MECHANIKA Z. 17

RYSZARD GRYBOŚ

P. 3361/63

DRGANIA POPRZECZNE PRĘTA DWUPRZEGUBOWEGO Z MASĄ SKUPIONĄ NA KOŃCU

(Z DYNAMIKI UKŁADÓW Z NIELINIOWĄ BEZWŁADNOŚCIĄ)

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 72 – GLIWICE 1963

SPIS TREŚCI

Str.

1. Sformułowanie zagadnienia i założenia 3

Część I.

Model o jednym stopniu swobody

2. Równanie drgań swobodnych 10
3. Drgania wymuszone 48

Część II

Pręt dwuprzegubowy z masą skupioną na końcu ruchowym

4. Podstawowy układ równań różniczkowych problemu oraz sprowadzenie go do równania różniczkowocałkowego . . . 86
5. Wyznaczenie amplitudalnego ugięcia pręta posiadającego oś nieściśliwą 96
6. Wyznaczenia poprawki uwzględniającej ściskanie pręta . . 106

Literatura 114

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 72

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

P. 3361/63

RYSZARD GRYBOŚ

DRGANIA POPRZECZNE PRĘTA DWUPRZEGUBOWEGO Z MASĄ SKUPIONĄ NA KOŃCU

(Z DYNAMIKI UKŁADÓW Z NIELINIOWĄ BEZWŁADNOŚCIĄ)

PRACA HABILITACYJNA Nr 23

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 28. IX. 1962 r.

GLIWICE 1963

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Gryboś

SEKRETARZ REDAKCJI

Tadeusz Matula

Recenzenci:

Prof. dr inż. STANISŁAW BODASZEWSKI – Politechnika Śląska
Prof. dr inż. JANUSZ DIETRYCH – Politechnika Śląska
Prof. dr inż. JAROSŁAW NALESZKIEWICZ – PAN
Prof. dr inż. STEFAN ZIEMBA – PAN

P.T. 561/64

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

Nakład 50+195 egz. Objętość. ark. wyd. 5,5 ark. druk. 7,4
Papier offsetowy kl. V. 70x100, 70 g
Oddano do składania 7. XI. 1963 r. Podpisano do druku 3. XII. 1963 r.
Druk ukończono 10. XII. 1963 r.
Zam. 1630 D-22 Cena zł 6,90

Zakład Graficzny Politechniki Śląskiej w Gliwicach

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I ZAŁOŻENIA

1.1. Zagadnienie stateczności dynamicznej pręta polega na badaniu drgań giętnych pręta dwuprzegubowego, wywołanych działaniem podłużnej siły pulsującej. Okazuje się, że gdy częstość wymuszenia p jest równa (lub bliska) podwójnej częstości własnej drgań giętnych pręta, to wówczas ma miejsce rezonans parametryczny, przy którym amplitudy drgań mogą osiągać wartości zbyt wielkie z uwagi na bezpieczeństwo pracy konstrukcji[x].

Badania teoretyczne nad tym zagadnieniem ograniczają się na ogół do przypadku wymuszenia tzw. siłą bez masy. Jest to jednakże przypadek wyidealizowany, albowiem zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i w warunkach ruchowych sposób realizacji wymuszenia wymaga na ogół związania z ruchomym przegubem pręta pewnej masy Q/g.

Może to być np. masa wibratora (wzgl. niektórych jego elementów) lub część stropu hali maszyn, jeżeli strop ten podparty jest słupem, który stanowi przedmiot naszego zainteresowania.

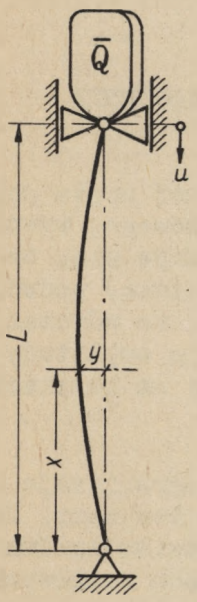
Podobnie rzecz ma się w przypadku pręta, stanowiącego element statycznie wyznaczalnej kratownicy. Pręt taki utraciwszy pod działaniem pulsującej siły stateczność wykonuje drgania poprzeczne, które z uwagi na zbliżenia końców pręta udzielają się całej pozostałej masie kratownicy.

Ściśle biorąc wszelkim drganiom giętnym pręta, którego jeden koniec ma swobodę poruszania się w kierunku osiowym, towa-

---

x) Jest to tzw. rezonans główny, poza tym występują jeszcze rezonanse wyższych rzędów przy częstościach $p = \omega$, $2\omega/3$, $\omega/2$, $2\omega/5$ itd.

rzyszy zawsze pewien ruch podłużny elementów, który jakościowo daje taki sam efekt, co i masa skupiona na końcu, aczkolwiek ilościowo może posiadać znaczenie drugorzędne.



Rys.1

Jest rzeczą oczywistą, że rozpatrując warunki powstawania rezonansu we wszystkich przytoczonych wyżej przypadkach należy brać pod uwagę częstość drgań własnych nie samego pręta, lecz układu pręt + masa skupiona. Ta ostatnia bowiem, współuczestnicząc w ruchu pręta wpływa na wspomnianą częstość w stopniu nieraz bardzo znacznym, zresztą zależnym od stosunku masy skupionej do masy samego pręta.

Uwagi powyższe wskazują na celowość analizowania dynamiki układu złożonego z pręta dwuprzegubowego z dodatkowym ciężarem Q, zaczepionym na ruchomym końcu (rys.1).

1.2. Ruch ciężaru Q odbywa się na przemieszczeniach $u(t)$, będących wielkościami małymi drugiego rzędu w odniesieniu do ugięć $y(x,t)$. Zgodnie ze znaną zależnością przybliżoną jest bowiem

$$u \approx \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx, \qquad (1.1)$$

gdzie $x \in [0,L]$ oznacza współrzędną dowolnego przekroju pręta. Towarzysząca ruchowi ciężarka siła bezwładności, jako proporcjonalna do przyspieszenia d^2u/dt^2, daje w równaniu ruchu pręta wyrażenie

$$y^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2, \qquad (1.2)$$

charakterystyczne dla tzw. nieliniowej bezwładności.

Nieliniowość tego typu jako pierwsi analizowali N.M. Kryłow i N.N. Bogolubow[x] w związku z badaniem sowobodnych drgań kolumny.

Następnie I.I. Goldenblat[xx] wskazywał na konieczność uwzględnienia tej nieliniowości przy rezonansie parametrycznym[xxx].

Ostatnio G. Schmidt [13] rozpatrywał drgania wymuszone pręta z nieliniową bezwładnością, sprężystością oraz nieliniowym tłumieniem. W rezultacie tak ogólnie sformułowanego zagadnienia wyniki mają nader skomplikowaną budowę, a wpływ poszczególnych nieliniowości jest trudny do uchwycenia. W omawianej pracy nie podano charakterystyki amplituda - częstość wymuszenia.

1.3. Celem niniejszego opracowania jest dokonanie analizy dynamiki pręta z masą skupioną na końcu, w szczególności wyznaczenie częstości swobodnych drgań giętnych oraz ich amplitudy.

Drgania swobodne układu można wzbudzić przez udzielenie prętowi początkowej prędkości lub ugięcia. Pierwszy sposób wzbudzenia można zrealizować za pomocą impulsu poprzecznego, bądź też podłużnego. W tym ostatnim przypadku niezbędne jest oczywiście istnienie pewnej krzywizny wstępnej pręta.

Impuls podłużny może być zaś przekazany takiemu prętowi np. za pośrednictwem uderzenia ciężarem Q w przegub ruchomy z pewną prędkością, skierowaną wzdłuż osi pręta. Dla zachowania warunków zagadnienia należy przy tym założyć, że uderzenie to było plastyczne, tzn. iż w jego rezultacie ciężar został trwale związany z przegubem ruchomym.

Analiza tego przypadku, niewątpliwie bardzo ważnego z punktu widzenia potrzeb praktyki, nastręcza jednak duże trud-

---

x) Issledowanije kolebanij konstrukcij, 1935.

xx) Dinamiczeskaja ustaiczіwost' sooruženij, 1948.

xxx) Cyt. wg [5]; żadna z wymienionych wyżej prac nie była dostępna autorowi.

ności natury matematycznej. Należy bowiem pamiętać, że wówczas w pręcie zostaną wzbudzone w zasadzie drgania podłużno-giętne, przy czym można przypuszczać, że "udział" drgań podłużnych (w sensie przenoszonej energii) będzie tym większy, im mniejsze było zakrzywienie wstępne pręta.

Zagadnieniem sprzężonych drgań podłużno-giętnych w aspekcie stateczności udarowej pręta zajmował się S. Kaliski [2]. Problemowi temu nie będziemy poświęcać uwagi w niniejszym opracowaniu zakładając m.in. nieskończenie wielką prędkość propagacji zaburzeń sprężystych.

Tym niemniej należy mieć na uwadze, że zaniedbując skrócenia osiowe, związane z drganiami podłużnymi trzeba jednak uwzględniać skrócenia rozłożone równomiernie na całej długości pręta, a będące wynikiem działania okresowo zmiennej siły osiowej. Ta ostatnia zaś jest równa sile bezwładności masy Q/g, zaczepionej w przegubie ruchomym i wykonującej wraz z nim ruch okresowy.

Tak więc przemieszczenie przegubu oraz ciężaru należy traktować jako rezultat zarówno ugięcia, jak i ściskanie pręta. Składnik pierwszy określa wzór (1.1), drugi można obliczyć elementarnym wzorem Hooke'a przy założeniu, że wypadkowe naprężenie normalne nigdzie nie przekroczyło granicy proporcjonalności.

Niestety nawet mimo tej idealizacji przy rozwiązywaniu zagadnienia natrafimy na znaczne trudności natury matematycznej, których powodem jest przede wszystkim równoczesne uwzględnienie obu czynników, składających się na przemieszczenie przegubu ruchomego. Drgania giętne pręta są bowiem opisane wówczas nieliniowym równaniem różniczkowo-całkowym ze współczynnikami okresowymi, przy czym z uwagi na istnienie wstępnego zakrzywienia pręta równanie to jest ponadto niejednorodne.

Uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej jest oczywiście niemożliwe, a uciekając się do pomocy szeregów trygonometrycznych okazuje się, że żadna ze znanych metod mechaniki nieliniowej nie daje się w tym przypadku zastosować w klasycznej postaci.

1.4. W związku z tymi trudnościami okazało się korzystnym analizowanie ruchu modelu o jednym stopniu swobody, posiadającego nieliniową bezwładność. Ten sposób podejścia do zagadnienia jest podstawą rozważań, zawartych w dwóch pierwszych rozdziałach, składających się na pierwszą część opracowania. Równanie ruchu takiego modelu daje się stosunkowo łatwo analizować, a ponieważ pierwszą całkę tego równania otrzymuje się przez kwadraturę, przeto ruch układu można zobrazować na płaszczyźnie fazowej.

Przez stosowny dobór parametrów można uzyskać podobieństwo zarówno statyczne, jak i kinematyczne modelu oraz pręta. Innymi słowy oba wymienione obiekty posiadają wówczas jednakowe:

a) siły krytyczne (w sensie Eulera),

b) częstości własne drgań poprzecznych oraz

c) początkowe prędkości przekrojów środkowych.

Jest rzeczą oczywistą, że układ o jednym stopniu swobody może być tylko w organiczonej mierze traktowany jako model pręta ciągłego, obarczonego dodatkowym ciężarem na jednym końcu. W szczególności model taki nie uwzględnia wpływu ściskania osi pręta na wielkość amplitudalnego ugięcia oraz na częstość własną.

Tym niemniej prostota uzyskiwanych tą drogą wyników otwiera - jak można przypuszczać - pewne możliwości wykorzystywania ich przez inżynierów - praktyków, tym bardziej, że wyprowadzone wzory oceniają amplitudalne ugięcie z nadmiarem, właśnie z powodu pominięcia wpływu ściśliwości osi pręta.

Co się zaś tyczy częstości własnej drgań poprzecznych, to tutaj wpływ ten jest znacznie mniejszy, zwłaszcza w przypadku umiarkowanych wartości stosunku Q/G_p (G_p - ciężar pręta).

Rozważania dotyczące drgań swobodnych modelu, przeprowadzone w rozdz.2, stanowią w pewnej mierze podstawę do analizy drgań wymuszonych w układzie z nieliniową bezwładnością. Analiza ta zawarta jest w rozdz.3. Posłużono się tam metodą

małego parametru, uzupełnioną zasadą równowagi harmonicznych. W rezultacie uzyskano krzywą amplituda-częstość wymuszenia o charakterystycznym kształcie zanikającej fali.

Rozważania części drugiej, zawarte w trzech rozdziałach, dotyczą układu z nieliniową bezwładnością, w którym pręt traktowany jest jako kontinuum materialne.

W rozdz.4 wyprowadzono podstawowy układ równań różniczkowych problemu, po czym sprowadzano go do jednego równania różniczkowo-całkowego (nieliniowego).

Następnie, w rozdz.5, rozwiązano zagadnienie drgań swobodnych pręta przy założeniu nieściśliwości jego osi. Podobnie jak w części pierwszej równanie ruchu daje się wówczas scałkować przez kwadraturę, a otrzymane w ten sposób równanie energii pozwala wyznaczyć trajektorie fazowe ruchu środkowego przekroju pręta. W ten sposób dochodzi się do określenia amplitudy drgań poprzecznych pręta oraz jego częstości własnej.

Jeżeli następnie rozwiązanie powyższe potraktujemy jako pierwsze przybliżenie, to, wykorzystując ideę metody kolejnych przybliżeń, można wyznaczyć poprawkę, uwzględniającą wpływ skróceń osiowych na wielkość amplitudy. Postępowanie takie przeprowadzone zostało w rozdz.6.

Na końcu każdego rozdziału znajdują się wnioski.

1.5. W pracy przyjęto następujące założenia ogólne:

1.5.1. Rozpatruje się pręt dostatecznie smukły, o stałym przekroju poprzecznym, wykonany z materiału jednorodnego i izotropowego o liniowej charakterystyce sprężystej. Wyjątek pod tym względem stanowią równania p.2.5.3 i 2.5.4, w których badać będziemy stateczność ruchu układu z nieliniową charakterystyką sprężystą typu Duffinga.

1.5.2. Ugięcia dynamiczne pręta są małe (w sensie ważności przybliżonego wzoru na krzywiznę $1/\varrho \sim \partial^2 y/\partial x^2$), tym niemniej skończone.

1.5.3. Pręt jest wstępnie beznaprężeniowo słabo zakrzywiony.

1.5.4. Rozpatruje się układ zachowawczy (bez tłumienia).

W równaniu drgań giętnych pręta, podanym w części II pominięto:

1.5.5. Bezwładność elementów pręta przy przemieszczeniach osiowych; jednakże błąd, wynikający z tego uproszczenia można częściowo zniwelować przez wprowadzenie masy pręta zredukowanej do przekroju końcowego (przegubu ruchomego);

1.5.6. Bezwładność obrotową elementów pręta oraz wpływ sił poprzecznych. Jak wiadomo [3], oba te czynniki wnoszą do obliczeń poprawkę, która staje się istotna dopiero dla prętów o bardzo małej smukłości.

1.5.7. Ponadto zakłada się nieskończenie wielką prędkość propagacji zaburzeń sprężystych[x]. Można wykazać, że błąd jaki wnosi to założenie do równania ruchu rozpatrywanego układu zależy m.in. od wartości stosunku mas $\mu_* = Q/G_p$. Z tego względu rozważania tej części ograniczone będą do niezbyt małych wartości stosunku μ_* (orientacyjnie dla $\mu_* > 10$).

---

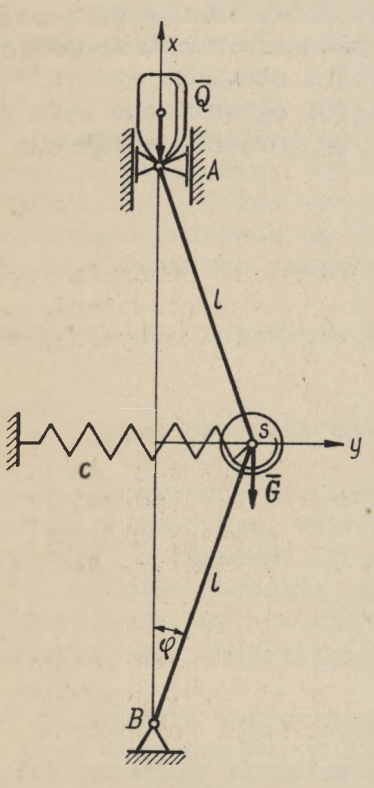
x) Założenie takie przyjmuje się w teorii stateczności zarówno statycznej, jak i dynamicznej pręta (por.np. [5]).

Część I

Model o jednym stopniu swobody

2. RÓWNANIE DRGAŃ SWOBODNYCH

2.1. Układ przedstawiony na rys.2 składa się z ciężarka o masie G/g oraz dwóch zupełnie sztywnych i nieważkich prętów, każdy o długości l, połączonych przegubowo w środku ciężkości S ciężarka G. Koniec B pręta dolnego osadzony jest w przegubie stałym, natomiast przegub górny A może przesuwać się (bez tarcia) wzdłuż osi x, przechodzącej przez osie przegubów A i B i zorientowanej pionowo. Tarcie w przegubach również zaniedbujemy. Ciężarek G może poruszać się po łuku koła o promieniu l ze środkiem w punkcie B. Wychylenia ciężarka powodują rozciąganie lub ściskanie sprężyny, która posiada liniową charakterystykę sprężystą oraz stałą c. Kiedy punkt S znajdzie się na osi x, wówczas sprężyna jest nienapięta.



Rys.2

Ponieważ pręty AS i BS traktujemy m.in. jako nieściśliwe, przeto opisany układ posiada jeden stopień swobody.

W dalszym ciągu układ ten będziemy traktować jako model dwuprzegubowego pręta (o osi nieściśliwej), z którego jednym końcem związana jest sztywno masa Q/g.

Pobudzenie układu do drgań można zrealizować w trojaki sposób, a mianowicie przez udzielenie:

1^{o} - ciężarkom wstępnych wychyleń x_o i y_o;

2^{o} - ciężarkowi G prędkości początkowej V_o;

3^{o} - ciężarkowi Q prędkości początkowej W_o.

Ten ostatni sposób może być zrealizowany np. za pomocą uderzenia ciężarkiem Q w przegub A z pewną prędkością W_1, skierowaną wzdłuż osi x.

Aby zachować warunki modelu opisanego powyżej musimy jednak założyć dalej, iż uderzenie to było doskonale plastyczne, tzn. że w jego rezultacie ciężarek został trwale związany z przegubem A.

Ten przypadek wzbudzenia drgań będzie przede wszystkim przedmiotem naszych rozważań.

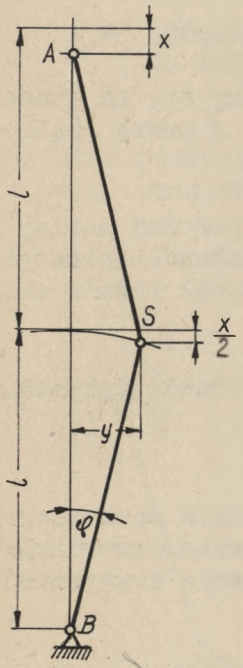
2.2. Zanim przystąpimy do wyprowadzenia równania ruchu układu musimy najpierw przeprowadzić pewne rozważania statyczne. Celem ich będzie m.in. wyznaczenie krytycznej wartości ciężaru Q.

Niech kąt φ, jaki tworzy oś pręta z osią x określa położenie układu w stanie wychylonym. Przyjmuje się, że przemieszczeniom punktu S w kierunku dodatniej półosi y odpowiadają dodatnie wartości kąta φ. Równowaga układu w położeniu niewychylonym, tzn. dla $\varphi = 0$ możliwa jest przy wszelkich wartościach Q, G, c i l.

Jest to jednak stan równowagi chwiejnej. Trwała równowaga układu możliwa jest wówczas, gdy $\varphi = \varphi_x \neq 0$, jednakże przy pewnych ograniczeniach co do wartości parametrów Q, G, c i l.

Aby ustalić ten warunek rozpatrzmy równowagę układu w położeniu wychylonym $\varphi = \varphi_r$. Za dodatnie uważać będziemy siły o zwrotach przeciwnych do dodatniego kierunku osi. Napięcie sprężyny Y_r wynosi wówczas

$$Y_r = (G + 2Q)\, tg\varphi_r . \qquad (2.1)$$



Rys.3

Wychyleniu y ciężarka G w kierunku poziomym towarzyszy obniżenie się ciężarka Q o x, równocześnie G także obniży się o x/2 (rys.3), przy czym

$$\frac{x}{2} = l - \sqrt{l^2 - y^2}. \qquad (2.2)$$

Kładąc we wzorze (2.1) dla stanu równowagi $Y_r = cy_r$ oraz widoczną z rys.3 zależność

$$tg\,\varphi_r = \frac{Y_r}{l - x_r/2}$$

otrzymamy

$$cy_r = (G + 2Q)\frac{y_r}{l - x_r/2},$$

skąd

$$x_r = 2l\left(1 - \frac{G + 2Q}{cl}\right). \qquad (2.3)$$

Ponieważ zaś ze wzoru (2.2) wynika

$$y = \pm\sqrt{x\left(l - \frac{x}{4}\right)}, \qquad (2.4)$$

przeto po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$y_r = \pm l \sqrt{1 - \left(\frac{G + 2Q}{cl}\right)^2}. \qquad (2.5)$$

Aby y_r było liczbą rzeczywistą $\neq 0$ musi być

$$1 - \left(\frac{G + 2Q}{cl}\right)^2 > 0,$$

skąd wynika, iż przy $Q > 0$ równowaga układu w położeniu wychylonym możliwa jest tylko wówczas, gdy

$$Q < \frac{1}{2}(cl - G).$$

Jest to warunek ograniczający wielkość ciężaru Q, przy zadanych wartościach c, l i G. Wobec założenia $Q > 0$ wynika stąd, że $c > G/l$, co oznacza, iż sprężyna musi posiadać określoną sztywność, aby utrzymać ciężarek G w popożeniu wychylonym.

Jeżeli

$$Q = \frac{1}{2}(cl - G) = Q_{kr}, \qquad (2.6)$$

to równowaga układu możliwa jest tylko przy $y_r = 0$, a więc dla prętów nieodchylonych od pionu; tę wartość siły Q nazywać będziemy ciężarem krytycznym.

Jeżeli w szczególnym przypadku jest $cl = G$, czyli $Q_{kr} = 0$, to wobec uczynionych powyżej założeń (zaniedbanie tarcia w przegubach) nie możliwa jest równowaga trwała układu dla żadnej dodatniej wartości Q[x]. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać tylko takie przypadki, w których $cl > G$.

---

x) Natomiast równowaga ta byłaby stała dla $Q < 0$, tzn. dla siły rozciągającej.

Podstawiając do wzoru (2.5) wyrażenie

$$cl = 2Q_{kr} + G, \tag{2.7}$$

wynikające z (2.6), otrzymamy następujący wzór

$$y_r = \pm \frac{2l}{2Q_{kr} + G} \sqrt{(Q_{kr} + Q + G)(Q_{kr} - Q)}, \tag{2.8}$$

który określa położenie równowagi układu.

Na sprężynę działa wówczas siła

$$Y_r = cy_r = \pm 2 \sqrt{(Q_{kr} + Q + G)(Q_{kr} - Q)}. \tag{2.9}$$

2.3. Układ przedstawiony na rys.2 ma być modelem pręta sprężystego, a więc wykazującego pewną sztywność EJ_z na zginanie. Sztywność tę reprezentuje w naszym modelu sztywność sprężyny, które stawia pewien opór sprężysty przy odchyleniach układu od stanu pierwotnego.

Zachodzi pytanie, jaką sztywność musi posiadać ta sprężyna, aby mogło być zachowane podobieństwo modelu i pręta także pod względem ilościowym?

Odpowiedź na to pytanie zależy od przyjętego kryterium porównawczego; najwłaściwsze wydaje się porównanie obciążeń krytycznych dla obu wymienionych układów[x]. Jeżeli zatem wartość Q_{kr}, określoną wzorem (2.6) porównamy z odpowiednim obciążeniem eulerowskim $P_E = \pi^2 EJ_z/(2l)^2$ dla pręta

---

x) Można by także np. założywszy istnienie pewnej mimośrodowości obciążenia, porównać ze sobą przemieszczenie y_r oraz strzałkę ugięcia odnośnego pręta, przy tej samej wartości siły ściskającej.

o długości 2l, to w rezultacie otrzymamy następujący wzór na zastępczą stałą sprężyny

$$c = \frac{1}{l}\left(\frac{\pi^2 EJ_z}{2l^2} + G\right). \qquad (2.10)$$

2.4. Z kolei przystąpimy do badania ruchu układu; odnośne równanie różniczkowe ustawimy przy pomocy równań Lagrange'a.

Aby wyznaczyć energię kinetyczną układu zauważmy, że gdy ciężarek Q obniży się o x, to ciężarek G przemieści się w kierunku poziomym o y i równocześnie obniży się o x/2; w związku z tym będzie

$$T = \frac{G}{2g}\left[\dot{y}^2 + \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2\right] + \frac{Q}{2g}\dot{x}^2, \qquad (2.11.1)$$

gdzie kropką oznaczono różniczkowanie podług t.

