

KRZYSZTOF GOSIEWSKI

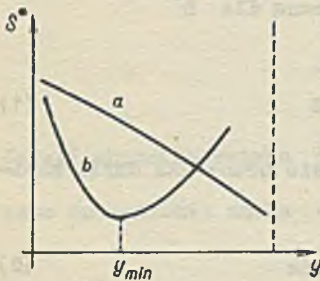
Katedra Automatykacji
Procesów Przemysłowych

MINIMALIZACJA STRAT PRZEZ DOBÓR WARTOŚCI ZADANEJ UAR

Streszczenie. Artykuł podaje metodę określenia wartości zadanej UAR, przy założeniu, że znana jest ekstremalna charakterystyka strat w obiekcie w funkcji wielkości regulowanej i że jest ona w ogólnym przypadku niesymetryczna.

Przy założeniu, że przebieg wielkości regulowanej jest sygnałem stochastycznym o znanym i stałym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa, podano metodę wyznaczania wartości zadanej, zapewniającej minimum oczekiwanych strat.

Charakterystyka statyczna strat wyrażonych jako wartość strat przypadających na jednostkę czasu (np. zł/godz.) S^* w funkcji wielkości regulowanej y jest zwykle charakterystyką posiadającą minimum. Minimum to może być na granicy obszaru wyznaczonego przez ograniczenia technologiczne (a) (np. maksymalna możliwa do uzyskania temperatura), względnie minimum wewnątrz obszaru dopuszczalnych zmian parametrów (b).



Rys. 1

Zajmiemy się zagadnieniem doboru wartości zadanej y_z pod kątem minimalizacji strat. Oczywiście jest, że jeżeli wielkość y mogłaby być stała w czasie wówczas należałoby utrzymywać wartość zadaną $y_z = y_{min}$. Jeżeli jednak przyjmiemy, że wartość y zmienia się wskutek działania zaburzeń przypadkowych układu autometrycznej regulacji i stanowi również pewną przypadkową funkcję czasu, wówczas wyłania się problem doboru wartości y_z tak

$$\text{aby } S = \int_{t_1}^{t_2} S^* dt \text{ było minimalne.}$$

Założenia:

1) Zakładamy że $y(t)$ jest funkcją przypadkową stacjonarną czyli że jej wartość oczekiwana (nadzieja matematyczna) m_y jest stała.

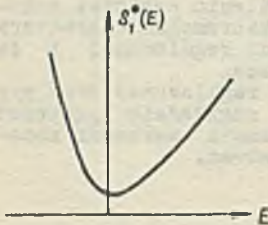
2) Wartość zadana UAR równa jest wartości oczekiwanej funkcji y $y_z = m_y$.

3) Zakładamy, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa funkcji y jest znany, oznaczamy go przez $f(y)$.

4) Zakładamy, że znana jest funkcja strat $S^*(y)$ i że jest ona stała.

5) Zakładamy, że zmiana wartości zadanej y_z nie powoduje zmiany rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $f(y)$ co jest równoznaczne m.in. z założeniem liniowego UAR.

Dla uproszczenia, wszystkie funkcje rozpatrywać będziemy jako funkcje parametru $E = y - y_{\min}$, gdzie y_{\min} jest wartością dla której funkcja $S^*(y)$ przyjmuje wartość minimalną.



Rys. 2

Funkcję $S^*(y)$ wyrażamy więc jako $S_1^*(E)$

$f(y)$ jako $f_1(E)$

stąd jako wartość oczekiwana

$$m_E = E_z = y_z - y_{\min}$$

Oczywistym jest, że jeżeli funkcja $S_1^*(E)$ jest funkcją parzystą oraz rozkład $f(y)$ jest symetryczny wówczas aby otrzymać minimum strat winno być $m_{Eopt} = 0$ tzn. $y_{zopt} = y_{\min}$. Jeżeli ramiona ekstremalnej charakterystyki strat mają różny kształt wówczas minimalizację strat otrzymamy przy $m_{Eopt} \neq 0$ tzn. $y_{zopt} \neq y_{\min}$.

Korzystając ze znanej zależności dla funkcji zmiennej przypadkowej (patrz [1] str. 111) określić można wartość oczekiwaną dla S^*

$$m_S^* = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(E) f_1(E) dE \quad (1)$$

Interesuje nas minimalizacja strat w pewnym okresie pracy UAR czyli minimalizacja wyrażenia

$$S = \int_{t_1}^{t_2} S^*(t) dt = \min \quad (2)$$

gdzie:

$S^*(t)$ jest funkcją przypadkową o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_2(s^*)$ i wartości oczekiwanej m_s^* .

