

ANNDRZEJ KŁOS

Katedra Gospodarki  
Elektroenergetycznej

ANNDRZEJ PRZYŁUSKI  
Instytut Energetyki

EKONOMICZNY ROZDZIAŁ OBCIĄŻEŃ  
ZZ UWZGLĘDNIENIEM STRAT W SIECIACH

Streszczenie: W pracy podano ogólne warunki ekonomicznego rozdziału obciążeń z uwzględnieniem strat w sieciach, wyprobowane przy spełnieniu równań bilansów mocy czynnej i biernej. Przeprowadzono dyskusję wyboru "punktu bilansującego". Wyprowadzono nową formę wyrażenia na straty sieciowe, bardzo dogodną z punktu widzenia techniki pomiarów na analizatorze sieciowym. Przeanalizowano praktyczne zalety nowej metody.

1. WSTĘP

Wyznaczanie ekonomicznie najwłaściwszego stanu pracy układu energetycznego jest problemem bardzo szerokim i złożonym. W ramach tego problemu ogólnego, można wyodrębnić szereg problemów szczegółowych jak np. zagadnienie rezerwy mocy, odstawianie jednostek, współpraca elektrowni wodnych i ciepłych i itd.

Jednym z tych zagadnień, szeroko omawianych w literaturze, jest zagadnienie wyznaczania obciążeń poszczególnych elektrowni dla danego stanu obciążenia punktów odbiorczych, przy czym wyznaczany rozdział obciążeń na elektrownie powinien odpowiadać minimum kosztów wytwarzania energii lub minimum ilości paliwa umownego.

W dalszym ciągu zagadnienie to będzie nazywane ekonomicznym rozdziałem obciążeń. W ujęciu przyjętym w dalszych rozważaniach, ekonomiczny rozdział obciążeń traktowany jest jako pewne zagadnienie ekstremalne - poszukiwanie minimum funkcji wielu zmiennych. To ujęcie "klasyczne" zakłada, że funkcje kosztów wytwarzania mocy w poszczególnych elektrowniach są ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne, wypukłe i stale rosnące. W zasadzie ekonomiczny rozdział obciążeń sprowadza się nie do zagadnienia ekstremum funkcji, a do zagadnienia poszukiwania kresu dolnego funkcji kosztów.

Może się okazać<sup>x)</sup>, że przy założonej ciągłości i różniczkowalności rozważanych funkcji kres dolny funkcji kosztów znajduje się na ograniczeniu obszaru wielowymiarowego wyznaczonego przez przedziały  $P_{gmin}$   $P_{gmax}$  w jakich mogą się zmieniać moce czynne poszczególnych elektrowni. Wtedy dla elektrowni, której moc  $P_g = P_{gmax}$  lub  $P_g = P_{gmin}$  nie będą spełnione z reguły warunki określające ekstremum funkcji. Zakłada się więc w ujęciu "klasycznym", że elektrownie, które wchodzi w rozważanie z  $P_g = P_{gmax}$  lub  $P_g = P_{gmin}$  zostały uprzednio wyznaczone obliczeniem lub rozważaniami innego rodzaju i ich moce nie występują przy określaniu minimum kosztów jako zmienne (nie zależne), ale jako pewne parametry stałe. Wyznaczenie ekonomicznego rozdziału obciążeń z uwzględnieniem strat sieciowych  $p$  wymaga znajomości funkcji

$$p = p(P_1 P_2 \dots P_n)$$

<sup>x)</sup> Co zresztą najczęściej ma miejsce.

gdzie  $P_1 \dots P_n$  są mocami wytwarzanymi w poszczególnych elektrowniach. W rozważaniach występują pochodne cząstkowe strat  $p$  względem mocy poszczególnych elektrowni. Pochodne te można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial P_g} = \sum_k B_{gk} \cdot P_k + B_{go}$$

Współczynniki  $B_{gk}$  nazywamy współczynnikami strat sieciowych. Jeśli znane są te współczynniki oraz funkcje kosztów wytwarzania w poszczególnych elektrowniach  $f_g(P_g)$  pozwala to wyznaczyć ekonomiczny rozdział wytwórczości.

W pracy zostaną omówione znane warunki matematyczne ekonomicznego rozdziału obciążeń z naświetleniem pewnych zagadnień, które rzutują na sposób obliczania współczynników  $B_{gk}$ . Wprowadzone zostaną nowe wzory na współczynniki  $B_{gk}$  oraz zostanie przeprowadzona analiza krytyczna wzorów na tle dotychczas stosowanej metody obliczania tych współczynników. Na zakończenie podano szereg uwag na temat praktycznego wykorzystania wprowadzonych wzorów.

## 2. Warunki ekonomicznego rozdziału obciążeń z uwzględnieniem strat w sieciach

Warunki ekonomicznego rozdziału obciążeń na elektrownie zostaną wyprowadzone w oparciu o minimalizację funkcji metodą współczynników nieoznaczonych Lagrange'a. Oznaczmy przez  $F_k(S_k)$  koszty paliwa lub ilość paliwa umownego związane z wyprodukowaniem w elektrowni  $k$  mocy  $S_k = P_k + j Q_k$

$$F_k = f_k(P_k) + g_k(Q_k) \tag{1}$$

Koszty całkowite w systemie o  $n$  elektrowniach będą

$$F = \sum_{k=1}^{k=n} F_k = \sum_k f_k(P_k) + \sum_k g_k(Q_k) \tag{2}$$

W rozpatrywanym systemie występują odbiory

$$S_{oI} = P_{oI} + j Q_{oI}, S_{oII} \dots S_{oN}$$

Zakładamy, że moce odbiorów są stałe niezależne od wartości napięć panujących w węzłach odbiorczych. Tak więc będzie:

$$S_o = \sum_{k=1}^{k=N} S_{ok} = \sum_k P_{ok} + j \sum_k Q_{ok} = \text{const} \quad (3)$$

$$\sum_k P_{ok} = P_o = \text{const} \quad (3a)$$

$$\sum_k Q_{ok} = Q_o = \text{const} \quad (3b)$$

Dla rozpatrywanego układu będą oczywiście spełnione równania bilansu mocy

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k - p - P_o = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} Q_k - q - Q_o = 0 \quad (5)$$

gdzie przez  $p$  i  $q$  oznaczono straty mocy czynnej i biernej w układzie. Straty mocy czynnej  $p$  i biernej  $q$  w danej sieci są jednoznaczną funkcją stanu pracy, stanu obciążenia, tej sieci.

