ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964

Seria: ELEKTRYKA z. 18 Nr kol. 119

MAREK BRODZKI
Katedra Podstaw Elektrotechniki

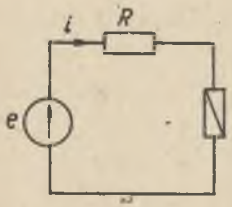
METODA KOLEJNYCH LINIOWYCH PRZYBLIŻEŃ W ZASTOSOWANIU DO ROZWIĄZYWANIA NIELINIOWYCH BEZINERCYJNYCH OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie: W artykule niniejszym podana jest konstrukcja pewnego ciągu liniowych przybliżeń, pozwalająca na analityczne rozwiązanie nieliniowych obwodów elektrycznych o przebiegach stałych lub zmiennych. Rozważane obwody nie zawierają indukcyjności ani pojemności. Przytoczone są również pewne dowody zbieżności tych ciągów.

Obwody nieliniowe zawierające inercję opisywane są nieliniowymi równaniami różniczkowymi. Dla bardzo szerokiej klasy tych równań posiadamy dowód istnienia rozwiązań, jest nim metoda Picarda. Może być ona również wykorzystana do praktycznego uzyskiwania przybliżonego rozwiązania.

Obwody nieliniowe bezinercyjne opisywane są z kolei nieliniowymi równaniami algebraicznymi. Podana tu metoda pozwoli na rozwiązanie analityczne wielu takich obwodów. Dla łatwiejszego wyjaśnienia jej, będzie ona ilustrowana rysunkami.

Niech będzie dany układ złożony z SEM, oporu liniowego oraz nieliniowego połączonych szeregowo. Układ ten jest pokazany na rys. 1.



Rys. 1

Charakterystyką elementu nieliniowego na kreśloną na rys. 2 jest funkcja f(x) o pochodnej $\frac{df}{dx}$ monotonicznie malejącej (ogólnie "y" będzie odpowiadało "i", "x" natomiast "u").

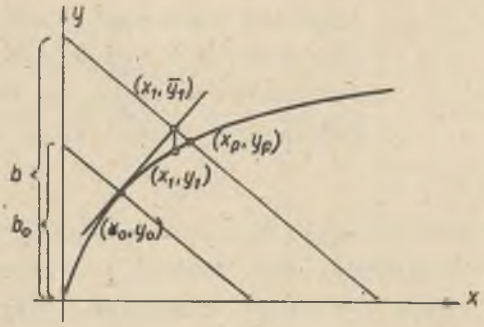
Analitycznie układ jest opisany następującymi równaniami:

dla elementu liniowego:

$$y = -ax + b \quad \text{gdzie:} \quad a, b > 0 \tag{1}$$

dla elementu nieliniowego:

$$y = f(x) \quad \text{gdzie:} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} < 0 \tag{2}$$



Rys. 2

Punkt (x_p, y_p) jest rozwiązaniem powyższych równań. W punkcie (x_0, y_0) konstruujemy styczną do krzywej f(x) o równaniu:

$$y - y_0 = f'_0 (x - x_0) \tag{3}$$

Styczna ta przecina prostą o równaniu (1) w punkcie $(x_1, \bar{y}_1)$

Współrzędne jego wyliczamy z równań (1) i (3)

$$x_1 = x_0 + \frac{b - ax_0 - y_0}{a + f'_0} = x_0 + \frac{b - b_0}{a + f'_0} \tag{4}$$

Stała b_0 zdefiniowana jest równaniem (5) prostej równoległej do prostej (1), przechodzącej przez punkt (x_0, y_0).

$$y_0 = - ax_0 + b_0 \tag{5}$$

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{b - b_0}{a + f'_0} f'_0 \tag{6}$$

