ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: ELEKTRYKA z. 18 Nr kol. 119

MAREK BRODZKI
Katedra Podstaw Elektrotechniki

# TENSOR ENERGII-PĘDU POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO ORAZ PROBLEM JEGO JEDNOZNACZNOŚCI

Streszczenie: W artykule niniejszym przeprowadzone są rozważania doprowadzające do jednoznacznego określenia tensora energii - pędu pola elektromagnetycznego, ze zwróceniem szczególnej uwagi na znaczenie fizyczne przyjmowanych założeń, dzięki którym jednoznaczność ta została osiągnięta.

Pewne matematycznie ścisłe dowody są pominięte ze względu na ich dużą rozwlekłość.

Jednoznaczne określenie rozkładu oraz ruchu energii i pędu w polu elektromagnetycznym odgrywa w teorii pola ogromną rolę. Energia i pęd są tą wspólną cechą obiektów fizycznych, która daje możliwość porównania ich i stworzenia jedynego chyba wspólnego prawa jakim wszystkie podlegają - prawa zachowania energii - pędu.

Jest naturalne wobec tego, żądać od teorii opisującej dany obiekt pełnych i jednoznacznych informacji, przynajmniej z zakresu dotyczącego ruchu energii - pędu.

Czy teoria pola elektromagnetycznego spełnia to zadanie? Czy prawo zachowania energii - pędu wynikające z równań tej teorii, równań Maxwella, zapewnia zarazem istnienie jednoznacznego rozkładu energii-pędu w czasoprzestrzeni?

Jakie warunki trzeba by ewentualnie dodać do równań Maxwella by zapewnić tę jednoznaczność?
Oto pytania na które należy odpowiedzieć.

Pole elektromagnetyczne wytwarzane jest przez cząstki obdarzone z jednej strony ładunkiem elektrycznym, z drugiej zaś masą. Zajmując się wobec tego energią i pędem pola wraz z cząstkami będziemy zmuszeni rozpatrywać również te wielkości w odniesieniu do cząstek.

Celowe będzie najpierw prześledzić w jaki sposób i z pomocą jakich środków matematycznych można opisać energię i pęd dla samych tylko nienaładowanych cząstek.

Dla uproszczenia załóżmy, że będziemy rozpatrywać cząstki nieoddziaływujące ze sobą (tj. nie zderzające się i nie wytwarzające pola grawitacyjnego) rozmieszczone w przestrzeni w sposób ciągły z gęstością własną $\mu_0$ (tzn. mierzoną względem układu, w którym cząstki badanej objętości spoczywają w danej chwili czasu).

Niech względem przyjętego układu odniesienia badany element objętości porusza się z prędkością $\bar{v}(v^x, v^y, v^z)$
Gęstość masy wyniesie w tym układzie:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1}$$

Ponieważ każdej masie bezwładnej $m$ przypisana jest energia $W = mc^2$ i odwrotnie, każdej energii $W$ masa bezwładna $m = \frac{W}{c^2}$ możemy wprowadzić równoważną z "$\mu$" gęstość energii $w_{cz} = \mu c^2$. Mamy zatem opisany rozkład gęstości energii.

Ruch energii można przedstawić przy pomocy strumienia gęstości energii $S_{cz} = \mu c^2 \bar{v}(\mu c^2 v^x, \mu c^2 v^y, \mu c^2 v^z)$. Zajmiemy się teraz pędem. Jego gęstość wynosi $\bar{p}_{cz} = \mu \bar{v}(\mu v^x, \mu v^y, \mu v^z)$. Jego ruch opisany jest podobnie jak w przypadku energii strumieniem gęstości pędu, czyli dziewięcioma wielkościami $\mu v^\alpha v^\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in (x, y, z)$.
Np. "$\mu v^x v^y$" oznacza rzut strumienia składowej $\mu v^x$ gęstości pędu na oś $y$.

Wobec tego do określenia rozkładu oraz ruchu energii i pędu trzeba znać 16 wyżej wymienionych funkcji (określonych w tej części czasoprzestrzeni, w której badany obiekt występuje, względem podanego układu współrzędnych).

