ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: AUTOMATYKA z. 15 Nr kol. 287

JERZY FRĄCKOWIAK
Katedra Elektroniki

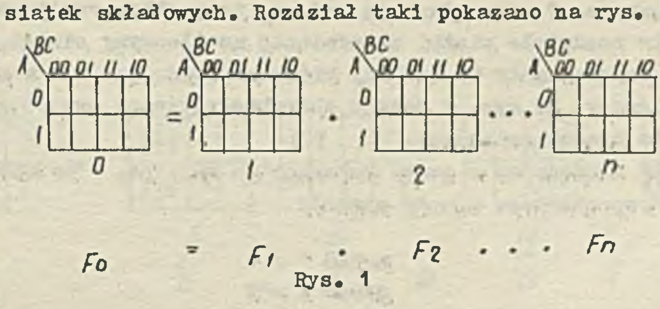
METODA ROZKŁADU TABLIC KARNAUGHA JAKO METODA FAKTORYZACJI

Streszczenie. W artykule opisano metodę faktoryzacji funkcji logicznych przy pomocy elementów NOR. Podstawę metody stanowi wykonywanie operacji NOR na tablicach Karnaugha. Kolejne operacje z wykorzystaniem typowych grup podanych w artykule prowadzą do uzyskania sygnałów wejściowych. Podano przykłady rozwiązań dla funkcji logicznych trzech zmiennych, jednowyjściowych.

1. Wstęp

Metoda rozkładu tablic Karnaugha (siatek zależności) ma posłużyć do realizacji optymalnego (o najmniejszej ilości przyjętych elementów podstawowych i najmniejszej ilości połączeń) układu spełniającego zadaną funkcję logiczną. W artykule niniejszym założono, że realizacja ma nastąpić przy pomocy elementu NOR jako uniwersalnego i powszechnie spotykanego oraz, że realizowana funkcja ma trzy zmienne. Nie wyklucza to jednak przydatności metody przy faktoryzacji funkcji o większej ilości zmiennych jak również za pomocą innych elementów podstawowych (co zresztą będzie przedmiotem dalszych prac z tego zakresu).

Dla opracowania metody wykorzystano fakt, iż siatka zależności będąca graficznym odpowiednikiem zadanej funkcji logicznej może być rozdzielona na iloczyn siatek składowych. Rozdział taki pokazano na rys. 1.



Rys. 1

W dalszej części artykułu dla uproszczenia często nie będzie się opisywać siatek literami zmiennych ABC i cyframi ich wartości. Przyjmuje się, że układ siatki jest zawsze taki, jak na rys. 1.

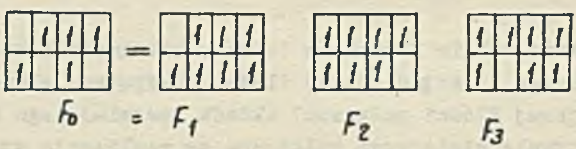
Rozkład siatki oznacza, że jeżeli siatka Nr 0 (rys. 1) jest odpowiednikiem graficznym funkcji Fo, to można ją rozdzielić na iloczyn logiczny siatek 1,2...n, które będą graficznymi odpowiednikami funkcji logicznych F_1, F_2...F_n, takich, że $F_o = F_1 \cdot F_2 \ldots F_n$. Iloczyn logiczny funkcji zrealizowany za pomocą iloczynu siatek wymaga, aby w odpowiadających sobie polach siatek wystąpiły:

a) "1" we wszystkich siatkach, jeśli w siatce nr 0 w danym polu wystąpiła "1",

b) "0" w co najmniej jednej siatce jeśli w siatce nr 0 w danym polu wystąpiło "0".

Przykład

Niech będzie zadana funkcja $F_o = \bar{A}C + BC + \bar{A}B + A\bar{B}\bar{C}$. Siatkę odpowiadającą F_o i rozkład na siatki składowe przedstawia rys. 2.



Rys. 2

Element NOR (przy pomocy którego ma nastąpić realizacja układu) spełnia funkcję logiczną:

$$F = \bar{A} \cdot \bar{B} \ldots \bar{N}$$

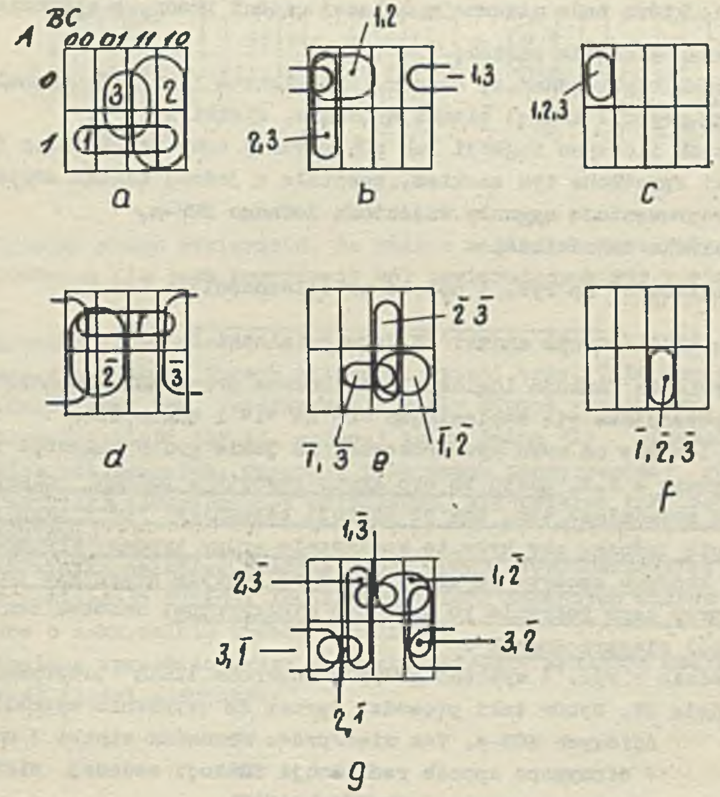
Jeżeli funkcja F jest funkcją zadaną, to problem realizacji układu polega na takim rozdziale siatki zasadniczej na iloczyny siatek, aby kolejne rozkłady doprowadziły do tablic, które mają ułożone "1" w pewne charakterystyczne grupy. Na rys. 3 podano charakterystyczne grupy w tablicach Karnaugha dla trzech zmiennych.