W punkcie (x_1, y_1), gdzie $y_1 = f(x_1)$, leżącym na krzywej $f(x)$ kreślimy styczną przecinającą się z prostą (1) w punkcie $(x_2, \bar{y}_2)$.
Operację tę powtarzamy n-krotnie otrzymując:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{b-b_{n-1}}{a+f'_{n-1}} \tag{7}$$

$$\bar{y}_n = y_{n-1} + \frac{b-b_{n-1}}{a+f'_{n-1}} f'_{n-1} \tag{8}$$

Ponieważ: $a, f'_{n-1} > 0$ oraz $b > b_{n-1}$, ciąg $\{x_n\}$ jest monotonicznie rosnący. Ciąg ten jest ograniczony z góry przez "x_p". Bowiem gdyby dla pewnego "n" $x_n > x_p$, to $x_{n+1} < x_p < x_n$ wbrew poprzedniemu twierdzeniu o jego monotoniczności.
Ciąg $\{x_n\}$ jest zatem zbieżny. Co więcej, ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do punktu x_p, bowiem mamy:

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{|b-b_{n-1}|}{|a+f'_{n-1}|} \tag{9}$$

i ze zbieżności ciągu $\{x_n\}$ wynika zbieżność ciągu $\{b_n\}$ do "b", a stąd ciągu $\{x_n\}$ do "x_p".

Można teraz wypowiedzieć twierdzenie:

Jeżeli istnieje rozwiązanie układu równań (1), (2) w punkcie (x_p, y_p) oraz funkcja $f(x)$ posiada w pewnym otoczeniu punktu (x_p, y_p) monotonicznie malejącą pochodną $\frac{df}{dx}$, to każdy ciąg $\{x_n\}$ o podanej konstrukcji leżący w tym otoczeniu jest zbieżny do punktu x_p.

Następujące twierdzenie jest również prawdziwe.

Jeżeli istnieje ciąg $\{x_n\}$ zbieżny, przy poprzednich złożeniach dotyczących funkcji $f(x)$, to istnieje rozwiązanie "x_p" i ciąg ten jest zbieżny do tego rozwiązania.

W przeciwnym razie ciąg $\{b_n\}$ nie byłby zbieżny do punktu b. Analizując znaki współczynników:

$$a, \frac{df}{dx}(x_p) \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2f}{dx^2} \quad \text{dla} \quad |x - x_p| < \varepsilon$$

można pierwsze z tych twierdzeń uogólnić.

Jeżeli istnieje rozwiązanie układu równań $y = ax + b$ oraz $y = f(x)$ w punkcie (x_p, y_p) oraz jeżeli zachodzą warunki:

$$a < \frac{df}{dx}(x_p) \quad \text{i} \quad \frac{d^2f}{dx^2} < 0 \quad \text{dla: } x_p - x < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

lub:

$$a > \frac{df}{dx}(x_p) \quad \text{i} \quad \frac{d^2f}{dx^2} > 0 \quad \text{dla: } x_p - x < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

to każdy ciąg $\{x_n\}$, gdzie $|x_p - x_n| < \varepsilon$ jest zbieżny lewostronnie do punktu x_p.

Dla:

$$a < \frac{df}{dx}(x_p) \quad i \quad \frac{d^2f}{dx^2} > 0; \quad x - x_p < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

lub:

$$a > \frac{df}{dx}(x_p) \quad i \quad \frac{d^2f}{dx^2} < 0; \quad x - x_p < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

każdy ciąg $\{x_n\}$, gdzie $|x_p - x_n| < \varepsilon$ jest zbieżny prawostronnie do punktu x_p.

W przypadku gdy $a = \frac{df}{dx}(x_p)$ i funkcja $\frac{df}{dx}$ jest monotoniczna w lewo i prawostronnym otoczeniu punktu x_p ciągi $\{x_n\}$ są zbieżne lewo-i prawostronnie.

Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x_p $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$, krzywa $f(x)$ staje się prostą i ciąg $\{x_n\}$ redukuje się do dwu wyrazów x_o oraz $x_1 = x_p$.