Łatwo można wykazać, że (patrz [1] str. 200):

$$m_s^* = \int_{t_1}^{t_2} m_s^* dt \quad (3)$$

gdzie:

m_s - wartość oczekiwana strat w okresie t_1, t_2

czyli:

$$m_s = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(E) f_1(E) dE dt \quad (4)$$

W przypadku przebiegów przypadkowych interesuje nas oczywiście minimalizacja wartości oczekiwanej strat m_s . Korzystając z założenia stacjonarności możemy napisać

$$m_s = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(E) f_1(E) dE \right] (t_2 - t_1) \quad (5)$$

Aby znaleźć y_{opt} musimy rozwiązać równanie

$$\frac{\partial m_s}{\partial E_Z} = 0 \quad (9)$$

jeżeli $E_Z = m_E$

wówczas dostaniemy

$$\frac{\partial m_s}{\partial m_E} = 0 \quad (10)$$

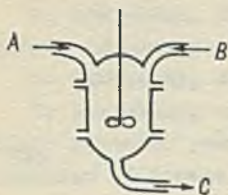
czyli

$$\frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(E) f_1(E) dE}{\partial m_E} = 0 \quad (11)$$

Jeżeli charakterystyka $S_1^*(E)$ posiada tylko jedno ekstremum (minimum) wówczas sprawdzenie znaku $\frac{\partial^2 m_s}{\partial m_E^2}$ nie jest konieczne.

Przykład 1

Reaktor chemiczny, do którego dopływają 2 substancje A i B wpływa zaś produkt C. Zakładamy idealne mieszanie w reaktorze. Zakładamy, że straty powstają jedynie wskutek nadmiaru czynnika A lub B w reaktorze ponad ilość, która daje pełne przereagowanie.



Rys. 3

Wielkością regulowaną jest pewna wielkość fizykalna y (np. pH^*) związana jednoznacznie ze stopniem przereagowania. W reaktorze przyjmuje ona wartość y_{\min} wówczas gdy przereagowanie jest zupełne tzn. gdy w produkcie C nie ma pozostałości A lub B gdy: $y < y_{\min}$ występują straty czynnika A wówczas

$$S^* = \frac{dS}{dt} = \Delta V_A^* \cdot C_A \quad (12)$$

gdy $y > y_{\min}$

$$S^* = \Delta V_B^* \cdot C_B \quad (13)$$

gdzie:

ΔV_A^* - nadmiar przepływu czynnika A ponad przepływ dający pełne przereagowanie przy danym przepływie V_B^* i określonych stężeniach czynnika A i B.

ΔV_B^* - nadmiar przepływu czynnika B ponad przepływ dający pełne przereagowanie przy danym przepływie V_A^* i określonych stężeniach czynnika A i B,

C_A, C_B - ceny czynników A i B.

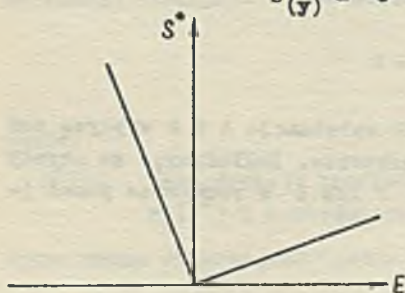
Jeżeli założymy, że wielkość regulowana y jest liniową funkcją nadmiaru ΔV_A^* i ΔV_B^* wówczas możemy napisać:

$$S^*(y) = -k_1 \cdot y + a_1 \quad \text{dla } y < y_{\min} \quad (14)$$

oraz

$$S^*(y) = k_2 \cdot y + a_2 \quad \text{dla } y > y_{\min} \quad (15)$$

$$S^*(y) = 0 \quad \text{dla } y = y_{\min}$$



Rys. 4

wprowadzając zmienną $E = y - y_{\min}$ otrzymamy zależność $S_1^*(E)$ pokazaną na rysunku 4

$$S_1^*(E) = -k_1 E \quad \text{dla } E < 0 \quad (14')$$

$$S_1^*(E) = k_2 E \quad \text{dla } E > 0 \quad (15')$$

x) Zakładamy, że w pobliżu punktu pracy jest liniowa zależność między stopniem przereagowania a pH .

