ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: AUTOMATYKA z. 15 Nr kol. 287

FERDYNAND WAGNER

Katedra Automatyzacji
Procesów Przemysłowych

MINIMALIZACJA PEWNEJ KLASY FUNKCJI LOGICZNYCH ZA POMOCĄ ZMODYFIKOWANYCH TABLIC KARNAUGH'A

Streszczenie. Określono budowę tablicy funkcji logicznej, którą nazwano zmodyfikowaną tablicą Karnaugh'a oraz klasę funkcji logicznych, które można tą tablicą opisać. Podano reguły minimalizacji tych funkcji przy posługiwaniu się zmodyfikowaną tablicą Karnaugha. Zagadnienie zilustrowano dwoma przykładami, potwierdzającymi przydatność metody.

W przypadku syntezy układów logicznych o dużej ilości argumentów występują znaczne trudności rachunkowe przy upraszczaniu funkcji logicznych. Stosowane tutaj metody tablic Karnaugha oraz metoda Quine'a - Mac Cluskey'a posiadają ograniczenia, jeśli chodzi o ilość zmiennych logicznych. Tablice Karnaugh'a stosuje się praktycznie do 6 - 8 zmiennych logicznych. Przy większej ilości zmiennych staje się ona zbyt duża, a więc i nieczytelna, by można było ją wykorzystywać do efektywnego upraszczania funkcji logicznych. Podobnie metodę postępowania przy upraszczaniu funkcji logicznych znaną pod nazwą metody Quine'a - Mc Cluskey'a trudno stosować przy ilości zmiennych logicznych większych od sześciu (zależy to zresztą od ilości składników jedynki funkcji). Przy większej ilości zmiennych metodą Quine'a - Mc Cluskey'a można stosować, ale wykorzystując maszynę cyfrową.

W artykule przedstawiono sposób wykorzystania zmodyfikowanych tablic Karnaugh'a dla upraszczania funkcji logicznej wielu zmiennych w przypadku gdy równoczesne przybieranie wartości 1 pewnej ilości tych zmiennych jest rzeczą niemożliwą (przy dużej ilości stanów obojętnych). Przypadek taki występuje np. przy zadawaniu określonej wielkości liczbowej dziesiętnej przy pomocy wielopozycyjnego przełącznika, wybieraka itp.

Przechodzenie z tak zadawanej wielkości na postać binarną zazwyczaj nie prowadzi do uproszczenia układu, a wręcz przeciwnie, komplikuje go, ze względu na konieczność wprowadzenia odpowiedniego deszyfratora (przetwornika kodu). Natomiast chcąc wykorzystać sygnał w postaci zadawanej napotyka się na trudności z minimalizacją funkcji ze względu na dużą ilość zmiennych logicznych.

Na przykład, zadając przy pomocy przełącznika cyfry dziesiętne od 0 do 9 ma się do wyboru albo przejście z 10 sygnałów na liczbę binarną np. w kodzie dwójkowym prostym i operowanie dalej 4 zmiennymi albo też operowa-

nie 10 zmiennymi. Pierwsze rozwiązanie powoduje rozbudowanie układu, wywołane koniecznością wprowadzenia przetwornika kodu, drugie - stwarza duże trudności przy syntezie układu ze względu na dużą ilość zmiennych.

Zmodyfikowana tablica Karnaugha wygląda tak, jak to przedstawia rysunek 1, na którym przykładowo pokazano tablicę dla 8 zmiennych logicznych, z których pięć oznaczonych symbolami S_1 S_2 ... S_5 nie może występować równocześnie tzn. nie jest możliwe, by

$$S_i = S_j = 1 \quad \text{dla } i \neq j \qquad (1)$$

$x_1 x_2 x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
S_1								
S_2								
S_3								
S_4								
S_5								

Rys. 1. Tablica funkcji logicznej 8 zmiennych

Zmienne te opisują wiersze tabeli. Natomiast pozostałe trzy zmienne x_1, x_2, x_3, na które nie ma narzuconych żadnych warunków, opisują kolumny tabeli przy czym sposób opisu jest analogiczny jak dla tablicy Karnaugha.

