}$ dla $n < 0$ rosnącą funkcją τ_{zk}, przyjmuje zatem najmniejszą swoją wartość dla $\tau_{zk} = 0$, zatem dla całej siatki czynności

$$Q = \sum_{k=1}^{g} Q_k$$

osiąga najmniejszą wartość dla wszystkich $\tau_{zk} = 0$.

Siatka druga na ogół nie spełnia pierwszego prawa Kirchhoffa. Z uwagi na twierdzenie 1, minimum ilości środków uzyskuje się dla siatki spełniającej również pierwsze prawo Kirchhoffa. Tym samym twierdzenie 2 jest udowodnione.

Z twierdzenia tego wynika wniosek, że optymalna siatka czynności nie powinna posiadać czasów zapasu.

Twierdzenie 4

Jeżeli w sieci zwiększyć wszystkie czasy α krotnie to wszystkie natężenia środków zwiększą się α^n krotnie a ilości środków zwiększą się α^{n+1} krotnie.

Dowód:

Z uwagi na liniowość II prawa Kirchhoffa jest ono ważne również przy pomnożeniu wszystkich napięć przez stały współczynnik α. Dla każdej czynności sieci

$$y_k = a_k \tau_k^n \tag{29}$$

otrzymamy

$$y_k' = a_k (\alpha \tau_k)^n = \alpha^n a_k \tau_k^n = \alpha^n y_k \tag{30}$$

Z uwagi na liniowość pierwszego prawa Kirchhoffa również i pierwsze prawo Kirchhoffa nie zmieni się przy pomnożeniu wszystkich natężeń przez stały współczynnik

$$Q_k' = y_k' \tau_k' = \alpha^{n+1} Q_k \tag{31}$$

W szczególności wynika z tego twierdzenia wniosek, że dla sieci bez czasów zapasu α-krotne zwiększenie czasu trwania przedsięwzięcia T prowadzi do α^n krotnego zwiększenia natężeń środków i do α^{n+1} krotnego zwiększenia ilości środków.

Przedstawiona metoda optymalizacji siatek czynności może być stosowana praktycznie przy wykorzystaniu metod znanych do obliczenia nieliniowych sieci elektrycznych i rurociągowych na maszynach cyfrowych. Konieczna jest jedynie modyfikacja tych metod celem umożliwienia stosowania ujemnych wartości dla n. W szczególności nadają się tu metody stosowane przy obliczaniu sieci wentylacyjnych i rurociągowych [8], po przeprowadzeniu niewielkich modyfikacji.

LITERATURA

[1] Зуховицкий С.Н. Радчик И.А. - Математические методы сетевого планирования. Изд-во Наука 1965.

[2] Бурков В.Н. Ловецкий С.Е - Эвристический подход к решению динамических задач распределения ресурсов. Автоматика и Телемеханика T XXVI N° 12, 1965.

[3] Разумихин Б.С. - Задача об оптимальном распределении ресурсов. Автоматика и Телемеханика T XXVI N° 7, 1965.

[4] Зоронов А.А. Петрушинин Е.П. - Решение задачи оптимального распределения ресурсов методом квадратичного программирования. Автоматика и Телемеханика T XXVII N° 11, 1966.

[5] Петрушинин Е.П. - Метод Лагранжа и задачи оптимального распределения ресурсов в системах сетевого планирования. Автоматика и Телемеханика T XXVII N° 12, 1966.

[6] Edelmann H. - Berechnung elektrischer Verbundnetze Springer-Verlag Berlin, 1963.

[7] Cholewicki T. - Macierze w technice w książce Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów PWN Warszawa, 1964.

[8] Maassen F. - Wetterrechnung auf einem Digitalrechner. Bergbauwissenschaften 1962, No 8.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 30.VI.1969 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ

Резюме

Рассматривается задача об оптимальном распределении ресурсов при зависимости количества ресурсов y_k от времени выполнения операций τ_k типа $y_k = a_k \tau_k^n$.

Представляется метод электрической аналогии и некоторые теоремы касающиеся зависимости между временем выполнения комплекса и об'емом комплекса, влияния резерв времени на об'ем комплекса и т.п.

THE APPLICATION OF NONLINEAR CIRCUIT
THEORY TO RESOURCE ALLOCATION

Summary

The problem of optimal resource allocation over a set of operations in network planning is considered by means of nonlinear electric circuit theory. The relation between resources y_k and time τ_k of the type $y_k = a_k \tau_k^n$ is assumed for each operation. Theorems concerning the relations between project time and resources are given.