ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964

Seria: ELEKTRYKA z. 18 Nr kol. 119

KAROL LUBELSKI
Katedra Elektrotechniki
Ogólnej B

OBLICZENIE OPORU WEJŚCIOWEGO UKŁADU ŁAŃCUCHOWEGO N DOWOLNYCH CZWÓRNIKÓW

Streszczenie. Podano uproszczony sposób obliczenia oporu wejściowego układu łańcuchowego złożonego z n dowolnych czwórników liniowych biernych. Polega on na zastąpieniu iloczynów macierzy łańcuchowych (kwadratowych) przez iloczyny macierzy kwadratowej i macierzy kolumnowej pewnych współczynników.

1. WSTĘP

Wiele złożonych obwodów elektrycznych daje się przedstawić łańcuchowym połączeniem prostych czwórników. Macierzowa analiza i synteza takich obwodów wymaga określenia macierzy łańcuchowej czwórnika zastępczego, która równa się iloczynowi macierzy łańcuchowych poszczególnych czwórników. Aby obliczyć ten iloczyn trzeba kolejno mnożyć po dwie macierze.

Obliczenia te dla większej ilości ogniw są żmudne, ponieważ nie ma prostych wzorów analitycznych wiążących elementy macierzy iloczynu z elementami macierzy poszczególnych czynników. Uzyskane przez szereg autorów wzory upraszczające mają zastosowanie tylko do specjalnych przypadków. Doležal [4], Forejt [7] i Zima [13] podali wzory do obliczenia wieloogniwowego czwórnika złożonego z jednakowych czwórników typu Γ. Elementy macierzy łańcuchowej przedstawione są jako wielomiany n-go stopnia, a ich współczynniki oblicza się przy pomocy odpowiednich tablic.

Doetsch [3], Jawicz [8], Johnson [10], Storch [11] i Zima [12] podali sposób obliczenia macierzy łańcuchowej czwórnika zastępczego dla n jednakowych czwórników przy pomocy kilku pomocniczych funkcji. Do obliczeń w tym szczególnym przypadku można też zastosować twierdzenie Cayleya - Hamiltona lub wzór Sylvestera [1]. Epelbaum [6] podał analogiczne wzory dla czwórników symetrycznych.

Dreikorn i Stockinger [5] podali uproszczone schematy obliczeń iloczynu macierzy łańcuchowych, ale nie zmniejszają one liczby wykonywanych działań. Jawicz [9] zastosował powyższą metodę do obliczenia współczynnika wzmocnienia wzmacniacza tranzystorowego. Dawydow [2] podał wzory rekurencyjne do obliczenia oporu wejściowego czwórników typu drabinkowego. Autor nie zetknął się w literaturze ze wzorami upraszczającymi obliczenie macierzy łańcuchowej czwórnika zastępczego dla układu łańcuchowego złożonego z n dowolnych czwórników (jednakowych lub różnych, symetrycznych lub niesymetrycznych).

W pracy niniejszej został podany nowy sposób obliczenia oporu wejściowego układu łańcuchowego złożonego z dowolnych czwórników. Wyprowadzone wzory upraszczające obliczenia polegają na zastąpieniu iloczynów macierzy kwadratowych przez iloczyny macierzy kwadratowej i macierzy kolumnowej pewnych współczynników.

2. MACIERZ OPORU WEJŚCIOWEGO CZWÓRNIKA

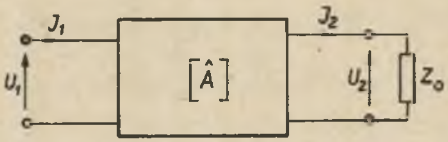
Zakładamy, że dany jest dowolny czwórnik liniowy bierny, złożony ze stałych elementów RLC, obciążony na wyjściu impedancją Z_0, zasilany na wejściu stałą częstotliwością (rys. 1)

W równaniach napięciowo-prądowych tego czwórnika

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{A}\,\hat{U}_2 + \hat{B}\,\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \hat{C}\,\hat{U}_2 + \hat{D}\,\hat{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

podstawiamy

$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_o \hat{I}_2$$



Rys. 1. Czwórnik obciążony na wyjściu

i otrzymujemy

$$\hat{U}_1 = (\hat{A}\hat{Z}_o + \hat{B})\hat{I}_2 \tag{2}$$

$$\hat{I}_1 = (\hat{C}\hat{Z}_o + \hat{D})\hat{I}_2 \tag{3}$$

Dzieląc obustronnie (2) przez (3) otrzymuje się wzór na opór wejściowy czwórnika

$$\hat{Z}_{we} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{A}\hat{Z}_o + \hat{B}}{\hat{C}\hat{Z}_o + \hat{D}} \tag{4}$$

Wzór (4) można przedstawiać w następującej postaci

$$\hat{Z}_{we} = \frac{\hat{L}}{\hat{M}} \tag{5}$$

gdzie wyrażenie

$$\hat{L} = \hat{A}\hat{Z}_o + \hat{B} \tag{6}$$

nazywać będziemy współczynnikiem L, a wyrażenie

$$\hat{M} = \hat{C}\hat{Z}_o + \hat{D} \tag{7}$$

nazwiemy współczynnikiem M.