Przypadek jednoczesnego zachodzenia warunków $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$ i $a = \frac{df}{dx}$ wykluczamy, bowiem oznacza on dwie proste styczne nie posiadające jednoznacznego rozwiązania.

Można jeszcze w tych twierdzeniach osłabić założenia dotyczące funkcji $f(x)$. Mianowicie funkcja ta może być klasy c_1, jej druga pochodna $\frac{d^2f}{dx^2}$ może w pewnych punktach nie istnieć co nie wyklucza montoniczności pierwszej pochodnej $\frac{df}{dx}$. Gdyby natomiast $\frac{df}{dx}$ nie wszędzie istniała, wówczas nie wszystkie ciągi $\{x_n\}$ byłyby możliwe do skonstruowania. (Np. wówczas gdyby "x_n" był punktem w którym „$\frac{df}{dx}$" nie istnieje, nie można by skonstruować stycznej w tym punkcie i znaleźć następny punkt x_{n+1}).

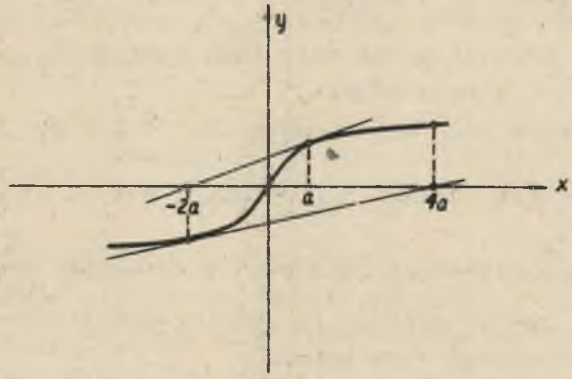
Warunek monotoniczności funkcji $\frac{df}{dx}$ w otoczeniu rozwiązania jest istotny w powyższych twierdzeniach.

Można się o tym przekonać konstruując następujący przykład, w którym dla lewostronnego otoczenia rozwiązania mamy:

$$\frac{d^2f}{dx^2} > 0, \quad \text{dla prawostronnego: } \frac{d^2f}{dx^2} < 0$$

oraz $a < \frac{dy}{dx}(x_p)$

Niech będzie dana funkcja nieliniowa $\sqrt[3]{x}$ przedstawiona na rys. 3.



Rys. 3

Równanie prostej:

$$y = 0.$$

Niech $x_n = a$, równanie stycznej do krzywej $\sqrt[3]{x}$ w punkcie a:

$$y - \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a}}(x - a)$$

Punkt przecięcia stycznej z prostą $y = 0$: $x_{n+1} = -2a$.

Kontynuując powyższe rozumowanie otrzymujemy $x_{n+2} = +4a$ i ogólnie: $x_{n+k} = (-2)^k a$.

Czyli ciąg $\{x_n\}$ jest rozbieżny. Widać stąd, że nawet w przypadku tak prostych obwodów jak szeregowe połączenie SEM, oporu liniowego i nieliniowego nie we wszystkich przypadkach, w których istnieje rozwiązanie, można go otrzymać powyższą metodą.

Podamy teraz dla ilustracji przykład liczbowy dotyczący obwodów magnetycznych.

Pewna uwaga:

Zastosowanie do obwodów magnetycznych powyższej metody jest możliwe, ponieważ dla każdego obwodu elektrycznego o równaniach:

$$i = \frac{e-u}{R} \text{ dla części liniowej} \tag{10}$$

oraz

$$i = f(u) \text{ dla części nieliniowej} \tag{11}$$

możemy skonstruować obwód magnetyczny o analogicznych równaniach:

$$\varphi = \frac{iz-u_m}{R_m} \text{ dla części liniowej} \tag{12}$$

$$\varphi = f(u_m) \text{ dla części nieliniowej} \tag{13}$$

Ogólnie o ile w równaniach Kirchhoffa i w funkcjach opisujących nieliniowe elementy dokonany podstawienia:

"u_m" zamiast "u"

"iz" " "e"

"φ" " "i"

"R_m" " "R"

to, równania te będące aksjomatami teorii obwodów elektrycznych przejdą w równania, które są aksjomatami dla teorii obwodów magnetycznych.