Wielkości te można ustawić w kwadratową macierz o następujących elementach:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{cz} &= \mu v^{\alpha} v^{\beta} \\ T^{\alpha 4}_{cz} &= ic(\mu v^{\alpha}) = ic\, p^{\alpha}_{cz} \\ T^{4\alpha}_{cz} &= \frac{i}{c}(\mu c^2 v^{\alpha}) = \frac{i}{c} S^{\alpha}_{cz} \\ T^{44}_{cz} &= -\mu c^2 = -w_{cz} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$\alpha, \beta \in (1, 2, 3)$

1 - x

2 - y

3 - z

oraz:

$$i = \sqrt{-1}$$

Macierz ta jest symetryczna: $T^{ij}_{cz} = T^{ji}_{cz}$. Gęstość pędu $\bar{p}$ można otrzymać dzieląc strumień gęstości energii $\bar{S}$ przez kwadrat prędkości światła $c$.

Na podstawie dotychczasowego sposobu wprowadzenia powyższej macierzy można by sądzić, że jest ona mniej lub bardziej sztucznym zestawieniem rozmaitych wielkości fizycznych. Tak byłoby faktycznie o ile ograniczylibyśmy się do jednego układu odniesienia.

Ograniczenie takie byłoby poważnym zubożeniem mechaniki, a w odniesieniu do teorii pola elektromagnetycznego jest oczywiście w ogóle nie do pomyślenia.

Dopuszczając pewną grupę układów odniesienia, mianowicie układy inercjalne i określając w każdym z nich podobną macierz przy pomocy prostych rozumowań możemy dojść do wniosku, że elementy tej macierzy tworzą wspólny obiekt fizyczny.
Np. niech będzie określona w układzie odniesienia K, składowa $T^{44}_{cz} = -\mu_o c^2$, interpretowana jako gęstość energii ciała, spoczywającego względem tego układu, wzięta ze znakiem ujemnym. Pozostałe wyrazy macierzy $T^{ij}_{cz}$ niech będą równe zeru. W układzie K' poruszającym się względem "K" z prędkością $\bar{V}$ w kierunku osi x(1) składowa $\frac{c}{i} T^{4'1'}_{cz}$ interpretowaną jako strumień gęstości energii w kierunku osi x(1') wynosi:

$$\frac{\mu_o c^2 V}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Czyli mamy:

$$T^{41'}_{cz} = -\frac{i V}{c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} T^{44}_{cz} \qquad (3)$$

Widzimy więc, że strumień gęstości energii w jednym układzie odniesienia zależy od gęstości energii (a więc innego składnika macierzy) w drugim układzie, co potwierdza traktowanie energii i pędu jako jednego obiektu fizycznego posiadającego jedynie różne składowe w różnych układach odniesienia.

Po tych wyjaśnieniach zastosowanie rachunku tensorowego do opisu takiej wielkości będzie bardziej naturalne.

Wystarczy przypomnieć, że tensor jest to funkcja przyporządkowująca każdemu układowi współrzędnych należącemu do pewnej grupy macierz, przekształcającą się przy pomocy transformacji prowadzącej od jednego układu współrzędnych do drugiego według następującej reguły:

$$T^{i'j'} = A^{i'j'}_{ij} T^{ij} \qquad \begin{matrix} i, j \in (1, 2, 3, 4) \\ i', j' \in (1, 2, 3, 4) \end{matrix} \qquad (4)$$

gdzie:

$$A^{i'j'}_{ij} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}} \tag{5}$$

oraz "$x^i$", "$x^{i'}$", oznaczają odpowiednio współrzędne w układach K i K'. (Powtarzanie się wskaźników oznacza sumowanie). Porównując wzór (3) i (4) otrzymujemy, że np.

$$A^{4'1'}_{44} = - \frac{i\,V}{c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}$$