Jeżeli "1" złożone są w grupy pokazane na rys. 3a, to każda z tych trzech grup reprezentuje prosty sygnał:

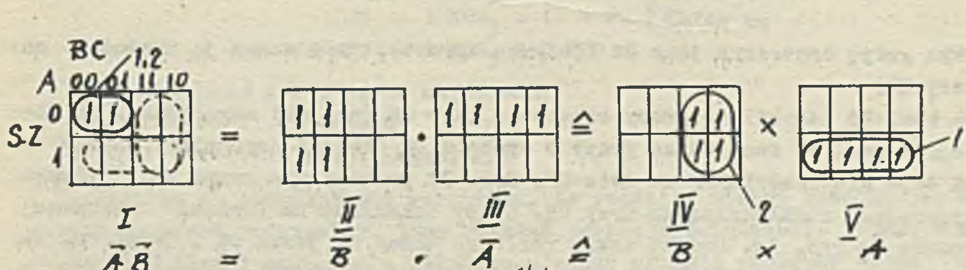
grupa 1 – A
grupa 2 – B
grupa 3 – C

Ponieważ każda grupa łączy cztery "1" i reprezentuje prosty sygnał wejściowy, oznaczono je symbolem CW (czwórki wprost).

Rys. 3b pokazuje grupy zawierające tylko dwa pola. Oznaczono je symbolem DW (dwójki wprost). Dają się one rozłożyć na dwie CW. Rozkład taki znajduje się na rys. 4.


BC
A
00 01 11 10
0
1
a
1,2
1,3
2,3
b
1,2,3
c
d
e
1,2,3
f
g

Rys. 3


BC
A
00 01 11 10
1,2
0
1
S.Z
=
≙
×
1
2
I
II
III
IV
V

Rys. 4

Podobnie jak na rys. 4 postąpić można z DW: 1,3 i 2,3. Na rys. 4 pokazano symbole, które będą używane w dalszej części pracy, a mianowicie:

. - znak mnożenia siatek,

≙ - znak odpowiedniości; oznacza, iż siatkom II i III odpowiadają, po negacji każdej siatki z osobna, siatki IV i V,

x - znak iloczynu negacji lub zanegowanej sumy oznaczający iż siatki sprzężone tym znakiem, powstałe z jednej siatki zasadniczej reprezentują sygnały wejściowe jednego NOR-a,

SZ - siatka zasadnicza.

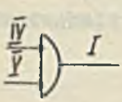
Operację rozkładu SZ na rys. 4 oparto na zależności:

$$\text{Grupa siatki I} = \overline{\text{Grupa siatki IV}} \cdot \overline{\text{Grupa siatki V}}$$

Jest to oczywiście funkcja logiczna realizowana przez NOR. Negację każdej z siatek przeprowadza się zamieniając "0" na "1" i odwrotnie.

Z siatki I można od razu wywnioskować, na jakie grupy składowe rozdzielić da się grupę z S.Z. Muszą to być grupy zawarte w polach niesprzężonych z grupą zasadniczą tak, aby po negacji zapewniły "0" w tych polach. Nie wymaga się jednak, aby były to koniecznie grupy typowe. Wystarczy,aby suma pól, w których zawarte są grupy składowe pokryła wszystkie pola niesprzężone, przy czym pokrycie to może być wielokrotne. Wniosek ten nazwiemy "zasadą pól niesprzężonych".

W przykładzie z rys. 4 wybrano grupy zaznaczone linią przerywaną w S.Z. Są to dwie CW. Wybór taki prowadzi wprost do uzyskania sygnałów wejściowych NOR-a. Tak więc przez rozdział siatki I na IV i V otrzymano sposób realizacji funkcji zadanej siatką I, za pomocą elementu NOR (rys. 5).



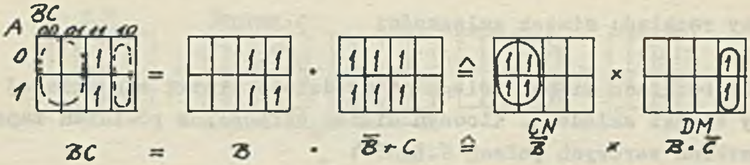
Rys. 5

Grupa z siatki I otrzymała oznaczenie 1, 2, gdyż rozkłada się na CW 1 i 2. Podobnie na rys. 3b oznaczono DW 1,3 i 2,3. Rys. 3c pokazuje grupę składającą się tylko z jednego pola.