Ale prędkości $\dot{x}$ i $\dot{y}$ nie są od siebie niezależne, albowiem współrzędne x i y powiązane są ze sobą wzorem (2.2). Ponieważ rozpatrywać będziemy wyłącznie małe drgania układu, to wspomniany wzór możemy zastąpić zależnością przybliżoną. Jeżeli bowiem po rozwinięciu wyrażenia $\sqrt{l^2 - y^2}$ w szereg zatrzymamy tylko dwa pierwsze wyrazy, to otrzymamy

$$x = \frac{y^2}{l}, \qquad (2.2.1)$$

a w dalszym ciągu

$$\dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{l}. \qquad (2.12)$$

Podstawienie w (2.11.1) daje

$$T = \frac{G}{2g}\left[1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\dot{y}^2 + \frac{Q}{2g}\,\frac{4}{l^2}\,y^2\,\dot{y}^2. \qquad (2.11.2)$$

W dalszym ciągu znadujemy wyrażenia pomocnicze

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{G + 4Q}{g} \frac{y}{l^2} \dot{y}^2, \qquad (2.13.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{G}{g}\left[1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\dot{y} + \frac{4Q}{g}\left(\frac{y}{l}\right)^2 \dot{y},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{G}{g}\left[\left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right)\ddot{y} + 2\frac{y}{l^2}\dot{y}^2\right] + \frac{4Q}{g}\left[\left(\frac{y}{l}\right)^2 \ddot{y} + 2\frac{y}{l^2}\dot{y}^2\right]. \qquad (2.13.2)$$

Dla wyznaczenia siły uogólnionej piszemy wzór na pracę przygotowaną

$$\delta L_p = Q\,\delta x - Y\,\delta y + G\frac{\delta x}{2},$$

lub po podstawieniu $\delta x = \frac{2}{l} y \delta y$ oraz $Y = cy$

$$\delta L_p = \left(2Q\frac{y}{l} - cy + G\frac{y}{l}\right)\delta y = Q_y\,\delta y,$$

skąd

$$Q_y = (2Q + G - cl)\frac{y}{l}.$$

Jeżeli zamiast cl wstawimy wyrażenie $(2Q_{kr} + G)$, to otrzymamy ostatecznie następujący wzór na siłę uogólnioną

$$Q_y = -2(Q_{kr} - Q)\frac{y}{l}. \qquad (2.14)$$

Podstawienie (2.13) i (2.14) w równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} - \frac{dT}{dy} = Q_y$$

daje

$$\left[\frac{G}{g}\left(1 + \frac{y^2}{l^2}\right) + \frac{4Q}{g}\frac{y^2}{l^2}\right]\ddot{y} + \frac{G + 4Q}{g}\frac{y}{l^2}\dot{y}^2 + 2(Q_{kr}-Q)\frac{y}{l} = 0.$$

Wprowadźmy nową współrzędną uogólnioną

$$q \equiv \frac{y}{l} = \sin\varphi \qquad (2.15)$$

oraz bezwymiarowy czas

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (2.16)$$

a ponadto stosunki ciężarów

$$\mu \equiv \frac{Q}{G} \quad \text{i} \quad \mu_{kr} \equiv \frac{Q_{kr}}{G}. \qquad (2.17)$$

Jeżeli różniczkowanie podług nowego argumentu τ będziemy nadal oznaczać kropką, to równanie różniczkowe ruchu układu przyjmie postać

$$\left[1 + (1+4\mu)q^2\right]\ddot{q} + (1+4\mu)q\dot{q}^2 + 2(\mu_{kr}-\mu)q = 0,$$

lub

$$(a+q^2)\ddot{q} + q\dot{q}^2 + bq = 0, \qquad (2.18)$$

gdzie

$$a \equiv \frac{1}{1 + 4\mu}, \quad b \equiv 2\frac{\mu_{kr} - \mu}{1 + 4\mu}. \qquad (2.19)$$

2.5. Rozpatrzmy jeszcze przypadek ogólniejszy, kiedy sprężyna posiada nieliniową charakterystykę typu Duffinga a ponadto ciężarek G posiada początkowe wychylenie $y_o \equiv lq_o$, przy czym sprężyna znajduje się wówczas w stanie nienapiętym (odpowiada to beznaprężeniowemu wygięciu początkowemu pręta). Wówczas o wielkości siły w sprężynie decydować będzie różnica wychyleń $y - y_o$, czyli

$$Y = c(y - y_o) + \beta'(y - y_o)^3.$$

Stała β', charakteryzująca nieliniowość sprężystą układu może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, czy sprężyna jest twarda, czy miękka.

Siła uogólniona jest określona wzorem

$$Q_y = -2(Q_{kr} - Q)q + clq_o - \beta' l^3 (q - q_o)^3,$$

wobec czego zamiast (2.18) otrzymamy teraz następujące równanie ruchu

$$a\ddot{q} + q^2\ddot{q} + q\dot{q}^2 + bq + 2\beta(q - q_o)^3 - \frac{1}{2}b_o q_o = 0, \qquad (2.20)$$

gdzie

$$b_o \equiv 2\frac{1+2\mu_{kr}}{1+4\mu}, \quad \beta \equiv \frac{\beta' l^3 a}{2G} = \frac{\beta' l^3}{2(G+4Q)}. \qquad (2.21)$$

Celem przeanalizowania ruchu układu, w szczególności jego stateczności postaramy się wyznaczyć punkty osobliwe, ustalić ich charakter, a także podać równanie trajektorii fazowych.

Aby określić stany równowagi dynamicznej układu, zastąpimy równanie ruchu (2.20) układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{-(b+v^2)q - 2\beta(q - q_o)^3 + \frac{1}{2} b_o q_o}{a + q^2}, \qquad (2.22)$$

$$\frac{dq}{d\tau} = v. \qquad (2.23)$$

Eliminując z nich τ otrzymamy równanie różniczkowe trajektorii fazowych

$$\frac{dv}{dq} = \frac{P(q, v)}{v}, \qquad (2.24)$$

przy czym

$$P(q,v) \equiv \frac{-(b+v^2)q - 2\beta(q - q_o)^3 + \frac{1}{2} b_o q_o}{a + q^2}. \qquad (2.25)$$

Punkty osobliwe równania (2.24), którym odpowiadają stany równowagi układu dynamicznego wyznaczymy jako miejsca zerowe równania

$$P(q_*, v_*) = 0, \qquad (2.26)$$

przy czym równocześnie należy przyjąć $v_* = 0$.

Zachowując analizę przypadku ogólnego na później (p.2.5.4) rozpatrzymy najpierw trzy przypadki szczególne równania (2.20).

2.5.1. Układ ze sprężyną liniową ($\beta=0$) bez wychylenia początkowego ($q_0 = 0$). Równanie (2.26) ma w tym przypadku postać

$$\frac{(b + v_*^2)\, q_*}{a + q_*^2} = 0,$$

skąd wynika $q_* = 0$. Punkt osobliwy $q_* = 0$, $v_* = 0$ - jak można łatwo się przekonać[x] - jest punktem wirowym. Wobec tego równanie (2.20) ma w tym przypadku rozwiązania okresowe o stałej amplitudzie i częstości, które zależą jedynie od warunków początkowych.

Równanie różniczkowe trojektorii fazowych (2.24) ma postać

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{(b + v^2)q}{(a + q^2)v},$$

i, jak łatwo zauważyć, daje się scałkować przez kwadraturę. W tym celu przepiszemy je w postaci

$$\frac{2v\, dv}{b+v^2} = -\frac{2q\, dq}{a+q^2},$$

lub

$$\frac{d(v^2)}{b+v^2} = -\frac{d(q^2)}{a+q^2}.$$

Nie naruszając równości możemy w licznikach powyższych ułamków dodać odpowiednio wyrażenia $db = 0$ oraz $da = 0$ (a i b - stałe); wówczas będzie

$$\frac{d\,(b+v^2)}{b + v^2} = -\frac{d\,(a+q^2)}{a + q^2}.$$

---

[x] Szczegółową analizę przypadku ogólniejszego przeprowadzimy w p. 2.5.2.

Jak widać jest to już równanie o zmiennych rozdzielonych, które po scałkowaniu daje

$$\ln(b+v^2) = -\ln(a+q^2) + \ln h,$$

lub

$$(a+q^2)(b+v^2) = h. \qquad (2.27)$$

Jak wiadomo występująca tu stała całkowania h oznacza całkowitą energię mechaniczną układu lub ściślej - odpowiednią wielkość bezwymiarową. Ponieważ zgodnie z założeniem 1.5.4 rozpatrujemy układ zachowawczy, przeto h jest także energią początkową układu.

Jeżeli zatem warunki początkowe ruchu ciężarka G są $q = q_0$, $v = v_0$, to na mocy równania (2.27) można napisać

$$h = (a+q_0^2)(b+v_0^2), \qquad (2.28)$$

zaś dla $q_0 = 0$

$$h = a(b+v_0^2). \qquad (2.28.1)$$

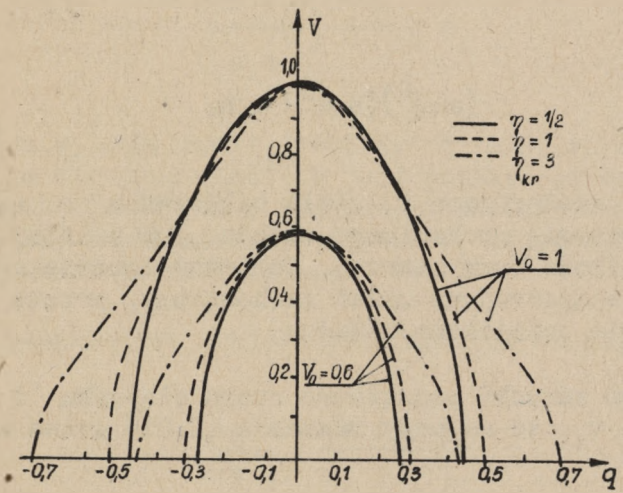
Kładąc powyższe w (2.27) znajdujemy, po przekształceniu, następujące równanie trojektorii fazowych

$$v = \pm\sqrt{\frac{av_0^2 - bq^2}{a+q^2}}. \qquad (2.29)$$

Amplitudalne wychylenia q_m wystąpią wówczas, gdy $v = 0$. Z warunku tego wynika

$$q_m = \max|q| = v_0\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{v_0}{\sqrt{2(\mu_{kr}-\mu)}}. \qquad (2.30)$$

Na rys.4 przedstawiono trajektorie fazowe wykreślone przy pomocy wzoru (2.29) dla $\mu_{kr} = 3, \mu = 1/2, 1, 2$ oraz dla dwóch wartości $v_o = 1$ i 0,6.



Rys.4

Drgania reprezentowane przez te trajektorie są symetryczne zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. Z tego powodu wykreślono tylko połowę płaszczyzny fazowej. Z rysunku widać, że dla mniejszych prędkości v_o i odpowiednio małych q kształt trajektorii fazowych zbliża się do elipsy. W rzeczy samej, jeżeli w równaniu (2.27)

$$ab + bq^2 + av^2 + q^2v^2 = h$$

odrzucimy wyraz q^2v^2, jako mały wobec pozostałych, to podstawiając za h wyrażenie (2.28.1) otrzymamy $bq^2 + av^2 = av_o^2$ lub

$$\frac{q^2}{\frac{a}{b}v_o^2} + \frac{v^2}{v_o^2} = 1.$$

Jest to równanie elipsy, której duża półoś jest v_o, zaś mała $v_o\sqrt{a/b} = q_m$, zgodnie ze wzorem (2.30). Zauważmy, że wartości powyższe są ścisłe, albowiem na osiach układu zawsze jest albo $q = 0$, albo $v = 0$, wobec czego założenie $q^2v^2 = 0$ w tych punktach jest spełnione ściśle.

2.5.2. Układ ze sprężyną liniową ($\beta = 0$) posiadający wychylenie początkowe ($q_o \neq 0$). W tym przypadku jest

$$P(q,v) = \frac{-(b+v^2)q + \frac{1}{2}b_o q_o}{a + q^2}, \qquad (2.25.1)$$

skąd, po przyrównaniu do zera licznika otrzymujemy współrzędne punktu osobliwego

$$q_* = \frac{b_o q_o}{2b} = \frac{2\mu_{kr} + 1}{2\mu_{kr} - 2\mu} q_o = c, \quad v_* = 0. \qquad (2.31)$$

Jest to jedyny punkt osobliwy równania (2.24) (dla $\beta = 0$).

Zbadajmy stateczność równowagi układu w tym punkcie, stosując znane metody [11], [12].

W tym celu wprowadzamy do rozważań wariacje ξ, η zmiennych q, v za pomocą równań

$$q = q_* + \xi, \qquad v = v_* + \eta, \qquad (2.32)$$

a następnie funkcję $P(q,v)$ rozwijamy w szereg Taylora w otoczeniu punktu osobliwego (q_*, v_*)

$$P(q, v) = P(q_*, v_*) + a\xi + \beta_1\eta + R_*(\xi,\eta), \qquad (2.33)$$

gdzie

$$\alpha \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}}, \qquad \beta_1 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{\substack{q=q_* \\ v=v_*}}, \tag{2.34}$$

zaś $R(\xi,\eta)$ jest funkcją zawierającą wariacje ξ, η w potęgach wyższych od 1. Wykorzystując rozwinięcie (2.33) oraz wzory (2.32) znajdujemy za pomocą równań (2,22) i (2.23)

$$\frac{d(v_*+\eta)}{d\tau} = P(q_*, v_*) + \alpha\xi + \beta_1\eta + R(\xi,\eta),$$

$$\frac{d(q_*+\xi)}{d\tau} = v_* + \eta.$$

Zauważmy jednak, że $P(q_*, v_*) = 0$, a ponadto

$$\beta_1 = \frac{2q_*v_*}{a+q_*^2} = 0,$$

albowiem punkt osobliwy analizowanego równania ruchu leży zawsze na osi odciętych, czyli $v_* = 0$.

W pierwszym przybliżeniu możemy odrzucić funkcję nieliniową $R(\xi,\eta)$. Otrzymujemy wówczas zlinearyzowany układ równań

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \eta, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \alpha\xi,$$

którego analiza - jak wykazał Lapunow - pozwala w zupełności określić charakter osobliwości równania nieliniowego, a tym samym zbadać stateczność równowagi układu dynamicznego.

Poszukując rozwiązań w postaci

$$\xi = C\, e^{\lambda\tau}, \qquad \eta = C\, k\, e^{\lambda\tau} \quad (C, k, \lambda - \text{stałe})$$

znajdujemy

$$Ce^{\lambda\tau}(\lambda - k) = 0, \qquad Ce^{\lambda\tau}(k\lambda - a) = 0,$$

skąd $k = \lambda$ oraz $\lambda^2 = \alpha$. A zatem pierwiastki charakterystyczne są

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}. \qquad (\alpha \neq 0).$$

Jak wiadomo na ich podstawie można określić rodzaj osobliwości. Ze wzoru powyższego wnioskujemy, że pierwiastki te mogą być

1° - czysto urojone, gdy $\alpha < 0$,

2° - rzeczywiste o różnych znakach, gdy $\alpha > 0$.

W pierwszym przypadku osobliwość jest punktem wirowym, co odpowiada ustalonym drganiom układu ze stałą amplitudą i częstością.

W drugim przypadku osobliwość jest punktem siodłowym, który odpowiada drganiom niestatecznym.

Reasumując stwierdzamy, że równanie różniczkowe (2.20) może posiadać tylko dwa rodzaje osobliwości, przy czym o stateczności drgań w tych punktach decyduje wyłącznie znak współczynnika α, obliczanego przy pomocy wzoru (2.34).

Powracając do rozpatrywanego w niniejszym paragrafie układu ($\beta = 0$, $q_o \neq 0$) znajdujemy po zróżniczkowaniu wzoru (2.25.1) podług q i podstawieniu $q_* = c$, $v_* = 0$

$$\alpha = -\frac{b}{a+c^2}.$$

Ponieważ $a > 0$, $b > 0$, przeto $\alpha < 0$, skąd wynika, że i w tym przypadku mamy do czynienia z punktem wirowym[x].

Przejdźmy z kolei do wyznaczenia równania trajektorii fazowych. Równanie (2.24) w tym przypadku nie daje się scałkować wprost, jak to uczyniliśmy w p.2.5.1. W związku z tym, zanim przystąpimy do całkowania zauważmy, że wyrazy drugi i trzeci równania (2.20) możemy przekształcić następująco:

$$q^2\ddot{q} + q\dot{q}^2 = q(q\ddot{q} + \dot{q}^2) = q(q\dot{q})^{\cdot} = q\frac{d}{d\tau}(qv) =$$

$$= q\frac{d}{dq}(qv)\frac{dq}{d\tau} = qv\frac{d}{dq}(qv). \qquad (2.35)$$

Uwzględniając ponadto, że $\ddot{q} = v\,dv/dq$, równanie (2.20) zapiszemy w postaci[xx]

$$av\frac{dv}{dq} + bq + qv\frac{d}{dq}(qv) + 2(q-q_o)^3 - \frac{1}{2}b_o q_o = 0,$$

lub, po pomnożeniu przez dq

$$av\,dv + bq\,dq + qv\,d(qv) + 2\beta(q-q_o)^3\,dq - \frac{1}{2}b_o\,q_o\,dq = 0.$$

---

x) W przypadku rozpatrywanym w p.2.5.1, czyli dla $q_o = 0$ jest $c = 0$, co oczywiście nie wpływa na zmianę znaku współczynnika α.

xx) Z uwagi na dalsze rozważania zachowamy w nim na razie wyraz nieliniowy $2\beta(q-q_o)^3$.

Obecnie możemy już łatwo przeprowadzić całkowanie, w wyniku którego otrzymujemy równanie wyrażające zasadę zachowania energii

$$\frac{a}{2}v^2 + \frac{b}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^2v^2 + \frac{\beta}{2}(q - q_0)^4 - \frac{b_0}{2}q_0q = C. \quad (2.36)$$

Charakterystyczne dla nieliniowości typu bezwładnościowego jest pojawienie się wyrazu q^2v^2 (por. także wzór (6.7)).

Scała całkowania C oznacza tutaj całkowitą energię mechaniczną układu. Ponieważ rozpatrujemy układ zachowawczy, przeto C jest równa także jego energii początkowej. Parametry początkowe ciężarka G są q_0 i v_0, zatem

$$C = \frac{a}{2}v_0^2 + \frac{b}{2}q_0^2 + \frac{1}{2}q_0^2v_0^2 - \frac{b_0}{2}q_0^2$$

Ostatecznie równanie energii przyjmuje postać następującą

$$(a+q^2)(b+v^2) + \beta(q-q_0)^4 - b_0q_0(q-q_0) = (a+q_0^2)(b+v_0^2). \quad (2.36)$$

Kładąc tutaj $\beta = 0$ znajdujemy równanie trajektorii fazowych dla układu z liniową sprężyną i początkowym wychyleniem q_0

$$v = \pm\sqrt{\frac{(a+q_0^2)(b+v_0^2) + b_0q_0(q-q_0)}{a+q^2} - b}.$$

Dla określenia amplitudy ciężarka G należy wyznaczyć punkty przecięcia się krzywej $v(q)$ z osią q. W tym celu musimy wyznaczyć miejsca zerowe równania

$$(a+q_0)^2(b+v_0^2) + b_0q_0(q-q_0) - b(a+q^2) = 0,$$

lub po przekształceniu

$$bq^2 - b_o q_o q - av_o^2 = 0.$$

Stąd znajdujemy

$$q_m^{\pm} = \frac{b_o q_o \pm \sqrt{b_o^2 q_o^2 + 4 abv_o^2}}{2b}. \qquad (2.37)$$

Znak + odpowiada amplitudalnemu wychyleniu w kierunku zgodnym z wychyleniem początkowym ciężarka G, znak - w kierunku przeciwnym.

2.5.3. Układ ze sprężyną nieliniową ($\beta \neq 0$) bez wychylenia początkowego ($q_o = 0$). Równanie (2.26) na podstawie (2.25) ma w tym przypadku postać

$$\frac{-(b + v_*^2) q_* - 2\beta q_*^3}{a + q_*^2} = 0.$$

Uwzględniając, że $v_* = 0$ oraz $(a + q_*^2) < \infty$, wnioskujemy stąd że

$$(b + 2\beta q_*^2) q_* = 0.$$

A zatem równanie (2.24) może mieć trzy punkty osobliwe, których odcięte mają wartości

$$\text{I)}\ q_{*I} = 0, \quad \text{II)}\ q_{*II} = \sqrt{-\frac{b}{2\beta}}, \quad \text{III)}\ q_{*III} = -\sqrt{-\frac{b}{2\beta}}. \qquad (2.38)$$

Jak widać dwa ostatnie punkty mogą istnieć tylko wówczas, gdy sprężyna jest miękka, tzn. $\beta < 0$.

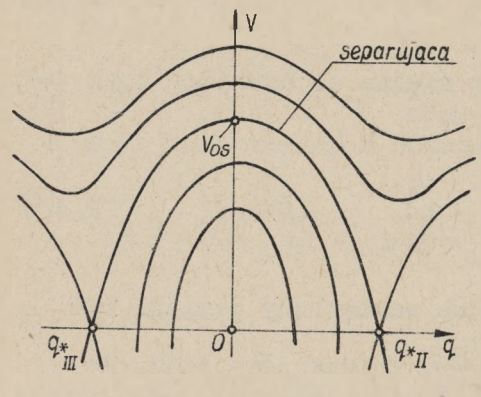
Dla pierwszego punktu znajdujemy $\alpha_I = -b/a$, czyli - analogicznie jak w p.2.5.1 - istnieje tam punkt węzłowy. Wnioskujemy stąd, że nieliniowość sprężyny nie ma wpływu na stateczność drgań wokół środkowego położenia równowagi. W przypadku sprężyny twardej twierdzenie to obowiązuje w całej płaszczyźnie fazowej.

W dwóch pozostałych punktach jest

$$\alpha_{II} = \frac{2b}{a + mb},$$

gdzie

$$m = -\frac{1}{2\beta} \qquad (m > 0). \qquad (2.39)$$



Rys.5

A zatem $\alpha_{II} > 0$, przeto zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w p.2.5.2 są to punkty siodłowe. Przebieg trajektorii fazowych w tym przypadku ma postać przedstawioną na rys.5.

Kładąc we wzorze (2.36.1) $q_0 = 0$ otrzymujemy

$$(a+q^2)(b+v^2) + q^4 = a(b+v_0^2),$$

skąd wynika następujące równanie trajektorii fazowych

$$v = \pm\sqrt{\frac{av_0^2 - bq^2 - \beta q^4}{a + q^2}}. \qquad (2.38)$$

Amplitudę drgań można wyznaczyć z równania

$$\beta q^4 + bq^2 - av_o^2 = 0.$$

Stąd

$$q_m^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a\beta v_o^2}}{2\beta}$$

Wybór znaku przed pierwiastkiem zależy od znaku stałej β stojącej w mianowniku; gdy sprężyna jest twarda, czyli $\beta > 0$, wówczas dla zagwarantowania dodatniej wartości ułamka należy zachować znak $+$, wobec czego

$$|q_m^{(t)}| = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + 4a\beta v_1^2} - b}{2\beta}}. \qquad (\beta > 0) \qquad (2.39)$$

W przypadku, gdy sprężyna jest miękka zachowujemy znak "$-$", W związku z tym otrzymuje się wzór

$$|q_m^{(m)}| = \sqrt{m\left(\sqrt{b^2 - \frac{2av_o^2}{m}} + b\right)}, \qquad (\beta < 0) \qquad (2.40)$$

przy czym z uwagi na pierwiastek wewnętrzny powinno być $b^2 - 2av_o^2/m \geqslant 0$ lub $|v_o| \leqslant b\sqrt{\frac{m}{2a}}$. Wnioskujemy stąd, że okresowy ruch zobrazowany przez trajektorie (2.38) może w tym przypadku istnieć tylko dla pewnego zakresu prędkości początkowych, nie przekraczających wartości

$$v_{os} = b\sqrt{\frac{m}{2a}} = \frac{b}{2\sqrt{-a\beta}} \qquad (\beta < 0) \qquad (2.41)$$

Tej ostatniej prędkości odpowiada trajektoria fazowa separująca obszar zamkniętych trajektorii z punktem wirowym pośrodku, od obszaru trajektorii reprezentujących ruch nie-

okresowy. Istotnie, podstawiając (2.41) do (2.40) znajdujemy $|q_m^{(m)}| = \sqrt{mb} = \sqrt{-b/2\beta}$, co - w rzeczy samej - określa odciętą punktów siodłowych II i III (por.2.38).