W naszych rozważaniach transformacje układów współrzędnych to transformacje Lorentza, o współczynnikach $a^{i'}_{i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$, stałych w każdym punkcie danego układu współrzędnych, określonych następująco:

$$\left[a^{i'}_{i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Można przekonać się, że współczynniki tej macierzy spełniają warunek ortogonalności, tzn.:

$$\sum_i a^{i'}_{i}\, a^{j'}_{i} = \delta^{i'j'} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i' = j' \\ 0 & \text{dla } i' = j' \end{cases} \tag{7}$$

Korzystając z tego można wprowadzić pojęcie niezmienniczego, względem podanych przekształceń Lorentza, przedziału czasoprzestrzennego ds

$$ds^2 = -\left[(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \tag{8}$$

gdzie:

$$dx^0 = i\,c\,dt \tag{9}$$

Różniczki $dx^\alpha, \alpha \in (1, 2, 3)$ dotyczą tu zmiennych przestrzennych, "dt" - zmiennej czasowej.
Tensor metryczny przedziału ds jest jednostkowy ze znakiem ujemnym dla każdego dopuszczalnego układu współrzędnych.
To jest zachodzi:

$$g_{ij} = -\delta_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \tag{10}$$

Dla dalszych rozważań warto nadmienić, że na skutek zachodzenia wzoru (7), zanika różnica (z dokładnością do znaku) między współrzędnymi kontra i kowariantnymi wektorów.
Np. nasuńmy na dowolny wektor kontrawariantny o składowych $u^j$ tensor metryczny g, wówczas otrzymamy:

$$u_i = g_{ij}\,u^j = -\,u^i \tag{11}$$

(Składowe wielkości kontrawariantnych oznaczamy wskaźnikami stojącymi u góry, kowariantnych na dole). Własność wyrażona wzorem (11) jest niezmiennicza względem ortogonalnej grupy przekształceń.

Teraz można podać ścisłe określenie dla składowych tensora energii-pędu cząstek nienaładowanych i nieoddziaływujących ze sobą:

$$T^{ij}_{cz} = \mu_0\,c^2\,u^i\,u^j \tag{12}$$

gdzie "$u^i$" oznaczają składowe wektora czteroprędkości określone następująco:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad i \in (1, 2, 3, 4) \tag{13}$$

Po rozpisaniu wzoru (13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \alpha \in (1, 2, 3) \\ u^4 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{14}$$

Podstawiając składowe czteroprędkości do wzoru (12) można się przekonać, że składowe tensora $T_{cz}$ tworzą faktycznie w danym układzie macierz o wyrazach podanych wzorem (2).

Wychodząc z równania ruchu cząstki swobodnej:

$$mc \frac{du^i}{ds} = 0 \quad i \in (1, 2, 3, 4) \tag{15}$$

(gdzie "m" określa masę spoczynkową cząstki) lub z zasady najmniejszego działania:

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mcds) = 0 \tag{16}$$

która żąda, aby działanie wzdłuż rzeczywistego toru cząstki poruszającej się od punktów a do b osiągało minimum w porównaniu do pewnej klasy torów wirtualnych, możemy otrzymać następujące równanie różniczkowe zawierające składowe tensora energii-pędu:

$$\frac{\partial T^{ij}_{cz}}{\partial x^j} = 0 \tag{17}$$

Co oznacza powyższe równanie pod względem fizycznym? Rozpiszmy go wyraźnie:

$$\frac{\partial\left(\frac{c}{i}T^{41}_{cz}\right)}{\partial x^1}+\frac{\partial\left(\frac{c}{i}T^{42}_{cz}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial\left(\frac{c}{i}T^{43}_{cz}\right)}{\partial x^3}+\frac{\partial\left(-T^{44}_{cz}\right)}{\partial t}=0$$

lub:

$$\operatorname{div}\bar{S}_{cz}+\frac{\partial w_{cz}}{\partial t}=0 \qquad (18)$$

oraz:

$$\frac{\partial T^{\alpha 1}_{cz}}{\partial x^1}+\frac{\partial T^{\alpha 2}_{cz}}{\partial x^2}+\frac{\partial T^{\alpha 3}_{cz}}{\partial x^3}+\frac{\partial\left(\frac{1}{ic}T^{\alpha 4}_{cz}\right)}{\partial t}=0 \qquad (19)$$

lub:

$$\operatorname{div}_\beta T^{\alpha\beta}_{cz}+\frac{\partial p^{\alpha}_{cz}}{\partial t}=0 \quad \alpha,\beta\in(1,\ 2,\ 3)$$

Równanie (18) przedstawia prawo zachowania energii dla nieskończenie małego elementu objętości, równanie (19) - prawo za chowania pędu.