Stan pracy jest jednoznacznie określony jeśli będą dane:

- a) moce zewnętrzne zasilające i odbiorcze we wszystkich punktach zasilających i odbiorczych z wyjątkiem jednego wybranego dowolnie punktu zasilającego lub odbiorczego,
- b) napięcie w dowolnym punkcie sieci.

Można więc ogólnie zapisać:

$$p = p(P_1 \dots P_n, Q_1 \dots Q_n, P_I \dots P_N, Q_I \dots Q_N, U_S) \quad (6)$$

$$q = q(P_1 \dots P_n, Q_1 \dots Q_n, P_I \dots P_N, Q_I \dots Q_N, U_S) \quad (7)$$

gdzie wśród zmiennych nie występuje moc czynna  $P_b$  oraz bier na  $Q_b$  dla pewnego punktu  $b$  będącego punktem zasilania lub odbioru. Punkt  $b$  będzie dalej nazywany punktem odniesienia<sup>x)</sup>.

Będziemy poszukiwali minimum funkcji  $F$  przy spełnieniu warunków (4) i (5). Funkcje  $f_k$  i  $g_k$  oraz  $p$  i  $q$  jak również wartości  $P_0 = \text{const}$ ,  $Q_0 = \text{const}$  i  $U_S$  są dane. Zgodnie z metodą Lagrange'a budujemy funkcje:

$$\Phi = F + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 \quad (8)$$

gdzie

$$W_1 = \sum_k P_k - p - P_0$$

$$W_2 = \sum_k Q_k - q - Q_0$$

a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami stałymi zwanymi mnożnikami Lagrange'a. Ekstremum funkcji  $F$  występuje w punkcie, w którym pochodne cząstkowe funkcji  $\Phi$  są równe zero.

Będzie więc:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = \frac{\partial f_k}{\partial P_k} + \lambda_1 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial P_k}\right) + \lambda_2 \left(-\frac{\partial q}{\partial P_k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q_k} = \frac{\partial g_k}{\partial Q_k} + \lambda_1 \left(-\frac{\partial p}{\partial Q_k}\right) + \lambda_2 \left(1 - \frac{\partial q}{\partial Q_k}\right) = 0 \quad (9)$$

$$k = 1, 2 \dots n$$

<sup>x)</sup> Bywa czasem nazywany punktem bilansującym.

Koszty wytwarzania  $g_k(Q_k)$  energii biernej  $Q_k$  w elektrowni  $k$  są znikome. Mianowicie, jedynie straty mocy czynnej w generatorze i układzie przesyłowym od generatora do zacisku  $k$  rozpatrywanej sieci, wywołane przepływem mocy  $Q_k$ , powodują dodatkowe zużycie paliwa  $g_k(Q_k)$ .

Można więc przyjąć z dużą dokładnością dla wszystkich elektrowni

$$g_k(Q_k) = 0 \quad (10)$$

Uwzględniając (10), warunki ekonomicznego rozdziału obciążzeń przyjmą postać:

$$\frac{\partial f_k}{\partial P_k} + \lambda_1 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial P_k}\right) + \lambda_2 \left(-\frac{\partial q}{\partial P_k}\right) = 0 \quad (11a)$$

$$\lambda_1 \left(-\frac{\partial p}{\partial Q_k}\right) + \lambda_2 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial Q_k}\right) = 0 \quad (11b)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$\lambda_1$  i  $\lambda_2$  można określić uzupełniając powyższe zależności równaniami bilansów (4) i (5).

Warunki (11) są słuszne przy dowolnie wybranym punkcie odniesienia, a więc przy wyborze tego punktu bądź w punkcie zasilającym bądź w punkcie odbiorczym. Postać warunków ekonomicznego rozdziału obciążeń upraszcza się znacznie jeśli punkt odniesienia "b" przyjąć w punkcie zasilającym. Przyjmując punkt odniesienia w "n" i biorąc pod uwagę, że  $P_n$  i  $Q_n$  nie wystąpią w (6) i (7) otrzymuje się z (11) dla  $k = n$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial P_n} + \lambda_1 = 0$$

a stąd

$$\lambda_1 = - \frac{\partial^f_n}{\partial P_n}$$

Tak więc przyjmując punkt odniesienia w n-tym punkcie zasilającym, warunki ekonomicznego rozdziału obciążeń można analitycznie wyrazić równaniami:

$$\frac{\partial^f_k}{\partial P_k} - \frac{\partial^f_n}{\partial P_n} \left(1 - \frac{\partial p}{\partial P_k}\right) = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Q_k} = 0 \quad (12b)$$

$$k = 1, 2, \dots, n - 1$$

Równania (12) dzielą się na dwie grupy (12a) i (12b). Dwie grupy równań są "powiązane" jedynie poprzez funkcje p i q - funkcje (6) i (7). Dla zadanego rozkładu mocy biernej na elektrownie równania (12a) określają ekonomiczny rozkład mocy czynnych na elektrownie. Odwrotnie, dla zadanego rozkładu mocy czynnych równania (12b) określają ekonomiczny rozkład mocy biernych na elektrownie. Jak widać z równań (12b) ten ekonomiczny rozkład mocy biernych jest rozkładem zapewniającym minimum strat mocy czynnej  $p\left(\frac{\partial p}{\partial Q_k} = 0\right)$ ; minimum ze względu na zmienne

$Q_1 \dots Q_{n-1}$ .

Z powyższych rozważań wynikają następujące wnioski:

1. Warunki ekonomicznego rozdziału obciążeń można wyrazić zarówno w postaci równań (11) jak i w postaci równań (12). Warunki (11) lub (12) uzupełniane równaniami bilansów (4) i (5) pozwalają wyznaczyć ekonomiczny rozdział obciążeń.