Taką grupę oznaczono jako JW (jedynka wprost), gdyż można ją rozłożyć na trzy CW.

Na rys. 3d zakreślono grupy oznaczone jako CN (czwórki negacyjne). Na kolejnym rys. 3e zaznaczono grupy o symbolu DN (dwójki negacyjne). Każda z DN daje się rozdzielić na dwie CN. Rys. 3f przedstawia grupę JN (jedynka negacyjna) rozkładalną na trzy CN. Grupy oznaczone DM (dwójki mieszane) podano na rys. 3g. Dwójki takie rozłożyć można na jedną CW i jedną CN. Na przecięciu grup DM leżą JM (jedynki mieszane) rozkładalne na (1-2) CN i (2-1) CN.

Wszystkie opisane tu możliwości rozkładu nazwiemy "rozkładami podstawowymi". Oczywiście nie trudno zauważyć, że rozkłady podstawowe nie są jedynymi możliwymi, Np. DN można rozdzielić na jedną CN i jedną DN. Przedstawia to rys. 6.



Rys. 6

Uogólniając można stwierdzić, że zawsze możliwych jest tyle różnych siatek składowych ile jest kombinacji pól zawierających "0" w siatce zasadniczej.

Maksymalna ilość siatek składowych potrzebna do rozłożenia siatki zasadniczej dla funkcji trzech zmiennych wynosi trzy. Tyle bowiem potrzeba największych grup tzn. czwórkowych "0", aby siatce zasadniczej zawierającej maksymalną ilość "0" tj. mającej tylko jedną "1" zapewnić pokrycie wszystkich pól zerowych. Operację taką można przeprowadzić również przy pomocy większej ilości siatek składowych, ale rozkład taki będzie daleki od optymalnego.

Każda siatka składowa oznacza jeden sygnał doprowadzony do NOR-a, a zatem dla realizacji funkcji logicznych trzech zmiennych opłaca się używać elementów o maksymalnie trzech wejściach.

Wymienione uprzednio grupy charakterystyczne wymagają dla rozkładu następującej ilości elementów:

CW - 0
CN - 1 NEG
CW - 1 NOR_2
DM - 1 NOR_2 + 1 NEG
DN - 1 NOR_2 + 2 NEG
JW - 1 NOR_3
JM - 1 NOR_3 + (1 - 2) NEG
JN - 1 NOR_3 + 3 NEG

NOR_2 - oznacza NOR o dwóch wejściach,
NOR_3 - " " trzech "
NEG - " element negacyjny.

Ilości te są aktualne pod warunkiem, że rozdział siatki zasadniczej nastąpił w sposób podstawowy. Inny rozkład powoduje zwiększenie ilości elementów lub ilości połączeń w układzie. Jednak właśnie rozkłady różne od podstawowego są bardzo korzystne, zwłaszcza dla układów wielowyjściowych ze względu na możliwości tworzenia tych samych grup w różnych siatkach składowych. Daje to w efekcie użytkowanie jednego elementu dla realizacji grup umieszczonych w kilku siatkach.

2. Zasady rozkładu siatek zależności

Metoda rozkładu siatek polega na rozdziale siatki zasadniczej na dwie lub trzy siatki składowe. Iloczyn siatek składowych powinien zapewnić "0" we wszystkich zerowych polach S.Z.

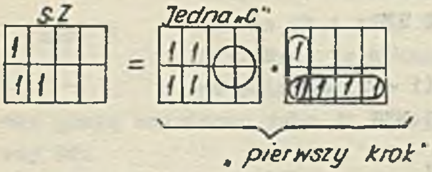
Każda siatka składowa powinna mieć złożone "1" w charakterystycznych grupach opisanych we Wstępie. "1" występujące w siatce zasadniczej muszą oczywiście wystąpić również we wszystkich siatkach składowych. Rozkład S.Z na kilka siatek ma na celu wprowadzenie nowych "1", które z już istniejącymi mają dać korzystne konfiguracje.

Każda "1" powinna być w co najmniej jednej grupie. Należy jednak unikać wielokrotnego grupowania tych samych "1", gdyż komplikuje to niepotrzebnie układ. Warto w miarę możliwości szukać grup wspólnych w różnych siatkach składowych.

Rozdział siatki zasadniczej jest pierwszym krokiem faktoryzacji. W kroku tym jak i we wszystkich następnych obowiązuje zasada, że jeżeli siatka składowa posiada cztery "1" i dadzą się one ułożyć w typową czwórkę, to należy starać się umieszczać je tak, aby w CW uzyskać "0" (będziemy mówić : układać "0").

Wynika to z tego, że siatki takiej dalej rozkładać się już nie będzie, a po negacji w miejsce "0" pojawią się "1" dając prosty sygnał wejściowy.

Jeżeli siatka składowa jest siatką, w której "1" nie da się zgrupować w jedną typową czwórkę tzn. będzie w siatce więcej grup charakterystycznych niż jedna, należy starać się umieszczać w niej w CW - jedynki. (Będziemy mówić: układać "1").