A zatem w myśl twierdzenia o interpretacji jednej teorii w drugiej, każde twierdzenie dotyczące obwodu elektrycznego

przejdzie po dokonaniu powyższego podstawienia w analogiczne - dotyczące obwodu magnetycznego.
Pod warunkiem oczywiście, że będziemy zajmowali się tylko wyprowadzaniem wniosków dotyczących wyżej wymienionych aksjomatów i zmiennych, a nie np. energią lub współczynnikami indukcyjności.

P r z y k ł a d:

Niech będzie dany rdzeń ze szczeliną powietrzną, pokazany na rys. 4 o następujących wymiarach:

$$l = 0{,}2\ \mathrm{m};\quad S = 2\ \mathrm{cm};\quad \delta = 0{,}2\ \mathrm{mm}$$

gdzie:

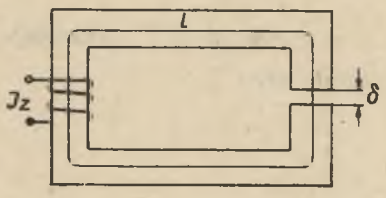
l - długość średniej drogi magnetycznej,

S - pole powierzchni przekroju,

δ - grubość szczeliny.

Pozostałe dane:
Jz = 100 A. Charakterystyka magnesowania opisana jest funkcją:

$$B = B_o \operatorname{arcsh} \frac{H}{H_o}$$



Rys. 4

gdzie:

$$H_o = 10^3\ \frac{A}{m},\quad B_o = 1\ \frac{Wb}{m^2}$$

Obliczyć strumień φ wektora indukcji $\bar{B}$ w rdzeniu.

Równanie części nieliniowej:

$$\varphi = BS = \varphi_o \operatorname{arcsh} \frac{U_m}{H_o l} = 2\cdot 10^{-4} \operatorname{arcsh} \frac{U_m}{200},\ [U_m] = A,\ [\varphi] = Wb.$$

Równanie części liniowej:

$$\varphi = \frac{Jz - U_m}{R_m} = 4 \cdot 10^{-7}(100 - U_m)$$

Zerowe przybliżenie

$$U_m = 0 \quad \frac{d\varphi}{dU_m} = \frac{\varphi_o}{H_o l} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_m}{H_o l}\right)^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{dU_m}(0) = 10^{-6}\left[\frac{wb}{A}\right]$$

Równanie stycznej w punkcie $U_{mo} = 0$:

$$\varphi = 10^{-6} U_m$$

Punkt przecięcia się stycznej z prostą:

$$U_{m1} = 55{,}7 \ [A]$$

$$\varphi_1 = \varphi_o \operatorname{arcsh} \frac{U_{m1}}{H_o l} = 0{,}55 \cdot 10^{-4} \ [wb]$$

Pierwsze przybliżenie.

Równanie stycznej w punkcie U_{m1}:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{d\varphi}{dU_m}(U_{m1})(U_m - U_{m1})$$

$$\frac{d\varphi}{dU_m}(U_{m1}) = 0{,}96 \cdot 10^{-6} \left[\frac{wb}{A}\right]$$

$$\varphi - 55 \cdot 10^{-6} = 0{,}96 \cdot 10^{-6}(U_m - 55{,}7)$$

Punkt przecięcia się z prostą:

$$U_{m2} = 56,1 \ [A]$$

$$\varphi_2 = 0,56 \ . \ 10^{-4} \ [wb]$$

Ponieważ w rozpatrywanym przedziale krzywa magnesowania jest "mało nieliniowa" otrzymujemy więc bardzo szybką zbieżność ciągu $\{U_{mn}\}$.