Na mocy tensorowego charakteru przekształceń prowadzących od jednego do drugiego układu odniesienia równania te są słuszne w dowolnym inercjalnym układzie. Tensor energii-pędu $T_{cz}$ został więc skonstruowany w ten sposób, że możliwe jest przy jego pomocy wyrażenie praw zachowania.

Ponieważ zasada najmniejszego działania obowiązuje również w elektrodynamice, można więc przypuszczać, że pozwoli to na przedstawienie energii i pędu pola elektromagnetycznego również w postaci tensorowej i prawa zachowania dla pola w postaci równania (17); oraz ogólnie, że energia i pęd dowolnego obiektu fizycznego powinny mieć postać tensorową. Pozwoliłoby to na niezmiernie proste ujęcie prawa zachowania w przypadku jednoczesnego współdziałania wielu obiektów fizycznych.

Wystarczyłoby skonstruować następujący tensor wypadkowy T:

$$T^{ij} = \sum_{r} \underset{(r)}{T}^{ij} \tag{20}$$

gdzie "$\underset{(r)}{T}^{ij}$" oznacza składowe tensora $\underset{(r)}{T}$ dla r-go obiektu.
Wówczas również prawo zachowania miałoby postać równania (17).

Wychodząc zatem z zasady najmniejszego działania dla pola elektromagnetycznego wraz z cząstkami lub z równań Maxwella, można otrzymać następujące prawo zachowania:

$$\frac{\partial T^{ij}_{em}}{\partial x^j} = F^{ik} j_k \tag{21}$$

Zmienna $j_k$ oznacza składową kowariantną wektora czterogęstości prądu. W równaniu tym nie występuje zero po prawej stronie, bowiem "$T_{em}$" jest tensorem energii pędu częściowym dla samego tylko pola.
Zachodzi:

$$\begin{aligned} j^1 &= j^x_y \\ j^2 &= j^y \\ j^3 &= j^z \\ j^4 &= ic\varrho \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie zmienne $j^x$, $j^y$, $j^z$ oznaczają zwykłe gęstości prądu, a "$\varrho$" - gęstość ładunku.
Tensor $T_{em}$ wyrażany jest przy pomocy tensora F pola elektromagnetycznego wzorem (23)

$$T^{ij}_{em} = - g_{pq} F^{ip} F^{jq} + \frac{1}{4} g^{ij} F^{pq} F_{pq} \tag{23}$$

gdzie "$g_{pq}$" - oznacza składową kowariantną wprowadzonego poprzednio tensora metrycznego g.

Określenie tensora F:

$$\left[F^{ik}\right] = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

gdzie "$\bar{B}$" oznacza wektor indukcji magnetycznej, zakładamy:

$$\bar{B} = \mu\bar{H}$$

"$\bar{H}$" - oznacza wektor natężenia pola magnetycznego,

"$\bar{E}$" - " " " " elektrycznego.

Tensor F jest antysymetryczny, zachodzi bowiem:

$$F^{ik} = -F^{ki} \tag{25}$$

Rozpiszmy teraz wyraźnie składowe tensora $T_{em}$:

$$T^{\alpha\beta}_{em} = \left[-\varepsilon E^{\alpha} E^{\beta} - \mu H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\delta^{\alpha\beta}\right] \tag{26}$$

$$\alpha,\beta \in (1, 2, 3)$$

"$T^{\alpha\beta}_{em}$" oznaczają składowe strumienia gęstości pędu pola.