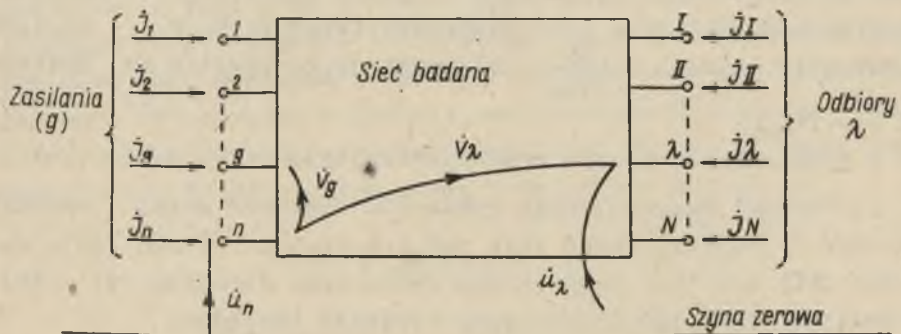
2. Jeżeli warunki wyrazimy w postaci równań (11) wtedy należy wyznaczyć pochodne  $\frac{\partial p}{\partial P_k}$ ;  $\frac{\partial q}{\partial P_k}$ ;  $\frac{\partial p}{\partial Q_k}$ ;  $\frac{\partial q}{\partial Q_k}$  przy czym punkt odniesienia można obrać w dowolnym punkcie odbiorczym lub zasilającym.

3. Jeżeli warunki wyrazimy w postaci równań (12) wtedy wystarczy wyznaczyć pochodne  $\frac{\partial p}{\partial P_k}$  i  $\frac{\partial p}{\partial Q_k}$  przy czym punkt odniesienia należy obrać w dowolnym punkcie zasilania. Punktem wyjścia podanej w niniejszym opracowaniu metody jest następujące stwierdzenie:

Ekonomiczny rozdział obciążeń z uwzględnieniem strat w sieciach można wyznaczyć praktycznie stosując warunki (12). Wystarczy wtedy wyznaczyć pochodne  $\frac{\partial p}{\partial P_k}$  i  $\frac{\partial p}{\partial Q_k}$  przyjmując punkt odniesienia w jednym z punktów zasilania. Sposób praktyczny wyznaczenia tych pochodnych podano w rozdziale następnym.

### 3. Wyznaczenie pochodnych strat mocy w układzie elektroenergetycznym

Celem wyprowadzenia równania określającego straty sieciowe najwygodniej jest potraktować badaną sieć jako układ wielozacisko wy (rys. 1) o 1, 2, 3 ..... g, ..... n - punktach zasilających i o I, II, III, ... λ ..... N - punktach odbiorczych.



Rys. 1



W sieci badanej na rys. 1 nie występują gałęzie "poprzeczne" odpowiadające pojemności linii i prądowi magnesującemu transformatorów. Prądy ładowania linii i ewentualnie prądy magnesowania zostały uwzględnione bądź w prądach odbiorczych, bądź w prądach zasilających.

Należy zwrócić uwagę na przyjęte dodatnie kierunki prądów - "do sieci" - również dla prądów odbiorczych. Takie jednolite przyjęcie dodatnich kierunków prądów dla zasilania i dla odbiorów powoduje bardziej jednolitą postać wzorów. Należy jednak o tym pamiętać przy podstawianiu wartości prądów - szczególnie prądów odbiorczych w ostateczne wzory.

Jeden z punktów zasilania traktujemy jako tzw. punkt odniesienia (punkt n na rys. 1). Napięcie między punktem n i pozostałymi punktami układu (n + N) - zaciskowego oznaczamy przez V i będziemy nazywali stratami napięcia.

W dodatku w oparciu o rys. 1 wyprowadzono następujące wyrażenie na straty sieciowe (porównaj wzór 41 i 40 w dodatku)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = p + jq = & \sum_{q=1}^{q=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} Z_{gk} J_g^x J_k + \sum_{q=1}^{q=n-1} (V_g' + jV_g'') J_g^x + \\ & + \sum_{q=1}^{q=n-1} (V_g' - jV_g'') J_g + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=N} \sum_{\delta=1}^{\delta=N} Z_{\gamma\delta} J_\gamma^x J_\delta \end{aligned} \quad (13)$$

Poniżej omówimy wyrażenie (13), przyjęte oznaczenia oraz sposób wyznaczania stałych  $Z_{gk}$ ,  $V_g'$ ,  $V_g''$ .

$\mathcal{P} = p + jq$  - są to straty sieciowe (p - straty mocy czynnej, q - straty mocy biernej) w danym stanie obciążeń prądowych źródeł i odbiorów.

$J_\alpha = J'_\alpha + J''_\alpha$  - prąd źródła  $1 \leq \alpha \leq n-1$  lub prąd odbioru  $1 \leq \alpha \leq N$ .  
 $J'_\alpha$  - składowa podłużna,  $J''_\alpha$  - składowa poprzeczna na prąd  $J_\alpha$ .

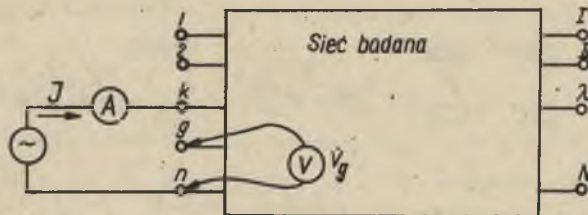
$J_\alpha^x$  - wartość sprzężona wielkości  $J_\alpha$ .

$Z_{gk} = R_{gk} + jX_{gk}$  - oporność wzajemna ( $g \neq k$ ) sieci między punktami  $g$  i  $k$ . Dla  $g = k$ ,  $Z_{gg}$  oznacza tzw. oporność własną sieci na zacisku  $g$ . Sposób wyznaczania oporności  $Z_{gk}$  będzie opisany niżej.

$V'_g = V_g e^{j\psi'_g}$  - strata napięcia w punkcie  $g$  dla specjalnego stanu pracy sieci, który będziemy nazywali stanem "prim".

$V''_g = V_g e^{j\psi''_g}$  - strata napięcia w punkcie  $g$  dla specjalnego stanu pracy sieci - stanu "wtór". Sposób wyznaczania strat  $V'_g$  i  $V''_g$  będzie opisany poniżej.

Oporności  $Z_{gk}$  zależą jedynie od oporności elementów sieci i jej konfiguracji. Zasadę wyznaczania oporności  $Z_{gk}$  ilustruje rys. 2.



Rys. 2

Zasilając układ jedynie na zaciskach  $n$  i  $k$ , mierzymy prąd  $J$  na zacisku  $k$  i stratę napięcia  $V_g$  między punktem  $n$  i  $g$ . Oporność  $Z_{gk}$  jest określona wyrażeniem

$$Z_{gk} = \frac{V_g}{J} \quad (14)$$

Przykładając zacisk woltomierza oznaczony strzałką, kolejno na zaciski  $1, 2, \dots, n-1$  wyznaczamy oporności  $Z_{1k}, Z_{2k}, \dots, Z_{n-1,k}$ .