Z przykładu widać, że można podać również podobną metodę znajdowania rozwiązań zagadnień nieliniowych, różniącą się od powyższej zamianą zmiennych x z y.
Mianowicie: dla danego punktu (x_n, y_n) przeprowadzamy styczną przecinającą się z prostą w punkcie $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$.

Następną styczną konstruujemy w punkcie $(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$, gdzie $x_{n+1} = f^{-1}(\bar{y}_{n+1})$; nie zaś jak poprzednio w punkcie $(\bar{x}_{n+1}, y_{n+1})$, gdzie $y_{n+1} = f(\bar{x}_{n+1})$.

Dalsze uogólnienia powyższej metody mogą iść w kierunku wprowadzenia SEM zależnej od czasu oraz wprowadzenia obwodów złożonych.
Dopuszczenie zmiennej w czasie SEM formalnie nie komplikuje rozważań, bowiem dla każdej chwili czasu t_o z osobna, może być przeprowadzona podana analiza i znalezione rozwiązanie $(x_p(t_o), \ y_p(t_o))$. Spowodowane jest to brakiem elementów inercyjnych w obwodzie, które wprowadzają związek przyczynowy między napięciem czy prądem w następujących po sobie chwilach czasu, który jest wyrażony równaniem różniczkowym. Przypadkiem obwodów złożonych zajmiemy się szerzej.

Niech dany będzie obwód złożony, składający się z SEM, elementów liniowych oraz nieliniowych.

Obwód ten opisany będzie (w - 1) równaniami wynikającymi z I prawa Kirchhoffa:

$$c_{ij} \, i_j = 0 \qquad \begin{matrix} i \in (1, \ldots w-1) \\ j \in (1, \ldots g) \end{matrix} \tag{14}$$

gdzie "i_j" oznacza prąd w j-tej gałęzi oraz r równaniami wynikającymi z II prawa Kirchhoffa:

$$a_{kj}\, u_j = 0 \qquad \begin{matrix} k \in (1, \ldots, r) \\ \cdot \\ j \in (1, \ldots, g) \end{matrix} \tag{15}$$

gdzie "u_j" oznacza napięcie na j-tej gałęzi,

"w" - ilość węzłów,

"r" - " "oczek niezależnych",

"g" - " gałęzi,

(zachodzi $g = r + (w - 1)$).

Współczynniki c_{ij} oraz a_{kj} określone są następująco:

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jeśli prąd w gałęzi } j \text{ odpływa z węzła } i, \\ 0 & \text{jeśli gałąź } j \text{ nie kontaktuje się z węzłem } i, \\ 1 & \text{jeśli prąd w gałęzi } j \text{ dopływa do węzła } i. \end{cases}$$

$$a_{kj} = \begin{cases} -1 & \text{jeśli napięcie } u_j \text{ zastrzałkowane jest przeciwnie do cyrkulacji oczka } k, \\ 0 & \text{jeśli gałąź } j \text{ nie wchodzi w skład oczka } k, \\ 1 & \text{jeśli napięcie } u_j \text{ zastrzałkowane jest zgodnie z cyrkulacją oczka } k, \end{cases}$$

Dodatkowo, dla g elementów nieliniowych, otrzymamy:

$$i_n = f_n(u_n) \qquad n \in (1, \ldots, g) \tag{16}$$

gdzie funkcje (16) są klasy c_1 o pochodnych $\frac{df_n}{du_n}$ monotonicznych w pewnym otoczeniu rozwiązania podanych równań.

Uwaga: w powyższych związkach wskaźniki powtarzające się w jednym wierszu oznaczają sumowanie.

Obieramy przybliżenie zerowe (u_{no}, i_{no}).