$$T^{\alpha 4}_{em} = ic\ p^{\alpha}_{em} = ic\left(\frac{S^{\alpha}_{em}}{c^2}\right) \tag{27}$$

$$\alpha \in (1, 2, 3)$$

"$\frac{T^{\alpha 4}_{em}}{ic}$" oznaczają składowe gęstości pędu pola.

$$T^{4\alpha}_{em} = \frac{1}{c} S^{\alpha}_{em} \tag{28}$$

$$\alpha \in (1, 2, 3)$$

„$\frac{c}{i} T_{em}^{4\alpha}$" oznaczają składowe strumienia gęstości energii pola

$$T_{em}^{44} = - w_{em} \tag{29}$$

„$-T_{em}^{44}$" oznacza gęstość energii pola.

Zachodzi:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \tag{30}$$

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) \tag{31}$$

Zajmijmy się z kolei prawą stroną wzoru (21).
Rozpisując otrzymujem:

$$\frac{\partial T_{em}^{\alpha j}}{\partial x^j} = - \left[ (\bar{j} \times \bar{B})^{\alpha} + \varrho E^{\alpha} \right] = - f^{\alpha} \tag{32}$$

$$\alpha \in (1,2,3) \qquad j \in (1,2,3,4)$$

gdzie "$\bar{f}$" oznacza gęstość siły oddziaływania pola na ładunek.
Oraz:

$$\frac{\partial T_{em}^{\ j}}{\partial x^j} = - \frac{i}{c} (\bar{j}\ \bar{E}) \tag{33}$$

Wpiszemy teraz równania ruchu naładowanych cząstek

$$\frac{d\bar{p}_{cz}}{dt} = (\bar{j} \times \bar{B}) + \varrho \bar{E} \tag{34}$$

gdzie zachodzi:

$$\bar{p}_{cz} = \frac{\mu_0\ \bar{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{35}$$

oraz:

$$\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = \bar{j}\,\bar{E} \tag{36}$$

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{\mu_o\, c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{37}$$

Na podstawie równań (18), (19), (21), (32-37) widać, że zachodzą związki:

$$\operatorname{div} \bar{S}_{em} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = 0 \tag{38}$$

$$\operatorname{div}_{\beta} T^{\alpha\beta}_{em} + \frac{\partial p^{\alpha}_{em}}{\partial t} + \frac{dp^{\alpha}_{cz}}{dt} = 0 \tag{39}$$

Wyrażają one zasadę zachowania energii i pędu dla układu składającego się z pola elektromagnetycznego i cząstek naładowanych. Pierwsze dwa składniki we wzorach (38), (39) oznaczają odpowiednio zmianę gęstości energii i gęstości pędu pola elektromagnetycznego w jednostce objętości i czasu danego układu odniesienia, trzecie zaś zmianę gęstości energii i pędu w jednostce czasu cząstek znajdujących się w tej objętości.

Wypisując równania ruchu cząstek w postaci 4-wymiarowej, otrzymamy:

$$\mu_o\, c^2 \frac{du^i}{ds} = -\, F^{ik}\, j_k \tag{40}$$

Co po podstawieniu do równania (21) daje:

$$\frac{\partial T^{ij}_{em}}{\partial x^j} + \mu_o\, c^2 \frac{du^i}{ds} = 0 \tag{41}$$

Drugi składnik sumy równania (41) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial T^{ij}_{cz}}{\partial x^j}$$

gdzie składowe tensora energii-pędu cząstek $T_{cz}$ podane są wzorami (2).

Tak więc mamy ogólne prawo zachowania energii-pędu powyżej opisywanego układu w jednolitej formie tensorowej, które zachodzi w dowolnym inercjalnym układzie współrzędnych.

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad i \in (1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{42}$$

gdzie zachodzi:

$$T^{ij} = T^{ij}_{em} + T^{ij}_{cz}$$

Zarówno w przypadku masy jak i pola elektromagnetycznego otrzymaliśmy symetryczne tensory energii-pędu. Jakie są względy, które uprzywilejowują postać symetryczną tego tensora, mimo że zarówno symetryczny jak i pozbawiony tej własności tensor, spełniają jednakowo zasadę zachowania?