Tak zbudowana tabela zachowuje więc właściwości symetrii i sąsiedztwa poszczególnych kratek tabeli charakterystyczne dla tablic Karnaugha jedynie w poziomie. A więc możliwości tworzenia podgrup "jedynkowych" w przypadku korzystania z warunków działania, względnie "zerowych" dla warunków niedziałania pozostają takie jak dla tablicy Karnaugha jedynie w osi poziomej. Natomiast reguły uproszczeń w osi poziomej będą inne. Można je sformułować następująco: wielkość grupy w pionie jest dowolna, a jej oznaczenie równe jest sumie opisujących ją argumentów - dla grup "jedynkowych" lub iloczynowi negacji tych zmiennych - dla grup "zerowych".

W przypadku grup "jedynkowych", nie należy zawsze dążyć do tworzenia możliwie największych grup w pionie, jeżeli prowadzi to do "nakładania" się tych grup na siebie, gdyż w przeciwieństwie do zasad minimalizacji w poziomie (jak dla tablicy Karnaugha) powiększanie grupy w pionie prowadzi do zwiększania ilość argumentów, które je opisują. Chcąc więc otrzymać najprostszą postać należy unikać nakładania się grup w pionie. Wyjątek stanowi tutaj grupa, obejmująca wszystkie zmienne S_i, gdyż wówczas z opisu tej grupy zostają wyeliminowane S_i co wynika z równości

$$S_1 + S_2 + \dots S_n = 1 \qquad (2)$$

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \dots \bar{S}_n = 0 \qquad (3)$$

Natomiast dla innych grup należy pamiętać o obowiązujących tutaj zależnościach

$$S_1 + S_2 + \dots S_{k-1} + S_{k+1} + \dots + S_n = \bar{S}_k$$

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} + S_{k+1} + \dots S_{l-1} + S_{l+1} + \dots S_n = \bar{S}_k \bar{S}_l \tag{4}$$

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} + S_{k+1} \dots + S_{l-1} + S_{l+1} + \dots S_{p-1} +$$

$$+ S_{p+1} + \dots + S_n = \bar{S}_k \bar{S}_l \bar{S}_p \text{ itd.}$$

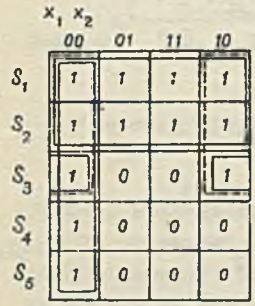
oraz

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \dots \bar{S}_{k-1} \bar{S}_{k+1} + \dots \bar{S}_n = S_k$$

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \dots \bar{S}_{k-1} \bar{S}_{k+1} \dots \bar{S}_{l-1} \bar{S}_{l+1} \dots \bar{S}_n = S_k + S_l \tag{5}$$

$$\bar{S}_1 \bar{S}_2 \dots \bar{S}_{k-1} \bar{S}_{k+1} \dots \bar{S}_{l-1} \bar{S}_{l+1} \dots \bar{S}_{p-1} \bar{S}_{p+1} \dots$$

$$\dots \bar{S}_n = S_k + S_l + S_p \text{ itd.}$$



Rys. 2. Przykład tworzenia grup jedynkowych

Ilustruje to rys. 2.
Prawidłowo utworzone grupy (linie ciągłe) dają postać funkcji:

$$F = (S_1 + S_2) + \bar{X}_1 \bar{X}_2 + S_3 \bar{X}_2 \tag{6}$$

Jeżeli zamiast grupy określonej trzecim składnikiem wyżej napisanego równania tworzy się grupę możliwie największą (linia przerywana), to otrzyma się równanie:

$$F = S_1 + S_2 + \bar{X}_1 \bar{X}_2 + (S_1 + S_2 + S_3) \bar{X}_2 \tag{7}$$

które nawet po uproszczeniu wynikającym z zależności

$$S_1 + S_2 + S_3 = \bar{S}_4 \bar{S}_5$$

przybiera postać

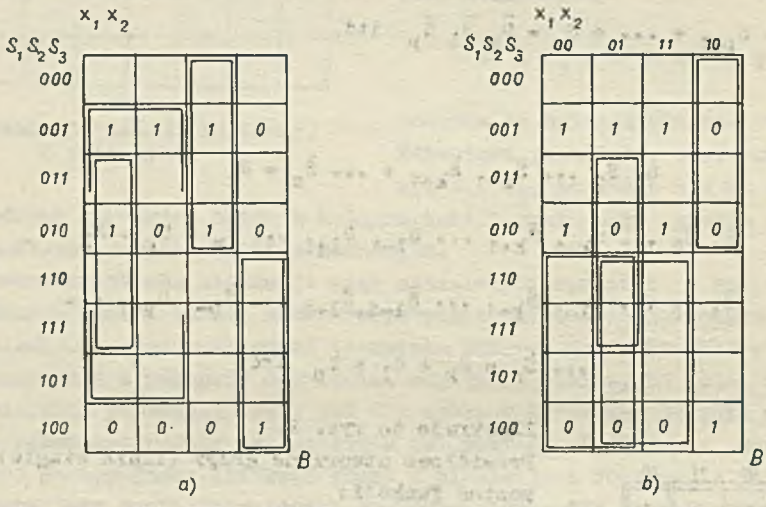
$$F = S_1 + S_2 + \bar{X}_1 \bar{X}_2 + \bar{S}_4 \bar{S}_5 \bar{X}_2 \tag{8}$$

bardziej rozbudowaną aniżeli równanie (6).

Następujący prosty przykład rozwiązany przy użyciu tablic Karnaugha oraz metody wyżej omówionej ilustruje korzyści jakie daje stosowanie zmodyfikowanej tablicy Karnaugha.

Przykład 1

Zminimalizować funkcję logiczną 5 zmiennych $B = f(S_1, S_2, S_3, X_1, X_2)$, dla której nie jest możliwe $S_i = S_j = 1$ dla $i \neq j$.
Funkcja zadana tablicą Karnaugha ma postać następującą (puste kratki oznaczają stany obojętne $\emptyset$):



Rys. 3. Tablica Karnaugha do przykładu 1
a – zaznaczono grupy "jedynkowe", b – zaznaczono grupy "zerowe"

Równanie logiczne określone z warunków działania ma postać:

$$B = S_1\bar{X}_1 + S_2\bar{X}_1\bar{X}_2 + \bar{S}_3X_1X_2 + S_3X_1\bar{X}_2 \tag{9}$$

a z warunków niedziałania:

$$B = (S_3 + \bar{X}_1 + X_2)\ (\bar{S}_2 + X_1 + \bar{X}_2)\ (\bar{S}_3 + X_1)\ (\bar{S}_3 + \bar{X}_2)$$

Natomiast tablica zmodyfikowana wygląda następująco:

	x_1x_2 00	01	11	10
S_1	1	1	1	0
S_2	1	0	1	0
S_3	0	0	0	1

B

a)

	x_1x_2 00	01	11	10
S_1	1	1	1	0
S_2	1	0	1	0
S_3	0	0	0	1

b)

Rys. 4. Zmodyfikowana tablica Karnaugha do przykładu 1:
a – zaznaczono grupy "jedynkowe"; b – zaznaczono grupy "zerowe"

Równanie otrzymane z warunków działania:

$$B = S_1 \bar{X}_1 + S_2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 + S_3 X_1 \bar{X}_2 + (S_1 + S_2) X_1 X_2$$

Ponieważ $S_1 + S_2 = \bar{S}_3$

$$B = S_1 \bar{X}_1 + S_2 \bar{X}_1 \bar{X}_2 + S_3 X_1 \bar{X}_2 + \bar{S}_3 X_1 X_2 \tag{11}$$

