

LESZEK CZARNECKI

Katedra Podstaw Elektrotechniki

ANALITYCZNO-GRAFICZNA METODA ROZWIĄZYWANIA  
OBWODÓW Z ZAWOREM, ELEMENTAMI BIERNYMI  
I SINUSOIDALNYM NAPIĘCIEM ZASILANIA  
W STANIE QUASI USTALONYM

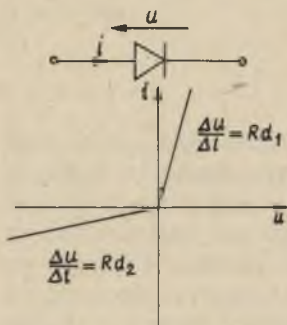
Streszczenie: Wykazano, że stan układu z zaworem rzeczywistym jest w obszarze przewodzenia i zwrotnym zawsze sumą stanu ustalonego i przejściowego. Wyprowadzono równania prądu zaworu w obu obszarach pracy dla obwodu oporowo-pojemnościowego i oporowo-indukcyjnego. Rozłożono te równania na część wyznaczalną analitycznie i część wyznaczalną graficznie. Podano graficzną konstrukcję rozwiązania.

Poniższe rozważania dotyczą obwodów z zaworem, którego rzeczywistą charakterystykę  $i = f(u)$  linearyzujemy (rys. 1) dwoma półprostymi, mianowicie:

$$\text{dla } u > 0 \quad i = \frac{1}{R_{d1}} u$$

$$u < 0 \quad i = \frac{1}{R_{d2}} u$$

gdzie  $R_{d1}$  i  $R_{d2}$  są średnimi wartościami oporności dynamicznej w obszarze przewodzenia i zaporowym zaworu rzeczywistego.



Rys. 1

Lineryzacja ta tym lepiej przybliża charakterystykę rzeczywistą im dalej, poza jej część paraboliczną, sięga maksymalna wartość prądu w obwodzie.

Przyjęcie dwuodcinkowej linearyzacji charakterystyki zaworu pozwala na traktowanie sieci z zaworem między kolejnymi zmianami zwrotu prądu jako obwodu obszarami liniowego, natomiast momenty przejścia prądu zaworu przez zero jako zmiany komutacyjne, mianowicie:

$$\text{gdy } \lim_{t \rightarrow (t_1^-) + nT} i(t) = 0 \text{ oraz } \left. \frac{di}{dt} \right| > 0 \quad t = (t_1^-) + nT$$

oporność zaworu zmienia się z  $R_{d2}$  na  $R_{d1}$

$$\text{gdy } \lim_{t \rightarrow (t_2^-) + nT} i(t) = 0 \text{ oraz } \left. \frac{di}{dt} \right| < 0 \quad t = (t_2^-) + nT$$

oporność zaworu zmienia się z  $R_{d1}$  na  $R_{d2}$ .

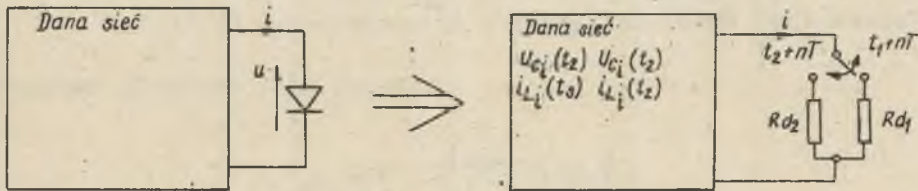
Chwile  $t_1 + nT$  oraz  $t_2 + nT$  są więc momentami komutacji.

W momentach tych stan elektryczny sieci opisany jest tymi wielkościami, które ze względów energetycznych zmieniają się w sposób ciągły a więc napięciami na kondensatorach i prądami w cewkach indukcyjnych.

Dowolnie złożoną sieć z jednym elementem zaworowym możemy więc w myśl powyższych rozważań zastąpić układem z kluczem (rys. 2).

Każde przejście prądu zaworu przez zero oznacza w takim obwodzie komutację i początek stanu nieustalonego. Jednakże po

dostatecznie długim czasie od momentu załączenia układu  $i(t) = i(t + T)$ , mimo istnienia w każdym okresie  $T$  dwóch stanów nieustalonych. Stan ten będzie stanem quasi ustalonym i do takiego odnoszą się dalsze rozważania.