Wyznaczamy styczne do charakterystyk nieliniowych w tych punktach:

$$i_n - i_{no} = \frac{df_n}{du_n}(u_{no})(u_n - u_{no}) \tag{17}$$

Wstawiamy r. (17) do r. (14):

$$c_{ij} f'_{jo} u_j = c_{ij}(f'_{jo} u_{jo} - i_{jo}) \tag{18}$$

Rozwiązujemy układ (15), (18):

$$u_{n1} = \frac{W_{n1}}{W_1} \tag{19}$$

gdzie:

$$W_1 = \begin{vmatrix} c_{11} f'_{10} & \cdots\cdots & c_{1g} f'_{go} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{w-1,1} f'_{10} & \cdots & c_{w-1,g} f'_{go} \\ a_{11} & \cdots\cdots & a_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots\cdots & a_{rg} \end{vmatrix}$$

$$W_{n1} = \begin{vmatrix} c_{11} f'_{10} & \cdots & c_{1n}(f'_{no} u_{no} - i_{no}) & \cdots & c_{1g} f'_{go} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{w-1,1} f'_{10} & \cdots & c_{w-1,n}(f'_{no} u_{no} - i_{no}) & \cdots & c_{w-1,g} f'_{go} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{rg} \end{vmatrix} \tag{20}$$

Następnie wyznaczamy styczne w punktach (u_{n1}, i_{n1}) gdzie $i_{n1} = f_n(u_{n1})$. Powtarzając tę operację k-krotnie, otrzymujemy ciąg $\{u_{nk}, i_{nk}\}$. Należałoby teraz wykazać, że ciąg ten jest zbieżny oraz podać założenia, przy jakich to zachodzi. Następ-

nie zbadać, czy zbieżny jest on do rozwiązania danych równań. Odpowiedź na te pytania z pewnością nie byłaby prosta.

Monotoniczność pochodnych $\frac{df_n}{du_n}$ nie wystarcza tu do zapewnienia zbieżności poprzednio skonstruowanego ciągu. Widać to na przykładzie obwodu prostego, rozważanego poprzednio, gdy element nieliniowy powstał przez połączenie szeregowe dwu elementów nieliniowych o pochodnej $\frac{df}{du}$ monotonicznie rosnącej dla charakterystyki pierwszego i malejącej dla drugiego.

W tym przypadku można otrzymać charakterystykę np. o $\frac{d^2f}{du^2}>0$ na lewo od pewnego punktu i $\frac{d^2f}{du^2}<0$ na prawo od niego. O ile punkt ten będzie rozwiązaniem równań dla naszego zagadnienia, może okazać się jak w przytoczonym uprzednio przykładzie, że ciąg $\{u_k, i_k\}$ jest rozbieżny.

Widać stąd, że opisana metoda kolejnych przybliżeń nie pozwala na znalezienie rozwiązania w każdym przypadku gdy ono istnieje.

Jest to spowodowane tym, ze operuje ona zbyt małą ilością informacji o danej funkcji nieliniowej (pochodne w pewnych jej punktach), by zapewnić pełne rozwiązanie tak szerokiego zagadnienia.

Rękopis złożono w redakcji w marcu 1964 r.

МЕТОД ОЧЕРЕДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕИНЕРЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В настоящей статье приведена конструкция некоторой последовательности линейных приближений, дающая возможность аналитического решения нелинейных электро цепей стационарного или переменного процесса.
Рассматриваемые цепи не содержат индуктивности ни ёмкости. Приведены также некоторне доказательства сходимости этих последовательностей.

THE METHOD OF SUCCESSIVE LINEAR APPRIXIMATIONS FOR NON-LINEAR, NON-INERTIAL ELECTRIC CIRCUITS SOLUTION

S u m m a r y

The work describes the construction of some linear appriximation trains allowing one to derive the analytical solution of the non-linear electric circuits of the steady and unsteady transients. These Circuits have no inductance and capacitance. It is also reports some proofs of the convergence of these trains.