Pozostałe oporności wyznacza się w analogiczny sposób. Np. oporności  $Z_{1\alpha}, Z_{2\alpha}, \dots, Z_{n-1\alpha}$ , wyznaczamy przy zasilaniu układu na zaciskach  $\alpha$  i  $n$  mierząc prąd na zacisku  $\alpha$  i straty napięcia punktów  $1, 2, \dots, n-1$ .

Należy tu zwrócić uwagę na następujące sprawy:

1. Z uwagi na zasadę wzajemności będzie zawsze

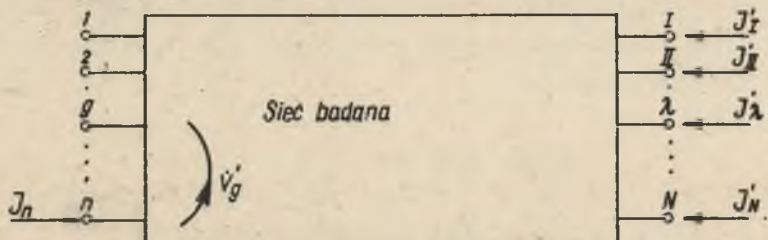
$$Z_{gk} = Z_{kg} \tag{15}$$

co może stanowić kontrolę pomiarów.

2. Wystarczy pomiarowe wyznaczenie oporności własnych i wzajemnych jedynie dla punktów zasilających. Ma to doniosłe znaczenie bowiem ogranicza znacznie (z reguły  $N > n$ ) ilość niezbędnych pomiarów.

3. Potrzebne są jedynie składowe czynne  $R_{gk}$  oporności  $Z_{gk}$ . W pomiarach analizatorowych najwygodniej jest posłużyć się do wyznaczenia oporności  $R_{gk}$  amperomierzem (jak na rys. 2) oraz watomierzem, którego cewka napięciowa włączona jest na zaciski  $n$  i  $g$ , rys. 2 natomiast cewka prądowa włączona jest na stałe w obwód źródła zasilania. W ten sposób watomierz wskazuje (w odpowiedniej skali) rzut wektora napięcia  $V_g$  na kierunku prądu  $J$ . Straty napięcia  $V'_g$  i  $V''_g$  odpowiednio w stanie "prim" i "wtór" zależą od konfiguracji sieci oraz prądów odbiorów - ich wartości i rozmieszczenia w sieci. Nie zależą one natomiast od rozmieszczenia i wartości prądów zasilających.

Ponieważ zajmujemy się ekonomicznym rozkładem obciążeń na zasilania, więc napięcia  $V'_g$  i  $V''_g$  są pewnymi parametrami stałymi. Stan "prim" schematycznie przedstawiony jest na rys. 3.



Rys. 3

Stan ten charakteryzuje się:

1. Przerwaniem wszystkich zasilających w punktach od 1 do n-1.
2. Przyłączeniem jednego generatora do punktu odniesienia n
3. Nastawieniem odbiorów w ten sposób, aby prądy odbierane były równe składowym podłużnym  $J_\lambda'$  prądów odbiorczych

$$(J_\lambda = J_\lambda' + j I_\lambda) .$$

Napięcia między punktem n i punktami 1, 2, ..... n-1 są poszukiwanymi stratami napięcia  $V_1', V_2', \dots, V_{n-1}'$ .

Stan "wtór" różni się od stanu "prim" jedynie tym, że prądy odbierane są równe składowym poprzecznym  $J_\lambda''$  prądów odbiorczych  $J_\lambda$ . Napięcie  $V_g'$  i  $V_g''$ , wyznacza się bądź pomiarowo, realizując stan "prim" i "wtór" na analizatorze, zgodnie z rys. 3, bądź oblicza rachunkowo.

Po tych uwagach dotyczących przyjętych oznaczeń i sposobu wyznaczania stałych  $Z_{gk}$ ,  $V_g'$  i  $V_g''$  powróćmy do równania (13) określającego straty sieciowe. Jak widać można wydzielić trzy człony w równaniu (13):

- a) człon pierwszy stanowi straty zależne jedynie od rozdziału obciążeń na źródła. Ta część strat nie zależy od wartości poszczególnych prądów obciążeniowych ani od rozmieszczenia odbiorów sieci;
- b) człon drugi stanowi straty zależne zarówno od rozdziału obciążeń na źródła jak i od odbiorów;
- c) wreszcie człon trzeci, są to straty zależne jedynie od rozmieszczenia i wielkości odbiorów. Dla danego stanu punktów odbiorczych niezależnie od rozkładu obciążeń na źródła będzie:

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=N} \sum_{\delta=1}^{\delta=N} Z_{\gamma\delta} \bar{J}_\gamma \bar{J}_\delta = K = \text{const} \quad (16)$$

Wielkości  $K$  nie będziemy w dalszym ciągu bliżej określać. W ekonomicznym rozdziale obciążeń interesują nas pochodne strat sieciowych, a więc wielkość  $K$  w pochodnych nie będzie występowała.

Równanie (13) określające straty sieciowe nie może być bezpośrednio wykorzystane w dalszych rozważaniach, bowiem zasilania są reprezentowane w tym równaniu prądami, a nie mocami. Oznaczając przez

$$\dot{U}_g = U_g e^{j\psi_g} \quad (17)$$

napięcie punktu zasilającego  $g$  (porównaj oznaczenia na rys.1) i korzystając z zależności

$$S_g = P_g + jQ_g = \sum_g^x U_g \quad (18)$$

można wyrazić prądy przez moce i napięcia.