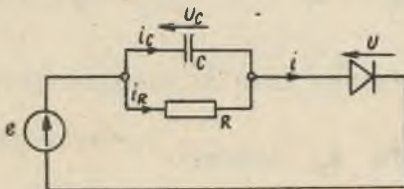


Rys. 2

Przebiegi po każdej kolejnej komutacji są sumą składowej ustalonej w konkretnym obszarze zaworu i składowej przejściowej powstającej w momencie komutacji, przy przejściu do tego obszaru. Wartości początkowe składowych przejściowych wynikają z warunków brzegowych między obszarem przewodzenia i zaporowym oraz z praw komutacji. Ponieważ składowe ustalone w obu obszarach będą różne, oraz w stanie quasi ustalonym będą różne, lecz okresowe względem  $T$  składowe przejściowe, układ posiada dwa różne rozwiązania dla obszaru przewodzenia i zaporowego.

Składowe ustalone, a także stałe czasowe składowych przejściowych wyznaczamy dla obu obszarów, korzystając z założonej liniowości, analitycznie. Dla wyznaczenia wartości członów przejściowych w momentach komutacji wygodnie jest posłużyć się metodą graficzną.

1. Znajdźmy czasowy przebieg prądu zaworu w obwodzie z pojemnością (rys. 3).

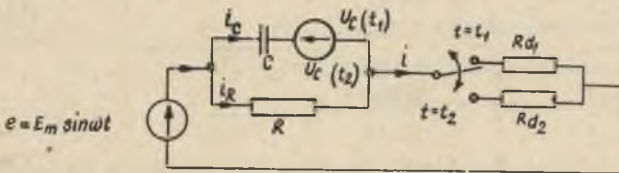


Rys. 3

Analizę przeprowadzamy dla stanu quasi ustalonego, możemy się więc ograniczyć do badania jednego okresu  $T$ . Początek czasu względnego ( $t = 0$ ) przyjmujemy w chwili gdy  $e = 0$  i  $\frac{de}{dt} > 0$  czyli

$$e = E_m \sin \omega t$$

Wprowadzamy obwód zastępczy z kluczem (rys. 4)



Rys. 4

Opisują go równania:

$$E_m \sin \omega t = \frac{1}{C} \int i_C dt + u_C(t_k) + i_k \cdot R_{d_k} \quad (1)$$

$$E_m \sin \omega t = i_{R_k} R + i_k R_{d_k} \quad (2)$$

$$i_{C_k} + i_{R_k} = i_k \quad (3)$$

Różniczkując równanie (1) i wstawiając (1) i (2) do (3) otrzymamy

$$R_{d_k} C \frac{di_k}{dt} + \left( \frac{R_{d_k}}{R} + 1 \right) i_k = E_m \left( \frac{1}{R} \sin \omega t + \omega C \cos \omega t \right) \quad (4)$$

Wskaźnik  $k = 1, 2$  dotyczy kolejno obszaru przewodzenia i zaporowego.

Składowa ustalona prądu  $i_k$  wynosi:

$$i_{uk} = J_{mk} \sin(\omega t + \varphi_k) \quad (5)$$

gdzie

$$J_{mk} = \frac{E_m}{R + R_{dk}} \sqrt{\frac{1 + (\omega CR)^2}{1 + \left(\omega \frac{R_{dk} \cdot R}{R_{dk} + R} C\right)^2}} \quad (6)$$

$$\varphi_k = \varphi_k^* - \varphi_k^* = \text{arc tg } \omega CR - \text{arc tg } \omega C \frac{R \cdot R_{dk}}{R + R_{dk}} \quad (7)$$

Natomiast składowa przejściowa:

$$i_{pk} = A_k \cdot e^{-\frac{t - t_k}{T_k}} \quad \text{dla } t > t_k$$

gdzie

$$T_k = \frac{R \cdot R_{dk}}{R + R_{dk}} \quad (8)$$

Prąd zaworu w każdym z obszarów wynosi

$$i_k = i_{uk} + i_{pk} \quad (9)$$

W momencie komutacji wartość prądu zaworu:

$$i_k(t_k) = \frac{1}{R_{dk}} [e(t_k) - u_C(t_k)] = 0 \quad (10)$$

Czyli

$$e(t_k) - u_C(t_k) = 0 \quad (11)$$

i

$$A_k = -J_{mk} \sin(\omega t_k + \varphi_k) \quad (12)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$i_k = J_{mk} \left[ \sin(\omega t + \varphi_k) - \sin(\omega t_k + \varphi_k) e^{-\frac{t - t_k}{T_k}} \right] \quad (13)$$