Po podstawieniu (6) do (2) oraz (7) do (3), otrzymuje się wzory

$$\left.\begin{aligned} \hat{L} &= \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2} \\ \hat{M} &= \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wyjaśniające sens fizykalny obu współczynników.

Współczynnik $\hat{L}$ przedstawia transmitancję napięciowo-prądową i ma wymiar oporu, a współczynnik $\hat{M}$ przedstawia przekładnię prądową czwórnika i jest bezwymiarowy.

Równania (2) i (3) w formie macierzowej mają postać

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}\ \hat{Z}_0 + \hat{B} \\ \hat{C}\ \hat{Z}_0 + \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_2 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Pierwszy czynnik prawej strony równania (9) daje się rozłożyć na iloczyn

$$\begin{bmatrix} \hat{A}\ \hat{Z}_0 + \hat{B} \\ \hat{C}\ \hat{Z}_0 + \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}, & \hat{B} \\ \hat{C}, & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Elementy pierwszego i drugiego wiersza macierzy kolumnowej po lewej stronie równania (10) przedstawiają odpowiednio licznik i mianownik równania (4).

Wobec tego macierz oporu wejściowego czwórnika daje się przedstawić w następującej postaci

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_{we} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}, & \hat{B} \\ \hat{C}, & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Z}_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

gdzie

$[\hat{A}]$ oznacza macierz łańcuchową czwórnika,

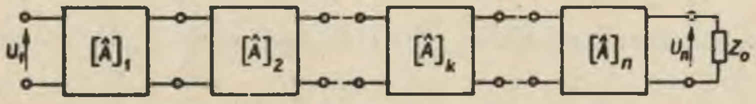
$[\hat{Z}_o]$ oznacza macierz kolumnową impedancji obciążenia.

3. OPÓR WEJŚCIOWY UKŁADU ŁAŃCUCHOWEGO CZWÓRNIKÓW

Załóżmy, że dany jest łańcuch złożony z $n \geqslant 2$ dowolnych czwórników liniowych biernych, przy czym ostatnie ogniwo tego łańcucha obciążone jest na wyjściu impedancją Z_o (rys. 2).

Oznaczmy przez

$$[\hat{A}]_k = \begin{bmatrix} \hat{A}_k, & \hat{B}_k \\ \hat{C}_k, & \hat{D}_k \end{bmatrix}$$



Rys. 2. Łańcuchowe połączenie n dowolnych czwórników

macierz łańcuchową dowolnego ogniwa tego łańcucha, gdzie $k = 1, 2 \ldots\ldots n$ oznacza przynależność elementów do k-tej macierzy.

Macierz łańcuchową czwórnika zastępczego oblicza się w tym przypadku znanym wzorem

$$[\hat{A}] = [\hat{A}]_1 [\hat{A}]_2 \ldots\ldots\ldots [\hat{A}]_{n-1} [\hat{A}]_n = \prod_{k=1}^{n} [\hat{A}]_k \tag{12}$$

Macierz oporu wejściowego czwórnika zastępczego, na podstawie wzoru (11), wynosi

$$[\hat{Z}_{we}] = [\hat{A}]_1 [\hat{A}]_2 \ldots\ldots [\hat{A}]_{n-1} [\hat{A}]_n \begin{bmatrix} \hat{Z}_o \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Iloczyn powyższy jest nieprzemienny i posiada cechę łączności, a obliczamy go mnożąc przez siebie kolejno po dwie macierze zaczynając od strony zacisków wejściowych. W ogólnym przypadku obliczenie to wymaga wykonania (8n-6) iloczynów na liczbach zespolonych.

Aby zmniejszyć liczbę działań potrzebnych do obliczenia iloczynu (13) postępujemy w następujący sposób.

Korzystając z cechy łączności, iloczyn (13) można przedstawić w postaci

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = \left[\hat{A}\right]^{(n-1)} \left[\hat{A}\right]_n \begin{bmatrix} \hat{Z}_o \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

gdzie

$$\left[\hat{A}\right]^{(n-1)} = \prod_{k=1}^{n-1} \left[\hat{A}\right]_k = \begin{bmatrix} \hat{A}', & \hat{B}' \\ \hat{C}', & \hat{D}' \end{bmatrix} \tag{15}$$

oznacza macierz zastępczą iloczynu macierzy (n-1) czwórników łańcucha.