Tak więc ujawniona została dość istotna cecha rozpatrywanego układu dynamicznego, który oprócz nieliniowości typu bezwładnościowego posiada nieliniową, miękką charakterystykę sprężystą. Mianowicie wzbudzenie drgań poprzecznych w takim układzie z nadmierną prędkością początkową może doprowadzić do utraty stateczności pręta.

2.5.4. Rozpatrzmy jeszcze pokrótce przypadek ogólny, kiedy sprężyna jest nieliniowa ($\beta \neq 0$) a ponadto układ posiada pewne wychylenie początkowe ($q_o \neq 0$). Wówczas równanie (2.26) ma postać

$$bq_* + 2\beta(q_* - q_o)^3 - \frac{1}{2} b_o q_o = 0,$$

a więc jest równaniem trzeciego stopnia względem q

$$2\beta q_*^3 - 6\beta q_o q_*^2 + (b+6\beta q_o^2)q_* - (2 q_o^3 + \frac{1}{2} b_o q_o) = 0 \qquad (2.42)$$

Dla ustalenia jego miejsc zerowych obliczamy wyróżnik $D = D_1^2 + D_2^3$, którego znak będzie decydował o ilości rzeczywistych pierwiastków równania (2.42).

Łatwo znajdujemy

$$D_1 = (1 - c)\frac{bq_o}{4\beta} \approx \frac{bq_o}{4\beta},$$

ponieważ na ogół $c = b_o q_o/2b$ jest rzędu wielkości q_o, a więc $\ll 1$ (por.(2.31)); ponadto

$$D_2 = \frac{b}{6\beta}, \quad \text{wobec czego} \quad D = \frac{b_2}{\beta^2}\left(\frac{q_o^2}{16} + \frac{b}{216\beta}\right). \tag{2.43}$$

W związku z dwoistością znaku stałej β należy oddzielnie rozpatrzyć dwa przypadki:

Sprężyna twarda ($\beta > 0$). Wówczas $D_2 > 0$, a zatem $D > 0$, równanie (2.42) posiada jeden rzeczywisty pierwiastek, któremu odpowiada jeden punkt osobliwy równania różniczkowego (2.20). Przez analogię do przypadków rozpatrzonych poprzednio możemy stwierdzić, iż jest to punkt wirowy.

Sprężyna miękka ($\beta < 0$). Wówczas $D_2 < 0$, jednakże ze wzoru (2.43) wynika, iż dla

$$\beta < -\frac{2b}{27q_o^2} \tag{2.44}$$

jest $D > 0$, a więc przebieg trajektorii fazowych, pod względem jakościowym będzie podobny, jak w przypadku sprężyny twardej (jeden punkt osobliwy będący punktem wirowym).

Należy jednak zauważyć, iż ułamek $2b/27q_o^2$ jest na ogół liczbą dużą, a zatem spełnienie warunku (2.44) wymagałoby zainstalowania sprężyny nadzwyczaj miękkiej.

Jeżeli natomiast stała β zawarta jest w przedziale

$$-\frac{2b}{27q_o^2} < \beta < 0,$$

to wówczas $D < 0$, a zatem istnieją trzy punkty osobliwe. Jest to przypadek najczęściej spotykany w praktyce. Obraz płaszczyzny fazowej jest w zasadzie podobny do przedstawionego na rys.5, jakkolwiek naruszona zostaje symetria względ

dem osi rzędnych, albowiem punkt wirowy nie leży teraz już w początku układu współrzędnych ($q_* \neq 0$), a także punkty siodłowe rozmieszczone są w różnych odległościach od tego punktu.

Można więc powiedzieć, że drgania takiego układu przestają być symetryczne w przestrzeni, zachowując symetrię w czasie.

A zatem również i w tym układzie istnieje pewna graniczna wartość prędkości początkowej, przekroczenie której wywoła niestateczne drgania poprzeczne pręta, lub ściślej mówiąc utratę jego stateczności.

2.6. Rozpatrzmy obecnie warunki początkowe ruchu układu w przypadku wymuszenia zrealizowanego za pomocą podłużnego uderzenia plastycznego ciężarkiem Q w przegub A. Warunkiem niezbędnym dla wzbudzenia drgań poprzecznych za pomocą uderzenia podłużnego jest istnienie pewnej krzywizny wstępnej pręta. Odpowiednio do tego w rozpatrywanym przez nas modelu musimy ciężarkowi G udzielić równoważnego odchylenia początkowego $q_0 = y_0/l$.

Postarajmy się wyznaczyć początkową prędkość ciężarka G. Ze wzoru (2.12) wynika

$$\frac{dy}{dt} = \frac{l}{2y}\,\frac{dx}{dt}.$$

Jeżeli zatem poziomą składową prędkości ciężarka G oznaczymy $V \equiv dy/dt$, zaś prędkość przegubu górnego $W \equiv dx/dt$, to mamy

$$V = \frac{l}{2y} W. \qquad (2.45)$$

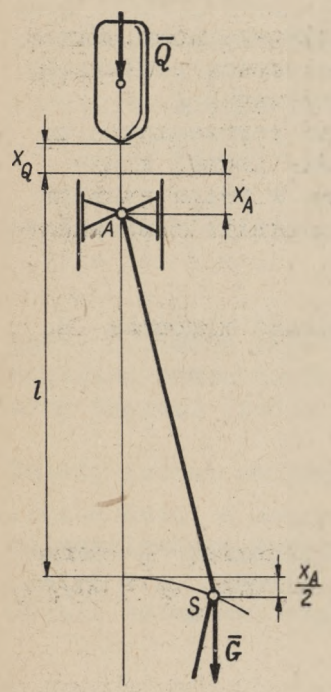
Prędkość całkowitą ciężarka G określa wobec tego wzór

$$U_G = \sqrt{V^2 + \left(\frac{l}{2} W\right)^2} = V\sqrt{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}. \qquad (2.46)$$

Zastanówmy się z kolei jaką prędkość początkową U_{G0} lub V_{G0} uzyska ciężarek G, jeżeli ciało Q uderzyło w przegub A z prędkością W_1?

Mimo że rozważania nasze - wg założenia - dotyczą uderzenia doskonale plastycznego, to jednak z uwagi na dalsze badania rozpatrzymy najpierw przypadek ogólniejszy uderzenia niedoskonale plastycznego, z określonym współczynnikiem restytucji R $(0 \leqslant R \leqslant 1)$.

Ponieważ przed i po uderzeniu ciężarek Q oraz przegub A poruszają się w tym przypadku niezależnie, przeto musimy wyodrębnić chwilowo dwie niezależne współrzędne x_A i x_Q, określające położenie obu wyżej wymienionych elementów (rys.6). W związku z tym będziemy rozróżniać prędkości $W_A = dx_A/dt$ oraz $W_Q = dx_Q/dt$.



Rys.6

Zgodnie z klasyczną teorią uderzenia (por.np. [7]) akt wymiany pędów podzielimy na dwa okresy (o długości τ_1 i τ_2), na pograniczu których prędkości ciała Q oraz przegubu A są sobie równe.

Jeżeli w czasie trwania uderzenia pomiędzy przegubem A i ciałem Q wystąpi chwilowa siła uderzenia P_A, to impulsy tej siły w obu wspomnianych okresach są

$$\bar{S}_A = \int_0^{\tau_1} P_A \, dt, \qquad \bar{\bar{S}}_A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} P_A \, dt,$$

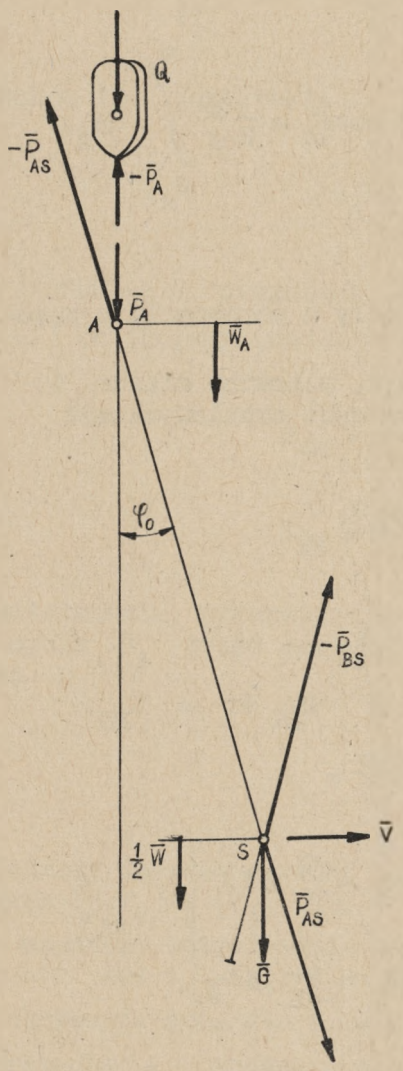
przy czym

$$\bar{\bar{S}}_A = R \, \bar{S}_A. \qquad (a)$$

Pojedynczą oraz podwójną kreską u góry oznaczać będziemy wielkości odnoszące się odpowiednio do pierwszego i drugiego okresu uderzenia. Zasada pędu i popędu, zastosowana do ciężarka Q daje

$$\frac{Q}{g}\,\Delta W_Q = -S_A, \qquad (b)$$

gdzie ΔW_Q oznacza zmianę prędkości ciężarka Q w tym okresie czasu, którego dotyczy impuls S_A, Znak - przed S_A oznacza, iż wektor $\Delta\vec{W}_Q$ oraz wektor siły chwilowej $\vec{P}_A$, a tym samym impuls $\vec{S}_A$ mają zwroty przeciwne.



Rys.7

Oznaczając przez P_{AS} siłę chwilową w pręcie AS, zaś przez S_{AS} impuls tej siły, otrzymujemy z warunku równowagi dla przegubu A (rys.7)

$$P_{AS} \cdot \cos\varphi_o - P_A = 0$$

lub

$$S_{AS} \cdot \cos\varphi_o - S_A = 0. \qquad (c)$$

Rozpatrując z kolei równowagę ciężarka G znajdujemy

$$(P_{AS} + P_{BS}) \sin\varphi_o = \frac{G}{g}\,\frac{dV}{dt},$$

$$G+(P_{AS}-P_{BS})\cos\varphi_o = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,\frac{dW_A}{dt},$$

gdzie P_{BS} oznacza siłę chwilową w pręcie BS. Pomnóżmy powyższe równanie przez dt i scałkujmy w przedziale czasu, określonym granicami poszczególnych okresów uderzenia. Pamiętając o tym, że wymiana prędów zachodzi praktycznie przy niezmienionym położeniu układu (φ_o - const), piszemy

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} P_{AS} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} P_{BS} \cdot dt\right) \sin\varphi_o = \frac{G}{g} \int_{V_1}^{V_2} dV,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} G dt + \left(\int_{t_1}^{t_2} P_{AS}\, dt - \int_{t_1}^{t_2} P_{BS}\, dt\right) \cos\varphi_o = \frac{1}{2}\frac{G}{g} \int_{W_{A1}}^{W_{A2}} dW_A.$$

Ale impuls $\int_{t_1}^{t_2} G dt$ jest bardzo mały w porównaniu z pozostałymi wyrazami ostatniego równania, albowiem ciężar G jest bardzo mały wobec średniej wartości chwilowych sił uderzenia.

Wobec tego można przyjąć $\int_{t_1}^{t_2} G\, dt \approx 0$.

Oznaczając ponadto

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \Delta V, \quad \int_{W_{A1}}^{W_{A2}} dW_A = \Delta W_A, \quad \int_{t_1}^{t_2} P_{BS}\, dt = S_{BS},$$

piszemy

$$\left.\begin{aligned} (S_{AS} + S_{AS}) \sin\varphi_o &= \frac{G}{g} \Delta V, \\ (S_{AS} - S_{BS}) \cos\varphi_o &= \frac{G}{2g} \Delta W_A. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Prędkości V i W_A powiązane są zależnością

$$W_A = 2 \sin\varphi_o \, V, \qquad (e)$$

wynikającą ze wzoru (2.23), w którym należy podstawić

$$\frac{y_o}{l} = \sin\varphi_o.$$

Wobec tego jest także

$$\Delta W_A = 2 \sin\varphi_o \, \Delta V. \qquad (e')$$

Eliminując w równaniach (d) wielkość ΔW_A za pomocą wzoru (e') znajdujemy impulsy sił chwilowych w prętach AS i BS:

$$\left.\begin{aligned} S_{AS} &= \frac{G}{2g}\left(\frac{1}{\sin\varphi_o} + \operatorname{tg}\varphi_o\right)\Delta V, \\ S_{BS} &= \frac{G}{2g}\left(\frac{1}{\sin\varphi_o} - \operatorname{tg}\varphi_o\right)\Delta V. \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

Ostatecznie, wykorzystując wzory (c) i (f) możemy wyrazić impuls S_A przez przyrost ΔV prędkości poziomej ciężarka G

$$S_A = \frac{G}{2g}\Delta V(\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o). \qquad (g)$$

Ustalmy jeszcze wartość przyrostów ΔV i ΔW_Q w przedziałach $[0,\tau_1]$ i $[\tau_1, \tau_2]$.

W momencie bezpośrednio poprzedzającym uderzenie tj. dla $t = 0$ jest $W_Q = W_1$, $W_A = 0$, $V = 0$. W końcu pierwszej fazy uderzenia, tzn. dla $t = \tau_1$ prędkości ciężarka Q oraz przegubu A wyrównują się, czyli $W_Q = W_A = \tilde{W}$, zaś cię-

żarek G uzyskuje w tym czasie prędkość $\tilde{V}$. Wobec tego dla pierwszego okresu jest

$$\Delta\bar{W}_Q = \tilde{W} - w_1, \qquad \Delta\bar{V} = \tilde{V},$$

przy czym prędkości $\tilde{W}$ i $\tilde{V}$ powiązane są zależnością (e), czyli

$$\tilde{W} = 2 \sin\varphi_o \, \tilde{V}. \tag{h}$$

W końcowym momencie uderzenia, tzn. dla $t = \tau_2$ jest $W_Q = W_{QO}$, $V = V_o$, wobec czego

$$\Delta\bar{\bar{W}}_Q = W_{QO} - \tilde{W}, \qquad \Delta\bar{\bar{V}} = V_o - \tilde{V}.$$

Obecnie możemy już wypisać równania (b) i (g) dla obu przedziałów:[x)]

$$[0, \tau_1] \begin{cases} \frac{Q}{g}(\tilde{W} - w_1) = -\bar{S}_A, & (b') \\ \bar{S}_A = \frac{G}{2g}\tilde{V}(\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o); & (g') \end{cases}$$

$$[\tau_1, \tau_2] \begin{cases} \frac{Q}{g}(W_{QO} - \tilde{W}) = -\bar{\bar{S}}_A, & (b'') \\ \bar{\bar{S}}_A = \frac{G}{2g}(\tilde{V} - V_o)(\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o). & (g'') \end{cases}$$

x) Równania te można również wyprowadzić przy pomocy równań Lagrange'a dla sił chwilowych.

Powyższe związki, wraz z (a) i (h) tworzą układ sześciu równań o sześciu niewiadomych: $\tilde{W}$, W_{Qo}, $\tilde{V}$, V_o, $\bar{S}_A$, $\bar{\bar{S}}_A$.

Eliminując impulsy otrzymujemy:

$$W_{Qo} = (1 + R)\,\tilde{W} - k\,W_1, \tag{i}$$

$$V_o = (1 - R)\,\tilde{V}, \tag{j}$$

$$W_{Qo} = \tilde{W} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o}{2\mu}\,(\tilde{V} - V_o), \tag{k}$$

$$\tilde{W} - W_1 = -\frac{\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o}{2\mu}\,\tilde{V}. \tag{l}$$

W dalszym ciągu znajdujemy stąd

$$\tilde{W} = \frac{W_1}{1 + \dfrac{\operatorname{ctg}\varphi_o + \sin\varphi_o}{4\mu \sin\varphi_o}}, \tag{ł}$$

a następnie przy pomocy (h) możemy określić $\tilde{V} = \tilde{W}/2 \sin\varphi_o$.

Interesującą nas prędkość V_o znajdziemy ze wzoru (j), w którym należy położyć $R = 0$, Założyliśmy bowiem na wstępie, że uderzenie było doskonale plastyczne, dzięki czemu ciężarek Q dalszy ruch wykonuje wraz z przegubem A.

Wobec tego $V_o = \tilde{V}$, zaś poszukiwany wzór na początkową prędkość ciężarka G ma postać

$$V_o = \frac{2\mu\, W_1}{(1 + 4\mu)\sin\varphi_o + \operatorname{ctg}\varphi_o}, \tag{2.47}$$

gdzie W_1 jest prędkością, z jaką ciężarek Q uderza w przegub A. Jeżeli stosunek $\mu = Q/G$ nie jest liczbą dużą, zaś odchylenia początkowe φ_o jest z reguły bardzo małe, to $(1 + 4\mu)\sin\varphi_o \ll \operatorname{ctg}\varphi_o$. Można wówczas posługiwać się wzorem przybliżonym

$$V_o \approx 2\mu W_1 \operatorname{tg}\varphi_o \approx 2\mu q_o W_1, \quad (q_o \equiv \sin\varphi_o) \qquad (2.47.1)$$

z którego m.in. widocznym jest, iż dla wywołania ruchu ciężarka G za pomocą uderzenia podłużnego w przegub A niezbędne jest istnienie pewnego wychylenia wstępnego $(q_o \neq 0)$.

Obecnie można już odpowiedzieć na pytanie: jak dobrać początkowe wychylenie q_o ciężarka G?. Mianowicie w trosce o zapewnienie jak największego podobieństwa modelu do układu rzeczywistego wielkość tę należy dobrać tak, aby początkowa prędkość V_o była równa analogicznej prędkości V_o^* środkowego przekroju pręta po uderzeniu.

Jeżeli zatem potrafimy określić $V_o^{*x)}$, to kładąc $V_o = V_o^*$ otrzymamy ze wzoru (2.47), (w którym przyjęto $\cos\varphi_o = \sqrt{1 - q_o^2} \approx 1$)

$$q_o \approx \frac{W_1}{V_o^*} \frac{\mu\left[1 - \sqrt{1 - \frac{1+4\mu}{\mu^2}\left(\frac{V_o^*}{W_1}\right)^2}\right]}{1 + 4\mu}. \qquad (2.48)$$

Jeżeli

$$\frac{1 + 4\mu}{\mu^2}\left(\frac{V_o^*}{W_1}\right)^2 \ll 1,$$

co sprowadza się do warunku

$$\frac{V_o^*}{W_1} \ll \frac{\mu}{\sqrt{1+4\mu}}, \qquad (m)$$

x) Zagadnieniem tym zajmiemy się w p.5.6.

to rozwijając w szereg pierwiastek występujący w liczniku ułamka (2.48) i zachowując dwa pierwsze wyrazy, otrzymamy wzór

$$q_o \approx \frac{1}{2\mu} \frac{V_o^*}{W_1}, \qquad (2.48.1)$$

który wynika także wprost z przybliżonej równości (2.47.1)

Każde uderzenie niedoskonale sprężyste związane jest ze stratą energii kinetycznej. Jeżeli energię kinetyczną układu przed i po uderzeniu oznaczymy przez T_1 i T_2, to strata tej energii, zgodnie z twierdzeniem Carnota, wynosi

$$T_{str} = T_1 - T_2 = \frac{QW_1^2}{2g} - \left[\frac{QW_{Qo}^2}{2g} + \frac{G}{2g}(1+q_o^2)V_o^2\right].$$

Wykorzystując wzory (i), (j), (ł) i (2.47) znajdujemy po licznych przekształceniach (dla R = 0)

$$T_{str} = \frac{QW_1^2}{2g} \frac{(1+q_o^2)(1+4\mu+q_o^2)}{\left[1+(1+4\mu)q_o^2\right]^2}. \qquad (2.49)$$

2.7. Równanie (2.18) wzgl. (2.20) i wszystkie wynikające z nich wzory ważne są dla niezbyt dużych wartości q; w przeciwnym razie wzór przybliżony $x = y^2/l$ staje się mało dokładny. Narzuca to pewne ograniczenie na zakres prędkości początkowych $v_o = V_o/\sqrt{lg}$ (lub $w_1 = W_1/\sqrt{lg}$) objętych naszymi rozważaniami.

Postarajmy się określić bliżej maksymalną wartość v_o tzn. tę, przy której błąd w określeniu przemieszczenia x przy pomocy wzoru (2.2.1) nie przekroczy ustalonej wartości dopuszczalnej.

Przemieszczenie ciężarka Q wyznaczone wzorem dokładnym (2.2) oznaczmy x_d, a odpowiednią wartość przybliżoną x_p; wówczas błąd wynikający z tego przybliżenia określa wzór:

$$B = \frac{x_d - x_p}{x_d} = \frac{(2l-2\sqrt{l^2-y^2}) - y^2/l}{2l - 2\sqrt{l^2 - y^2}} = \frac{(2-2\sqrt{1 - q^2}) - q^2}{2 - 2\sqrt{1 - q^2}}.$$

Jeżeli dopuszczalny błąd oznaczymy symbolem B_m, to z warunku $B \leq B_m$ otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$q^2 \left[q^2 - 4B_m(1 - B_m)\right] \leq 0.$$

Ponieważ q^2 nie może być ujemne, przeto

$$|q| \leq 2\sqrt{B_m (1 - B_m)}. \qquad (2.50)$$

O ile np. zażądamy, aby wzór przybliżony (2.2.1) dawał wyniki obarczone błędem nie większym niż 10%, ($B_m = 0,1$), to otrzymamy $\max|q| = 0,6$. Odpowiedni kąt maksymalnego odchylenia prętów od pionu wynosi (por. 2.15)

$$\max \varphi = \arcsin(\max|q|) \approx 37^\circ.$$

Przy pomocy wzoru (2.30) wyznaczymy następnie maksymalną prędkość początkową v_o, przy której amplitudalne wychylenie ciężarka G nie przekroczy wartości 0,6, mianowicie

$$\max v_o = \max|q| \cdot \sqrt{2(\mu_{kr} - \mu)} \approx 0,85\sqrt{\mu_{kr} - \mu}. \qquad (2.51)$$

2.8. W p.2.3 wyprowadzony został wzór (2.10), wiążący parametry c i G modelu ze sztywnością EJ_z pręta rzeczy-

wistego (długość l jest wspólna dla obu układów). Związek ten wyznaczony został z warunku równości obciążeń krytycznych dla pręta oraz dla modelu. Tym samym można powiedzieć, iż określiliśmy warunek podobieństwa statycznego pomiędzy modelem i prętem rzeczywistym.

Jednakże wzór (2.10) nie pozwala określić dwóch niewiadomych c i G. Drugie równanie otrzymamy z warunku, aby częstość drgań poprzecznych pręta swobodnego była równa analogicznej częstości dla modelu, jednakże bez masy na końcu ruchomym (tj. dla $Q = 0$). Tym samym uzyskamy również podobieństwo kinematyczne modelu i pręta.

Częstość własną układu bez masy Q ($\mu = 0$) raz dla $q_o = 0$, $\beta = 0$, można wyznaczyć przy pomocy wzoru (2.29), w którym należy położyć $a = 1$, $b = 2\mu_{kr}$ (por.2.19).

$$v_* = \pm \sqrt{\frac{v_o^2 - 2\mu_{kr} q_*^2}{1 + q_*^2}} .$$

Ponieważ zaś $v_* = dq_*/d\tau$, przeto

$$d\tau = \frac{dq_*}{|v_*|} = \sqrt{\frac{1 + q_*^2}{v_o^2 - 2\mu_{kr} q_*^2}}\, dq_* . \qquad (2.52)$$

Czas przejścia ciężarka G z położenia $q_* = 0$ do położenia amplitudalnego (por.2.30)

$$q_m^* = \frac{v_o}{\sqrt{2\mu_{kr}}} \qquad (2.53)$$

obliczymy ze wzoru

$$T_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{q_m^*} d\tau .$$

Z uwagi na symetrię trajektorii fazowych zarówno w czasie, jak i w przestrzeni (por. rys.4) jest to czas równy 1/4 okresu. Wobec tego okresem drgań własnych, po uwzględnieniu wzorów (2.58) i (2.53) jest

$$T_* = 4T_1 = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{g\mu_{kr}}}\int_0^{q_m^*}\sqrt{\frac{1+q_*^2}{q_m^{*2}-q_*^2}}\,dq_* \qquad (2.54)$$

Stosując podstawienie $q_* = q_m^* \sin\psi$ można powyższą całkę sprowadzić do postaci

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+q_m^{*2}\sin^2\psi}\,d\psi = E^+\left(q_m^*; \frac{\pi}{2}\right)^{x)}$$

tj. do pełnej całki eliptycznej drugiego rodzaju.