Z warunków niedziałania:

$$B = (\bar{S}_1\bar{S}_2 + \bar{X}_1 + X_2)(\bar{S}_2 + X_1 + \bar{X}_2)(\bar{S}_3 + X_1)(\bar{S}_3 + \bar{X}_2)$$

Ponieważ $\bar{S}_1\bar{S}_2 = S_3$

$$B = (S_3 + \bar{X}_1 + X_2)(\bar{S}_2 + X_1 + \bar{X}_2)(\bar{S}_3 + X_1)(\bar{S}_3 + \bar{X}_2) \tag{12}$$

Problem rozwiązany poniżej jest przykładem minimalizacji funkcji logicznej 10 zmiennych logicznych. Problem taki jest praktycznie nierozwiązalny przy stosowaniu tablic Karnaugha. Natomiast stosując metodę wyżej omówioną otrzymuje się rozwiązanie bardzo prosto.

Przykład 2

Zminimalizować funkcję logiczną 10 zmiennych $B = f(X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \ldots S_7)$, dla której nie jest możliwe $S_i = S_j = 1$ dla $i \neq j$. Funkcja zadana zmodyfikowaną tablicą Karnaugha ma postać następującą:

	$X_2X_1X_0$ 000	001	011	010	110	111	101	100
S_1	0	0	0	0	1	1	1	1
S_2	0	0	0	0	1	1	1	1
S_3	0	0	0	0	1	1	1	1
S_4	0	0	1	0	1	1	1	1
S_5	0	0	1	0	1	1	1	0
S_6	0	0	1	0	1	1	0	0
S_7	0	0	1	0	0	1	0	0

Rys. 5. Zmodyfikowana tablica Karnaugha do przykładu 2

Przy prawidłowym doborze grup otrzymuje się następujące najprostsze równania:

Z warunków działania:

$$B = (S_4 + S_5 + S_6 + S_7)\, X_1X_0 + S_5X_2X_0 + (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)\, X_2X_1 + (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\, X_2 \tag{13}$$

Równanie to można jeszcze uprościć korzystając z zależności:

$$S_4 + S_5 + S_6 + S_7 = \bar{S}_1\, \bar{S}_2\, \bar{S}_3 \tag{14}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \bar{S}_7 \tag{15}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \bar{S}_5\, \bar{S}_6\bar{S}_7 \tag{16}$$

Otrzymuje się równanie

$$B = \bar{S}_1\bar{S}_2\bar{S}_3X_1X_0 + S_5X_2X_0 + \bar{S}_7X_2X_1 + \bar{S}_5\bar{S}_6\bar{S}_7X_2 \tag{13}$$

Z warunków niedziałania:

$$B = (\bar{S}_7 + X_0)\, (\bar{S}_6\bar{S}_7 + X_1)\, (\bar{S}_5\bar{S}_6\bar{S}_7 + X_1 + X_0)\, (X_2 + X_0)\, (X_2 + X_1)\, (\bar{S}_1\bar{S}_2\bar{S}_3 + X_2) \tag{17}$$

LITERATURA

1 Karnaugh M. - "The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits". Trans. A.I.E.E. Part 1, Communications and Electronics, vol.72, nr 2, 1953.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 16.VI.1969 r.

МИНИМАЛИЗАЦИЯ НЕКАТОРОГО КЛАССА ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАНЫХ ТАБЛИЦ КАРНАФА

Резюме

Определено построение таблицы логической функции, которое названо модифицированой таблицой Карнафа, а также класс логических функций, которые можна определить при помощи этой таблицы. Подано правила минимализации этих функций при употреблении модифицированой таблицы Карнафа. Проблему иллюстрировано двумя примерами подтверждающими пригодность метода.

THE MINIMALISATION OF CERTAIN CLASS OF LOGICAL FUNCTIONS USING
MODIFIED KARNAUGH'S MAPS

Summary

The paper defines a modified Karnaugh's map and the class of logical functions which can be determined using the map. The rules for minimalization of these functions by means of the modified Karnaugh s map are described. Two examples veryfying the usefulness of the method are given.