Po wykonaniu działań w równaniu (14) otrzymujemy

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = \begin{bmatrix} \hat{A}' (\hat{A}_n \hat{Z}_o + \hat{B}_n) + \hat{B}'(\hat{C}_n \hat{Z}_o + \hat{D}_n) \\ \hat{C}' (\hat{A}_n \hat{Z}_o + \hat{B}_n) + \hat{D}'(\hat{C}_n \hat{Z}_o + \hat{D}_n) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Ponieważ wyrażenia

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_n \hat{Z}_o + \hat{B}_n &= \hat{L}_n \\ \hat{C}_n \hat{Z}_o + \hat{D}_n &= \hat{M}_n \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

przedstawiają tzw. współczynniki L i M n-go czwórnika, więc po podstawieniu (17) do (16) otrzymuje się

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = \begin{bmatrix} \hat{A}' \hat{L}_n + \hat{B}' \hat{M}_n \\ \hat{C}' \hat{L}_n + \hat{D}' \hat{M}_n \end{bmatrix} = \left[\hat{A}\right]^{(n-1)} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_n \tag{18}$$

gdzie

$\begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_n$ oznacza macierz kolumnową współczynników n-go czwórnika.

W dalszym ciągu przekształca się równanie (15) w następujący sposób

$$\left[\hat{A}\right]^{(n-1)} = \left(\prod_{k=1}^{n-2} \left[\hat{A}\right]_k\right)\left[\hat{A}\right]_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}'' , & \hat{B}'' \\ \hat{C}'' , & \hat{D}'' \end{bmatrix} \left[\hat{A}\right]_{n-1} = \left[\hat{A}\right]^{(n-2)} \left[\hat{A}\right]_{n-1} \tag{19}$$

Podstawiając (19) do (18) otrzymuje się

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = \left[\hat{A}\right]^{(n-2)} \left[\hat{A}\right]_{n-1} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_n \tag{20}$$

Po wykonaniu działań i podstawieniu

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_{n-1} \hat{L}_n + \hat{B}_{n-1} \hat{M}_n &= \hat{L}_{n-1} \\ \hat{C}_{n-1} \hat{L}_n + \hat{D}_{n-1} \hat{M}_n &= \hat{M}_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

równanie (20) przyjmuje postać

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = \begin{bmatrix} \hat{A}'' \hat{L}_{n-1} + \hat{B}'' \hat{M}_{n-1} \\ \hat{C}'' \hat{L}_{n-1} + \hat{D}'' \hat{M}_{n-1} \end{bmatrix} = \left[\hat{A}\right]^{(n-2)} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_{n-1} \tag{22}$$

W równaniu tym

$$[\hat{A}]^{(n-2)} = \begin{bmatrix} \hat{A}'' , & \hat{B}'' \\ \hat{C}'' , & \hat{D}'' \end{bmatrix}$$

oznacza macierz zastępczą iloczynu macierzy (n-2) czwórników łańcucha oraz

$\begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_{n-1}$ oznacza macierz współczynników (n-1)-go czwórnika.

Przekształcając w dalszym ciągu w analogiczny sposób równanie (22) dochodzi się ostatecznie do następującego wzoru

$$\left[\hat{Z}_{we}\right] = [\hat{A}]_1 \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_2 \tag{23}$$

w którym

$[\hat{A}]_1$ oznacza macierz łańcuchową pierwszego czwórnika

$\begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_2$ oznacza macierz współczynników drugiego czwórnika.

W ten sposób obliczenie macierzy (13) oporu wejściowego układu łańcuchowego czwórników sprowadza się do kolejnego obliczania macierzy kolumnowej współczynników L i M poszczególnych ogniw, zaczynając od ostatniego.

$$\left.\begin{aligned} [\hat{A}]_n \begin{bmatrix} \hat{Z}_0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_n \\ [\hat{A}]_{n-1} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_{n-1} \\ [\hat{A}]_{n-2} \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_{n-1} &= \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} & [\hat{A}]_2 \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_2 \\ [\hat{Z}_{we}] = & [\hat{A}]_1 \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix}_1 \end{aligned}\right\}$$