Wobec tego okres drgań własnych rozpatrywanego układu bez masy Q wynosi

$$T_* = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{g\mu_{kr}}}\;E^+\left(q_m^*; \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2.55)$$

zaś częstość kątowa

$$\omega_*^{(I)} = \frac{2\pi}{T_*} = \frac{\pi}{E^+\left(q_m^*; \frac{\pi}{2}\right)}\sqrt{\frac{g\mu_{kr}}{2l}}. \qquad (2.56)$$

---

x) Na ogół w tablicach funkcji eliptycznych podane są tylko wartości funkcji $E^-(k;\psi) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$. Dla $k < 1$ można posługiwać się rozwinięciem

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}k^2-\frac{3}{64}k^4+\frac{5}{384}k^6-\ldots\right).$$

Częstość podstawowa odpowiedniego pręta dwuprzegubowego o długości 2l wynosi

$$\omega_*^{(\infty)} = \frac{\pi^2}{4l^2}\sqrt{\frac{EJ_z}{m_1}}, \qquad (2.57)$$

gdzie m_1 - masa jednostki długości pręta.

Jeżeli częstości własne pręta i modelu mają być jednakowe, to porównując prawe strony wzorów (2.56) i (2.57) otrzymujemy po przekształceniu

$$\frac{\pi E^+(q_m^*, \pi/2)}{4l} = \sqrt{\frac{\mu_{kr} G_p}{2EJ_z}} \qquad (2.58)$$

gdzie $G_p = 2m_1 gl$ - ciężar pręta; $\mu_{kr} F = \frac{1}{2}(cl/G - 1)$.

Rozwiązując następnie układ równań (2.10) i (2.58) względem c i G znajdujemy ostatecznie

$$G(v_o) = \frac{2G_p}{\left[E^+(q_m^*, \pi/2)\right]^2}, \qquad (2.59)$$

$$c(v_o) = \frac{1}{t}\left[\frac{\pi^2 EJ_z}{2l^2} + \frac{2G_p}{\left[E^+(q_m^*, \pi/2)\right]^2}\right]. \qquad (2.60)$$

Jak widać wielkości G i c zależą od prędkości początkowej v_o, poprzez parametr $q_m^* = v_o\sqrt{2\mu_{kr}}$ funkcji eliptycznej. Ponieważ zaś ten ostatni zależy z kolei - poprzez μ_{kr} - od wielkości poszukiwanych c i G, przeto dla ich wyznaczenia zmuszeni jesteśmy posługiwać się metodą kolejnych przybliżeń.

W związku z tym zauważmy, że dla $q_m^* = \max q = \sin 37^\circ \approx 0{,}6$ jest $E^+(0{,}6\ ;\ \pi/2) = 1{,}845$, wobec czego ze wzoru (2.59) wynika $\min G = G(\max v_o) \approx 0{,}59\, G_p$.

Jednakże funkcja $G(v_o)$ w rozważanym zakresie wartości v_o w słabym stopniu zależy od prędkości początkowej; i tak dla $v_o \approx 0$ $(q_m^* \approx 0)$ jest $E^+(0; \pi/2) = \pi/2$ i odpowiednio

$$\max G = G(0) = \frac{2G_p}{(\pi/2)^2} \approx 0{,}81\ G_p.$$

Reasumując piszemy

$$0{,}59 < \frac{G}{G_p} \leq 0{,}81,$$

czyli dla ciężarka G należy przyjmować wartości nieco mniejsze od ciężaru G_p pręta.

Zauważmy w końcu, że wyraz drugi we wzorze (2.60) jest na ogół bardzo mały w porównaniu z pierwszym; wobec tego odrzucając go otrzymujemy wzór przybliżony

$$c \approx \frac{2P_E}{l}, \qquad (2.60.1)$$

z którego wynika, iż stałą sprężyny można w przybliżeniu dobrać niezależnie od prędkości uderzenia.

Tym samym zagadnienie drgań swobodnych układu o jednym stopniu swobody z nieliniową bezwładnością można uznać za rozwiązane.

W rozdziale następnym rozpatrzymy drgania wymuszone takiego układu.

2.9. Wnioski

a) Nieliniowe wyrażenie

$$\frac{q}{2}\,\frac{d^2(q^2)}{dt^2} \equiv q^2\,\frac{d^2q}{dt^2} + q\left(\frac{dq}{dt}\right)^2,$$

charakterystyczne dla tzw. nieliniowej bezwładności, jest w przypadku rozpatrywanego układu uwarunkowane bezwładnością masy q/g. Jest to na ogół silna nieliniowość, o czym przekonamy się w p.3.2.

b) Mimo nieliniowego charakteru równania ruchu ciężarka G pierwszą całką tego równania, po dokonaniu pewnych przekształceń, można otrzymać przez kwadraturę. Analiza stateczności ruchu wykazuje, że o ile sprężyna posiada liniową lub twardą charakterystykę, to drgania układu są statecznie, niezależnie od warunków początkowych. Natomiast gdy charakterystyka sprężyny jest miękka, to możliwe jest wzbudzenie w układzie drgań niestatecznych.

c) Analizowany układ o jednym stopniu swobody można traktować jako model pręta dwuprzegubowego (nieściśliwego) z masą skupioną na końcu ruchomym. Pręt taki posiada oczywiście inną częstość własną drgań giętnych, niż analogiczny pręt bez masy. Ma to istotne znaczenie dla jego stateczności dynamicznej, albowiem w przypadku takim rezonans parametryczny wystąpi przy częstości wymuszenia innej, niż by to wynikało z obliczeń dla pręta bez masy.

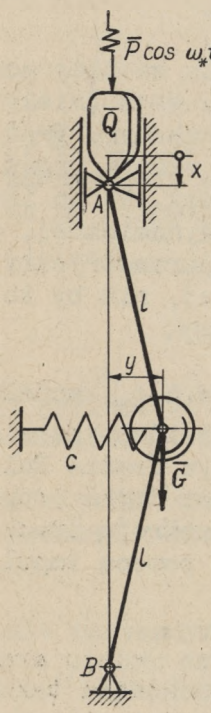
d) Przez stosowny dobór parametrów c, G, q_o modelu można uzyskać to, że będzie on posiadał identyczną co modelowany pręt siłę krytyczną (w sensie Eulera), a także podstawową częstość własną drgań poprzecznych oraz prędkość początkową przekroju środkowego (w przypadku wymuszenia drgań za pomocą impulsu podłużnego).

To podobieństwo statyczne i kinematyczne modelu oraz pręta pozwala przypuszczać, że zostanie zachowana także równość amplitudalnych wychyleń oraz częstości własnych pręta obarczonego masą skupioną na końcu.

Odnośne wzory, uzyskane z rozważań nad modelem, są znacznie prostsze od wzorów ścisłych i jako takie mogą znaleźć zastosowanie w praktyce inżynierskiej.

3. DRGANIA WYMUSZONE

3.1. W rozdziale tym rozpatrywać będziemy drgania wymuszone układu o jednym stopniu swobody z nieliniową bezwładnością. Aby nie komplikować zbytnio rachunków, a także aby nie zaciemniać wpływu nieliniowości tego typu na zachowanie się układu, przyjmować będziemy, iż sprężyna posiada liniową charakterystykę, a tarcie nie istnieje.



Rys.8

Niechaj siła harmoniczna $P \cos \omega_* t$ działa na przegub A w kierunku osi x (rys.8). Celem ustawienia równania drgań ciężarka G zauważmy, że do wyrażenia (2.14), określającego siłę uogólnioną należy teraz dodać człon $P \cos \omega_* t \, \delta x$, przy czym przesunięcie przygotowane δx przegubu A związane jest z analogicznym przesunięciem δy ciężarka G zależnością

$$\delta x = \frac{2y}{l} \delta y,$$

wynikającą ze wzoru (2.12).

W związku z tym, uwzględniając (2.18), otrzymujemy następujące równanie ruchu

$$a \frac{d^2q}{dt^2} + bq + q\left[\frac{d^2q}{dt^2} q + \left(\frac{dq}{dt}\right)\right]^2 = apq \cos \omega t, \quad (3.1)$$

gdzie

$$ap = \frac{P}{G}, \quad \omega_* = \omega_* \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3.2}$$

a pozostałe symbole mają to same znaczenie, co w rozdz.2.

3.2. Rozwiązania równania (3.1) poszukiwać będziemy przy pomocy metody małego parametru. Chcąc jednakże do równania tego wprowadzić mały parametr natrafiamy na pewną trudność wynikającą stąd, iż wyraz nieliniowy nie może być na ogół uznany za mały wobec wyrazów pozostałych.

Jeżeli bowiem (3.1)podzielimy przez a, to otrzymamy

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{b}{a} q + \varkappa q \left[\frac{d^2q}{d\tau^2} q + \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2\right] = pq \cos\omega\tau, \tag{3.1.1}$$

skąd widocznym jest, że współczynnik

$$\varkappa = 1/a = 1 + 4\mu, \mu \in (0, +\infty) \tag{3.3}$$

tojący w wyrazie nieliniowym może przyjmować dowolne wartości z przedziału $(1,+\infty)$. A zatem równanie (3.1.1) jest silnie nieliniowe.

Tym niemniej dla pewnej szczególnej wartości $\omega = \omega_0$ posiada ono bardzo proste, a zarazem ścisłe rozwiązanie

$$q = q_0 = a_{10} \sin\varphi\tau, \quad (a_{10}, \varphi - \text{stałe} > 0)$$

Podstawienie w (3.1.1) daje

$$\left[(-\varphi^2 + b/a) + \varkappa a_{10}^2 \varphi^2 \cos 2\varphi\tau - p \cos\omega_0\tau\right] a_{10} \sin\varphi\tau = 0.$$

Równanie to może być spełnione dla wszelkich wartości $\tau \in (0,+\infty)$ wówczas, gdy $-\varphi^2 + b/a = 0$, czyli $\varphi = \sqrt{b/a}$ oraz $\cos 2\varphi\tau = \cos \omega_o \tau$, czyli $\varphi = \omega_o/2$, przy czym równocześnie

$$\varkappa a_{10}^2 \varphi^2 - p = 0. \qquad (a)$$

Jeżeli zatem pulsacja siły wymuszającej

$$\omega_o = 2\varphi = 2\sqrt{b/a} = 2\sqrt{2}\sqrt{\mu_{kr} - \mu}, \qquad (3.4)$$

to ciężarek G[x] porusza się ruchem harmonicznym prostym z częstością kątową $\omega_o/2 = \sqrt{b/a}$ oraz amplitudą, której wartość wynika z (a)

$$a_{10} = \sqrt{\frac{p}{\varkappa\varphi^2}} = \sqrt{\frac{pa^2}{b}}. \qquad (3.5)$$

Po uwzględnieniu wzorów (2.17), (2.19) i (3.2) znajdujemy

$$a_{10} = \sqrt{\frac{P}{2(Q_{kr} - Q)}}. \qquad (3.5.1)$$

Ostatecznie piszemy

$$q_o = \sqrt{\frac{a^2 p}{b}} \sin\sqrt{\frac{b}{a}}\,\tau. \qquad (3.6)$$

W dalszym ciągu funkcję q_o nazywać będziemy harmonicznym rozwiązaniem równania (3.1.1), a odpowiadającą mu wartość ω_o - pulsacją drgań harmonicznych.

---

x) Ściślej mówiąc - rzut jego środka ciężkości na oś y.

3.3. Wprowadźmy do rozważań kąt $\psi = \omega t$; wówczas równanie (3.1.1) przyjmie postać

$$\omega^2 \ddot{q} + \frac{b}{a} q + \varepsilon\omega^2 q \left[\ddot{q}q + (\dot{q})^2\right] = pq \cos\psi,$$

lub, kładąc zgodnie ze wzorem (3.4) $b/a = \omega_0^2/4$

$$\omega^2\ddot{q} + (\omega_0^2/4 - p\cos\psi)q + \varepsilon\omega^2 q\left[\ddot{q}q + (\dot{q})^2\right] = 0. \quad (3.1.2)$$

Kropkami oznaczać będziemy teraz różniczkowanie podług zmiennej ψ.

W związku z rezultatem uzyskanym w paragrafie poprzednim wyłania się możliwość zastosowania metody małego parametru w następującej formie:
Jeżeli wyrażenie ω^2 rozwiniemy w szereg nieskończony wg potęg małego parametru ε , czyli

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2 + \varepsilon^3\omega_3^2 + \ldots, \quad (\varepsilon \geq 0) \quad (3.7)$$

to wówczas rozwiązania równania (3.1.2) możemy poszukiwać również w postaci szeregu

$$q(\psi) = q_0(\psi) + \varepsilon q_1(\psi) + \varepsilon^2 q_2(\psi) + \varepsilon^3 q_3(\psi) + \ldots \quad (3.8)$$

Zwróćmy uwagę, że pierwsze wyrazy szeregów powyższych są odpowiednio kwadratem pulsacji harmonicznej oraz harmonicznym rozwiązaniem (3.6).

A zatem zerowe przybliżenie (tj. dla $\varepsilon = 0$) określa drgania harmoniczne omówione w p.3.2.

W przypadku, kiedy układ pobudzony jest do drgań siłą o pulsacji $\omega \neq \omega_0$, to wówczas

1° - pojawią się wyższe harmoniczne, przy czym jak się okaże, ich rząd będzie zawsze nieparzystą wielokrotnością 1/2;

2° - zmieni się amplituda podstawowej harmonicznej, tzn. współczynnik stojący przy $\sin \psi/2$ będzie różny od a_{10}.

Korzystając z tych uwag postaramy się znaleźć rozwiązanie równania (3.1.2) w pierwszym przybliżeniu.

3.4. Przypuśćmy, że częstości ω i ω_0 różnią się pomiędzy sobą nieznacznie, tak, iż można przyjąć

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2. \qquad (b)$$

W związku z tym w szeregu (3.8) zachowamy też tylko dwa pierwsze wyrazy, czyli

$$q^{(1)}(\psi) = q_0(\varphi) + \varepsilon q_1(\psi). \qquad (c)$$

Podstawienie w (3.1.8) daje, po odrzuceniu wyrazów zawierających ε w potęgach wyższych od 1, równanie, które można przedstawić w postaci

$$M_0 + \varepsilon M_1 = 0. \qquad (d)$$

Tutaj M_0 i M_1 są nieliniowymi wyrażeniami różniczkowymi. Spełnienie tego równania wymaga, aby $M_0 = 0$ i $M_1 = 0$. M_0 zawiera wyłącznie funkcję q_0 oraz jej pochodne.

Ponieważ zaś

$$q_o^{(1)}(\psi) = a_{10} \sin \frac{\psi}{2}, \qquad (3.6.1)$$

przeto warunek $M_o = 0$ daje dwa równania algebraiczne, z których wyznaczyliśmy w p.3.2 stałe a_{10} i ω_o.

Równanie wynikające z warunku $M_1 = 0$ ma postać

$$\ddot{q}_1 + (\frac{1}{4} - \frac{p}{\omega_o^2}\cos\psi)q_1 + \varkappa\left[q_o^2\ddot{q}_1 + 2q_o\dot{q}_o\dot{q}_1 + (2\ddot{q}_o q_o + \dot{q}_o^2)q_1\right] + \\ + \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}\left[\varkappa(\ddot{q}_o q_o + \dot{q}_o^2)q_o + \ddot{q}_o\right] = 0,$$

lub, po uwzględnieniu (3.6.1) i uporządkowaniu

$$(1 + \lambda)\ddot{q}_1 + \frac{1}{4}(1 - \lambda)q_1 - \left[\lambda\ddot{q}_1 + (\frac{p}{\omega_o^2} - \frac{3}{4}\lambda)q_1\right]\cos\psi + \lambda\dot{q}_1\sin\psi - \\ - \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}(\frac{1}{2} - \lambda\cos\psi)a_{10}\sin\frac{\psi}{2} = 0. \qquad (e)$$

Tutaj

$$\lambda = \frac{1}{2}\varkappa a_{10}^2, \qquad (\lambda > 0). \qquad (3.14)$$

Ze wzorów (3.4), (3.5) i (e) wynika

$$\frac{p}{\omega_o^2} = \frac{\varkappa a_{10}^2\dot{\psi}^2}{\omega_o^2} = \frac{\varkappa a_{10}^2}{4} = \frac{1}{2}\lambda, \qquad (f)$$

wobec czego

$$\frac{p}{\omega_o^2} - \frac{3}{4}\lambda = -\frac{1}{4}\lambda. \qquad (g)$$

Rozwiązania równania (e) poszukujemy w postaci

$$q_1(\psi) = a_{11} \sin\frac{\psi}{2} + a_{31} \sin\frac{3\psi}{2}, \quad (a_{11}, a_{31} - \text{stałe} \neq 0). \tag{3.10}$$

Jest oczywiste, że przy $\omega \neq \omega_o$ w ruchu układu pojawią się także harmoniczne rzędów wyższych, niż 3/2, Jednakże ich wpływ na przebieg drgań będzie nieznaczny, tzn. ich amplitudy będą małe wobec a_{10}, a_{11} i a_{31}. Stwierdzenie to jest tym bardziej słuszne, im mniej pulsacja ω różni się do pulsacji ω_o drgań harmonicznych.

Podstawienie (3.10) w (e), z uwzględnieniem wzoru (g) daje równanie, które po licznych przekształceniach trygonometrycznych można sprowadzić do postaci

$$N_{11} \sin\frac{\psi}{2} + N_{31} \sin\frac{3\psi}{2} + N_{51} \sin\frac{5\psi}{2} = 0, \tag{h}$$

gdzie

$$N_{11} \equiv -\frac{1}{2}\lambda a_{11} + \frac{1}{2}\lambda a_{31} - \frac{1}{3}\frac{\omega^2}{\omega_o^2}(1+\lambda)a_{10},$$

$$N_{31} \equiv \frac{1}{2}\lambda a_{11} - (2+\frac{5}{2}\lambda)a_{31} + \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\omega_o^2}\lambda a_{10},$$

$$N_{51} \equiv 2\lambda a_{31}.$$

Zgodnie z zasadą równowagi harmonicznych na razie przyrównamy do zera tylko wyrażenia stojące przy sinusach tych kątów, które występują w przyjętym powyżej rozwiązaniu (3.10), czyli

$$N_{11} = 0, \qquad N_{31} = 0. \tag{i}$$

Oznacza to, iż równanie (h) spełnione będzie tylko w przybliżeniu, przy czym przybliżenie będzie tym lepsze, im mniejsza okaże się wartość wyrażenia $2\lambda a_{31}$.
Ponieważ zaś (por. (3.2), (3.5) i (3,9)),

$$\lambda = \frac{\alpha a_{10}^2}{2} = \frac{ap}{2b} = \frac{1+4\eta}{4(\eta_{kr}-\eta)}\,\frac{P}{G}, \qquad (3.9.1)$$

przeto okazuje się, że dokładność rozwiązania uzależniona jest m.in. od wielkości amplitudy P siły wymuszającej.

Z równań (i), czyli

$$\lambda a_{11} - \lambda a_{31} = -\frac{1}{2}(1+\lambda)\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\,a_{10},$$

$$\lambda a_{11} - (4+5\lambda)\,a_{31} = -\frac{1}{2}\lambda\,\frac{1}{2}\,a_{10},$$

znajdujemy

$$a_{11} = -\frac{+4(1+\lambda)^2}{8(1+\lambda)}\,\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\,a_{10},$$

$$a_{31} = -\frac{1}{8(1+\lambda)}\,\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\,a_{10}.$$

Ponieważ w funkcji $q^{(1)}(\psi)$ wielkości te występują zawsze wraz z parametrem ε, przeto z uwagi na dalsze rozważania będziemy pisać

$$\varepsilon a_{11} = \gamma_1 \alpha_{11}^{(1)} a_{10}, \quad \varepsilon a_{31} = \gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} a_{10}, \qquad (j)$$

gdzie

$$\alpha_{11}^{(1)} \equiv -\frac{+4(1+\lambda)^2}{8(1+\lambda)}, \quad \alpha_{31}^{(1)} \equiv -\frac{1}{8(1+\lambda)}; \qquad (3.11)$$

$$\gamma_1 \equiv \varepsilon\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}, \qquad (\gamma_1 \gtrless 0). \qquad (3.12)$$

Biorąc pod uwagę wzory (3.6.1), (3.10) i (c) zapiszemy rozwiązanie równania (3.12) w pierwszym przybliżeniu następująco

$$q^{(1)}(\psi) = (a_{10} + \varepsilon a_{11}) \sin\frac{\psi}{2} + \varepsilon a_{31} \sin\frac{3\psi}{2},$$

lub, po uwzględnieniu związków (j)

$$q^{(1)}(\psi) = a_{10}\left[(1+\gamma_1 \alpha_{11}^{(1)})\sin\frac{\psi}{2} + \gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} \sin\frac{3\psi}{2}\right]. \tag{3.13}$$

Zauważmy dalej, że dzięki wprowadzeniu stałej γ_1 mamy

$$\omega^2 = \omega_o^2 \left(1 + \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}\right) = \omega_o^2 (1 + \gamma_1). \tag{k}$$

Tym samym wyeliminowaliśmy formalnie z rachunków mały parametr ε zastępując go - w pierwszym przybliżeniu - parametrem γ_1. Wartość zaś tego ostatniego obliczamy ze wzoru

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1, \tag{3.14}$$

wynikającego z (k). Łatwo zauważyć, że $\gamma_1 > 0$, gdy $\omega > \omega_o$, zaś $\gamma_1 < 0$, gdy $\omega < \omega_o$.

3.5. Aby wyznaczyć charakterystykę amplituda - częstość wymuszenia w pierwszym przybliżeniu musimy najpierw określić amplitudalną wartość funkcji (3.13).

Poszukując maksimum funkcji

$$(1 + \gamma_1 \alpha_{11}^{(1)}) \sin\frac{\psi}{2} + \gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} \sin\frac{3\psi}{2} \qquad (1)$$

otrzymujemy równanie

$$(1 + \gamma_1 \alpha_{11}^{(1)}) \cos\frac{\psi}{2} + 3\gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} \cos\frac{3\psi}{2} = 0,$$

lub, po przekształceniu

$$(1 + \gamma_1 \alpha_{11}^{(1)} - 9\gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} + 12\gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} \cos^2\frac{\psi}{2})\cos\frac{\psi}{2} = 0. \qquad (\text{ł})$$

Równanie to może być spełnione

1° - gdy $\cos\frac{\psi}{2} = 0$, lub

$$2^\circ \text{ - gdy } \cos^2\frac{\psi}{2} = \frac{(9\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)})\gamma_1 - 1}{12\gamma_1 \alpha_{31}^{(1)}}. \qquad (\text{m})$$

Weźmy pod uwagę przypadek pierwszy. Jeżeli $\cos\frac{\psi}{2} = 0$, to $\sin\frac{\psi}{2} = \pm 1$, zaś $\sin\frac{3\psi}{2} = \mp 1$. Amplitudalną wartością wyrażenia (1) jest przeto

$$\left|A^{(1)}\right| = 1 + (\alpha_{11}^{(1)} - \alpha_{31}^{(1)})\gamma_1. \qquad (3.15)$$

Podstawiając tutaj wzory (3.21) i (3.25) otrzymujemy poszukiwaną zależność

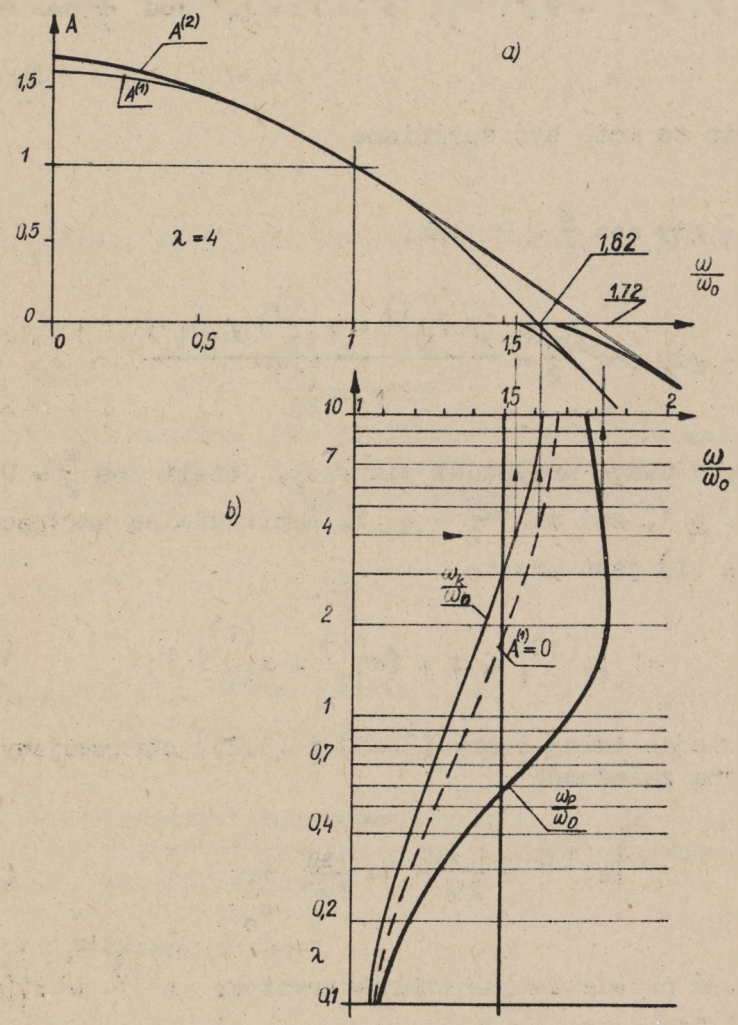
$$\left|A^{(1)}\right| = \frac{1+3\lambda}{2\lambda} - \frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{\omega^2}{\omega_o^2}. \qquad (3.15.1)$$

Na rys.9a przedstawiono charakterystykę $A^{(1)} = f_1(\omega/\omega_o)$ dla $\lambda = 4$.