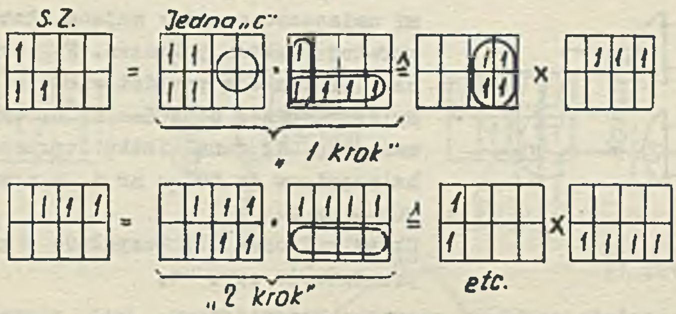
Rys. 7

Taką siatkę składową trzeba będzie bowiem również rozkładać na siatki zawierające tylko jedną charakterystyczną grupę. Czeka ją więc podwójna negacja, a zatem po dwóch krokach i negacji, "1" pojawią się w tych samych grupach, w których były w pierwszym kroku z tym, że każda grupa "dysponuje" teraz własną siatką.

Powyższą zasadę nazwiemy "zasadą grupowania". Graficzne objaśnienie terminu "pierwszy krok" podano na rys. 7.

Po rozdziale S.Z. na siatki składowe należy te ostatnie zanegować. Te, które zawierały więcej niż jedną grupę należy obecnie ponownie rozkładać. Będzie to "krok drugi" pokazany na rys. 8.

Przykład z rys. 7 i 8 ilustruje również zasadę układania "1" w grupy. W drugim kroku należy w siatkach składowych układać "0" w grupy, w które ułożone zostały "1" w kroku pierwszym.

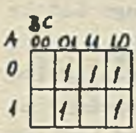


Rys. 8

W ciągu całego procesu faktoryzacji należy trzymać się reguły, iż siatkę zasadniczą należy przy pomocy jaknajmniejszej ilości kroków doprowadzić do zanegowanych siatek składowych, w których występują tylko CW i CN z zastrzeżeniem, że im więcej CW tym lepiej.

Każdy krok oznacza bowiem użycie jednego elementu, a uzyskanie w wyniku ostatecznym CN zmusza do użycia dodatkowego elementu negacji.

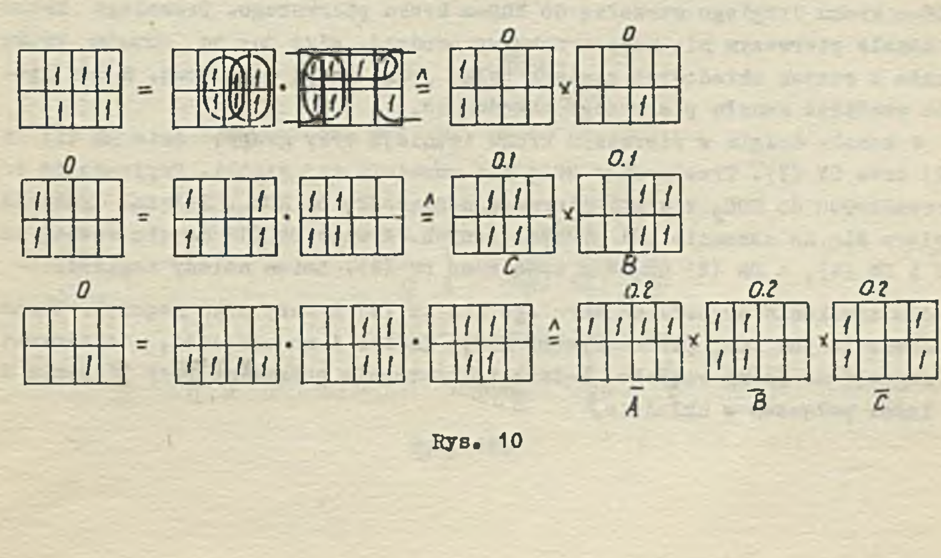
Przykład



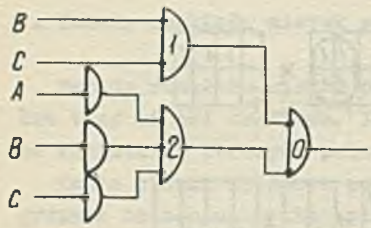
Rys. 9

Za pomocą elementów NOR przeprowadzić fakoryzację dla funkcji logicznej o postaci: $F = \bar{A}B + \bar{A}C + \bar{B}C + B\bar{C}$ Siatka zależności dla tej funkcji przedstawiona jest na rys. 9.

Przebieg procesu faktoryzacji podany jest na rysunku 10.



Rys. 10



Rys. 11

Nad poszczególnymi zanegowanymi siatkami umieszczono cyfry mające ułatwić konstrukcję układu połączeń. Np. Cyfra 0 oznacza, że funkcję przedstawioną siatką należy doprowadzić do NOR-a nr 0. Cyfry 0.1 oznaczają, iż daną siatkę doprowadzić trzeba najpierw do NOR-a nr 1 a następnie do NOR-a nr 0.

Układ połączeń dla przykładu z rysunku 10 przedstawia rys. 11.

W całej metodzie rozkładu siatek najważniejszym jest pierwszy krok. W kroku tym następuje wybór grup, które decydują następnie o ilości elementów użytych w układzie.

Na dobry wybór grup składa się oczywiście zmysł kombinacyjny i doświadczenie, ale nawet bez tych czynników można uzyskać dobre rezultaty, gdyż dyskusja ilości koniecznych do realizacji elementów jest bardzo łatwa. Przeprowadzić ją można już w pierwszym kroku bez konieczności rysowania wszystkich następnych. Na podstawie tej dyskusji już wprost można wybrać właściwy rozkład. Ilustrację do takiej dyskusji stanowi rys. 12a i 12b.