Zakładamy, że wielkość regulowana E zmienia się przypadkowo i że posiada normalny rozkład gęstości prawdopodobieństwa Gaussa

$$f_1(E) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(E - m_E)^2} \quad (16)$$

Podstawiając (14') (15') i (16) do (11) otrzymamy równanie

$$\frac{\partial}{\partial m_E} \left[\int_{-\infty}^0 -k_1 E \frac{4h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(E - m_E)^2} dE + \int_0^{\infty} k_2 E \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(E - m_E)^2} dE \right] = 0 \quad (17)$$

w celu rozwiązania całek w liczniku stosujemy podstawienie

$$\lambda = h(E - m_E)$$

licznik przybierze postać:

$$m_E^* = \frac{-k_1 m_E}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-hm_E} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{k_2 m_E}{\sqrt{\pi}} \int_{-hm_E}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda - \\ - \frac{k_1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-hm_E} \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{k_2}{h\sqrt{\pi}} \int_{-hm_E}^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (18)$$

Dokładne wyliczenie całki $\int e^{-\lambda^2} d\lambda$ w granicach innych jak $0 \rightarrow \infty$ jest niemożliwe i dlatego uciec się musimy do rozwinięcia funkcji $e^{-\lambda^2}$ w szereg Maclaurina (interesuje nas rozwinięcie wokół pkt. $E = m_E$ czyli $\lambda = 0$) i odrzucenia dalszych wyrazów szeregu

$$\int_{-\infty}^{-hm_E} e^{-\lambda^2} d\lambda = \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda^2} d\lambda}_{\text{całka Poissonne'a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \int_0^{-hm_E} e^{-\lambda^2} d\lambda = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{-hm_E} (1 - \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^4}{2!} - \frac{\lambda^6}{3!}) d\lambda \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - hm_E + \frac{h^3 m_E^3}{11.3} \quad (19)$$

podobnie

$$\int_{-hm_E}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} + hm_E - \frac{h^3 m_E^3}{11.3} \quad (20)$$

podstawiając do (18) otrzymamy:

$$\begin{aligned} m_E^* = & \frac{-k_1 m_E}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - hm_E + \frac{(hm_E)^3}{3} \right] + \\ & + \frac{k_2 m_E}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + hm_E - \frac{(hm_E)^3}{3} \right] + \frac{k_1}{2h\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \left[-\infty \right. \\ & \left. - \frac{k_2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \left[-\infty \right. \right. \end{aligned} \quad (21)$$

stąd

$$\frac{\partial m_E^*}{\partial m_E} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{\pi}} 2 hm_E \left(1 - \frac{2}{3} h^2 m_E^2 - \frac{1}{2} e^{-h^2 m_E^2} \right) - \frac{k_1 - k_2}{2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} hm_E \left(1 - \frac{2}{3} h^2 m_E^2 - \frac{1}{2} e^{-h^2 m_E^2} \right) \quad (23)$$

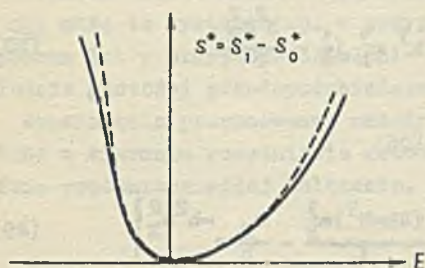
czyli

$$\frac{\frac{k_1}{k_2} - 1}{\frac{k_1}{k_2} + 1} = \varphi(m_E) \quad (24)$$

Rozwiązaniem równania (23) jest wartość $m_{Eopt} = E_{zopt}$. Prawidłowe rozwiązanie otrzymujemy jeżeli $|hm_{Eopt}| < 1$

Przykład 2

Krzywa strat $S_1^*(E)$ dla reaktora w przykładzie I jest przyjęta przy dość nierozważnych założeniach idealnego mieszania w reaktorze oraz przy założeniu, że istnieją jedynie straty surowców A i B z pominięciem innych strat. W wielu przypadkach praktycznych krzywa strat nie posiada "ostre



Rys. 5

go minimum na przecięciu dwu prostych lecz kształt, który w pobliżu minimum przybliżyć można odcinkami parabol. Na rys. 5 pokazany jest taki kształt krzywej strat z pominięciem strat stałych S_0^* , które na minimalizację nie mają wpływu

$$S_1^*(E) = k_1 E^2 \quad \text{dla } E < 0$$

$$S_1^*(E) = k_2 E^2 \quad \text{dla } E > 0$$

Podobnie jak w przykładzie 1 zakładamy normalny rozkład gęstości prawdopodobieństwa Gaussa, sygnału E.