Zanalizujemy jeszcze raz w celu wyjaśnienia tego problemu tensor energii-pędu $T_{cz}$ dla cząstek. Gęstości masy bezwładnej tych cząstek przypisywaliśmy gęstość energii według zależności:

$$\mu_{cz} = \frac{w_{cz}}{c^2}.$$

Symetria tensora $T_{cz}$ oznacza, że $T^{4\alpha}_{cz} = T^{\alpha 4}_{cz}$, gdzie $T^{4\alpha}_{cz} = \frac{1}{c} S^{\alpha}_{cz}$ a $S^{\alpha}_{cz} = \mu c^2 v^{\alpha}$. Składowe $T^{4\alpha}$ wyrażają więc strumień gęstości energii. Pomiędzy gęstością pędu $\bar{p}_{cz}$, który inaczej mówiąc jest strumieniem gęstości masy, a strumieniem gęstości energii $\bar{S}_{cz}$ zachodzi relacja $\bar{p}_{cz} = \frac{\bar{S}_{cz}}{c^2}$, identyczna jak między samymi gęstościami masy i energii.

Nie jest to w żadnym przypadku jedynie analogia czysto formalna mająca na celu li tylko piękno i przejrzystość teorii.

Skoro mamy dwa pojęcia, masę bezwładną i energię do tej pory odrębne i utożsamiamy je (w zakresie dotyczącym bezwładności), to wszystkie własności tych pojęć w tym zakresie, muszą być również utożsamione. Tutaj tymi własnościami są strumień masy i strumień energii.

Jest to zastosowanie definicji równości dwóch przedmiotów pochodzącej od Leibnitza.

Oto jej treść słowna:

"Dwa przedmioty nazywamy równymi, jeśli każda własność przysługująca jednemu z nich przysługuje też drugiemu i na odwrót". (Patrz: A. Mostowski [6], R. V str. 109-110, gdzie można też znaleźć sformalizowany zapis tej definicji).

Do tej pory analizowana symetria tensora T dotyczyła tylko składowych $T^{\alpha 4}$ i $T^{4\alpha}$, składowe $T^{\alpha\beta}$ $\alpha\beta\epsilon(1, 2, 3)$ też muszą być symetryczne, ponieważ symetria składowych $T^{\alpha 4}$ i $T^{4\alpha}$ tensora energii-pędu musi być zachowana w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia.

Wobec postaci wzorów transformacyjnych wyrażonej równaniem (4), symetria składowych $T^{\alpha' 4'}$ i $T^{4'\alpha'}$ w innym układzie odniesienia nie byłaby zapewniona, gdyby nie zachodził również warunek $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. Symetria tensora energii-pędu dla dowolnego zresztą obiektu fizycznego, nie tylko dla pola elektromagnetycznego, jest więc logiczną konsekwencją przypisania energii własności bezwładności właściwej masie.

Czy wobec tego sama symetria tensora energii-pędu wyklucza już wszelką jego niejednoznaczność? Przekonamy się, że nie. Otóż okazuje się, że można wprowadzić tzw. tensor Krutkowa (patrz W.A. Fok [2] R.II, str. 134-136), którego budowę wyjaśnimy poniżej.

Niech będzie dany tensor A o następujących własnościach:

$$A^{im,nk} = -A^{mi,nk} \tag{43}$$

$$A^{im,nk} = -A^{im,kn} \tag{44}$$

$$A^{im,nk} + A^{in,km} + A^{ik,mn} = 0 \tag{45}$$

Można wykazać, że wówczas zachodzi:

$$A^{im,nk} = A^{nk,im} \tag{46}$$

Wprowadzimy teraz tensor B:

$$B^{ik} = \frac{\partial^2 A^{im,nk}}{\partial x^m \partial x^n} \tag{47}$$

Zachodzi wtedy tożsamość:

$$\frac{\partial B^{ik}}{\partial x^k} = 0 \tag{48}$$

wprowadzając:

$$\bar{T}^{ij} = T^{ij} + B^{ij} \tag{49}$$

widzimy, że zachodzi wzór

$$\frac{\partial \bar{T}^{ij}}{\partial x^j} = 0 \tag{50}$$

Wobec tego niejednoznaczność "T" nie została usunięta. Aby ją usunąć ograniczmy dowolność konstrukcji tensora Krutkowa. Mianowicie nazwijmy zmiennymi opisującymi stan obiektu, zmienne, których pierwsze pochodne cząstkowe występują w równaniach ruchu.