Na rys. 12a SZ rozdzielono na dwie siatki składowe układając "1":

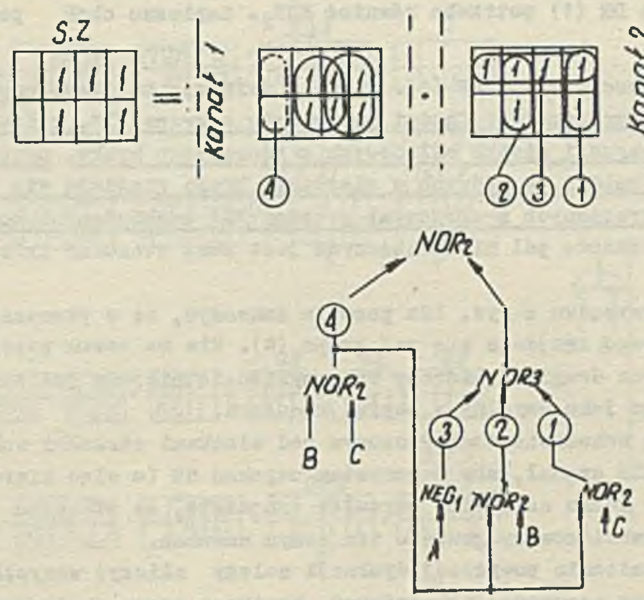
- w pierwszej (będziemy mówić "w pierwszym kanale") dwie CW,
- w drugim kanale jedna CN (3) i dwie DM (1) i (2).

Ponieważ SZ rozbito na dwie siatki składowe,potrzebny do tego będzie dwuwejściowy NOR. Zaznaczono to pod siatkami wpisując symbol NOR_2.

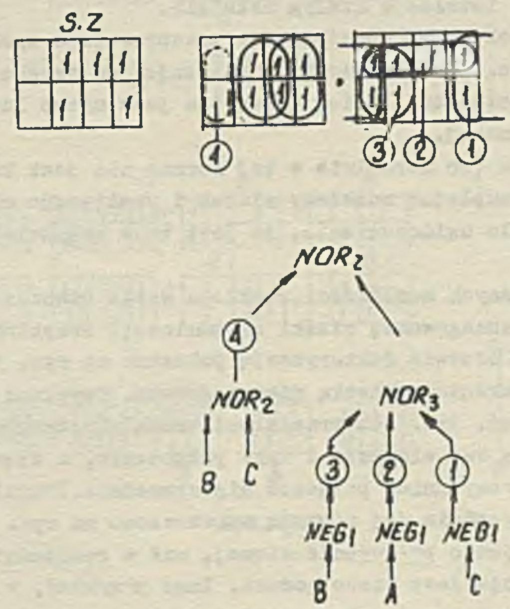
Każdą siatkę składową trzeba będzie dalej rozkładać, gdyż każda zawiera więcej niż jedną charakterystyczną grupę, co zresztą było powodem układania "1". Do rozłożenia siatki składowej zawierającej dwie CW potrzebny będzie również NOR_2, co zapisano pod NOR_2 poprzednim doprowadzając z NOR-a kroku drugiego strzałkę do NOR-a kroku pierwszego. Trzeciego kroku w kanale pierwszym nie ma potrzeby wprowadzać, gdyż już po drugim kroku każda z siatek składowych zawiera tylko jedną grupę czwórkową. W ten sposób rozdział kanału pierwszego zakończono.

W kanale drugim w pierwszym kroku istnieją trzy grupy: dwie DM (1) i (2) oraz CN (3). Trzeba więc NOR_3 dla rozbicia tej siatki. Zapisano to doprowadzając do NOR_2 z kroku pierwszego strzałkę od NOR_3. Dalsza dyskusja opiera się na zasadzie pól niesprzężonych. A więc DM (1) da się rozbić na CW i DW (4), a DM (2) na CW i taką samą DW (4). Zatem należy zapisać:

- dla uzyskania sygnału wejściowego A z CN (3) należy użyć negacji. Zaznaczono to pod NOR_3 pisząc symbol NEG_1. Indeks 1 ma oznaczać, iż element negacji ma jedno wejście. Będzie to następnie potrzebne przy liczeniu ilości połączeń w układzie,



Rys. 12a



Rys. 12b

- dla rozbicia DM (2) na dwie grupy trzeba NOR_2. Zapisano to obok NEG_1
- dla rozkładu DM (1) potrzeba również NOR_2. Zapisano obok poprzedniego NOR_2.

Został jeszcze rozkład DW (4). Znowu obowiązuje tu nieco zmodyfikowana zasada pól niesprzężonych. Chodzi mianowicie o grupy "1", które otrzymuje się w wyniku negacji siatek składowych z pierwszego kroku. Grupy te muszą być zawarte w polach, w których w pierwszym kroku znajdują się "0", a więc w polach niesprzężonych z ułożonymi grupami "1" traktowanymi sumarycznie. Zmodyfikowaną zasadę pól niesprzężonych jest sens stosować tylko przy pierwszym kroku.
Zasada ta w przypadku z rys. 12a pozwala zauważyć, iż w pierwszym kroku kanału pierwszego znajduje się już grupa (4). Nie ma zatem potrzeby rozkładać ją po raz drugi. Wystarczy wykorzystać istniejący już element kanału pierwszego jako wspólny w obydwu kanałach.