Podstawiając do (11)

$$\frac{\partial \left[\int_{-\infty}^0 k_1 E^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(E-m_E)^2} dE + \int_0^{+\infty} k_2 E^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(E-m_E)^2} dE \right]}{\partial m_E} = 0 \quad (25)$$

podstawiając $\lambda = h(E - m_E)$

$$m_E^* = \frac{k_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{m_E^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-hm_E} e^{-\lambda^2} d\lambda + 2 \frac{m_E}{h} \int_{-\infty}^{-hm_E} \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{-hm_E} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda \right] + \frac{k_2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{m_E^2}{\pi} \int_{-hm_E}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{2 m_E}{h} \int_{-hm_E}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{h^2} \int_{-hm_E}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda \right] \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{-hm_E} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} + \int_0^{-hm_E} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \int_0^{-hm_E} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{h^3 m_E^3}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{h^2 m_E^2}{5} \right) \quad (27)$$

podobnie:

$$\int_{-hm_E}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} + h^3 m_E^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{h^2 m_E^2}{5} \right) \quad (28)$$

Podstawiając (19), (20), (27), (28), do (26)

$$m_S^* = (k_1 + k_2) \left(\frac{m_E^2}{2} + \frac{1}{4h^2} \right) + \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{-h^3 m_E^5}{5} + \frac{(4h - h^3) m_E^3}{3} - \frac{m_E}{h} e^{-h^2 m_E^2} \right] \quad (29)$$

stąd otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_S^*}{\partial m_E} &= (k_1 + k_2) m_E + \\ &+ \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{\pi}} \left[+ \frac{1}{h} e^{-h^2 m_E^2} + m_E^2 (4h - 2h e^{-h^2 m_E^2}) - \frac{8}{3} m_E^4 h^3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

stąd:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{m_E \sqrt{\pi}}{\frac{1}{h} e^{-h^2 m_E^2} + m_E^2 (4h - 2h e^{-h^2 m_E^2}) - \frac{8}{3} m_E^4 h^3} \quad (31)$$

$$\frac{\frac{k_1}{k_2} - 1}{\frac{k_1}{k_2} + 1} = \varphi(m_E) \quad (32)$$

Rozwiązanie równania (31) daje wartość $m_{Eopt} = E_{2opt}$ podobnie jak w przykładzie 1, jeżeli $|\frac{hm_{Eopt}}{h}| < 1$.

Uwagi końcowe

Poczynione na wstępie założenia, w wielu praktycznych przypadkach mogą być z wystarczającym przybliżeniem spełnione. Często jednak zdarza się, że założenie, iż rozkład gęstości prawdopodobieństwa sygnału regulowanego nie zależy od wartości zadanej, nie jest spełnione. Przypadki takie mogą mieć miejsce np. przy obiektach silnie nieliniowych. Ujęcie analityczne wpływu nieliniowości jest sprawą trudną.

Również często zdarzyć się może, że nie jest spełnione założenie $y_z = m_y$, może to wystąpić np. w przypadku układu pracującego z błędem stacycznym lub w przypadku działania zakłóceń procesu o niesymetrycznym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa.

Rozwinięcie proponowanej metody określania wartości zadanej powinno pójść w kierunku rozwinięcia metody na przypadki, w których nie są spełnione wspomniane wyżej założenia.

LITERATURA

- [1] Pugačzew W.S. - Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego. Wyd. MON 1960.

Rękopis złożono w Redakcji dnia 3.II.1969 r.

МИНИМАЛИЗАЦИЯ ПОТЕРЬ ПУТЁМ ВЫБОРА ЗАДАННОГО ЗНАЧЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ (САР)

Резюме

В статье приводится метод определения заданного значения САР при условиях известной экстремальной характеристики потерь объекта как функции регулируемой величины и при условиях что в общем является она несимметрической. Предполагая, что ход регулируемой величины является стохастическим сигналом известного и постоянного распределения вероятной плотности, разработан метод определения заданного значения, обеспечивающего минимум ожидаемых потерь.

THE LOSSES MINIMALIZATION BY THE SET POINT ESTABLISHMENT IN THE CLOSED CONTROL LOOPS

Summary

The paper presents a method of the set point establishment in the closed control loops, with assumption that the extremal losses characteristic is known as a function of the controlled variable, and that it's generally asymmetrical. It's assumed, that the controlled variable change as a stochastic signal with constant probability density function.

Presented method gives the minimum of losses expected.