Łatwo zauważyć, iż dla

$$\frac{\omega_I^{(1)}}{\omega_o} = \sqrt{\frac{1+3\lambda}{1+\lambda}} \qquad (3.16)$$

jest $A^{(1)} = 0$, co oznaczałoby, iż przy częstości wymuszenia $\omega = \omega_I^{(1)}$ układ nie wykonuje w ogóle drgań.



Rys.9

Paradoks ten jest jednakże tylko pozorny. Dla wyjaśnienia go weźmy pod uwagę drugą alternatywę rozwiązania równania (τ), czyli wzór (m). Podstawiając do (1) zamiast $\sin \psi/2$ i $\sin 3\psi/2$ wartości wynikające z (m) otrzymuje się po licznych przekształceniach

$$\left|A_*^{(1)}\right| = \sqrt{\frac{\left[1 + (\alpha_{11}^{(1)} + 3\,\alpha_{31}^{(1)})\,\gamma_1\right]^3}{27\,\gamma_1\,\alpha_{31}^{(1)}}} \qquad (3.17)$$

Zauważmy jednak, iż przedział istnienia tego rozwiązania ograniczony jest warunkiem

$$0 < \frac{(9\,\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)})\,\gamma_1 - 1}{12\,\gamma_1\,\alpha_{31}^{(1)}} \leq 1, \qquad (3.18)$$

wynikającym z przedziału wartości, jakie może przyjmować funkcja $\cos^2 \psi/2$. Przypuśćmy najpierw, że $\omega > \omega_0$, czyli $\gamma_1 > 0$. Ponieważ $\alpha_{31}^{(1)}(\omega) < 0$, (por.(3.11)), przeto nierówność

$$\frac{(9\,\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)})\,\gamma_1 - 1}{12\,\gamma_1\,\alpha_{31}^{(1)}} \geq 0$$

sprowadza się w tym przypadku do żądania

$$(9\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)})\,\gamma_1 - 1 \leq 0,$$

skąd

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{9\,\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)}} \quad \text{lub} \quad \gamma_1 < \frac{2\lambda(1+\lambda)}{1+\lambda^2}.$$

Rozwiązanie drugiej spośród nierówności (3.18) daje

$$\gamma_1 \geqslant \frac{2\lambda(1+\lambda)}{1+3\lambda+\lambda^2}.$$

A zatem, uwzględniając wzór (3.14) możemy napisać

$$\sqrt{\frac{1+5\lambda+3\lambda^2}{1+3\lambda+\lambda^2}} \leqslant \frac{\omega}{\omega_0} \leqslant \sqrt{\frac{1+2\lambda+3\lambda^2}{1+\lambda^2}}. \qquad (3.19)$$

Rozpatrując z kolei przypadek $\omega < \omega_0$, czyli $\gamma_1 < 0$ otrzymujemy

$$\gamma_1 \geqslant \frac{2\lambda(1+\lambda)}{1+\lambda^2}.$$

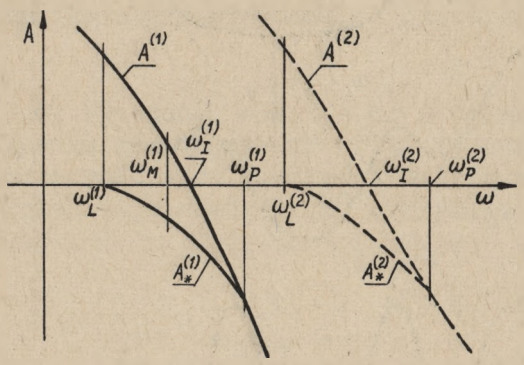
Ponieważ jednak λ może być tylko dodatnie, przeto nierówność ta jest sprzeczna z założeniem $\gamma_1 < 0$.

A zatem przedział ważności wzoru (3.17) określony jest w zupełności nierównościami (3.19). Podstawiając tam szereg wartości λ znajdujemy - w układzie współrzędnych $(\omega/\omega_0, \lambda)$ pewien obszar, który przedstawiony został na rys.9b jako pole zakreskowane.

W obszarze tym równanie $(\tilde{1})$, oprócz rozwiązania (3.15) posiada jeszcze drugie rozwiązanie, wyrażone wzorem (3.17). Oznacza to, że funkcja (1) w przedziale $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $(n = 0,1,2,\ldots)$ posiada trzy ekstrema; pierwsze występuje przy $\psi = \psi_n = (2n+1)\pi$ i posiada wartość $A^{(1)}$, określoną wzorem (3.15.1), Dwa pozostałe ekstrema występują przy (por.(m)).

$$\psi = \psi_{*n}^{\pm} = (2n+1)\pi \pm 2 \arccos \sqrt{\frac{(9\alpha_{31}^{(1)} - \alpha_{11}^{(1)})\gamma_1 - 1}{12\gamma_1 \alpha_{31}^{(1)}}}, \qquad (3.20)$$

a więc są usytuowane symetrycznie (w czasie)względem pierwszego. Funkcja (1) osiąga w tych punktach wartość $A_*^{(1)}$, określoną wzorem (3.17).



Rys.10

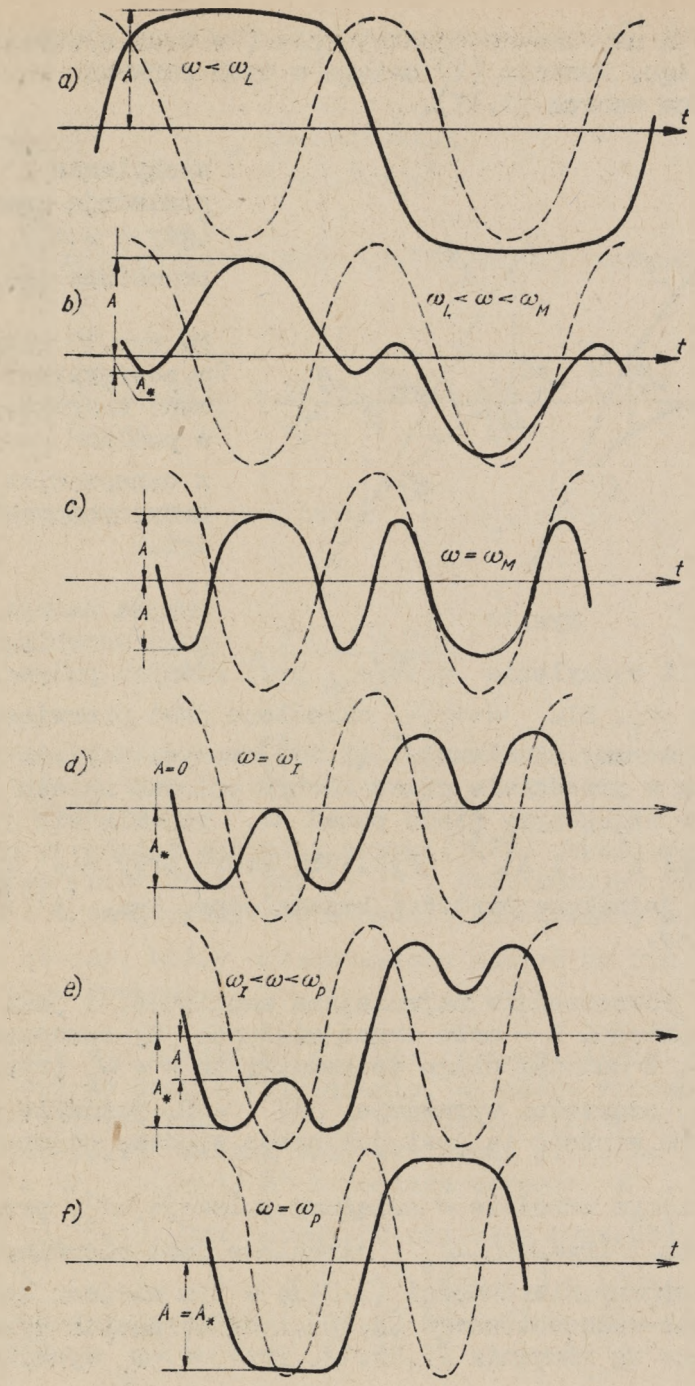
Wychylenia $A^{(1)}$ i $A_*^{(1)}$ posiadają znaki zgodne (gdy $\omega > \omega_I^{(1)}$), lub przeciwne (gdy $\omega < \omega_I^{(1)}$).

Na rys.10 pokazany jest w powiększeniu fragment charakterystyki w pobliżu punktu ω_I z oznaczeniem charakterystycznych częstości.

Krzywe na rys.11 obrazują przebieg funkcji (1) czyli wychylenia $q(\tau)/a_{10}$ przy różnych pulsacjach w pobliżu ω_I. Dla $\omega < \omega_L$ (ω_L określone jest pierwiastkiem z lewej strony nierówności (3.19)) krzywa posiada jedno maksimum w przedziale czasu równym połowie okresu (rys.11a). Jeżeli ω zwiększymy nieco ponad ω_L pojawią się już dwa ekstrema: $A^{(1)}$ i $A_*^{(1)}$ (rys.11b), które przy $\omega = \omega_M$ posiadają jednakowe wartości bezwzględne, tzn. $|A^{(1)}| = |A_*^{(1)}|$ (rys.11c).

Jest to równocześnie najmniejsza amplituda, z jaką - przy danej wartości λ - może drgać ciężarek G; oznaczymy ją $\min A^{(1)}$. W dalszym ciągu dochodzimy do $\omega = \omega_I$ (rys.11d); przy tej częstości wprawdzie $A^{(1)} = 0$, jednakże $A_*^{(1)} \neq 0$, przy czym wartość ta jest już nieco większa od $\min A^{(1)}$.

Przy dalszym wzroście ω osiągamy pulsację ω_p, przy której $A^{(1)} = A_*^{(1)}$ (rys.11f, ω_p określone jest pierwiastkiem z prawej strony nierówności (3.34)); w tym miejscu kończy się przedział ważności wzoru (3.19) i dalej charakterystyka przebiega wg równania (3.15.1). Przy $\omega > \omega_p$ wychylenie mają


a)
A
$\omega < \omega_L$
t
b)
A
A_*
$\omega_L < \omega < \omega_M$
t
c)
A
A
$\omega = \omega_M$
t
d)
A=0
$\omega = \omega_I$
A_*
e)
$\omega_I < \omega < \omega_p$
A
A_*
f)
$\omega = \omega_p$
t
$A = A_*$
$P \cos \omega' t$
Q/a_{10}

pod względem jakościowym przebieg analogiczny jak na rys.11a, przy czym jednak w porównaniu z drganiami o częstości $\omega<\omega_L$ nastąpiło przesunięcie w fazie o 180°.

W ten sposób wyjaśnione zostało zachowanie się ciężarka drgającego z częstościami bliskimi tej wartości, przy której charakterystyka przecina oś częstości.

3.6. Przejdźmy obecnie do d ugiego przybliżenia. W tym przypadku równanie ruchu (3.1.2) postaramy się spełnić z dokładnością do wielkości małych rzędu ε^2.

Wobec tego zamiast (d)' otrzymuje się

$$M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 = 0. \qquad (n)$$

Z warunku $M_2 = 0$ wynika następujące równanie

$$\ddot{q}_2+(\frac{1}{4} - \frac{p}{\omega_0^2}\cos\psi)q_2 + \varkappa\left[(\ddot{q}_2 q_0+2\dot{q}_2\dot{q}_0+ q_2\ddot{q}_0)q_0+ (\ddot{q}_0 q_0+ \dot{q}_0^2)q_2\right]+$$

$$+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\ddot{q}_1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}\ddot{q}_0 +\varkappa\left[(\ddot{q}_1 q_1+\dot{q}_1^2)q_0+ (\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} q_0+q_1)(\ddot{q}_1 q_0+2\dot{q}_1\dot{q}_0+q_1\ddot{q}_0)+\right.$$

$$\left.+ (\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} q_1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} q_0)(\ddot{q}_0 q_0 + \dot{q}_0^2)\right] = 0,$$

które, po podstawieniu (3.6.1) i (3.10) można sprowadzić do postaci

$$(1+\lambda)\ddot{q}_2 + \frac{1}{4}(1 - \lambda) q_2 + \lambda(-\ddot{q}_2 + \frac{1}{4} q_2)\cos\psi + \lambda\dot{q}_2 \sin\psi +$$

$$+ S_{12}\sin\frac{\psi}{2} + S_{32}\sin\frac{3\psi}{2} + S_{52}\sin\frac{5\psi}{2} + S_{72}\sin\frac{7\psi}{2} = 0. \qquad (o)$$

Tutaj S_{i2} (i = 1,3,5,7) są pewnymi wyrażeniami algebraicznymi, zawierającymi a_{10}, a_{11}, a_{31} oraz ω_1^2/ω_o^2 i ω_2^2/ω_o^2. Poszukując rozwiązania tego równania w postaci

$$q_2(\psi) = a_{12} \sin\frac{\psi}{2} + a_{32} \sin\frac{3\psi}{2} + a_{52} \sin\frac{5\psi}{2} \tag{3.21}$$

otrzymujemy po podstawieniu

$$N_{12} \sin\frac{\psi}{2} + N_{32} \sin\frac{3\psi}{2} + N_{52} \sin\frac{5\psi}{2} + N_{72} \sin\frac{7\psi}{2} = 0. \tag{p}$$

Albebraiczne wyrażenia N_{i2}, oprócz wymienionych wyżej wielkości, zawierają ponadto trzy nieznane na razie stałe a_{12}, a_{32}, a_{52}. Określimy je z równań $N_{12} = 0$, $N_{32} = 0$, $N_{52} = 0$, które - po zgrupowaniu niewiadomych po lewej stronie - przyjmują postać

$$-\lambda a_{12} + \lambda a_{32} = \frac{1}{2}\frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} a_{10} + \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2} a_{11} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varkappa a_{10}\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} a_{10}^2 + \frac{3}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}(a_{11}-a_{31})a_{10} - 3a_{11}a_{31} + \frac{3}{2}a_{11}^2 + 5a_{31}^2\right],$$

$$\lambda a_{12} - (4+5\lambda) a_{32} + 4\lambda a_{52} = \frac{9}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2} a_{31} -$$

$$- \frac{1}{2}\varkappa a_{10}\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} a_{10}^2 + \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}(3a_{11}-10a_{31})a_{10} - 10a_{11}a_{31} + \frac{3}{2}a_{11}^2\right],$$

$$4\lambda a_{32} - (12 + 13\lambda)\, a_{52} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varkappa a_{10}\left(\frac{9}{2}\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\, a_{10}\, a_{31} + q\, a_{11}\, a_{31} - \frac{11}{2}\, a_{31}^2\right).$$

Wyrażając stałe a_{11} i a_{31} przez $\alpha_{11}^{(1)}$, $\alpha_{31}^{(1)}$ otrzymujemy

$$-\lambda a_{12} + \lambda a_{32} =$$

$$= \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4}\left[\frac{1}{2}\alpha_{11}^{(1)} + \lambda\left(\frac{3}{2}\alpha_{11}^{(1)2} + \frac{3}{2}\alpha_{11}^{(1)} - 3\alpha_{11}^{(1)}\alpha_{31}^{(1)} - \frac{3}{2}\alpha_{31}^{(1)} + 5\alpha_{31}^{(1)2}\right)\right] a_{10} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}(1+\lambda)a_{10},$$

$$\lambda a_{12} - (4 + 5\lambda)\, a_{32} + 4\lambda a_{52} =$$

$$= \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4}\left[\frac{9}{2}\alpha_{31}^{(1)} - \lambda\left(\frac{3}{2}\alpha_{11}^{(1)2} + \frac{3}{2}\alpha_{11}^{(1)} - 10\alpha_{11}^{(1)}\alpha_{31}^{(1)} - 5\alpha_{31}^{(1)}\right)\right] a_{10} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}\lambda a_{10},$$

$$4\lambda a_{32} - (12+13\lambda)a_{52} = -\frac{\omega_1^4}{\omega_0^4}\left(9\alpha_{11}^{(1)}\alpha_{31}^{(1)} + \frac{9}{2}\alpha_{31}^{(1)} - \frac{11}{2}\alpha_{31}^{(1)2}\right)\lambda a_{10},$$

lub krócej

$$\left.\begin{aligned} -a_{12} + a_{32} &= \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4} L_{21}\, a_{10} + \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \frac{1+\lambda}{2\lambda}\, a_{10}, \\ a_{12} - \frac{4+5\lambda}{\lambda} a_{32} + 4\, a_{52} &= \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4} L_{23}\, a_{10} - \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} a_{10}, \\ 4a_{32} - \frac{12+13\lambda}{\lambda} a_{52} &= \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4} L_{25}\, a_{10}, \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

gdzie

$$L_{21} \equiv \frac{3}{2} \alpha_{11}^{(1)2} + \frac{1+3\lambda}{2\lambda} \alpha_{11}^{(1)} - 3\, \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{31}^{(1)} - \frac{3}{2} \alpha_{31}^{(1)} + 5\, \alpha_{31}^{(1)2},$$

$$L_{23} \equiv -\frac{3}{2} \alpha_{11}^{(1)2} - \frac{3}{2} \alpha_{11}^{(1)} + 10\, \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{31}^{(1)} + \frac{9+10\lambda}{2\lambda}\, \alpha_{31}^{(1)},$$

$$L_{25} \equiv -9\, \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{31}^{(1)} - \frac{9}{2} \alpha_{31}^{(1)} + \frac{11}{2}\, \alpha_{31}^{(1)2}.$$

Z uwagi na budowę współczynników $\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{31}^{(1)}$ (por.(3.11)) **nietrudno** zauważyć, że wyrażenia L_{2i} zależą wyłącznie od parametru $\lambda = \varkappa a_{10}^2/2$. Rozwiązując układ równań (q) znajdujemy poszukiwane stałe a_{12}, a_{32}, a_{52}, przy czym można je przedstawić wzorem ogólnym

$$a_{i2} = a_{10} \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_0^4} \alpha_{i1}^{(2)} + \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \alpha_{i2}^{(2)} \right), \quad i = 1,3,5; \qquad (3.22)$$

gdzie

$$\alpha_{11}^{(2)} = -\frac{\lambda(12+13\lambda)}{4(9\lambda^2+25\lambda+12)}\left(L_{21}+L_{23}+\frac{1+\lambda}{\lambda}L_{25}\right)+\frac{1}{4}L_{25}-L_{21},$$

$$\alpha_{31}^{(2)} = -\frac{\lambda(12+13\lambda)}{4(9\lambda^2+25\lambda+12)}\left(L_{21}+L_{23}+\frac{1+\lambda}{\lambda}L_{25}\right)+\frac{1}{4}L_{25},$$

$$\alpha_{51}^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{9\lambda^2+25\lambda+12}\left(L_{21}+L_{23}+\frac{1+\lambda}{\lambda}L_{25}\right),$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = -\frac{12+13\lambda}{8(9\lambda^2+25\lambda+12)}-\frac{1+\lambda}{2\lambda}, \qquad (3.23)$$

$$\alpha_{32}^{(2)} = -\frac{12+13\lambda}{8(9\lambda^2+25\lambda+12)},$$

$$\alpha_{52}^{(2)} = -\frac{\lambda}{2(9\lambda^2+25\lambda+12)};$$

$$L_{21}+L_{23}+\frac{1+\lambda}{\lambda}L_{25} = \frac{1}{2\lambda}\alpha_{11}^{(1)}-\frac{9+2\lambda}{\lambda}\alpha_{11}^{(1)}\alpha_{31}^{(1)}-\alpha_{31}^{(1)}+$$

$$+\frac{11+21\lambda}{2\lambda}\alpha_{31}^{(1)2}.$$

Ponieważ stałe a_{i2} występują we funkcji q_2 wraz z mnożnikiem ε^2, przeto piszemy

$$\varepsilon^2 a_{i2} = a_{10}(\gamma_1^2\alpha_{i1}^{(2)}+\gamma_2\alpha_{i2}^{(2)}),$$

gdzie

$$\gamma_2 = \varepsilon^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}. \qquad (3.24)$$

Ostatecznie rozwiązanie równania (3.1.2) w drugim przybliżeniu możemy przedstawić w następującej formie

$$q^{(2)}(\psi) = a_{10}(A_1^{(2)} \sin\frac{\psi}{2} + A_3^{(2)} \sin\frac{3\psi}{2} + A_5^{(2)} \sin\frac{5\psi}{2}), \qquad (3.25)$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} A_1^{(2)} &= 1 + \gamma_1 \alpha_{11}^{(1)} + \gamma_1^2 \alpha_{11}^{(2)} + \gamma_2 \alpha_{12}^{(2)}, \\ A_3^{(2)} &= \gamma_1 \alpha_{31}^{(1)} + \gamma_1^2 \alpha_{31}^{(2)} + \gamma_2 \alpha_{32}^{(2)}, \\ A_5^{(2)} &= \gamma_1^2 \alpha_{51}^{(2)} + \gamma_2 \alpha_{52}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

3.7. Wyznaczmy z kolei stałe γ_1 i γ_2. Pulsacja siły wymuszającej w drugim przybliżeniu dana jest wzorem

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \varepsilon \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}) = \omega_0^2 (1 + \gamma_1 + \gamma_2). \qquad (r)$$

Ponieważ znaną wielkość ω^2 wyrażamy w tym przypadku za pomocą dwóch nieznanych na razie liczb γ_1 i γ_2, przeto wyłania się kwestia właściwego ich doboru. Innymi słowy chodzi o ustawienie drugiego równania, które, wraz z (r) pozwoliłoby określić te stałe.

Zauważmy, że w równaniu (h), wynikającym z przyrównania do zera wyrażenia M_1, nie spełniliśmy dotychczas warunku $N_{51} = 0$, podobnie jak i w równaniu (p) - warunku $N_{72} = 0$.

Przeto dla spełnienia równania (3.1.2), względnie wynikającego zeń w drugim przybliżeniu równania (n) wymagane jest jeszcze, aby wyrażenie

$$\phi(\psi) = \varepsilon N_{51} \sin\frac{5\psi}{2} + \varepsilon^2 N_{72} \sin\frac{7\psi}{2}$$

było równe zero dla każdej wartości $\psi\in(0,+\infty)$,

Niestety warunku tego nie da się spełnić ściśle.

Den Hartog [14], który natknął się na podobną trudność przy analizowaniu pewnego układu nieliniowego (bez tłumienia) traktował funkcję $\phi(\psi)$ jako dodatkową siłę działającą na układ. żądając równocześnie, aby nie wykonywała ona żadnej pracy w czasie 1/4 okresu tzn. od $\psi = 0$ do $\psi = \pi/2$. Warunek ten jednakże w naszym przypadku prowadzi do nieco uciążliwych rachunków[x].

Schwesinger [15] w podobnej sytuacji żądał minimum całki $\int_0^{2\pi} [\phi(\psi)]^2 d\psi$. Ponieważ jednak funkcja $\phi(\psi)$ zależy zarówno od γ_1 jak i od γ_2, przeto powstaje pytanie, ze względu na który spośród tych parametrów wspomniana całka ma osiągnąć minimum? Spełnienie zaś tego warunku ze względu na oba parametry dawałoby - wraz z (r) - układ trzech równań o dwóch niewiadomych γ_1 i γ_2.

W związku z tymi trudnościami przyjmiemy - za Rüdenbergiem [15] - żądanie, aby równanie $\phi(\psi) = 0$ było spełnione tylko przy końcu każdej połowy okresu, tzn. zarówno wówczas, gdy $\psi = 0, 2\pi, 4\pi$ itd.(co jest oczywiste), jak i dla $\psi = \pi, 3\pi, 5\pi$ itd.