W szkicowym schemacie zamieszczonym pod siatkami strzałki wskazują, jak należy prowadzić sygnał, aby z powrotem uzyskać SZ (a więc kierunek syntezy). Cyfry w kółku na drodze strzałek oznaczają, że strzałka reprezentuje sygnał symbolizowany grupą o tym samym numerze.

Po przeprowadzeniu powyższej dyskusji należy zliczyć wszystkie zapisane elementy oraz zesumować ich indeksy. Wynika z tego, że do realizacji układu w sposób przedstawiony na rys. 12a trzeba 6 elementów i 12 połączeń. Nie liczy się tu oczywiście połączenia wyjścia z ostatniego elementu, gdyż musi ono istnieć w każdym układzie.

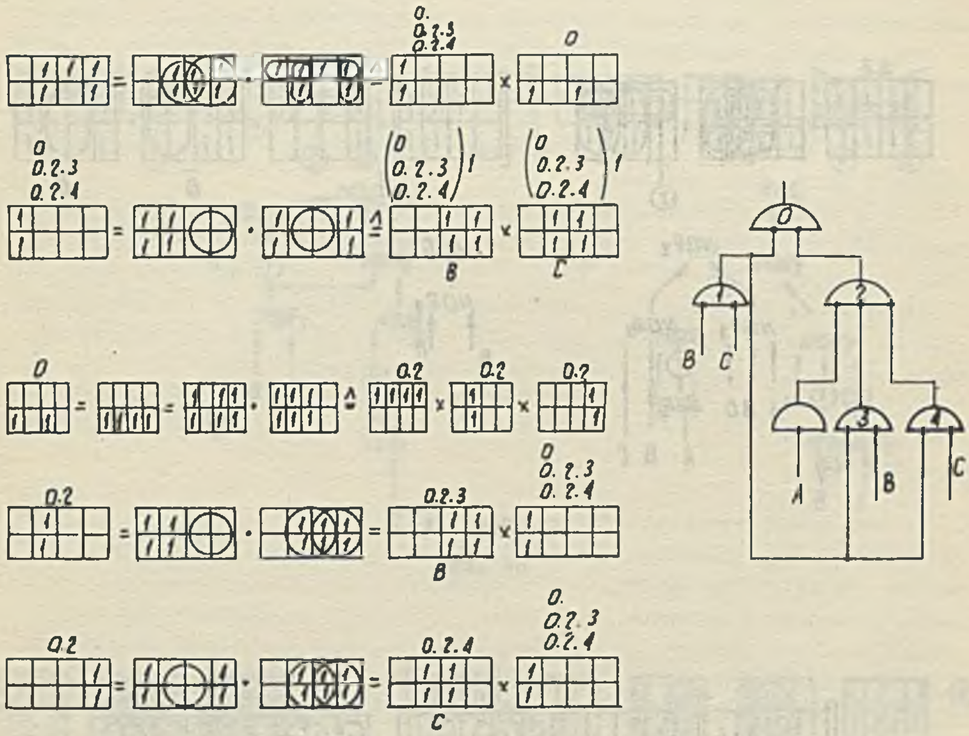
W identyczny jak wyżej sposób można przeprowadzić dyskusję dla rozdziału grup na rys. 12b. Dyskusja ta pokazuje, że trzeba tu również 6 elementów ale 11 połączeń. A więc układ ten jest nieco lepszy, gdyż ma o jedno połączenie mniej.

Dla sprawdzenia (co normalnie w tej formie nie jest konieczne) podano na rys. 13a i b kompletne rozkłady siatek i realizacje układów, które usytuowano pionowo dla uwidocznienia, że jest to w zasadzie schemat z rys. 12a i b.

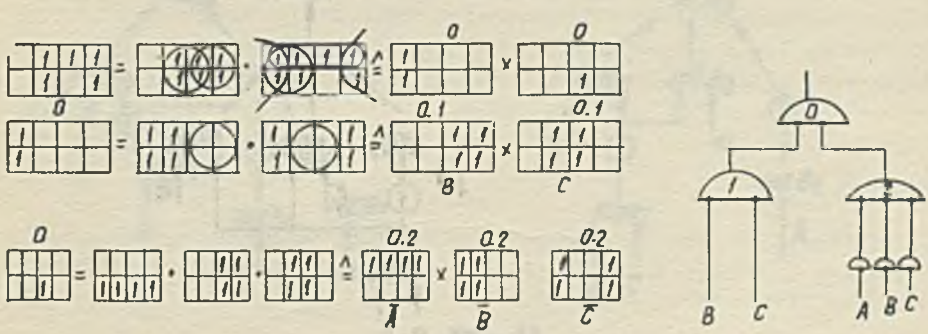
Do dyskusji różnych możliwości rozkładu warto również włączyć kombinacje uzyskiwane z zanegowanej siatki zasadniczej. Przykład, w którym negacja taka wydatnie ułatwia faktoryzację pokazano na rys. 14.

Na rys. 14a rozkładano siatkę niezanegowaną. Uzyskano cztery elementy i dziewięć połączeń. Rys. 14b przedstawia rozkład zanegowanej siatki zasadniczej. Daje on dwa elementy i trzy połączenia, a więc dwa razy mniej elementów i trzy razy mniej połączeń niż uprzednio. Przykład rozkładu siatki z rys. 12 z uprzednią jej negacją umieszczono na rys. 15.