Równanie to opisuje przebieg czasowy prądu w obu obszarach pracy zaworu. Wynika z niego, że dla stanu quasi ustalonego prąd zaworu ma charakter ciągły. Jest on równy sumie: półokresowych prądów sinusoidalnych o różnych amplitudach i fazach oraz wykładniczo malejących prądów przejściowych. Wartość początkowa prądu przejściowego jest równa wartości chwilowej składowej ustalonej, tego obszaru do którego przechodzi zawór, w chwili gdy prąd w obszarze poprzednim maleje do zera. Mamy zatem kolejno dla obszaru przewodzenia i zaporowego:

$$i_1 = Jm_1 \left[ \sin(\omega t + \varphi_1) - \sin(\omega t_1 + \varphi_1) e^{\frac{-t + t_1}{T_1}} \right] \quad (14)$$

gdzie  $t_1$  - moment przejścia do obszaru przewodzenia.

Ale

$$\lim_{t \rightarrow (t_2^-)} i_1(t) = 0$$

stąd

$$\sin(\omega t_2 + \varphi_1) - \sin(\omega t_1 + \varphi_1) e^{\frac{-t_2 + t_1}{T_1}} = 0 \quad (15)$$

dla  $t$  dążącego do  $(t_2^+)$  zawór przechodzi do pracy w obszarze zaporowym i powstaje składowa przejściowa:

$$i_{p2}(t_2) = -Jm_2 \sin(\omega t_2 + \varphi_2) \quad (16)$$

Czasowy przebieg prądu zaworu:

$$i_2 = Jm_2 \left[ \sin(\omega t + \varphi_2) - \sin(\omega t_2 + \varphi_2) e^{\frac{-t + t_2}{T_2}} \right] \quad (17)$$

Podobnie jak poprzednio

$$\lim_{t \rightarrow (t_1^-)} i_2(t) = 0$$

stąd

$$\sin(\omega t_1 + \varphi_2) - \sin(\omega t_2 + \varphi_2)e^{\frac{-t_1 + t_2}{T_2}} = 0 \quad (18)$$

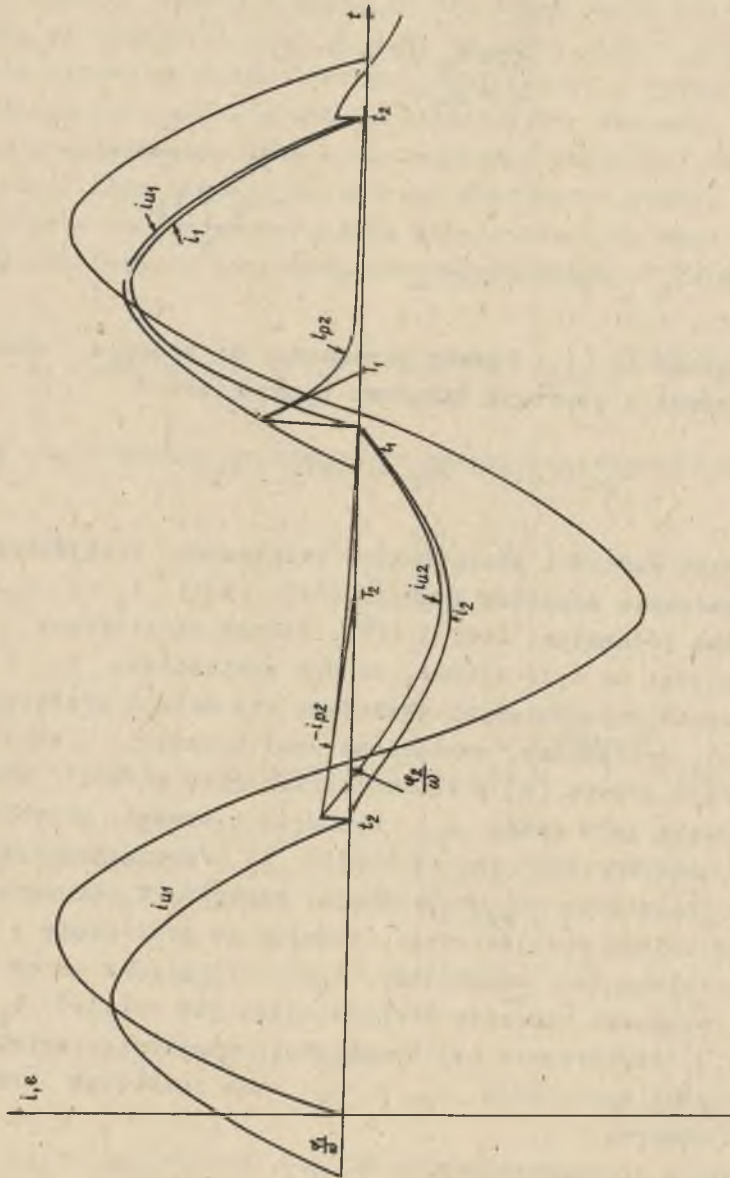
dla  $t$  dążącego do  $(t_1^+)$  zawór przechodzi do pracy w obszarze przewodzenia i powstaje składowa przejściowa