W formie algebraicznej obliczenia oporu wejściowego przedstawiają się następująco

$$\left.\begin{aligned} & \hat{L}_n = \hat{A}_n \hat{Z}_o + \hat{B}_n \\ & \hat{M}_n = \hat{C}_n \hat{Z}_o + \hat{D}_n \\ & - - - - - - - - \\ & \hat{L}_{n-1} = \hat{A}_{n-1} \hat{L}_n + \hat{B}_{n-1} \hat{M}_n \\ & \hat{M}_{n-1} = \hat{C}_{n-1} \hat{L}_n + \hat{D}_{n-1} \hat{M}_n \\ & - - - - - - - - - - - - - \\ & \hat{L}_{n-2} = \hat{A}_{n-2} \hat{L}_{n-1} + \hat{B}_{n-2} \hat{M}_{n-1} \\ & \hat{M}_{n-2} = \hat{C}_{n-2} \hat{L}_{n-1} + \hat{D}_{n-2} \hat{M}_{n-1} \\ & - - - - - - - - - - - - - - - \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - - - - - - - - - - - - - - - \\ & \hat{L}_2 = \hat{A}_2 \hat{L}_3 + \hat{B}_2 \hat{M}_3 \\ & \hat{M}_2 = \hat{C}_2 \hat{L}_3 + \hat{D}_2 \hat{M}_3 \\ & - - - - - - - - - - - - - - - \\ & \hat{Z}_{we} = \frac{\hat{A}_1 \hat{L}_2 + \hat{B}_1 \hat{M}_2}{\hat{C}_1 \hat{L}_2 + \hat{D}_1 \hat{M}_2} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

4. ZAKOŃCZENIE

Przy obliczaniu oporu wejściowego układu łańcuchowego obciążonego na wyjściu, złożonego z n dowolnych czwórników liniowych biernych można zastąpić iloczyny macierzy łańcuchowych kwadratowych we wzorze (13) przez iloczyny macierzy kwadratowej i macierzy kolumnowej współczynników L i M.

W ten sposób daje się zredukować liczbę wykonywanych działań do (4n-2) iloczynów liczb zespolonych, a więc prawie dwukrotnie dla $n \geqslant 3$.

Rękopis złożono w redakcji w styczniu 1964 r.

LITERATURA

[1] Cholewicki: Analiza obwodów elektrycznych (Warszawa, 1962 WNT).

[2] Dawydow: K woprosu o rasczetie wchodnych soprotiwlenij mnogozwiennych ciepnych schiem (Elektriczestwo, 1961, Nr 12).

[3] Doetsch: Die Matrix eines Kettenleiters aus gleichen Vierpolen. (Archiv der Elektr. Übertragung, 1960, Nr 8).

[4] Doležal: Věta o kaskádě článků L (Slaboproudy Obzor, 1956, Nr 5).

[5] Dreikorn, Stockinger: Rationelle Berechnung mehrfacher Matrizenprodukte (Archiv der Elektr. Übertragung, 1959, Nr 7).

[6] Epelbaum: Matricznyje paramietry kaskadnoho sojedinienija proizwolnoho czisła czetyrechpolusnikow (Elektroswjaź, 1961, Nr 11).

[7] Forejt: Matice kaskád s jednoduchých členů (Slaboproudy Obzor, 1956, Nr 5).

[8] Jawicz: Zamieczanija po rasczetu kaskadnych sojedinienij n - odinakowych czetyrechpolusnikow (Radiotiechnika i Elektronika, 1961, Nr 5).

[9] Jawicz: K woprosu o wyczislenji elemientow rezultirujuszczej matricy kaskadnogo sojedinienija czetyrechpolusnikow (Elektroswojaź, 1962, Nr 4).

[10] Johnson: Cascaded Active Twoports (IRE Transactions on Circuit Theory, 1962, Nr 1).

[11] Storch: The transmission matrix of N alike cascaded networks (AIEE Transactions, 1954, p. I, v. 73).

[12] Zima: Výpočet článkového vodiče složeného ze stejných členů (Slaboproudy Obzor, 1956, Nr 5).

[13] Zima: Výpočet článkového vodiče s progresivné rostoucimi nebo klesajicimi impedancemi větvi členů (Slaboproudy Obzor, 1958, Nr 11).

РАСЧЕТ ВВОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦЕПНОЙ СИСТЕМЫ n ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Р е з ю м е

Приведен упрощенный способ расчета сопротивления вводной цепной системы, состоящей из произвольных линейных реактивных четырёхполюсников. Он заключается в замене произведений квадратной матрицы и столбовой некоторых коэффициентов.

INPUT RESISTANCE CALCULATION OF LADDER NETWORK N FROM THE ARBITRARY FOUR - POLES

S u m m a r y

Description of the simplified calculation method of the input resistance of the ladder network, composed of the arbitrary linear reactive four - poles n. The method depends on the replacement of the network square matrix products by the products of square and column matrix of the some factors.