Będzie więc:

$$J_g = \frac{\sum_g^x S}{\dot{U}_g}; \quad \sum_g^x J_g = \frac{S}{U_g} \quad (19) \text{ i } (20)$$

Podstawiając powyższe wyrażenia w równanie (13) po dokonaniu szeregu przekształceń patrz dodatek otrzymujemy następującą postać wzoru określającego straty mocy czynnej w funkcji mocy czynnych i biernych wydawanych przez poszczególne źródła

$$\begin{aligned}
 P = & \sum_{q=1}^{q=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{R_{gk}}{U_g U_k} [(P_g P_k + Q_g Q_k) \cos(\theta_g - \theta_k) + \\
 & + (P_k Q_g - P_g Q_k) \sin(\theta_g - \theta_k)] \\
 + & \sum_{q=1}^{q=n-1} \frac{2}{U_g} [V' \cos \psi'_g (P_g \cos \theta_g + Q_g \sin \theta_g) + V_g'' \cos \psi_g'' \\
 & (P_g \sin \theta_g - Q_g \cos \theta_g)] + B_0 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Należy tu podkreślić, że przy wyprowadzeniu wzoru (13) i (21) określających straty sieciowe nie poczyniono żadnych założeń upraszczających. Wzory powyższe są wzorami dokładnymi. Aby znaleźć pochodne cząstkowe strat mocy czynnej względem mocy czynnej i biernej wydawanej przez elektrownię  $g$  różniczkujemy wyrażenie (21).

$$\frac{\partial p}{\partial P_g} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{2R_{gk}}{U_g U_k} [P_k \cos(\theta_g - \theta_k) - Q_k \sin(\theta_g - \theta_k)] + \\ + \frac{2}{U_g} V'_g \cos \psi'_g \cos \theta_g + \frac{2}{U_g} V''_g \cos \psi''_g \sin \theta_g. \quad (22)$$

oraz

$$\frac{\partial p}{\partial Q_g} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{2R_{gk}}{U_g U_k} [Q_k \cos(\theta_g - \theta_k) + P_k \sin(\theta_g - \theta_k)] + \\ + \frac{2}{U_g} V'_g \cos \psi'_g \sin \theta_g - \frac{2}{U_g} V''_g \cos \psi''_g \cos \theta_g \quad (23)$$

Należy zaznaczyć, iż wzory (22) i (23) nie są wzorami dokładnymi. Są one słuszne pod warunkiem, iż napięcia  $U_g U_k$  oraz moce bierne  $Q_g$  i  $Q_k$  są stałe i niezależne od  $P_g$  względnie  $Q_g$ . Ponieważ w rzeczywistości takie zależności istnieją, podane formuły należy uważać za przybliżone.

Oznaczając

$$B_{gk} = \frac{R_{gk}}{U_g U_k} [\cos(\theta_g - \theta_k) - S_k \sin(\theta_g - \theta_k)]; \quad S_k = \frac{Q_k}{P_k}$$

$$B_{gd} = \frac{1}{U_g} (V'_g \cos \psi'_g \cos \theta_g + V''_g \cos \psi''_g \sin \theta_g) \quad (24)$$

można napisać

$$\frac{\partial p}{\partial V_g} = 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} B_{gk} P_k + 2B_{go} \quad (25)$$

w analogiczny sposób można przedstawić pochodne  $\frac{\partial p}{\partial Q_g}$ .

Przechodząc do dyskusji wyprowadzonych wzorów (24) określających współczynnik  $B_{gk}$  i  $B_{go}$  należy przede wszystkim przedyskutować możliwość ich praktycznego zastosowania. Wyrażenie (22) na pochodną strat będzie o tyle praktycznie stosowalne o ile współczynniki  $B_{gk}$  i  $B_{go}$  będą łatwe do określenia w zakresie praktycznie zdarzających się stanów pracy systemu.

Istotne znaczenie mają współczynniki  $B_{gk}$  i ich zmienność, gdyż wchodzi one jako czynnik do tej części wzoru na przyrost strat, która zależna jest od wielkości zasilania. Analizując zmienność współczynników  $B_{gk}$  należy przede wszystkim stwierdzić, iż zależą one od  $R_{gk}$ . Oznacza to, iż będą się one zmieniać istotnie w zależności od układu połączeń sieci. Należy jednak zaznaczyć, iż chodzi tu o układ połączeń jedynie tych fragmentów sieci, które mają wpływ na wartości  $R_{gk}$ , czyli sieci wiążących poszczególne źródła zasilania. W praktyce należy się liczyć, iż każda istotniejsza zmiana w schemacie połączeń podstawowej sieci wiążącej będzie wymagała wyznaczenia nowych wartości współczynników  $B_{gk}$ . Współczynniki  $B_{gk}$  zależą jednak również od stanu sieci. Jak widać ze wzoru (24) zależą one od wartości bezwzględnej napięć w punktach zasilania  $U_g$ ,  $U_k$  oraz kątów fazowych tych napięć  $(\theta_g - \theta_k)$ . Wartości napięć w punktach zasilania oraz kąty fazowe mogą się zmienić dość znacznie w przekroju doby. Szczególnie ma to miejsce w wypadku elektrowni o charakterze szczytowym.

Zmienność ta jest jednak na ogół znana, występuje nie przypadkowo, ale związana jest z określonymi porami doby. Ponadto można przyjąć z dużą dokładnością dla danego czasokresu doby (np. noc, dzień, wieczór) niezmiennosc napięć i ich kątów fazowych. W rezultacie, w praktyce okaże się koniecznym wyznaczenie dwóch lub trzech kompletów współczynników  $B_{gk}$  dla do-

by. Wpływ zmienności sezonowej na współczynniki  $B_{gk}$  nie jest duży. Może się jednak okazać, iż koniecznym będzie obliczać współczynniki co kwartał lub dwa razy do roku w zimie i w letnim okresie remontowym. Należy je poza tym sprawdzić i skorygować przy wejściu do ruchu większych jednostek wytwórczych lub całych elektrowni.

Współczynnik  $B_{go}$  stanowi praktycznie część stałą przyrostu strat danej elektrowni. Jak widać jest on praktycznie stały dla danego stanu odbiorów. Jego zależność od rozdziału obciążeń jest znikoma, gdyż  $\theta_g$  zmienia się stosunkowo nieznacznie. Można więc łatwo, posługując się np. analizatorem zmienno-prądowym wyznaczyć zmienność współczynników  $B_{go}$  w przekroju doby, drogą zmiany obciążenia wg wykresów dobowych i wyznaczenia  $B_{go}$  poprzez pomiar napięć  $V_g'$  i  $V_g''$ .

Wdzielenie w postaci współczynników  $B_{go}$  wpływu zmienności odbiorów pozwala na nieczynienie dodatkowych założeń odnośnie odbiorów, gdyż umożliwia to we uwzględnienie tej zmienności. Stanowi to o pewnym ogólniejszym charakterze omówionej metody w porównaniu z metodami klasycznymi. W praktyce należy się liczyć ze stosowaniem przynajmniej dwóch lub trzech kompletów współczynników w ciągu doby oraz dwóch kompletów dobowych w ciągu roku.