W przypadku teorii pola elektromagnetycznego będą to składowe tensora pola F.

O ile tensor B będzie zależał jedynie od tych zmiennych nie zawierając w postaci wyraźnej innych np. przestrzennych x czy czasowej t, to powiemy, że jest on funkcją stanu badanego obiektu. Zakładając, że tensor B jest funkcją stanu, nie moż na dopuścić by poprzednio wymieniony tensor A był funkcją stanu, albowiem wówczas tensor B zawierając pochodne cząstkowe składowych tensora A, już taką funkcją nie byłby.

Rozumowanie to nie może stanowić kompletnego dowodu jednoznaczności, ponieważ nie wyczerpuje wszystkich możliwych przypadków konstrukcji dodatkowego tensora V spełniającego tożsamościowo prawo zachowania energii-pędu. Pełnego dowodu nie będziemy przytaczać z powodu jego ogromnej rozwlekłości. (Można go znaleźć w książce W.A. Foka [2] R. II, str. 136-141 i dodatek B. str. 519-524). Polega on na wykorzystaniu tego, że "T" oznaczając tensor, przekształca się przy zmianie układu odniesienia zgodnie z transformacją Lorentza, przy czym dokonywana transformacja polega na nieskończenie małym przemieszczeniu układu odniesienia, na skorzystaniu z prawa zachowania energii-pędu dla tego tensora oraz na tym, że jest on funkcją stanu pola.

Powyższe pozwala na skonstruowanie odpowiedniej liczby równań różniczkowych dla składowych $T^{ik}_{em}$. Równania te dają jako jednoznaczne rozwiązanie składową $-T^{44}_{em} = w = \varepsilon E^2 + \mu H^2$. Pozostałe składowe tensora T dadzą się wyrazić jako funkcja „$T^{44}_{em}$" Pod względem matematycznym otrzymany wynik jest zatem zadowalający.

Co więcej, żądanie by tensor T był funkcją stanu badanego obiektu, oprócz uzyskania jednoznaczności, daje bardzo prostą jego budowę. Zależy on algebraicznie od natężeń pola. Powyższe twierdzenie mówi więc, że istnieje jedyna taka algebraiczna zależność tensora energii-pędu od natężeń pola. Jednakże zwróćmy uwagę, że o ile jedno z założeń doprowadzających do jednoznaczności tensora energii-pędu, mianowicie symetria tego tensora, miało głębokie i piękne uzasadnienie fizyczne (równość masy bezwładnej i energii); o tyle drugie - dotyczące tego by tensor ten był funkcją stanu, ma charakter czysto matematyczny. Jest to założenie nie dające się sprawdzić eksperymentem, dotyczące nie badanego obiektu - lecz z środków jego opisu, które twórca teorii czyni, chcąc spośród możliwych kształtów nadać jej taki, który ze względów poza fizycznych był by najkorzystniejszy. Odrzucając te względy, można by równie dobrze nie czynić go. Co oznaczałoby to pod względem fizycznym?

Niejednoznacznego powiązania między tensorem energii - pędu $T_{em}$ i tensorem pola F nie można interpretować na rzecz jednoznacznego określenia tensora $T_{em}$ i traktowania go jako pojęcia pierwotnego, ponieważ właśnie tensor pola F jest określony jednoznacznie równaniami Maxwella.
Oznacza to, że tensor energii-pędu $T_{em}$ określony jest w sposób niepełny. Jest to skaza teorii wynikająca z różniczkowych form praw zachowania. Tensor ten jest tworem zbyt obszernym, aby mógł być scharakteryzowany jednoznacznie w samej tylko teorii pola elektromagnetycznego, która uwzględnia zbyt mało własności energii i pędu. Dopóki zatem rozpatrywać będziemy samo pole elektromagnetyczne jedyną drogą osiągnięcia jego jednoznaczności jest warunek natury formalnej, a nie fizycznej, dotyczący budowy tensora Krutkowa. W teorii pola elektromagnetycznego i grawitacyjnego (ogólnej teorii względności) mamy dodatkowe własności grawitacyjne energii, które można wyzyskać do osiągnięcia żądanej jednoznaczności tensora $T_{em}$ pola elektromagnetycznego.