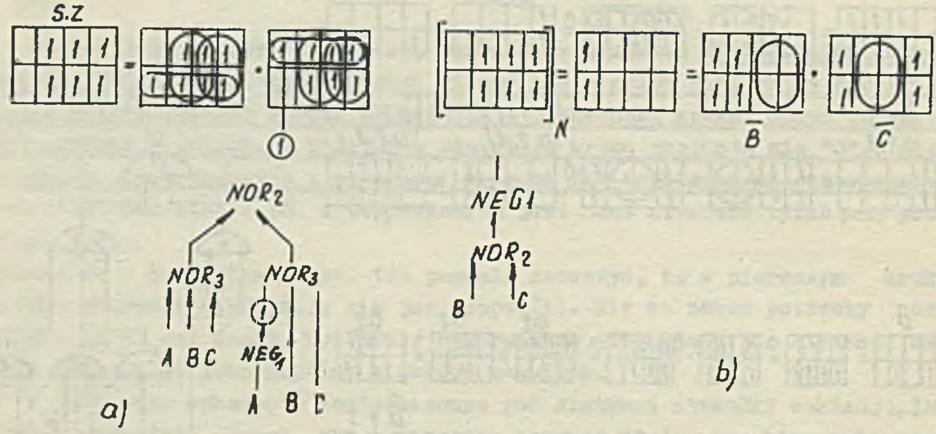
Uzyskano tu o jedno połączenie więcej, niż w rozkładzie z rys. 12b, a więc taka realizacja jest nieco gorsza. Inny przykład, w którym uprzednia negacja siatki zasadniczej polepsza nieco układ znajduje się na rys. 16.



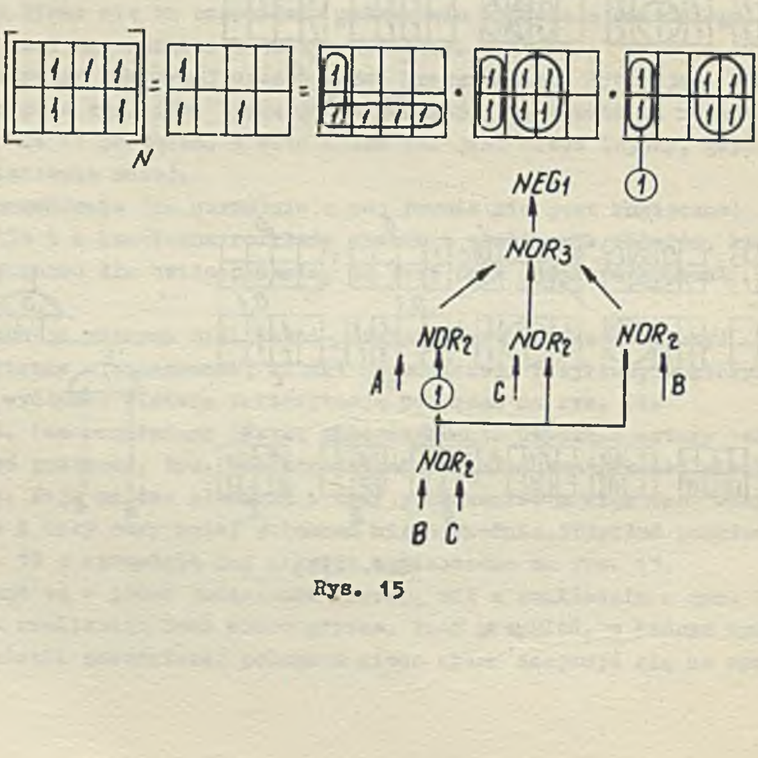
Rys. 13a



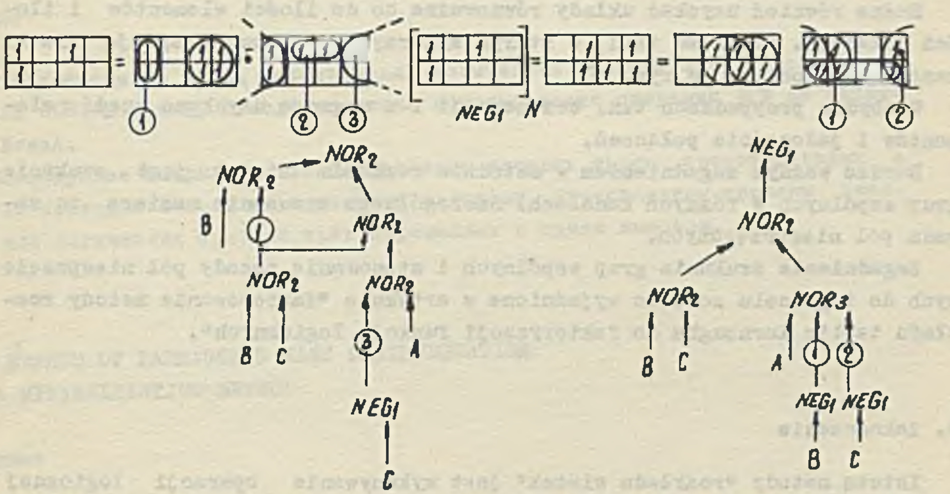
Rys. 13b


S.Z
NOR2
NOR3
NOR3
NEG1
A B C
A B C
a)
N
NEG1
NOR2
B
C
b)