$$i_{p2}(t_1) = -Jm_1 \sin(\omega t_1 + \varphi_1) \quad (19)$$

Znalezienie wartości początkowych składowych przejściowych wymaga wyznaczenia momentów komutacji tj. chwil  $t_1$  i  $t_2$ . Są one określone równaniami (15) i (18), jednak analityczne ich rozwiązanie jest na tyle trudne, że dla znalezienia  $t_1$  i  $t_2$  oraz składowych przejściowych posłużymy się metodą graficzną.

W tym celu wykreślamy, znalezione analitycznie, składowe ustalone prądu zaworu (5) w obu obszarach jego pracy. Moment przejścia przez zero prądu  $i_{u1}$  wyznacza pierwszą, przybliżoną wartość  $t_2$ . Wartość  $i_{u2}$  w chwili  $t_2$  wyznacza przybliżoną wartość początkową  $i_{p2}(t_2)$ . Znając wartość  $T_2$  konstruujemy przebieg członu przejściowego. Sumując go graficznie ze składową ustaloną (5) znajdujemy  $i_2$ . Przejście przez zero prądu  $i_2$  wyznacza znacznie dokładniejszą już wartość  $t_1$  oraz  $i_{p1}(t_1)$ . Powtórzenie tej konstrukcji umożliwia zwiększenie dokładności określenia  $t_1$  i  $t_2$  oraz przebiegu czasowego prądu zaworu.

Konstrukcję tę unaczynia rys. 5.



Rys. 5



Ponieważ w przedziale  $\omega t_2 < t < \pi - \varphi_2$  składowa ustalona  $i_{u2} > 0$  oraz przejściowa  $i_{p2} < 0$  powstaje pytanie, czy nie mogą zaistnieć warunki by  $i_2$  było większe od zera. Odpowiedź negatywna wynika stąd, że

- krzywa  $i_{u2}$  jest w tym przedziale wypukła gdyż  $\frac{d^2}{dt^2} \{i_{u2}\} < 0$

- krzywa  $(-i_{p2})$  jest wklęsła gdyż  $\frac{d^2}{dt^2} \{-i_{p2}\} < 0$

oraz krzywe te poza momentem  $t_2$  nie przecinają się gdyż

$$\left. \frac{d}{dt} (i_2) \right|_{t=t_2} = \left. \frac{d}{dt} [i_{u2} - (-i_{p2})] \right|_{t=t_2} < 0 \quad (20)$$

$$\left. \frac{d}{dt} (i_2) \right|_{t=t_2} = J_m \left[ \omega \cos(\omega t_2 + \varphi_2) + \frac{1}{T_2} \sin(\omega t_2 + \varphi_2) \right] =$$

$$= A \cdot \sin(\omega t_2 + \varphi_2 + \psi_2)$$

$$\psi_2 = \arctg \omega C \frac{R R d_2}{R + R d_2} = \arctg \omega T_2$$

Warunek (20) jest spełniony, jeżeli  $\pi(\omega t_2 + \varphi_2 + \psi_2) < 2\pi$  (21)

Prawa strona tej nierówności jest oczywista. Dla wykazania lewej zauważmy (rys. 5), że:

$$\omega t_2 = \pi - \varphi_1 - \varepsilon \quad (22)$$

gdzie  $\varepsilon$  - poprawka na faktyczny kąt komutacji, natomiast  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  wyznaczają wyrażenie (7). Otrzymamy:

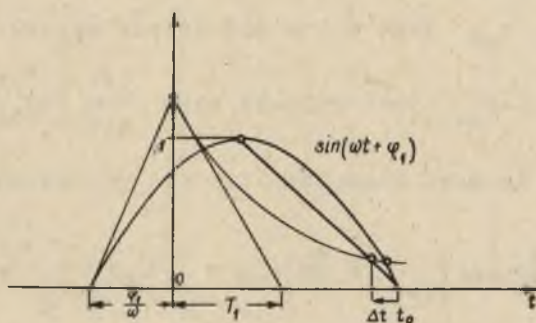
$$\pi < \pi - \arctg \omega C R + \arctg \omega T_1 - \varepsilon + \arctg \omega C R - \arctg \omega T_2 +$$

$$+ \arctg \omega T_2$$

czyli

$$\varepsilon < \arctg \omega T_1 < \omega T_1 \quad (23)$$

Obliczmy przybliżoną poprawkę na faktyczny czas komutacji  $\Delta t$  taką aby  $\epsilon < \omega \Delta t$ . W tym celu aproksymujemy wyrażenie (15) tak aby  $\Delta t$  było wyrażone z błędem dodatnim, - z zapasem (rys. 6).



Rys. 6

Mianowicie

$$\frac{4}{T_1} \Delta t - \varphi_1 e^{-\frac{t_0 + \Delta t}{T_1}} = 0 \quad (24)$$

Rozwijając  $e^{-\frac{t_0 + \Delta t}{T_1}}$  w szereg Taylora wokół punktu  $t_0$  i biorąc dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia:

$$\frac{4}{T_1} \Delta t - \varphi_1 \left( e^{-\frac{t_0}{T_1}} + \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t_0}{T_1}} \Delta t \right) = 0$$

Otrzymamy

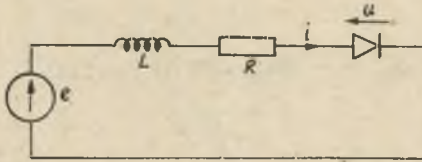
$$4 - \varphi_1 e^{-\frac{t_0}{T_1}} - \frac{\varphi_1 \Delta t}{T_1} e^{-\frac{t_0}{T_1}} = 0$$

Mamy zatem

$$\varepsilon < \omega \Delta t = \omega T_1 \frac{\varphi_1 e^{-t_0/T_1}}{4 - \varphi_1 e^{-t_0/T_1}} < \omega T_1 \quad (25)$$

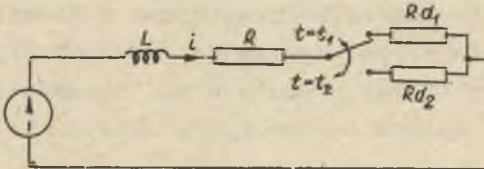
spełnione są zatem nierówności (23), (24) i (20).

2. Znajdźmy czasowy przebieg prądu zaworu w obwodzie z elementem indukcyjnym (rys. 7).



Rys. 7

Wprowadzony układ z kluczem (rys. 8)



Rys. 8

Składowa ustalona prądu zaworu:

$$i_{u_k} = J_{m_k} \sin(\omega t - \varphi_k)$$

gdzie

$$J_{m_k} = \frac{E_m}{\sqrt{(R + R_{d_k})^2 + (\omega L)^2}} \quad \varphi_k = \arctg \frac{\omega L}{R + R_{d_k}} \quad (25)$$

Składowa przejściowa:

$$i_{p_k} = A_k e^{-\frac{t - t_k}{T_k}} \quad \text{dla } t \geq t_k; \quad T_k = \frac{L}{R + R d_k} \quad (26)$$

W momentach komutacji, dla  $t = t_k$

$$i_k = i_{u_k} + i_{p_k} = 0 \quad (27)$$

stąd:

$$A_k = -Jm_k \sin(\omega t_k - \varphi_k)$$

oraz

$$i_k = Jm_k \left[ \sin(\omega t - \varphi_k) - \sin(\omega t_k - \varphi_k) e^{-\frac{t - t_k}{T_k}} \right] \quad (28)$$

Wynik ten w swej istotnej treści jest taki sam jak dla obwodu z kondensatorem i oznacza, że powstające w stanie quasi ustalonym przebiegi przejściowe wynikają z różnicy przesunięć fazowych składowych ustalonych prądu w obu obszarach pracy zaworu. Prąd zaworu ma w każdym z obszarów przebieg czasowy

$$i_1 = Jm_1 \left[ \sin(\omega t - \varphi_1) - \sin(\omega t_1 - \varphi_1) e^{-\frac{t - t_1}{T_1}} \right] \quad (29)$$