Na zakończenie pragniemy podać uwagę na temat zmienności wartości liczbowych pochodnych  $\frac{\partial p}{\partial P_k}$  w zależności od wyboru punktu odniesienia. Przy zmianie punktu odniesienia, ulegają zmianie wartości parametrów  $Z_{gk}$ ,  $V'$  i  $V''$  występujące w równaniu (13) a więc w następnych. Zmienia się więc postać funkcji zmieniają się wartości współczynników  $B_{gk}$  i  $B_{go}$ . Przy dwóch różnych punktach odniesienia przyjętych w rozwiązaniu określonego problemu otrzymuje się mimo to ten sam rozdział obciążeń na elektrownie, co autorzy sprawdzili drogą przeliczenia konkretnego przykładu liczbowego. Wykazanie tej własności na drodze rozważań analitycznych wydaje się bardzo kłopotliwe i pracochłonne.



D o d a t e k

4. Wyprowadzenie wzoru na straty sieciowe mocy w układzie elektroenergetycznym

4.1. Równanie macierzowe układu elektroenergetycznego

Sieć badana dla której chcemy określić straty sieciowe schematycznie przedstawia rys. 1. Punkt n jest tzw. punktem odniesienia, jego napięcie względem szyny zerowej wynosi  $U_n$ . Napięcie dowolnego punktu zasilania lub odbioru określone jest równaniem

$$U_\alpha = U_n + V_\alpha \quad (26)$$

gdzie  $V_\alpha$  - jest stratą napięcia mierzona między punktem  $\alpha$ , a punktem odniesienia. Mamy oczywistą zależność

$$\sum_{g=1}^{q=n} J_g + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} J_\lambda = 0 \quad (27)$$

która będzie wykorzystana w dalszych rozważaniach.

Równanie sieci z rys. 1 jako układu o  $n+N$  zaciskach zewnętrznych ma następującą postać

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ \hline V_I \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n-1} & | & Z_{1I} & Z_{1II} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n-1} & | & Z_{2I} & Z_{2II} & \dots & Z_{2N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & | & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & | & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ Z_{n-11} & Z_{n-12} & \dots & Z_{n-1n-1} & | & Z_{n-1I} & Z_{n-1II} & \dots & Z_{n-1N} \\ \hline Z_{I1} & Z_{I2} & \dots & Z_{In-1} & | & Z_{II} & Z_{III} & \dots & Z_{IN} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & | & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & | & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{Nn-1} & | & Z_{NI} & Z_{NII} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n-1} \\ \hline J_I \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix}$$

Oporności  $Z_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + jX_{\alpha\beta}$  występujące w macierzy kwadratowej są to tzw. oporności własne ( $\alpha=\beta$ ) i wzajemne ( $\alpha \neq \beta$ ) sieci badanej. Oporności te wyznacza się pomiarowo realizując specjalne stany pracy układu badanego.

Te specjalne stany pracy są określone macierzą prądową, w której wszystkie elementy (prądy) z wyjątkiem jednego są równe zeru.

Na rys. 2 podano zasadę wyznaczania oporności występujących w kolumnie K-tej macierzy oporności ( $J_1 = J_2 = \dots = J_{K-1} = \dots = 0$ ). Zasadę pomiarowego wyznaczania oporności  $Z_{\alpha\beta}$  opisano w punkcie 3.

Stosując podział na podmacierze - tak jak to zaznaczono w równaniu (28) - równanie to można zapisać w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ \mathbf{V}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{gg} & \mathbf{Z}_{g\lambda} \\ \mathbf{Z}_{\lambda g} & \mathbf{Z}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_g \\ \mathbf{J}_\lambda \end{bmatrix} \quad (28a)$$

gdzie poszczególne litery podane tłustym drukiem oznaczają odpowiednie podmacierze.

Macierz opornościowa (kwadratowa) w równaniu (29) jest macierzą symetryczną, co wynika z zasady wzajemności. Będzie więc (porównaj równanie (15)).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{gg}^T & \mathbf{Z}_{\lambda\lambda}^T \\ \mathbf{Z}_{g\lambda}^T & \mathbf{Z}_{\lambda g}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{gg} & \mathbf{Z}_{\lambda\lambda} \\ \mathbf{Z}_{\lambda g} & \mathbf{Z}_{g\lambda} \end{bmatrix} \quad (29)$$

gdzie literą T oznaczono macierz transponowaną. Oczywiście macierze  $\mathbf{Z}_{gg}$  i  $\mathbf{Z}_{\lambda\lambda}$  są macierzami kwadratowymi, a macierz  $\mathbf{Z}_{g\lambda}$  jest w ogólnym przypadku ( $n-1=N$ ) macierzą prostokątną.

4.2. Straty mocy w sieci

Biorąc pod uwagę oznaczenia przyjęte na rys. 1 wyrażenie

$$\dot{S}_g = \overset{x}{J}_g \cdot \dot{U}_g = P_g + jQ_g$$

określa moc dosyłałą do sieci badanej na zacisku g.

Podobnie

$$\dot{S}_\lambda = \overset{x}{J}_\lambda \cdot U_\lambda = P_\lambda + jQ_\lambda$$

jest mocą dosyłałą do sieci badanej na zacisku odbiorczym. (Ponieważ punkt  $\lambda$  jest punktem odbiorczym  $P_\lambda < 0$ ). Suma mocy do syłanych do sieci badanej jest równa oczywiście stratom sieciowym  $\dot{\mathcal{H}}$ . Będzie więc:

$$\dot{\mathcal{H}} = p + jq = \sum_{q=1}^{q=n} \overset{x}{J}_g \cdot \dot{U}_g + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \overset{x}{J}_\lambda \dot{U}_\lambda \quad (30)$$

Korzystając z zależności (26) i (27) przekształcimy wyrażenie (30)

$$\dot{\mathcal{H}} = U_n \left( \sum_{q=1}^{q=n} \overset{x}{J}_g + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} \overset{x}{J}_\lambda \right) + \sum_{q=1}^{q=n} \overset{x}{J}_g \dot{V}_g \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} \overset{x}{J}_\lambda \dot{V}_\lambda$$

Wyrażenie w nawiasie zgodnie z równaniem (27) jest równe zero. Ponieważ  $\dot{V}_n = 0$ , będzie więc

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_{q=1}^{q=n-1} \overset{x}{J}_g \dot{V}_g + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} \overset{x}{J}_\lambda \dot{V}_\lambda \quad (31)$$

Równanie (31) uwzględniające macierze występujące w równaniach (28) i (28a) można zapisać w następujący sposób

$$\vec{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} \vec{J}_1^x & \vec{J}_2^x & \dots & \vec{J}_{n-1}^x & \vec{J}_I^x & \vec{J}_{II}^x & \dots & \vec{J}_N^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ v_I \\ v_{II} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{J}_g^x & \vec{J}_\lambda^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ V_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}_g^x & \vec{J}_\lambda^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{gg} & Z_{g\lambda} \\ Z_{\lambda g} & Z_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_g \\ J_\lambda \end{bmatrix}$$

A więc

$$\dot{\mathcal{N}} = \vec{J}_g^x Z_{gg} J_g + \vec{J}_g^x Z_{g\lambda} J_\lambda + \vec{J}_\lambda^x Z_{\lambda g} J_g + \vec{J}_\lambda^x Z_{\lambda\lambda} J_\lambda \quad (32)$$

Równanie (32) określa straty sieciowe w funkcji prądów zasilających i odbiorczych.