Ponieważ $\sin\frac{k}{2}\pi = -\sin(\frac{k}{2}+1)\pi$, $(k = 1,3,5...)$ przeto warunek ten daje

$$\varepsilon N_{51} - \varepsilon^2 N_{72} = 0. \qquad (3.27)$$

---

x) Do kwestii tej powrócimy jeszcze na końcu niniejszego paragrafu.

Występujące tu wyrażenia

$$N_{51} \equiv \left(\frac{9}{4}\lambda - \frac{p}{2\omega_o^2}\right) a_{31},$$

$$N_{72} \equiv \frac{17}{8}\varkappa a_{10} a_{31}^2 + \frac{9}{2}\lambda a_{52},$$

można, przy pomocy związków (f), (g), (j) i (3.22) sprowadzić do postaci

$$N_{51} \equiv 2\lambda a_{10} \alpha_{31}^{(1)} \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2},$$

$$N_{72} \equiv \frac{17}{4}\lambda a_{10} \alpha_{31}^{(1)2} \frac{\omega_1^4}{\omega_0^4} + \frac{9}{2}\lambda a_{10} \left(\frac{\omega_1^4}{\omega_o^4} \alpha_{51}^{(2)} + \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} \alpha_{52}^{(2)}\right).$$

Ostatecznie warunek (3.48) daje

$$8\alpha_{31}^{(1)} \gamma_1 - (17\alpha_{32}^{(1)2} + 18\alpha_{51}^{(2)})\gamma_1^2 - 18\alpha_{52}^{(2)} \gamma_2 = 0. \qquad (3.28)$$

W ten sposób otrzymaliśmy drugie - obok (r) - równanie dla wyznaczenia stałych γ_1 i γ_2.

Jest oczywiste, że postać równanie (3.28), a tym samym wartość stałych γ_1 i γ_2 zależy w pewnej mierze od kryterium, jakie przyjęliśmy dla przybliżonego zadośćuczynienia równaniu $\phi(\psi) = 0$. W szczególności np. przyjmując kryterium den Hartoga otrzymalibyśmy związek pomiędzy γ_1 i γ_2 odmienny i bardziej skomplikowany niż ten, jaki wynika z równania (3.28), wyprowadzonego w oparciu o kryterium Rüdenberga.

W związku z tym zauważmy, iż ostatecznym celem rozważań niniejszego paragrafu jest wyznaczenie charakterystyki amplituda - częstość. Tymczasem, jak wykazują obliczenia przeprowadzone dla kilku wartości λ, wybór tego wzgl. innego kryterium nie wpływa zupełnie na jakościowy charakter wspomnianej krzywej, zaś występujące wówczas drobne różnice ilościowe mieszczą się na ogół w granicach błędów dopuszczalnych w obliczeniach inżynierskich.

Jeżeli ponadto weźmiemy pod uwagę, że oba kryteria dają w gruncie rzeczy wynik przybliżony, to wydaje się rzeczą zrozumiałą, iż o wyborze kryterium Rüdenberga zadecydowała troska o prostotę obliczeń.

3.8. Przejdźmy obecnie do wyznaczenia charakterystyki amplituda - częstość w drugim przybliżeniu. W tym celu musimy określić amplitudalne wychylenie ciężarka G w drugim przybliżeniu. Poszukując ekstremum funkcji (3.25) dochodzimy, w sposób analogiczny jak w p.3.5 do równania

$$\left[\left(A_1^{(2)}-9A_3^{(2)}+25A_5^{(2)}\right)+\left(12A_3^{(2)}-100A_5^{(2)}\right)\cos^2\frac{\psi}{2}+80A_5^{(2)}\cos^4\frac{\psi}{2}\right]\times$$

$$\times\cos\frac{\psi}{2}=0,$$

które może być spełnione w przypadku, gdy $\cos\frac{\psi}{2}=0$ lub też gdy $\cos^2\frac{\psi}{2}$ przyjmuje jedną z dwóch wartości, będących pierwiastkami równania

$$80A_5^{(2)}\cos^4\frac{\psi}{2}+\left(12A_3^{(2)}-100A_5^{(2)}\right)\cos^2\frac{\psi}{2}+\left(A_1^{(2)}-9A_3^{(2)}+25A_5^{(2)}\right)=0. \qquad (s)$$

Pierwsza alternatywa daje następujący wzór na amplitudę w drugim przybliżeniu

$$\left|A^{(2)}\right| = A_1^{(2)} - A_3^{(2)} + A_5^{(2)}, \qquad (3.29)$$

lub, po wykorzystaniu zależności (3.26)

$$\left|A^{(2)}\right| = 1+(\alpha_{11}^{(1)}-\alpha_{31}^{(1)})\gamma_1+(\alpha_{11}^{(2)}-\alpha_{31}^{(2)}+\alpha_{51}^{(2)})\gamma_1^2+(\alpha_{12}^{(2)}-\alpha_{32}^{(2)}+\alpha_{52}^{(2)})\gamma_2. \qquad (3.29.1)$$

Porównując powyższe ze wzorem (3.15), określającym $|A^{(1)}|$, dostrzegamy pojawienie się dodatkowych wyrazów, zawierających γ_1^2 oraz γ_2.

Jeżeli we wzorze (3.29.1) wyeliminujemy stałe γ_1 i γ_2 za pomocą zależności (r) i (3.28), to wówczas pojawią się tam wyrażenia ω^2 i ω^4. A zatem równanie $A^{(2)} = 0$ będzie kwadratowe względem ω^2, skąd w dalszym ciągu wynika, że krzywa $A^{(2)} = f_2(\omega)$ przecina oś częstości w dwóch punktach; oznaczmy je $\omega_I^{(2)}$ i $\omega_{II}^{(2)}$.

Zwróćmy obecnie uwagę na równanie (s). Jest ono również kwadratowe względem $\cos^2\frac{\psi}{2}$ i jako takie wyznacza dwa dodatkowe ekstrema funkcji (3.25), które oznaczymy $A_{*I}^{(2)}$ i $A_{*II}^{(2)}$.

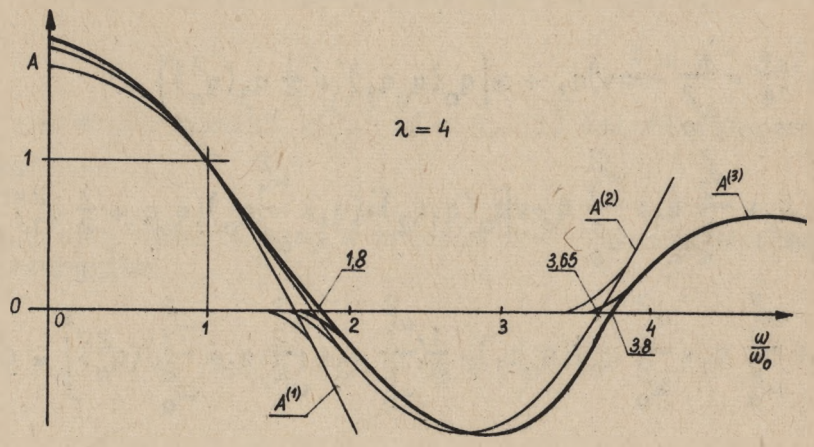
Każde z nich występuje jednak tylko w niewielkim przedziale wartości ω, (wynikającym z warunku $0 \leq \cos^2\frac{\psi}{2} \leq 1$) w otoczeniu punktów $\omega = \omega_I^{(2)}$ i $\omega = \omega_{II}^{(2)}$.

A zatem w pobliżu obu punktów przecięcia charakterystyki z osią częstości zaobserwujemy te same zjawiska, które omówione zostały w p.3.5.

W szczególności pojawiają się wtedy drgania z dwoma amplitudami o przebiegu przedstawionym na rys.11b ÷ 11e. Każdorazowe przejście charakterystyki przez oś ω związane jest ze zmianą kąta fazowego pomiędzy wychyleniem a siłą wymuszającą o 180°.

Na rys.12 przedstawiono charakterystykę $A^{(2)} = f_2(\omega/\omega_0)$ dla $\lambda = 4$. W porównaniu z analogiczną krzywą z rys.9a wi-

doczne jest przede wszystkim pojawienie się nowej gałęzi o kształcie półfali, nieco bardziej wydłużonej i o mniejszej "amplitudzie" niż ta, którą posiada pierwsza gałąź charakterystyki (tzn. dla $\omega \in (0, \omega_I)$).



Rys. 2

Co się zaś tyczy tej gałęzi, to została ona określona nieco dokładniej, aniżeli w pierwszym przybliżeniu, podobnie zresztą jak i położenie punktu $\omega_I (\omega_I^{(2)} > \omega_I^{(1)})$; jednakże różnice są tu nieznaczne.

O ile zatem przy częstościach $\omega < \omega_I$ dokładność charakterystyki wyznaczonej w pierwszym przybliżeniu można uznać za wystarczającą, o tyle dla częstości $\omega \in (\omega_I, \omega_{II})$ krzywa $A^{(1)} = f_1(\omega/\omega_0)$ daje wartości zupełnie błędne. W tym zakresie miarodajna jest bowiem charakterystyka uzyskana przy pomocy co najmniej drugiego przybliżenia.

Dla określenia samej częstości ω_{II} należy raczej skorzystać już z trzeciego przybliżenia.

3.9. Rozważania w trzecim przybliżeniu przeprowadzimy z uwagi na to, że jeszcze w drugim przybliżeniu wystąpiły pewne anomalie, związane z wyznaczeniem stałych γ_1 i γ_2.

Natomiast tok obliczeń w trzecim przybliżeniu jest już analogiczny jak we wszystkich następnych przybliżeniach.

Zachowując po cztery pierwsze wyrazy w szeregach (3.7) i (3.8) otrzymujemy dodatkowe równanie

$$\ddot{q}_3 + (\frac{1}{4} - \frac{p}{\omega_o^2}\cos\psi)q_3 + \varkappa\Big[q_o(q_oq_3)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}q_3(q_o^2)^{\cdot\cdot}\Big] +$$

$$+ \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}\ddot{q}_2 + \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2}\ddot{q}_1 + \frac{\omega_3^2}{\omega_o^2}\ddot{q}_o + \varkappa\Big[q_o(q_1q_2)^{\cdot\cdot} + (q_1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}q_o)(q_oq_2 + \frac{1}{2}q_1^2)^{\cdot\cdot} + \tag{t}$$

$$+ (q_2 + \frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}q_1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2}q_o)(q_oq_1)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1^2}{\omega_o^2}q_2 + \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2}q_1 + \frac{\omega_3^2}{\omega_o^2})(q_o^2)^{\cdot\cdot}\Big] = 0;$$

wynika ono z przyrównania do zera wyrażenia M_3, na które składają się wszystkie wyrazy równania $(3.1.2)^3$ zawierające ε^3.

W dalszym ciągu przyjmujemy

$$q_3(\psi) = a_{13}\sin\frac{\psi}{2} + a_{33}\sin\frac{3\psi}{2} + a_{53}\sin\frac{5\psi}{2} + a_{73}\sin\frac{7\psi}{2}. \tag{3.50}$$

Podstawiając w (t) powyższy wzór, a także określone uprzednio funkcje q_o, q_1 i q_2 otrzymujemy równanie algebraiczne

$$N_{13}\sin\frac{\psi}{2} + N_{33}\sin\frac{3\psi}{2} + N_{53}\sin\frac{5\psi}{2} + N_{73}\sin\frac{7\psi}{2} + N_{93}\sin\frac{9\psi}{2} = 0.$$

Kładąc następnie $N_{13} = 0$, $N_{33} = 0$, $N_{53} = 0$, $N_{73} = 0$ mamy układ czterech równań dla wyznaczenia stałych a_{13}, a_{33}, a_{53}, a_{73}.

Wynik rozwiązania tego układu (pomnożony przez ε^3) możemy przedstawić w postaci ogólnej

$$\varepsilon^3 a_{i3} = a_{10}(\gamma_1^3 \alpha_{i1}^{(3)} + \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{i2}^{(3)} + \gamma_3 \alpha_{i3}^{(3)}),$$

$$i = 1,3,5,7$$

przy czym współczynniki $\alpha_{ij}^{(3)}$ $(j = 1,2,3)$ zależą wyłącznie od parametru λ.

Pulsację siły wymuszającej w trzecim przybliżeniu przedstawiamy szeregiem

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

Dla wyznaczenia stałych γ_1, γ_2, γ_3 - oprócz wzoru powyższego - dysponujemy jeszcze równaniem (3.28) oraz równaniem $N_{93} = 0$. To ostatnie zawiera w sobie m.in. γ_1^3 i γ_3 = $= \varepsilon^3 \omega_3^2/\omega_0^2$.

Jeżeli ostatecznie rozwiązanie równania (3.1.2) w trzecim przybliżeniu zapiszemy w postaci następującej

$$q^{(3)}(\psi) = a_{10}(A_1^{(3)} \sin\frac{\psi}{2} + A_3^{(3)} \sin\frac{3\psi}{2} + A_5^{(3)} \sin\frac{5\psi}{2} +$$

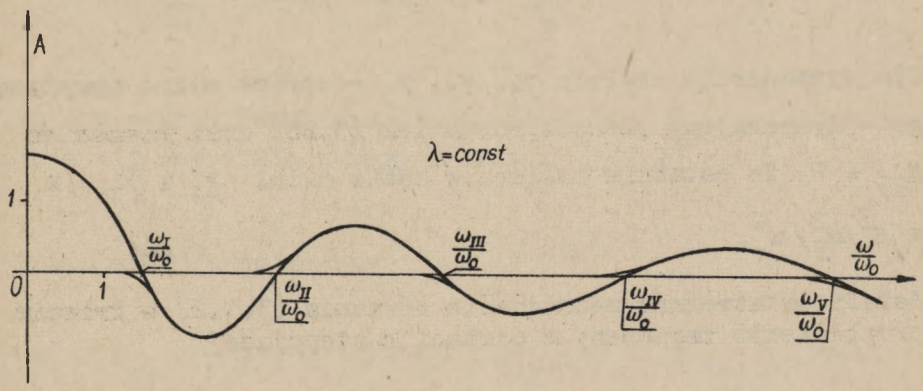
$$+ A_7^{(3)} \sin\frac{7\psi}{2}),$$

to amplitudalną wartością wyrażenia zawartego w nawiasie jest

$$|A^{(3)}| = A_1^{(3)} - A_3^{(3)} + A_5^{(3)} - A_7^{(3)}. \qquad (3.31)$$

Maksimum to występuje gdy $\cos\frac{\psi}{2} = 0$. Funkcja $|A^{(3)}| = f_3(\omega)$ posiada trzy miejsca zerowe: $\omega_I^{(3)}$, $\omega_{II}^{(3)}$, $\omega_{III}^{(3)}$, wartość ω_{II} określona została teraz z większą dokładnością, niż w drugim przybliżeniu, przy czym $\omega_{II}^{(3)} > \omega_{II}^{(2)}$. To samo można powiedzieć o pulsacji $\omega_I^{(3)}$, jednakże tutaj różnica w zestawieniu z $\omega_I^{(2)}$ jest prawie niedostrzegalna, tzn. $\omega_I^{(3)} \approx \approx \omega_I^{(2)}$.

Nietrudno zauważyć, iż każde kolejne przybliżenie "dodaje" charakterystyce nową półfalę, rozszerzając tym samym zakres jej prawidłowego przebiegu na coraz wyższe wartości ω (rys.13).



Rys.13

Ponadto coraz dokładniej zostaje określony kształt tych półfal, które wyznaczone zostały w poprzednich przybliżeniach. Jak widać z rysunku fale te mają charakter zanikający, tzn. ich "amplituda" maleje w miarę przechodzenia do coraz wyższych częstości, przy czym ich długość równocześnie wzrasta.

Z uwag powyższych wynika następujący wniosek: rząd przybliżenia, z jakim zmuszeni jesteśmy rozwiązywać równanie (3.1.2) podyktowany jest nie tylko żądaną dokładnością określenia

amplitudy drgań, lecz przede wszystkim zależy od (danej a priori) wartości pulsacji wymuszenia. Jeżeli ω leży w zakresie n-tej półfali charakterystyki (tzn. w przedziale $[\omega_{N-I}, \omega_N]$, N = I,II,III,...), to wówczas konieczne jest przeprowadzenie obliczeń z dokładnością co najmniej do n-tego przybliżenia włącznie.

3.10. W związku z powyższą uwagą celowym będzie przeprowadzenie rozważań ogólnych, dotyczących rozwiązania w n-tym przybliżeniu.

Dla rozwiązania równania (3.1.2) metodą małego parametru w n-tym przybliżeniu podstawiamy weń

$$q^{(n)}(\psi) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \, q_i(\psi), \tag{3.32}$$

$$\omega^2 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \, \omega_i^2. \tag{3.33}$$

Odrzucając wyrazy zawierające parametr ε w potęgach wyższych od n otrzymujemy po uporządkowaniu

$$M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots + \varepsilon^n M_n = 0. \tag{3.34}$$

Tutaj M_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ są nieliniowymi wyrażeniami różniczkowymi, zawierającymi funkcje $q_i(\psi)$ oraz ich pochodne, a także funkcję $\cos\psi$. Przyrównanie do zera tych wyrażeń daje układ n równań różniczkowych, które sukcesywnie rozwiązujemy przyjmując

$$q_i(\psi) = \sum_{j=0}^{i} a_{2j+1,i} \sin \frac{2j+1}{2}\psi. \tag{3.35}$$

W ten sposób dochodzimy do układu n + 1 równań algebraicznych typu

$$\sum_{j=0}^{i+1} N_{2j+1,i} \sin \frac{2j+1}{2}\psi = 0, \qquad (3.36)$$

$$i = 0,1,2,\ldots,n,$$

przy czym $N_{2j+1,i}$ są nieliniowymi wyrażeniami, zawierającymi stałe $a_{2j+1,i}$ oraz stosunki ω_i^2/ω_o^2 w rozmaitych potęgach.

Stałe $a_{2j+1,i}$ można z kolei przedstawić wzorem ogólnym

$$a_{2j+1,i} = a_{10} \sum_{k=1}^{i} \alpha_{2j+1,k}^{(i)} G_k^{(i)}\left(\frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}\right), \quad i \geqslant 1. \qquad (3.37)$$

*)

Stałe $\alpha_{2j+1,k}^{(i)}$ zależą już wyłącznie od parametru $\lambda = \varkappa a_{10}/2$.

Wyrażenie $G_k^{(i)}(\omega_m^2/\omega_o^2)$, $(m = 1,2,\ldots,k)$ jest albo wprost ułamkiem ω_m^2/ω_o^2 (wówczas m = k), albo jego potęgą $(\omega_m^2/\omega_o^2)^r$, albo też iloczynem kilku wyrażeń tego typu. Jest rzeczą charakterystyczną, że zawsze rm = i. lub też gdy np. (dla r > 0, s > 0) jest

$$G_k^{(i)}\left(\frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}\right) = \left(\frac{\omega_{i-m}^2}{\omega_o^2}\right)^r \left(\frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}\right)^s, \qquad (3.38)$$

to

$$r(i-m) + sm = i.$$

---

*) Indeksy umieszczone u góry wzięto w nawiasy dla odróżnienia od wykładników potęgowych.

Fakt ten posiada dość istotne znaczenie. Dzięki temu bowiem, wprowadzając do rozważań parametr

$$\gamma_m = \varepsilon^m \frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}, \tag{3.39}$$

możemy napisać

$$\varepsilon^i G_k^{(i)}\left(\frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}\right) = G_k^{(i)}(\gamma_m). \tag{3.40}$$

Tak np. w przypadku (3.38) jest $G_k^{(i)}(\gamma_m) = \gamma_{i-m}^r \cdot \gamma_m^s$.

A oto kilka pierwszych wyrażeń $G_k^{(i)}$: $G_o^{(o)} = 1$, $G_1^{(1)} = \gamma_1$, $G_1^{(2)} = \gamma_1^2$, $G_2^{(2)} = \gamma_2$, $G_1^{(3)} = \gamma_1^3$, $G_2^{(3)} = \gamma_1\gamma_2$, $G_3^{(3)} = \gamma_3$, $G_1^{(4)} = \gamma_1^4$, $G_2^{(4)} = \gamma_2^2$, $G_3^{(4)} = \gamma_1\gamma_3$, $G_4^{(4)} = \gamma_4$ itd.

Jeżeli skojarzymy szeregi (3.35) i (3.37), a następnie tak otrzymany szereg podwójny podstawimy do (3.32), to okaże się, iż zasadniczo poszukiwane rozwiązanie ma postać szeregu potrójnego

$$q^{(n)}(\psi) = a_{10} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \varepsilon^i \alpha_{2j+1,k}^{(i)} G_k^{(i)}\left(\frac{\omega_m^2}{\omega_o^2}\right) \sin\frac{2j+1}{2}\psi,$$

który, z uwagi na równość (3.40), zapisuje się nieco krócej

$$q^{(n)}(\psi) = a_{10} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \alpha_{2j+1,k}^{(i)} G_k^{(i)}(\gamma_m) \sin\frac{2j+1}{2}\psi. \tag{3.41}$$

Ponieważ jednak jest to pojedynczy szereg trygonometryczny, przeto możemy napisać

$$q^{(n)}(\psi) = a_{10} \sum_{j=0}^{n} A_{2j+1}^{(n)} \sin \frac{2j+1}{2} \psi, \qquad (3.42)$$

przy czym z porównania ze wzorem (3.41) wynika

$$A_{2j+1}^{(n)} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \alpha_{2j+1,k}^{(i)} G_k^{(i)}(\gamma_m),$$

$$\alpha_{10}^{(0)} = 1. \qquad (3.43)$$

Tak więc w rozwiązaniu końcowym nie występuje mały parametr ε, który został zastąpiony przez γ_m.
Ponadto dzięki wprowadzeniu parametru γ_m wzór (3.33) można przekształcić następująco

$$\omega^2 = \omega_o^2 \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \frac{\omega_i^2}{\omega_o^2} = \omega_o^2 \sum_{j=0}^{n} \gamma_j. \qquad (3.33.1)$$

A zatem znaną wielkość ω^2/ω_o^2 wyrażamy w n-tym przybliżeniu za pomocą szeregu $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$, zawierającego n nieznanych liczb γ_j ($\gamma_j \gtrless 0$ gdy $\omega \gtrless \omega_o$, $\gamma_j = 0$ gdy $\omega = \omega_o$).

W związku z tym przeprowadźmy bilans ilości równań, którymi dysponujemy dla określenia wszystkich niewiadomych, przy czym należy pamiętać, że oprócz wielkości γ_m są nimi także współczynniki $\alpha_{2j+1,k}^{(i)}$.

Obliczmy najpierw ilość współczynników $\alpha_{2j+1,k}^{(i)}$ występujących w n-tym przybliżeniu. Szereg $\sum_{k=1}^{i} \alpha_{2j+1,k}^{(i)}$ zawiera ich i, wobec czego ilość tych współczynników w kolejnych wyrazach szeregu $\sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \alpha_{2j+1,k}^{(i)}$ tworzy ciąg

$$j, j+1, j+2, \ldots, n,$$

składający się z $1 + (n - j)$ wyrazów. Szereg utworzony z tego ciągu jest szeregiem arytmetycznym pierwszego rzędu o różnicy $d = 1$. Jego suma

$$\frac{1}{2}(1 + n - j)(n + j)$$

określa ilość współczynników $\alpha^{(i)}_{2j+1,k}$, zawartych w wyrażeniu $A^{(n)}_{2j+1}$ *).

Na podstawie tego możemy utworzyć ciąg odpowiadający kolejnym wartościom $j = 0, 1, 2 \ldots, n$, a mianowicie

$$\frac{1}{2}(1 + n)\,n,\ \frac{1}{2}(1 + n - 1)(n + 1),$$

$$\frac{1}{2}(1 + n - 2)(n + 2),\ \ldots,\ \frac{1}{2}(1 + n - n)(n+n). \qquad (u)$$

Posiada on $n + 1$ wyrazów. Suma szeregu utworzonego z tego ciągu będzie równa ilości współczynników $\alpha^{(i)}_{2j+1,k}$, występujących we funkcji $q^{(n)}(\psi)$, określonej szeregiem (3.42).

Przepiszmy ciąg (u) wraz z odpowiadającymi mu ciągami pierwszych i drugich różnic

$$\frac{n}{2}(n+1),\ \frac{n}{2}(n+1),\ \frac{n}{2}(n+1)-1,\ \frac{n}{2}(n+1)-3,\ldots,\ n \quad \text{– ciąg główny}$$

$$0 \qquad -1 \qquad -2 \qquad -3 \quad \text{ciąg 1 różnic}$$

$$-1, \qquad -1, \qquad -1, \quad \text{ciąg 2 różnic.}$$

*) Stała $A^{(n)}_1$ (odpowiadająca $j = 0$) posiada ponadto jako pierwszy wyraz $\alpha^{(o)}_{10} = 1$.