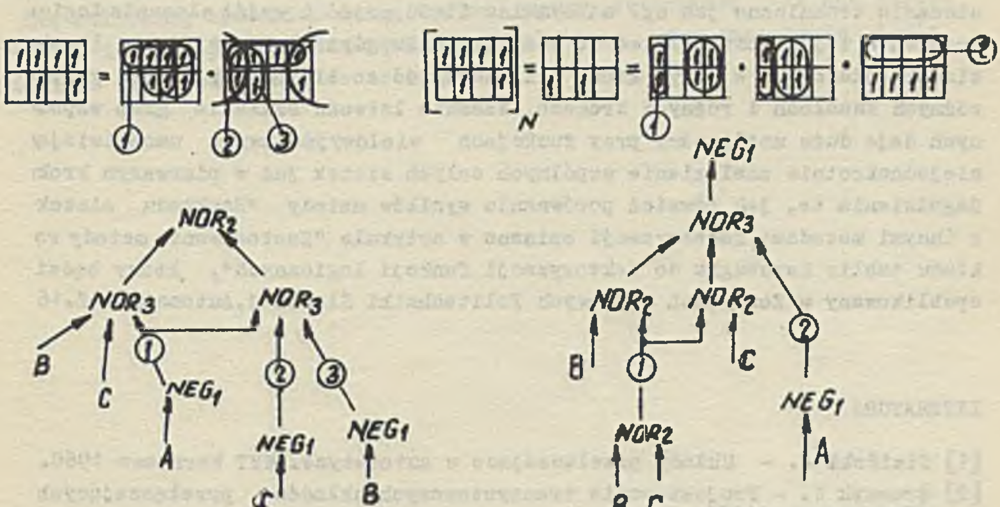
Rys. 14


N
NEG1
NOR3
NOR2
NOR2
NOR2
A
C
B
NOR2
B C

Rys. 15


NEG1
N
NOR2
NOR2
B
NOR2
NOR2
NOR2
B C
A
NEG1
C
NEG1
NOR2
NOR2
NOR3
B C
A
NEG1 NEG1
B C

Rys. 16


N
NEG1
NOR2
NOR3
NOR3
B
C
NEG1
A
NEG1
C
NEG1
B
NOR3
NOR2
NOR2
B
C
NEG1
A
NOR2
B C

Rys. 17

Jak widać z rys. 16 bez negacji uzyskuje się sześć elementów i jedenaście połączeń, natomiast z negacją sześć elementów i dziesięć połączeń. Można również uzyskać układy równoważne co do ilości elementów i ilości połączeń. Przykład taki, w którym wykorzystano znowu negację siatki zasadniczej podano na rys. 17.

W obydwu przypadkach tzn. bez negacji i z negacją uzyskano sześć elementów i jedenaście połączeń.

Bardzo ważnym zagadnieniem w metodzie rozkładu siatek jest szukanie grup wspólnych w różnych kanałach. Szczególnego znaczenia nabiera tu zasada pól niesprzężonych.

Zagadnienie szukania grup wspólnych i stosowanie zasady pól niesprzężonych do tego celu zostało wyjaśnione w artykule "Zastosowanie metody rozkładu tablic Karnaugha do faktoryzacji funkcji logicznych".

3. Zakończenie

Istotą metody "rozkładu siatek" jest wykonywanie operacji logicznej spełnianej przez założony, podstawowy element logiczny (w tym wypadku NOI wprost w tablicy Karnaugha. Daje to w efekcie możliwość minimalizacji ilości elementów logicznych oraz ilości połączeń w układzie. Również ograniczenia techniczne jak np. maksymalna ilość wejść i wyjść elementu logicznego są w tej metodzie łatwe do uwzględnienia, gdyż ilość wejść to liczba siatek składowych w danym kroku a ilość wyjść to liczba wspólnych grup w różnych kanałach i różnych krokach. Właśnie łatwość szukania grup wspólnych daje duże możliwości przy funkcjach wielowyjściowych umożliwiając niejednokrotnie znalezienie wspólnych całych siatek już w pierwszym kroku. Zagadnienia te, jak również porównanie wyników metody "Rozkładu siatek z innymi metodami faktoryzacji opisano w artykule "Zastosowanie metody rozkładu tablic Karnaugha do faktoryzacji funkcji logicznych", który będzie opublikowany w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej,Automatyka Z.16

LITERATURA

[1] Siwiński J. - Układy przełączające w automatyce. WNT Warszawa 1968.
[2] Traczyk W. - Projektowanie tranzystorowych układów przełączających WNT Warszawa 1966.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 20.X.1969 r

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ТАБЛИЦ ВЕИЧА КАК МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Резюме

В статье описан метод факторизации логических функций при помощи элементов NOR. В основу метода положено использование операции NOR на таблицах Веича.

Последующие операции с использованием типовых групп представленных в статье приводят к получению входных сигналов. Представлены примеры решений для логических функций трёх переменных с одним выходом.

THE METHOD OF KARNAUGH'S MAPS DISINTEGRATION
AS A MINIMALIZATION METHOD

Summary

The paper presents the method of minimalization of logic cuircuit realised on NOR elements. The basic of method is to make NOR operation in Karnaugh's maps.

The following operation using typical groups determined in the paper give the input signals. The examples of solutions for oneoutputs logic functions of three-variables are shown.