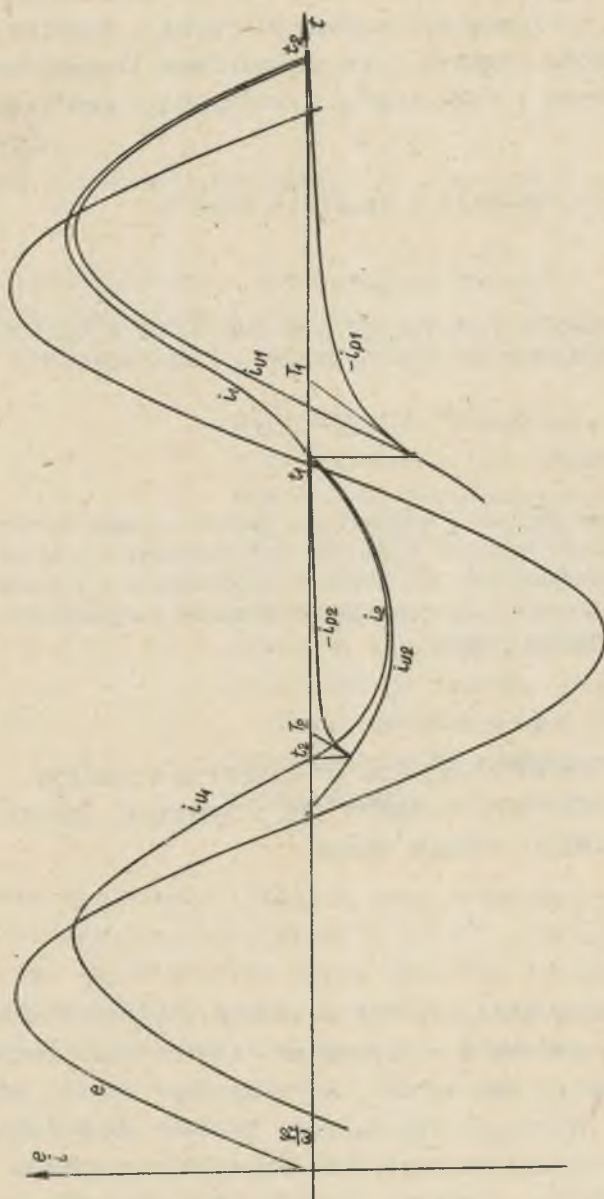
$$i_2 = Jm_2 \left[ \sin(\omega t - \varphi_2) - \sin(\omega t_2 - \varphi_2) e^{-\frac{t - t_2}{T_2}} \right] \quad (30)$$

gdzie  $Jm$ ,  $Jm_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  są wyznaczalne analitycznie, natomiast momenty komutacji  $t_1$  i  $t_2$  wyznacza układ równań

$$\sin(\omega t_2 - \varphi_1) - \sin(\omega t_1 - \varphi_1) e^{-\frac{t_2 - t_1}{T_1}} = 0 \quad (31)$$

$$\sin(\omega t_1 - \varphi_2) - \sin(\omega t_2 - \varphi_2) e^{-\frac{t_1 - t_2}{T_2}} = 0 \quad (32)$$

który rozwiązujemy graficznie. Ilustruje to rys. 9.



Rys. 9

Proponowana wyżej metoda prowadzi do ujednoczenia analizy sieci z zaworem i elementami czynno-biernymi o dowolnej konfiguracji. Dokładność wyników jest ograniczona linearyzacją charakterystyki zaworu i dokładnością konstrukcji graficznej.

Rękopis złożono w redakcji w kwietniu 1964 r.

АНАЛИТИЧЕСКИ - ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СХЕМ ВПРЯМЛЕНИЯ С РЕАКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И СИНУСОИДАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ ПИТАНИЯ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ

#### Р е з ю м е

Указано, что состояние системы с выпрямителем является суммой установившегося и переходного состояния. Выведены уравнения тока выпрямителя в обоих пределах работы для цепей сопротивления - емкостной и сопротивления - индукционной. Эти уравнения разложены на часть определенную аналитически и графически. Приведена графическая конструкция решения.

ANALYTICAL AND GRAPHICAL METHOD OF CIRCUITS SOLUTION  
WITH RECTIFIER REACTIVE ELEMENTS AND SINUSOIDAL SUPPLY  
VOLTAGE IN THE QUASI- STEADY STATE

#### S u m m a r y

The work indicates, that the state of the system with the real rectifier in the current-carrying and non-return region rectifier is the sum of the steady and transient state. Equations were derived of the rectifier current in both work regions for the resistance-capacitance circuit and the resistance inductance circuit. These equations were divided into an analytically and graphically determinable part. The work presents a graphical construction of the solution.