Nietrudno zauważyć, że szereg otrzymany w wyniku zesumowania wyrazów ciągu głównego jest szeregiem arytmetycznym drugiego rzędu. Jego sumę obliczamy wzorem

$$S_{n+1} = C_1^{n+1} b_o + C_2^{n+1} b_1 + C_3^{n+1} b_2,$$

gdzie b_o, b_1, b_2 są pierwszymi wyrazami ciągu głównego oraz ciągów pierwszych i drugich różnic; C_r^{n+1} jest liczbą kombinacji z r elementów po n+1. W naszym przypadku jest $b_o = (n+1)n/2$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, ponadto

$$C_1^{n+1} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1,$$

$$C_3^{n+1} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{1}{6}(n+1)(n-1)n.$$

A zatem

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 n - \frac{1}{6}(n+1)(n-1)n,$$

skąd ostatecznie

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (3.44)$$

Wzór ten określa poszukiwaną liczbę współczynników $\alpha_{2j+1,k}$, jaką zmuszeni jesteśmy wyznaczyć łącznie w n-tym przybliżeniu. I tak gdy: $n = 1$, $S_2 = 2$; $n = 2$, $S_3 = 8$; $n = 3$, $S_4 = 20$; $n = 4$, $S_5 = 40$ itd.

Dla określenia tych współczynników mamy do dyspozycji n + 1 równań (3.36).

Ponieważ zaś każde z nich zawiera w sobie $i + 2$ wyrażeń $N_{2j+1,i}$, przeto wymaganą ilość równań otrzymamy z warunku, aby $i + 1$ pierwszych wyrażeń $N_{2j+1,i} = 0$[x]. Pozostałe równania, wynikające z przyrównania do zera wyrażeń $N_{2j+1,n}$ (tzn. ostatnich w każdym spośród szeregów (3.36)) tworzą - wraz z (3.28) i (3.33.1) - układ n równań, zawierających n niewiadomych γ_m.

Należy podkreślić, że w gruncie rzeczy dokonując obliczeń w n-tym przybliżeniu stajemy wobec konieczności wyznaczenia tylko $n(n+1)$ współczynników $\alpha^{(i)}_{2j+1,k}$, ponieważ pozostałe wyznaczone zostały już w przybliżeniach poprzednich, a ich budowa nie ulega zmianie przy przejściu do przybliżeń dalszych.

Natomiast stałe γ_m muszą być każdorazowo obliczane oddzielnie, przy czym ich wartości są (dla danego λ) w każdym przybliżeniu, odmienne. Fakt ten znajduje wytłumaczenie w budowie wzoru (3.33.1), w którym znaną liczbę ω^2 przedstawiamy szeregiem o ilości wyrazów zależnej od kolejnego numeru przybliżenia.

3.11. Wnioski

a) Układ z nieliniowością bezwładnościową posiada charakterystykę amplituda-częstość o swoistym kształcie "zanikających" fal. W miarę przechodzenia do coraz wyższych wartości ω długość tych fal zwiększa się, zaś ich "amplituda" maleje. Największe amplitudy drgań występują przy częstościach wymuszenia $\omega < \omega_0$. Dla $\omega > \omega_0$ charakterystyka posiada lokalne maksima, w których jednakże $|A^{(n)}| < 1$, tzn. nigdy nie osiągają one amplitudy a_{10} drgań harmonicznych.

b) Jak widać z rys.13 omawiana charakterystyka nie posiada gałęzi odpowiadających drganiom niestatecznym. W związku z tym w układzie z nieliniowością bezwła-

---

x) Ze względu na pewne anomalie, występujące jeszcze w drugim przybliżeniu rozumowanie to jest słuszne dopiero dla $n > 2$.

dnościową nie wystąpi zjawisko "przeskoku", tak charakterystyczne dla układów z nieliniowością typu Duffinga; w rozpatrywanym układzie ciągłej zmianie częstości wymuszenia towarzyszyć będzie ciągła zmiana amplitudy drgań w całym zakresie $\omega \in (0, +\infty)$. Każdorazowe przecięcie charakterystyki z osią częstości (co ma miejsce przy $\omega = \omega_N$, N = I,II,... itd.) związane jest ze zmianą kąta fazowego pomiędzy wychyleniem a siłą wymuszającą o 180°.

c) Przy częstościach $\omega = \omega_M \approx \omega_N$ amplitudy drgań osiągają wartości minimalne, które co do bezwzględnej wartości są bardzo małe wobec a_{10}. Fakt ten wskazuje na możliwość zastosowania analizowanego układu jako dynamicznego tłumika drgań poprzecznych. Mianowicie jeżeli na dwuprzegubowy pręt (prosty lub wstępnie zakrzywiony) działa podłużna siła pulsująca, to dla stłumienia mogących się wówczas pojawić drgań poprzecznych pręta należy do jego ruchomego końca przytwierdzić pewną masę skupioną. Przez stosowny dobór wielkości tej masy można - jak się okazuje - drgania poprzeczne pręta zredukować w znacznym stopniu.

Masę skupioną Q/g należy dobrać nie tylko w zależności od wielkości charakteryzujących pręt (tzn. jego długości, ciężaru, sztywności na zginanie), lecz także w zależności od amplitudy P siły wymuszającej.

W tym celu posługujemy się wykresem na rys.9b. Dla danej wartości ω/ω_o prowadzimy prostą równoległą do osi λ aż do przecięcia się z krzywą $A_N = f_o(\lambda)$. Odcięta tego punktu wyznacza pewną wartość λ.

Ponieważ zaś (por.(3.9.1)),

$$\lambda = \frac{G + 4Q}{4(Q_{kr} - Q)} \cdot \frac{P}{G},$$

przeto poszukiwany ciężar masy skupionej

$$Q = \frac{G}{4} \frac{4 \lambda Q_{kr} - P}{\lambda G + P}, \qquad (P < 4 \lambda Q_{kr}). \qquad (3.45)$$

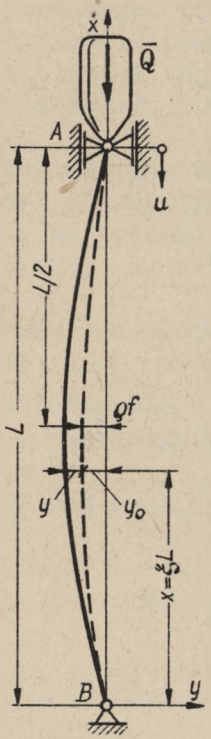
Fakt, iż wielkość masy skupionej zależy m.in. od P stanowi pewną niedogodność proponowanego sposobu tłumienia drgań, albowiem dzięki temu efektywne działanie tłumika będzie miało miejsce tylko przy określonej amplitudzie wymuszenia.

C z ę ś ć II

Pręt dwuprzegubowy z masą skupioną na końcu ruchomym

4. PODSTAWOWY UKŁAD RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH PROBLEMU ORAZ SPROWADZENIE GO DO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWEGO

4.1. Przedmiotem rozważań tej części opracowania będą swobodne drgania poprzeczne pręta dwuprzegubowego, z którego jednym (ruchomym) końcem związana jest trwale masa Q/g.



Rys.14

Pręt jest odkształcony wstępnie beznaprężeniowo. Odległość między osiami przegubów (końcami pręta) wynosi L.

Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych, którego początek leży na osi przegubu nieruchomego, zaś oś x jest zorientowana pionowo (rys.14). Niechaj $y_0 = y_0(x)$ oznacza ugięcie wstępne, zaś $y = y(x,t)$ ugięcie dynamiczne osi pręta. Bezwładność masy Q/g sprawia, że w czasie drgań w pręcie pojawi się zmienna w czasie siła osiowa P. Wobec tego równanie różniczkowe drgań poprzecznych pręta, przy założeniach 1.5.4 ÷ 1.5.6 ma postać

$$EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P(y + y_0)\right] + \frac{\gamma_c F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (4.1)$$

gdzie EI_z - sztywność zginania pręta, F i γ_c - pole przekroju oraz ciężar właściwy materiału pręta.

Z uwagi na założenie 1.5.7 siłę P(t) można traktować wyłącznie jako funkcję czasu, a więc niezależną od współrzędnej x. Wobec tego

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[P(y + y_o)\right] = P\frac{\partial^2(y+y_o)}{\partial x^2}. \qquad (4.2)$$

Załóżmy dalej, że krzywizna początkowa pręta jest typu sinusoidalnego, tzn.

$$y_o(x) = \varrho f \sin\frac{\pi x}{L}, \qquad (4.3)$$

gdzie

$\varrho = \sqrt{J_z/F}$ - promień bezwładności przekroju poprzecznego

f = współczynnik bezwymiarowy.

Ten typ krzywizny pierwotnej przyjmowany jest przez licznych autorów (por. [1], [2], [3]).

Wobec tego można oczekiwać, iż w ruchu poprzecznym pręta dominującą rolę odgrywać będą drgania giętne z częstością podstawową. Wówczas bowiem kształt osi pręta drgającego zachowa pierwotny charakter wygięcia (jedna połowa fali).

4.2. Z tego powodu, jak też z uwagi na równość (4.2) można przyjąć ($\xi = x/L$; $0 \leq \xi \leq 1$)

$$y(\xi,t) = \varrho T(t) \sin\pi\xi, \qquad (4.4)$$

przy czym funkcja czasu T(t) jest na razie nieokreślona.

Łatwo zauważyć, iż funkcja (4.4) spełnia warunki przegubowego podparcia, albowiem dla $\xi = 0$ i $\xi = 1$ jest $y = 0$ oraz $\partial^2 y/\partial\xi^2 = 0$.

Podstawiając (4.4) i (4.3) do równania (4.1) otrzymuje się, po uporządkowaniu

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = \omega^2 (T + f) \frac{P}{P_E} = 0, \qquad (4.5)$$

gdzie

$\omega = \varrho \frac{a^2}{L^2} \sqrt{\frac{E g}{\gamma_c}}$ – podstawowa częstość własna drgań poprzecznych pręta, gdy nie ma siły podłużnej;

$P_E = \frac{\pi^2 E J_z}{L^2}$ – statyczne obciążenie krytyczne;

$\lambda = \frac{L}{\varrho}$ – smukłość.

Jeżeli oznaczymy

$$S(t) = \frac{P(t)}{P_E}, \qquad (4.6)$$

a ponadto wprowadzimy bezwymiarowy parametr czasu $\tau = \omega t$, wówczas równanie różniczkowe dla funkcji $T(\tau)$ przyjmie postać

$$\ddot{T} + T - TS - fS = 0; \qquad (4.5.1)$$

kropkami oznaczono różniczkowanie podług τ.

Z uwagi na istnienie wyrazu TS jest to równanie nieliniowe.

4.3. Przejdźmy z kolei do określenia siły $P(t)$ lub $S(t)$. Jeżeli przemieszczenie przegubu A oznaczymy przez $u_1 = u_1(t)$, to, zgodnie z zasadą d'Alemberta, piszemy

$$P(t) = Q - \frac{Q}{g} \cdot \frac{d^2 u_1}{dt^2},$$

lub po przejściu do wielkości bezwymiarowych

$$S(\tau) = \beta - \frac{\beta \omega^2}{\varepsilon} \ddot{u}_1, \qquad (4.7)$$

gdzie

$$\beta \equiv \frac{Q}{P_E}. \qquad (\beta < 1) \qquad (4.8)$$

Przemieszczenie u_1 spowodowane jest dynamicznym ugięciem pręta oraz jego skróceniem (ściskaniem)

$$u_1 = u_{1g} + u_{1c}. \qquad (4.9)$$

Wyznaczmy najpierw składnik u_{1g}. Różnicę pomiędzy długością osi pręta wygiętego pierwotnie, a odległością jego końców określa znany wzór przybliżony

$$\Delta L_1 \approx \frac{1}{2L} \int_0^1 \left(\frac{dy_0}{d\xi} \right)^2 d\xi .$$

W czasie ruchu pręta całkowite odchylenie od osi x wynosi $y + y_0$; w tym przypadku znajdujemy podobnie jak poprzednio

$$\Delta L_2 \approx \frac{1}{2L} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y + y_0) \right]^2 d\xi .$$

A zatem przemieszczenie końca A, spowodowane dynamicznym ugięciem pręta wynosi [1]

$$u_{1g} = \Delta L_2 - \Delta L_1 \approx \frac{1}{2L}\int_0^1 \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi + \frac{1}{L}\int_0^1 \frac{dy}{d\xi}\frac{dy_o}{d\xi}\, d\xi \; ^{*)}. \tag{4.10}$$

Podstawiając tutaj (4.3) i (4.4) znajdujemy po scałkowaniu

$$u_{1g} = \frac{\pi^2 \varrho}{4\lambda}\,(T^2 + 2\,f\,T). \tag{4.11}$$

Skrócenie pręta wywołane ściskaniem określa wzór

$$u_{1c} = \frac{PL}{EF} = \frac{P_E L}{E\,F}\,S = \frac{\pi^2 \varrho}{\lambda}\,S\,, \tag{4.12}$$

Sumując (4.11) i (4.12) otrzymuje się, po dwukrotnym zróżniczkowaniu podług τ

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_{1g} + \ddot{u}_{1c} = \frac{\pi^2 \varrho}{2\lambda}\left[\ddot{T}\,T + (\dot{T})^2 + f\ddot{T} + 2\ddot{S}\right]. \tag{4.13}$$

Ostatecznie, po podstawieniu w (4.7), dostajemy następujące równanie różniczkowe dla siły osiowej $S(\tau)$

$$\ddot{S} + k^2 S = \beta k^2 - \frac{1}{2}\left[\ddot{T}\,T + (\dot{T})^2 + f\,\ddot{T}\right], \tag{4.14}$$

gdzie

$$k \equiv \frac{\lambda}{\pi^2} \quad \frac{1}{\sqrt{\mu_*}} \qquad (\mu_* \equiv Q/G_p) \tag{4.15}$$

$G_p = \gamma_c L F$ - ciężar własny pręta.

---

*) Pierwszy spośród wzorów (II.58), podany w pracy [2] na str.100 jest błędny, ponieważ nie zawiera drugiej całki, mimo iż dotyczy pręta wstępnie zakrzywionego.

Równania (4.5.1) oraz (4.14) tworzą podstawowy układ nieliniowych równań różniczkowych problemu.

4.4. Eliminując w równaniu (4.5.1) siłę S za pomocą równania (4.14) można podstawowy układ równań problemu sprowadzić do jednego równania różniczkowo-całkowego.

Wprowadźmy najpierw zamiast funkcji $T(\tau)$ wielkość $Y = T+f$, proporcjonalną do odległości środkowego przekroju pręta od osi x; wówczas

$$\frac{1}{2}\left[\ddot{T}\,T + (\dot{T})^2 + f\ddot{T}\right] = \frac{1}{2}\left[\ddot{Y}\,Y + (\dot{Y})^2\right] = \frac{1}{2}(\dot{Y}\,Y)^{\cdot}.$$

Równanie (4.14) przyjmie teraz postać następującą

$$\ddot{S} + k^2 S + \frac{1}{2}(\dot{Y}Y)^{\cdot} = 0, \qquad (4.16)$$

zaś równanie (4.5.1)

$$\ddot{Y} + (1-\beta)\,Y - YS = f. \qquad (4.17)$$

Przy pomocy równania (4.16) można funkcję S wyrazić przez Y. Zastosujemy w tym celu metodę Lagrange'a.

Przyjmujemy

$$S(\tau) = S_1(\tau)\sin k\tau + S_2(\tau)\cos k\tau,$$

wobec czego

$$\dot{S} = k(S_1 \cos k\tau - S_2 \sin k\tau + \dot{S}_1 \sin k\tau + \dot{S}_2 \cos k\tau).$$

Ponieważ dla określenia S wprowadziliśmy dwie niezależne funkcje S_1 i S_2, przeto możemy nałożyć na nie jeden dowolny warunek wiążący; niechaj

$$\dot{S}_1 \sin k\tau + \dot{S}_2 \cos k\tau = 0, \qquad (4.18)$$

skąd

$$\dot{S} = k(S_1 \cos k\tau - S_2 \sin k\tau), \qquad (4.19)$$

a następnie

$$\ddot{S} = k^2(\dot{S}_1 - S_2) \cos k\tau - k^2(\dot{S}_2 + S_1) \sin k\tau. \qquad (4.20)$$

Jeżeli z równania powyższego wyeliminujemy np. $\dot{S}_2$ przy pomocy związku

$$\dot{S}_2 = - \dot{S}_1 \operatorname{tg} k\tau,$$

wynikającego z (4.18), to otrzymamy

$$\ddot{S} + k^2 S = k^2 \frac{\dot{S}_1}{\cos k\tau}.$$

Wyrażając z kolei $\dot{S}_1$ przez $\dot{S}_2$ znajdujemy także

$$\ddot{S} + k^2 S = - k^2 \frac{\dot{S}_2}{\sin k\tau} .$$

Podstawienie tych związków do równania (4.16) daje kolejno

$$\dot{S}_1 = - \frac{1}{2k^2} (\dot{Y}Y)^{\cdot} \cos k\tau ,$$

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{2k^2} (\dot{Y}Y)^{\cdot} \sin k\tau ,$$

skąd, po scałkowaniu

$$S_1 = C_1 - \frac{1}{2k^2} \int (\dot{Y}Y)^{\cdot} \cos k\tau \, d\tau , \qquad (4.21)$$

$$S_2 = C_2 + \frac{1}{2k^2} \int (\dot{Y}Y)^{\cdot} \sin k\tau \, d\tau . \qquad (4.22)$$

Tak więc funkcja $S(\tau)$ ma postać

$$S = C_1 \sin k\tau + C_2 \cos k\tau - \frac{\sin k\tau}{2k^2}\int(\dot{Y}Y)^{\cdot} \cos k\tau \, d\tau +$$

$$+ \frac{\cos k\tau}{2k^2}\int(\dot{Y}Y)^{\cdot} \sin k\tau \, d\tau. \qquad (4.23)$$

4.5. Dla określenia stałych całkowania C_1 i C_2 dysponujemy dwoma warunkami początkowymi: mianowicie dla $t = 0$ jest $S(0) = -\beta$ oraz

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]_{t=0} \equiv \omega\left[\dot{u}_{1g} + \dot{u}_{1c}\right]_{\tau=0} = W_1,$$

gdzie W_1 jest znaną prędkością początkową przegubu A.

Z pierwszego warunku wynika $C_2 = -\beta$.

Aby wyznaczyć stałą C_1 musimy wykorzystać zależności (4.11) oraz (4.12); różniczkując je obustronnie podług τ znajdujemy

$$\dot{u}_{1g} = \frac{\pi^2 \varrho}{2\lambda}(\dot{T} + f)T,$$

$$\dot{u}_{1c} = \frac{\pi^2 \varrho}{\lambda}\dot{S}.$$

Dla $\tau = 0$, uwzględniając warunek początkowy $T(0) = 0$ otrzymuje się

$$\dot{u}_{1g}(0) = 0, \qquad \dot{u}_{1c}(0) = \frac{\pi^2 \varrho}{\lambda} \dot{S}(0).$$

A zatem drugi warunek początkowy daje

$$W_1 = \frac{\pi^2 \varrho \omega}{\lambda} \dot{S}(0). \tag{4.24}$$

Wartość pochodnej $\dot{S}$ w punkcie $\tau = 0$ obliczamy ze wzoru (4.19)

$$\dot{S}(0) = k S_1(0).$$

Ponieważ z równości (4.21) wynika $S_1(0) = C_1$, przeto

$$C_1 = \frac{\lambda}{k\pi^2} \frac{W_1}{\varrho\omega} = \frac{W_1}{\varrho \omega} \sqrt{\mu_*}. \tag{4.25}$$

Podstawienie wzorów powyższych w (4.17) daje poszukiwane równanie swobodnych drgań poprzecznych pręta obarczonego ciężarem na końcu, z uwzględnieniem skróceń osiowych; wprowadzając oznaczenia skracające

$$2k^2 \psi(\ddot{Y}, \dot{Y}, \tau) = \sin k\tau \int (\dot{Y}Y)^{\cdot} \cos k\tau \, d\tau - \cos k\tau \int (\dot{Y}Y)^{\cdot} \sin k\tau \, d\tau, \tag{4.26}$$

$$\gamma = C_1 = \frac{W_1}{\varrho \omega} \sqrt{\frac{\varrho}{G_p}} \tag{4.27}$$

można równanie to zapisać ostatecznie w następującej postaci

$$\ddot{Y} + (1 - \beta + \beta \cos k\tau - \gamma \sin k\tau) Y + Y \psi(\ddot{Y}, \dot{Y}, \tau) = f. \tag{4.28}$$

4.6. Wnioski. Układ równań różniczkowych problemu można sprowadzić do jednego nieliniowego równania różniczkowo-całkowego, które w przypadku istnienia krzywizny pierwotnej pręta ($f \neq 0$) jest ponadto równaniem niejednorodnym. Jego rozwiązanie nastręcza duże trudności rachunkowe.

Istotną przyczyną komplikacji zagadnienia jest uwzględnienie skróceń osiowych pręta, towarzyszących jego drganiom poprzecznym.

Celowym będzie przeto rozpatrzenie najpierw przypadku prostszego, w którym pominiemy te skrócenia; jest to równoznaczne z założeniem nieściśliwości osi pręta. Rozważania takie zostaną przeprowadzone w rozdziale następnym.

5. WYZNACZENIE AMPLITUDALNEGO UGIĘCIA PRĘTA POSIADAJĄCEGO OŚ NIEŚCIŚLIWĄ

5.1. Rozpatrzmy najpierw wyidealizowany przypadek pręta o osi nieściśliwej. Równanie różniczkowe problemu upraszcza się wówczas w sposób zasadniczy, a jego pierwszą całkę, podobnie jak w rozdz.2 - można uzyskać przez kwadraturę.

Korzystając z tego rozwiązania postaramy się następnie wprowadzić poprawkę, uwzględniającą wpływ skróceń osiowych pręta na wielkość jego amplitudalnego wygięcia. Odnośne obliczenia będą przedmiotem następnego rozdziału.

Odrzućmy zatem we wzorze (4.9) składnik u_{1c} określający przemieszczenie przegubu A spowodowane ściskaniem pręta; wówczas, zamiast równości (4.13) otrzymamy

$$\ddot{u}_1 = \frac{\pi^2 \rho}{2\lambda} (\ddot{T}T + \dot{T}^2 + f\ddot{T}),$$

co - po podstawieniu w (4.7) daje

$$S(\tau) = \beta - \varkappa_* (\ddot{T}T + \dot{T}^2 + f\ddot{T}), \qquad (5.1)$$

gdzie

$$\varkappa_* \equiv \frac{\pi^4}{2\lambda^2}\mu_* = \frac{1}{2k^2}. \qquad (5.2)$$

Podstawiając z kolei (5.1) w równanie (4.5.1) otrzymujemy

$$\ddot{T} + (1-\beta)T + \varkappa_*(T+f)(\ddot{T}T + \dot{T}^2 + f\ddot{T}) = f\beta. \qquad (5.3)$$

Jest to równanie drgań poprzecznych pręta z masą na końcu, jednakże z pominięciem ściśliwości osi pręta. Występująca tu nieliniowość jest typu bezwładnościowego, przy czym w budowie wyrazu nieliniowego nietrudno dopatrzeć się analogii z z odpowiednim wyrazem równania (2.18), opisującego ruch układu o jednym stopniu swobody.

Gdyby pominąć bezwładność masy ciężarka Q, lub gdy impuls wywołujący drgania pochodziłby od sił powierzchniowych, tzn. gdy $\varkappa_* = 0$, to wówczas otrzymalibyśmy

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2(1-\beta)T = f\beta\omega^2.$$

Jest to równanie drgań pręta wstępnie zakrzywionego, ściskanego "statycznie" siłą $Q = \beta P_E$, przy czym częstość kątowa tych drgań wynosi $\omega\sqrt{1-\beta}$.