Celem naszych rozważań jest wyznaczenie strat sieciowych w funkcji rozkładu obciążeń na poszczególne punkty zasilające elektrownie, przy zadanym stanie prądów odbiorczych. Dlatego przekształcimy jeszcze wyrażenie (32). Zauważmy przede wszystkim, że iloczyny macierzowe  $Z_{g\lambda} J_\lambda$  oraz  $J_\lambda^x Z_{\lambda g}$  są to odpowiednio macierz kolumnowa i wierszowa pewnych strat napięcia, które jak okazuje się można wyznaczyć bądź pomiarem analitycznym, bądź obliczeniem zakładając specjalne stany badanej sieci.

Przyjmując jakikolwiek kierunek (najwygodniej przyjęć kąt fazowy napięcia  $U_n$  jako równy zeru), odniesienia można napisać

$$\begin{aligned}
 J_I &= J'_I + jJ''_I \\
 J_{II} &= J'_{II} + jJ''_{II} \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_\lambda &= J'_\lambda + jJ''_\lambda \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_N &= J'_N + jJ''_N
 \end{aligned}$$

lub w formie macierzowej

$$J_\lambda = J'_\lambda + j J''_\lambda \tag{33}$$

Elementami macierzy  $J'_\lambda$  i  $J''_\lambda$  są liczby rzeczywiste będące odpowiednio składowymi podłużnymi i poprzecznymi prądów odbiorczych.

Rozpatrzmy teraz dwa specjalne stany pracy układu badanego. Stan pierwszy - stan "prim" będzie określony warunkami

$$J_g = 0; \quad J_\lambda = J'_\lambda \tag{34}$$

Na podstawie równania (28a) otrzymamy

$$V'_g = Z_{g\lambda} J'_\lambda \tag{35}$$

Stan drugi - stan "wtór" będzie określony warunkami

$$J_g = 0; \quad J_\lambda = J''_\lambda \tag{36}$$

Na podstawie równania (28a) będzie

$$V''_g = Z_{g\lambda} J''_\lambda \tag{37}$$

Jak widać bezpośrednio z równań 33-37 oraz uwzględniając, że

$$Z_{g\lambda}^T = Z_{\lambda g}$$

otrzymamy

$$Z_{g\lambda} J_{\lambda} = Z_{g\lambda} J_{\lambda}' + j Z_{g\lambda} J_{\lambda}'' = V_g' + j V_g'' \quad (38)$$

oraz

$$\begin{aligned} \overset{x}{J}_{\lambda}^T Z_{\lambda g} &= (Z_{\lambda g}^T \overset{x}{J}_{\lambda})^T = (Z_{g\lambda} \overset{x}{J}_{\lambda})^T = \\ &= (Z_{g\lambda} J_{\lambda}' - j Z_{g\lambda} J_{\lambda}'')^T = V_g'^T - j V_g''^T \end{aligned} \quad (39)$$

Uwzględniając równania (38) i (39) oraz oznaczając przez (po równaj równanie 16)

$$\dot{K} = \overset{x}{J}_{\lambda}^T Z_{\lambda\lambda} J_{\lambda} \quad (40)$$

czwarty człon w wyrażeniu (32), równania na straty sieciowe przyjmie postać

$$\pi = \overset{x}{J}_g^T Z_{gg} J_g + \overset{x}{J}_g^T (V_g' + j V_g'') (V_g' - j V_g'')^T J_g + \dot{K} \quad (41)$$

Jak widać z tego równania, określenie zależności strat sieciowych od rozkładu obciążeń na elektrownie - zasilania - wymaga

1. Wyznaczenia elementów macierzy  $Z_{gg}$  w sposób pomiarowy (lub obliczeniowy) wg zasad przedstawionych w p. 3.
2. Wyznaczenie pomiarowe lub obliczeniowe elementów macierzy  $V_g'$   $V_g''$ .

Wyznaczenie elementów macierzy strat napięcia  $V'_g$  i  $V''_g$  można przeprowadzić bądź pomiarowo, bądź obliczeniem. Zasada takich pomiarów lub obliczeń wynika bezpośrednio z warunków określających (34 i 36) stany "prim" i "wtór" i została opisana w punkcie 3. Stan "prim" przedstawia rys. 3.

4.3. Wprowadzenie mocy zasilających do wyrażenia na straty sieciowe

Korzystając z oczywistych zależności (19) podanych w punkcie 3 po podstawieniu ich w wyrażenie (41) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \dot{M} = & \left[ \frac{\dot{S}_1}{U_1} \dots \frac{\dot{S}_g}{U_g} \dots \frac{\dot{S}_{n-1}}{U_{n-1}} \right] Z_{gg} \begin{bmatrix} \frac{S_1}{U_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{S_{n-1}}{U_{n-1}} \end{bmatrix} + \\
 & + \left[ \frac{S_g}{U_1} \dots \frac{S_g}{U_g} \dots \frac{S_{n-1}}{U_{n-1}} \right] (\dot{V}'_g + \dot{V}''_g)(\dot{V}'_g - \dot{V}''_g)^T \begin{bmatrix} \frac{S_1}{U_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{S_{n-1}}{U_{n-1}} \end{bmatrix} + \dot{K} \quad (42)
 \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie można zapisać w postaci sumacyjnej

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} = \sum_g \sum_k \dot{z}_{gk} \frac{S'_g \dot{S}_k}{U_g \dot{U}_k} + \sum_g (\dot{V}'_g + j\dot{V}''_g) \frac{\dot{S}_g}{U_g} + \\ + \sum_g (\dot{V}'_g - j\dot{V}''_g) \frac{\dot{S}_g}{U_g} + \dot{K} \end{aligned}$$