W teorii tej występuje on w równaniach pola w formie algebraicznej - a nie w różniczkowej, co stanowi właśnie warunek fizyczny decydujący o konieczności jego jednoznacznego określenia. (W przeciwnym razie równania pola grawitacyjnego byłyby niejednoznaczne). Istnieje jeszcze inna przesłanka przemawiająca za jednoznacznym określeniem tensora $T_{em}$ podanego wzorami (23-31). O ile rozpatrujemy nie samo pole elektromagnetyczne - a pole z cząstkami, to w równaniu (42) wyrażającym zasadą zachowania energii-pędu dla tego przypadku część energii oraz pędu zawartego w polu jest przekazywana cząstkom lub odwrotnie. Po dodaniu do tensora $T_{em}$ - tensora Krutkowa jego czterodywergencja znika tożsamościowo, zatem przedstawia on energię i pęd, które nie uczestniczą nigdy w wymianie opisanej powyżej: cząstki - pole. Dopuszczenie istnienia takiego obiektu jest oczywiście pozbawione sensu, ponieważ energia o takich własnościach nie może istnieć. Można stąd wysnuć wniosek, że żądanie aby tensor $T_{em}$ był funkcją stanu uzyskuje interpretację fizyczną, dopiero w przypadku współdziałania pola elektromagnetycznego z innym obiektem fizycznym jakim są cząstki.

Na zakończenie wypada nadmienić, że powyższe zagadnienia wiążą się z problemem tak zwanej interpretacji fizycznej matematycznych wyrażeń jakimi operuje teoria. Nie wszystkie wyrażenia nadają się do takiej interpretacji. Te które są wynikiem twierdzeń logicznego rachunku zdań, a więc zachodzące tożsamościowo, jak np. zerowanie się pochodnych tensora Krutkowa w związku wyrażającym prawo zachowania energii-pędu, nie nadają się do fizycznej interpretacji. Jest również oczywiste, że nie można w jednakowy sposób interpretować zmiennych stanu $\bar{E}$, $\bar{H}$, zmiennych oznaczających energię czy pęd pola, czy tym bardziej zmiennej $\bar{A}$ określającej potencjał wektorowy. Należałoby więc w ogóle określić ściśle pojęcie interpretacji fizycznej.

Rękopis złożono w redakcji w kwietniu 1964 r.

LITERATURA

[1] Einstein A.: Istota teorii względności.

[2] Fok W.A.: Tieorja prostranstva, vriemieni i tjagotienja.

[3] Landau L., Lifszic E.: Teoria pola.

[4] Gołąb S.: Rachunek tensorowy.

[5] Raszewski P,K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa.

[6] Mostowski A.: Logika matematyczna.

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ - ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, А ТАКЖЕ ПРОБЛЕМА ЕГО ОДНОЗНАЧНОСТИ

Р е з ю м е

В настоящей статье приведены разсуждения, приводящие к однозначному определению тензора энергии - импульса электромагнитного поля, с обращением особого внимания на физическое значение принимаемых предложений, благодаря которым эта однозначность была достигнута.
Некоторые математические точные аргументы пропущены ввиду их большой растянутости.

ENERGY MOMENTUM TENSOR OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELD AND ITS UNIVALENCE PROBLEM

S u m m a r y

The work reporting about the considerations conducive to the univalent determination of the energy momentum tensor of the electric and magnetic field paying special attention to the physical importance of the assumptions, which causes the achie vement of this univalence. Some mathematically rigorous proofs are omitted because of their great length and complexily.