W pierwszym członie tego wyrażenia, a więc członie obejmującym sumę podwójną, można wydzielić elementy o tych samych wskaźnikach, (gg) oraz pamiętając, że  $Z_{kg} = Z_{gk}$  (równanie 15) zgrupować elementy o wskaźnikach takich samych, ale ustawionych w odwrotnym porządku (gk ÷ kg). Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} = \sum_{g=1}^{g=n-1} \dot{z}_{gg} \frac{\dot{S}_g \dot{S}_g}{U_g \dot{U}_g} + \sum_{gk (g \neq k)} \dot{z}_{gk} \left( \frac{\dot{S}_k \dot{S}_k}{U_g \dot{U}_k} + \frac{\dot{S}_k \dot{S}_k}{U_g \dot{U}_k} \right) + \\ + \sum_{g=1}^{g=n-1} \dot{V}'_g \left( \frac{\dot{S}_g}{U_g} + \frac{\dot{S}_g}{U_g} \right) + j \sum_{g=1}^{g=n-1} \dot{V}''_g \left( \frac{\dot{S}_g}{U_g} - \frac{\dot{S}_g}{U_g} \right) + \dot{K} \end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu w członie drugim należy przeprowadzić sumowanie dla różnych par (para gk = para kg) wskaźników g i k, w których  $g \neq k$ .

Oznaczając przez  $\text{Re} \{A\}$  i  $\text{Im} \{A\}$  odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną wielkości A otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} = \sum_{g=1}^{g=n-1} \dot{z}_{gg} \frac{P_g^2 + Q_g^2}{U_g^2} + \sum_{gk} 2 \dot{z}_{gk} \text{Re} \left\{ \frac{\dot{S}_g \dot{S}_k}{U_g \dot{U}_k} \right\} + \\ + \sum_{g=1}^{g=n-1} 2 \dot{V}'_g \text{Re} \left\{ \frac{\dot{S}_g}{U_g} \right\} + j \sum_{g=1}^{g=n-1} 2 \dot{V}''_g \text{Im} \left\{ \frac{\dot{S}_g}{U_g} \right\} + \dot{K} \quad (43) \end{aligned}$$



Po wprowadzeniu przyjętych oznaczeń (równanie 17, 18 i spis oznaczeń pod wzorem 13) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \sum_{g=1}^{g=n-1} \frac{Z_{gg}}{U_g^2} (P_g^2 + Q_g^2) + \sum_{gk} 2 Z_{gk} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(P_g + jQ_g)(P_k - jQ_k)}{U_g U_k \cdot e^{j(\theta_g - \theta_k)}} \right\} + \\
 &+ \sum_{g=1}^{g=n-1} 2 \dot{V}'_g \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_g + jQ_g}{U_g \cdot e^{j\theta_g}} \right\} + j \sum_{g=1}^{g=n-1} 2 \dot{V}''_g \operatorname{Im} \left\{ \frac{P_g + jQ_g}{U_g \cdot e^{j\theta_g}} \right\} + \dot{K} = \\
 &= \sum_{g=1}^{g=n-1} \frac{Z_{gg}}{U_g^2} (P_g^2 + Q_g^2) + \sum_{gk} \frac{2Z_{gk}}{U_g U_k} \left[ (P_g P_k + Q_g Q_k) \cos(\theta_g - \theta_k) + \right. \\
 &\quad \left. + (P_g Q_k - P_k Q_g) \sin(\theta_g - \theta_k) \right] + \\
 &+ \sum_{g=1}^{g=n-1} \frac{2\dot{V}'_g}{U_g} P_g \cos \theta_g + Q_g \sin \theta_g + \sum_{g=1}^{g=n-1} j \frac{2\dot{V}''_g}{U_g} (Q_g \cos \theta_g - P_g \sin \theta_g) + \dot{K}
 \end{aligned}$$

Jaś łatwo zauważyć, można łącząc dwa pierwsze człony powyższego równania zastosować sumowania podwójne. Otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \sum_g \sum_k \frac{Z_{gk}}{U_g U_k} \left[ (P_g P_k + Q_g Q_k) \cos(\theta_g - \theta_k) + \right. \\
 &\quad \left. + (P_k Q_g - P_g Q_k) \sin(\theta_g - \theta_k) \right] + \sum_g \frac{2\dot{V}'_g}{U_g} \\
 &\quad (P_g \cos \theta_g + Q_g \sin \theta_g) + \\
 &\quad + \sum_g \frac{2\dot{V}''_g}{U_g} (P_g \sin \theta_g - Q_g \cos \theta_g) + \dot{K} \tag{44}
 \end{aligned}$$

Biorąc część rzeczywistą powyższego wyrażenia otrzymujemy ostatecznie wzór na straty mocy czynnej

$$\begin{aligned}
 p = & \sum_{g=1}^{g=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{R_{gk}}{U_g U_k} \left[ (P_g P_k + Q_g Q_k) \cos(\theta_g - \theta_k) + \right. \\
 & \left. + (P_k Q_g - P_g Q_k) \sin(\theta_g - \theta_k) \right] + \\
 & + \sum_{g=1}^{g=n-1} \frac{2}{U_g} \left[ V_g' \cos \psi_g (P_g \cos \theta_g + Q_g \sin \theta_g) + V_g'' \cos \psi_g'' \right. \\
 & \left. (P_g \sin \theta_g - Q_g \cos \theta_g) \right] + B_0 \quad (45)
 \end{aligned}$$

gdzie przez  $B_0$  oznaczono część rzeczywistą  $K$

$$B_0 = \operatorname{Re} \{ K \} \quad (45)$$

Rękopis złożono w redakcji w grudniu 1963 r.

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ В СЕТЯХ

Резюме

В статье приведены общие условия экономического распределения нагрузок с учетом потерь в сетях, выведены при выполнении уравнений балансов активной и реактивной мощностей.

Рассмотрено выбор "балансирующей точки". Выведена новая форма выражения для сетевых потерь, очень подходящая с точки зрения техники измерений на сетевом анализаторе. Проведен анализ практических преимуществ нового метода.

ECONOMICAL LOAD DIVISION CONSIDERING NETWORKS LOSSES

Summary

Description of the general conditions of the economical load division. Consideration of the networks losses derived at the satisfying the equation of the active and reactive power balance. Discussion about the selection of "the balance point".

A new form of the expression of the network losses was derived which is very useful from the point of view of measurements technique with the network analyser. There were analysed practical advantages of this new method.