5.2. Postarajmy się ruch opisany równaniem (5.3) przedstawić na płaszczyźnie fazowej. W tym celu wygodniej będzie posługiwać się wprowadzoną w p.4.4 funkcją $Y = T + f$; ponadto wprowadzimy jeszcze prędkość amplitudy przemieszczenia lub prędkość zmiany ugięcia środkowego przekroju pręta ($\xi = 1/2$)

$$V = \dot{T} = \dot{Y} = \frac{dY}{d\tau}. \qquad (5.4)$$

Równość $\dot{T} = \dot{Y}$ jest oczywista, ponieważ f jest wartością stałą. W dalszym ciągu piszemy

$$\ddot{T} = \dot{V} = \frac{dV}{d\tau} = \frac{dV}{dY}\,\frac{dY}{d\tau} = \dot{Y}\,\frac{dV}{dY} = V\,\frac{dV}{dY}. \qquad (5.5)$$

Wyraz nieliniowy w równaniu (5.3) przekształcamy teraz następująco (por.(2.35))

$$(T+f)\left[\ddot{T}T + \dot{T}^2 + f\ddot{T}\right] = (T+f)\left\{(T+f)\,\frac{d^2}{d\tau^2}(T+f) + \left[\frac{d}{d\tau}(T+f)\right]^2\right\} =$$

$$= Y\left[Y\,\frac{d^2Y}{d\tau^2} + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right] = Y\,\frac{d}{d\tau}\left(Y\,\frac{dY}{d\tau}\right) = Y\,\frac{dY}{d\tau}\,\frac{d}{dY}(YV) = YV\,\frac{d}{dY}(YV).$$

Równanie (5.3), po uwzględnieniu zależności powyższych przyjmie postać

$$V\,\frac{dV}{dY} + (1-\beta)\,Y + \varkappa_* VY\,\frac{d}{dY}(VY) - f = 0,$$

lub po pomnożeniu przez dY

$$V\,dV + (1-\beta)Y\,dY + \varkappa_* VY\,d(VY) - f\,dY = 0. \qquad (5.6)$$

Całkując powyższe otrzymuje się równanie wyrażające zasadę zachowania energii mechanicznej

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{1-\beta}{2}\,Y^2 + \frac{\varkappa_*}{2}V^2Y^2 - f\,Y = C. \qquad (5.7)$$

Tutaj

$$C = \frac{1}{2}V_0^2 + \frac{1-\beta}{2}Y_0^2 + \frac{\varkappa_*}{2}V_0^2\,Y_0^2 - f\,Y_0 \qquad (5.8)$$

oznacza energię początkową układu pręt - ciężar. Ponieważ zaś rozpatrujemy układ zachowawczy, (założenie 1.5.4), przeto stała C jest równa całkowitej energii układu.

W równaniu (5.7) charakterystyczne jest pojawienie się wyrazu zawierającego iloczyn V^2Y^2, który jest odpowiednikiem wyrazu q^2v^2 w równaniu energii (2.36) dla układu o jednym stopniu swobody.

Stałe Y_o i V_o są wartościami funkcji Y i V w chwili początkowej $\tau = 0$. Ponieważ $T(0) = 0$ przeto

$$Y_o = T(0) + f = f, \tag{5,9}$$

co, po podstawieniu w (5.8) daje

$$C = \frac{1 + \varkappa_* f^2}{2} V_o^2 - \frac{1 - \beta_o}{2} f^2. \tag{5.10}$$

5.3. Równanie (5.7) na płaszczyźnie fazowej Y, V przedstawia rodzinę krzywych całkowych, parametrycznie zależnych od czasu. Równanie tych krzywych można przedstawić w postaci wynikającej z (5.7)

$$V(Y) = \pm \sqrt{\frac{2C + 2fY - (1 - \beta) Y^2}{1 + \varkappa_* Y^2}} \tag{5.11.1}$$

lub po uwzględnieniu (5.10)

$$V(Y) = \pm \sqrt{\frac{(1 + \varkappa_* f^2) V_o^2 - (1 + \beta) f^2 + 2fY - (1 - \beta) Y^2}{1 + \varkappa_* Y^2}}. \tag{5.11.2}$$

Punkty przecięcia się krzywych V(Y) z osią Y wyznaczymy łatwo jako miejsca zerowe równania kwadratowego

$$(1-\beta)Y^2 - 2fY + \left[(1+\beta)f^2 - (1+\varkappa_* f^2)V_o^2\right] = 0. \tag{5.12}$$

Jego wyróżnik

$$4(1-\beta)(1+\varkappa_* f^2)V_o^2 + 4\beta^2 f^2$$

jest zawsze dodatni, albowiem $\beta < 1$, a zatem równanie (5.12) posiada zawsze dwa pierwiastki rzeczywiste. W dalszym ciągu wnioskujemy stąd, że trajektorie fazowe są krzywymi zamkniętymi[x], czyli że obrazują one pewien ruch okresowy.

Pierwiastki równania (5.12) określone są wzorem

$$Y_{p,l} = \frac{f}{1-\beta} \pm \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\varkappa_* f^2)V_o^2 + f^2\beta^2}}{1-\beta}. \tag{5.13}$$

Indeksy p i l oznaczają maksymalne ugięcia w prawą i lewą stronę od osi pierwotnej, przy czym wygięciom w kierunku zgodnym z pierwotnym zakrzywieniem pręta odpowiada znak +; będziemy je oznaczać indeksem p.

Przy pomocy wzoru powyższego można wyznaczyć amplitudalne ugięcie środkowego przekroju pręta; oznaczając odnośną wielkość bezwymiarową $A_p = \max T$ piszemy ostatecznie

$$A_p = Y_p - f = f\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\varkappa_* f^2)V_o^2 + f^2\beta^2}}{1-\beta}. \tag{5.14}$$

x) Z uwagi na pominięcie wpływu tłumienia.

5.4. Jeżeli wzór powyższy zapiszemy w postaci

$$A_p = A_{st} + \sqrt{A_{st}^2 + \frac{1 + \varkappa_* f^2}{1 - \beta} V_o^2}, \qquad (5.14.1)$$

to można łatwo wykazać, że wyrażenie

$$\varrho A_{st} = \varrho f \frac{\beta}{1 - \beta} \qquad (5.15)$$

określa amplitudalne ugięcie pręta wstępnie zakrzywionego, ściskanego s t a t y c z n i e siłą $Q = \beta P_E$ (por.4.8).

Napiszmy w tym celu, zgodnie z (4.3) i (4.4)

$$y_o(\xi) = \varrho f \sin \pi\xi, \qquad y_{st}(\xi) = \varrho A_{st} \sin \pi\xi.$$

Podstawienie tych związków w równanie różniczkowe odkształconej osi pręta

$$EJ_z \frac{d^2 y_{st}}{dx^2} = - Q(y_{st} + y_o),$$

lub

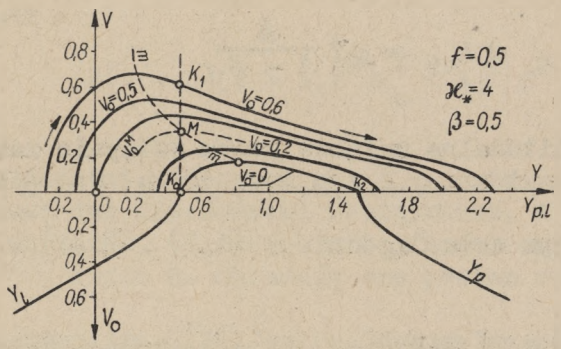
$$\frac{d^2 y_{st}}{d\xi^2} + \pi^2 \beta y_{st} = \pi^2 \beta y_o$$

prowadzi istotnie do wzoru (5.15).

Wobec tego wyraz drugi we wzorze (5.14) określa przyrost ugięcia spowodowany dynamicznym charakterem obciążenia.

5.5. Na rys.15 przedstawione są krzywe całkowe dla różnych prędkości początkowych V_o ($f = 0{,}5$, $\varkappa_* = 4$, $\beta = 0{,}5$),

sporządzone przy pomocy wzoru (5.11.2). Ze względu na symetrię tych krzywych względem osi odciętych przedstawiono tylko połowę wykresu fazowego; dwie krzywe wrysowane pod osią Y obrazują amplitudalne wychylenia Y_p i Y_1 środkowego przekroju pręta w zależności od V_o



Rys.15

Na wykresie wkreślono m.in. linię m-m która jest miejscem geometrycznym punktów odpowiadających największym prędkościom V_m; linia ta przecina prostą $Y = f$ w punkcie M, przez który przechodzi krzywa fazowa odpowiadająca pewnej prędkości $V_o = V_o^M$. Dla $0 < V_o < V_o^M$ wzrostowi wygięcia towarzyszy początkowy wzrost prędkości poprzecznej elementów pręta, aż do osiągnięcia wartości V_m, zaś dla $V_o > V_o^M$ obserwujemy ciągły spadek prędkości przy narastaniu ugięć.

Interesujący jest przebieg trajektorii fazowej dla $V_o = 0$. Przypadek ten ma miejsce np. gdy ciężarek Q zostaje złączony z prętem nagle, jednakże bez prędkości początkowej. Wówczas otrzymuje się graniczną krzywą fazową, która ma swój początek w punkcie K_o i przecina oś Y w punkcie K_2. Odcięta tego punktu wyznaczona ze wzoru (5.13) (dla $V_o = 0$) wynosi $f(1+\beta)/(1-\beta)$, czemu odpowiada wychylenie amplitudalne

$$\varrho A_p^o = 2\varrho f \beta/(1-\beta) = 2\varrho A_{st}, \qquad (5.16)$$

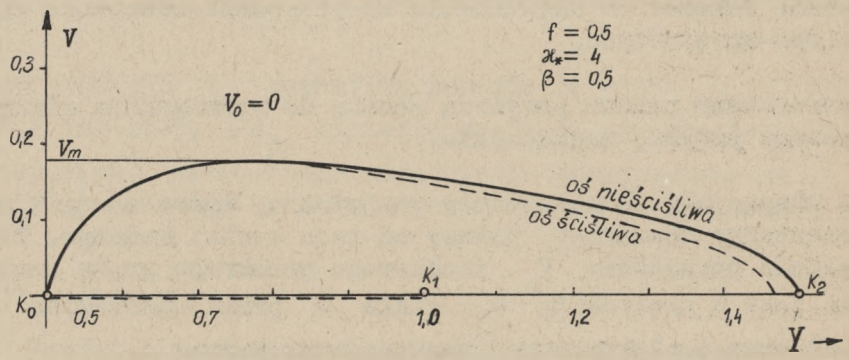
wyznaczone ze wzoru (5.14). Jest to wartość dwukrotnie większa od analogicznego wychylenia przy obciążeniu statycznym (por.5.15).

Widzimy tu pełną analogię ze znanymi wynikami teorii uderzenia poprzecznego w belkę [6]; przeprowadzając przybliżone rozważania energetyczne otrzymuje się tam następujący wzór na dynamiczną strzałkę ugięcia

$$f_{dyn} = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + f_{st} V_o^2/g}, \qquad (5.17)$$

który dla $V_o = 0$ daje również $f_{dyn} = 2f_{st}$. Wzór (5.14.1), jest więc odpowiednikiem wzoru (5.17) dla przypadku uderzenia podłużnego w pręt (nieściśliwy) wstępnie zakrzywiony, którego masa jest mała w porównaniu z masą ciała uderzającego[x].

Tak więc przy statycznym obciążaniu pręta pierwotnie zakrzywionego punkt fazowy przemieści się po osi odciętych z położenia $K_0(f,0)$ do $K_1(f\beta/(1-\beta), 0)$, odpowiadającego nowemu stanowi równowagi trwałej; trajektoria fazowa degeneruje się w tym przypadku do odcinka K_0K_1 (rys.16).



Rys.16

x) To ostatnie ograniczenie związane jest z założeniem (1.5.7).

Natomiast po obciążeniu nagłym, choć bez prędkości początkowej pręt będzie wykonywał drgania poprzeczne opisane graniczną trajektorią fazową, z amplitudą dwukrotnie większą od ugięcia statycznego.

5.6. Aby określić amplitudalne wygięcie pręta przy pomocy wzoru (5.14) należy uprzednio wyznaczyć początkową prędkość V_o przekroju środkowego pręta, w zależności od danej prędkości początkowej W_o przegubu A oraz pozostałych parametrów układu. Jeżeli rozpatrywać będziemy przypadek wzbudzenia drgań za pomocą plastycznego uderzenia ciężarka Q w przegub A, to zamiast W_o należy brać pod uwagę prędkość ciężarka W_1.

Dla rozwiązania tego zagadnienia posłużymy się zasadą Gaussa, zwaną także zasadą najmniejszego wymuszenia [7]. Jeżeli ciało sztywne (lub układ ciał sztywnych) poddamy działaniu określonych sił, to przy pomocy wspomnianej zasady można ustalić, który spośród możliwych ruchów ciała w rzeczywistości nastąpi.

J.J. Mietielicyn [8] sformułował tę zasadę w odniesieniu do przypadku działania sił chwilowych, opierając się na nieco odmiennym niż u Gaussa określeniu wymuszenia. Równocześnie dokonał on uogólnienia na przypadek uderzenia ciał liniowo-sprężystych.

Wykorzystamy przeto powyższą zasadę do rozwiązania sformułowanego powyżej zagadnienia.

Nie wdając się w szczegółowe rozważania, które na ogół mają elementarny charakter, podamy od razu wyniki końcowe. Otóż prędkość początkowa V_o środkowego przekroju pręta powiązana jest z prędkością W_1 ciała Q przed uderzeniem (podłużnym i plastycznym) następującym wzorem

$$V_o = \frac{W_1}{\varrho\omega}\,\frac{\pi^2 f}{2\lambda}\left\{1+\frac{\pi^4 f^2}{2\lambda^2}\left[\mu_* + \frac{8\pi^2-9}{24\pi^2} + \frac{c^2}{L^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{f^2}\right)\right]\right\}^{-1}, \qquad (5.18)$$

gdzie $c = \sqrt{E_d\, g/\gamma_c}$, E - dynamiczny moduł sprężystości podłużnej.

Ze wzoru powyższego wynika m.in., że dla $f = 0$ jest $V_o = 0$. Jest to wniosek oczywisty jeśli uświadomimy sobie, że wzbudzenie drgań giętnych pręta za pomocą uderzenia podłużnego uwarunkowane jest istnieniem pierwotnej krzywizny pręta.

W przypadku dużych wartości stosunku μ_* wzór (5.18) można znacznie uprościć. Wyrazy drugi i trzeci, stojące w nawiasie kwadratowym są bowiem wówczas małe, wobec μ_* - a po ich odrzuceniu otrzymujemy następujący wzór przybliżony

$$V_o \approx \frac{W_1}{\varrho\omega}\,\frac{f\pi^2}{2\lambda}\,\frac{1}{1+\varkappa_* f^2}, \qquad (5.18.1)$$

przy czym $\varkappa_*$ określone jest formułą (5.2).

A zatem stosunek prędkości, występujący we wzorze (2.48) obliczymy następująco

$$\frac{V_o}{W_1} \approx \frac{f\pi^2}{2\lambda(1+\varkappa_* f^2)} \qquad (V_o^* = \varrho\omega V_o). \qquad (5.19)$$

Znając prędkość V_o potrafimy ponadto ze wzoru (5.14) wyznaczyć amplitudę ϱA_p wygięcia pręta (z pominięciem skróceń osiowych), wobec czego zagadnienie sformułowane na wstępie niniejszego rozdziału można uznać za rozwiązane.

5.7. Wnioski

a) Rozważania niniejszego rozdziału, prowadzone w oparciu o założenie nieściśliwości osi pręta czyli z pominięciem jego skróceń osiowych mają jedynie charakter przybliżony. Ich dokładność jest tym większa, im mniejszą wartość posiadają współczynniki $\varkappa_*$ i β, czyli im mniejszy jest stosunek Q/G_p i Q/P_E oraz im większa jest smukłość λ pręta (por. wzory (4.8) i (5.2)).

b) Jeżeli dynamiczne ugięcie pręta jest rezultatem podłużnego uderzenia pewnej masy w ruchomy przegub, to wzór (5.14) jest odpowiednikiem znanego w teorii uderzenia wzoru (5.17) na amplitudalne ugięcie belki po uderzeniu poprzecznym. Jednakże w tym przypadku istotną rolę odgrywa wielkość wstępnego ugięcia pręta; im jest ono większe, tym mniejszy jest wpływ skróceń osiowych, towarzyszących drganiom podłużnym i tym większą dokładność posiada wówczas wzór (5.14).

W przypadku uderzenia podłużnego w pręt o słabym zakrzywieniu wstępnym wspomniany wzór nie daje zadawalającej dokładności.

Tym niemniej zależności podane w p.5.3 będą nam pomocne w rozdziale następnym, przy wyprowadzeniu dokładniejszego wzoru na amplitudalne ugięcie pręta z uwzględnieniem skróceń osiowych.

6. WYZNACZENIE POPRAWKI UWZGLĘDNIAJĄCEJ ŚCISKANIE PRĘTA

6.1. Wzory rozdziału poprzedniego wyprowadzone zostały w oparciu o założenie nieściśliwości osi pręta. Przy małej krzywiźnie początkowej dokładność tych wzorów może być niewystarczająca, albowiem wówczas wpływ skróceń osiowych na ugięcia pręta jest znaczny.

W tym przypadku wyniki rozważań rozdziału poprzedniego można traktować jedynie jako pierwsze przybliżenie, przy pomocy którego jednakże postaramy się rozwiązać układ równań różniczkowych problemu (4.16) i (4.17)

$$\ddot{Y} + (1 - \beta) Y - YS = f, \qquad (6.1)$$

$$\ddot{S} + k^2 S + \frac{1}{2} (\dot{Y}Y)' = 0. \qquad (6.2)$$

Gdyby udało nam się znaleźć zależność $S = S(Y)$, a następnie także $\dot{S} = \dot{S}(Y)$, to wówczas całkowanie drugiego spośród przytoczonych równań nie nastręczałoby już trudności. W związku z tym zauważmy, że z równania (6.1) wynika

$$S = \frac{\ddot{Y} - f}{Y} + 1 - \beta , \tag{6.3}$$

przy czym jest

$$\ddot{Y} = V \frac{dV}{dY} = \frac{d}{dY}\left(\frac{V^2}{2}\right) \tag{6.4}$$

Jednakże te związki nie pozwalają jeszcze na wyznaczenie poszukiwanych zależności, ponieważ nie znamy postaci funkcji $V = V(Y)$.

Tym niemniej trudność tę można rozwiązać w sposób następujący: Postępując zgodnie z metodą kolejnych przybliżeń przyjmiemy rozwiązanie dla pręta nieściśliwego, uzyskane w rozdz.5, jako pierwsze przybliżenie. Korzystając zatem z równości (5.11.1) otrzymamy po przekształceniu

$$\frac{V^2}{2} = \frac{C + fY - \frac{1}{2}(1 - \beta) Y^2}{1 + \varkappa_* Y^2} , \tag{6.5}$$

gdzie C określone jest wzorem (5.10).

Przy pomocy powyższej równości można już łatwo wyrazić S jako funkcję Y; różniczkując w tym celu (6.5) podług Y oraz podstawiając w (6.3) znadujemy

$$S = -\varkappa_* f \frac{\varkappa_* Y^3 + 3Y + D}{(1 + \varkappa_* Y^2)^2} + 1 - \beta , \tag{6.6}$$

gdzie

$$D \equiv \frac{2\varkappa_* C + 1 - \beta}{\varkappa_* f} \tag{6.7}$$

6.2. Z kolei możemy już wyznaczyć zależność $\ddot{S} = \ddot{S}(Y)$. Uprzednio zauważmy, że

$$\dot{S} = \frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dY}\frac{dY}{d\tau} = V\frac{dS}{dY},$$

wobec czego

$$\ddot{S} = \frac{d\dot{S}}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau}\frac{d}{dY}\left(V\frac{dS}{dY}\right) = V\frac{dV}{dY}\frac{dS}{dY} + V^2\frac{d^2S}{dY^2}$$

i ostatecznie

$$\ddot{S} = \frac{d}{dY}\left(\frac{V^2}{2}\right)\frac{dS}{dY} + V^2\frac{d^2S}{dY^2}. \qquad (6.8)$$

Różniczkując dwukrotnie zależność (6.6) podług Y otrzymujemy kolejno

$$\frac{dS}{dY} = \varkappa_*^2 f\,\frac{\varkappa_* Y^4 + 6Y^2 + 4DY - 3/\varkappa_*}{(1 + \varkappa_* Y^2)^3},$$

$$\frac{d^2S}{dY^2} = -2\varkappa_*^2 f\,\frac{\varkappa_*^2 Y^5 + 10\,\varkappa_* Y^3 + 10\,\varkappa_* DY^2 - 15\,Y - 2D}{(1 + \varkappa_* Y^2)^4},$$

co po podstawieniu w (6.8), z uwzględnieniem (6.5) prowadzi ostatecznie do poszukiwanej zależności $\ddot{S} = \ddot{S}(Y)$. Wynik ten można zapisać następująco

$$\ddot{S} = \varkappa_* f\,\frac{\sum_{n=1}^{8} a_n Y^{n-1}}{(1 + \varkappa_* Y^2)^5}, \qquad (6.9)$$

przy czym współczynniki a_n określone są formułami

$$\begin{aligned} a_1 &= 8CD - 3f/\varkappa_*, & a_2 &= 90C + 15(1-\beta)/\varkappa_*, \\ a_3 &= 69f - 8D(6\varkappa_*C+1-\beta), & a_4 &= -140\varkappa_*C-80(1-\beta), \\ a_5 &= 20\varkappa_*D(1-\beta)-45\varkappa_*f, & a_6 &= -6\varkappa_*^2C+19\varkappa_*(1-\beta), \\ a_7 &= -5\varkappa_*^2 f, & a_8 &= 2\varkappa_*^2(1-\beta). \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.3. Równanie (6.2) można także zapisać w postaci

$$\ddot{S} + k^2 S + \frac{1}{2} V \frac{d(YV)}{dY} = 0$$

lub po pomnożeniu przez $Y/k^2 = 2\varkappa_* Y$, (por.(5.2))

$$2\varkappa_*\ddot{S}Y + SY + \varkappa_* VY \frac{d(YV)}{dY} = 0 . \tag{6.11}$$

Wyraz drugi występujący w tym równaniu, na mocy (6.3) i (6.4) przekształcimy następująco

$$SY = V \frac{dV}{dY} + (1 - \beta) Y - f .$$

Ponadto wprowadzimy do rozważań funkcję $\Phi(Y)$, określoną następującą zależnością różniczkową

$$\ddot{S}Y = \frac{d\Phi}{dY}. \tag{6.12}$$

W związku z tym równanie (6.11) można teraz zapisać w postaci

$$2\varkappa_*\frac{d\Phi}{dY} + V\frac{dV}{dY} + (1-\beta)Y - f + \varkappa_* YV \frac{d(YV)}{dY} = 0,$$

lub, po pomnożeniu przez dY

$$V\,dV + (1-\beta)Y\,dY - f\,dY + \varkappa_* YV\,d(YV) + 2\varkappa_* d\bar{\Phi} = 0.$$

Całkując powyższe otrzymujemy równanie energii w drugim przybliżeniu

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{1-\beta}{2}Y^2 - fY + \frac{\varkappa_*}{2}Y^2V^2 + 2\varkappa_*\bar{\Phi}(Y) = C_1,$$

przy czym (por.(5.10))

$$C_1 \equiv \frac{1+\varkappa_* f^2}{2}V_0^2 - \frac{1+\beta}{2}f^2 + 2\varkappa_*\bar{\Phi}_0 = C + 2\varkappa_*\bar{\Phi}; \tag{6.13}$$

tutaj $\bar{\Phi}_0$ oznacza początkową wartość funkcji $\bar{\Phi}(Y)$, czyli dla $Y_0 \equiv Y(0) = f$.

Równanie krzywych całkowych ma teraz postać następującą

$$V(Y) = \pm\sqrt{\frac{2C + 2fY - (1-\beta)Y^2 - 4\varkappa_*(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_0)}{1+\varkappa_* Y^2}} \tag{6.14}$$

Wzór powyższy stanowi drugie przybliżenie w odniesieniu do funkcji (5.11.1), która określa prędkość przekroju środkowego w pierwszym przybliżeniu.

Funkcję $\bar{\Phi}(Y)$ wyznaczymy łatwo za pomocą całkowania wyrażenia (6.12)

$$\bar{\Phi}(Y) = \int \ddot{S}Y\,dY.$$

Jeżeli podstawimy tutaj równość (6.9), to otrzymamy ostatecznie

$$\bar{\Phi}(Y) = \varkappa_*^2 f \int \frac{\sum_{n=1}^{8} a_n Y^n}{(1+\varkappa_* Y^2)^5}\,dY. \tag{6.15}$$

6.4. Całki typu $I_n \equiv \int Y^n(1+\varkappa_* Y^2)^{-5}\,dY$, występujące we wzorze powyższym dają się - zgodnie z twierdzeniem Czebyszewa - wyrazić przez funkcje elementarne.

Pierwsze dwie całki (tj. dla n = 1 i 2) znajdujemy łatwo. Przy obliczaniu następnych wygodnie jest stosować wzór rekurencyjny, wynikający z następującego rozumowania:

$$I_{n+1} = \int Y \frac{Y^n\,dY}{(1+\varkappa_* Y^2)^5} = \int Y\,dI_n = YI_n - \int I_n\,dY.$$

W rezultacie otrzymujemy następujące funkcje pierwotne ($Z \equiv 1+\varkappa_* Y^2$)

$$\varkappa_* I_1 = -1/8\,Z^4,$$

$$\varkappa_*^{3/2} I_2 = \frac{(15Z^3 + 10Z^2 + 8Z - 48)\sqrt{Z-1}}{384\,Z^4} + \frac{5}{128}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{Z-1},$$

$$\varkappa_*^2 I_3 = -\frac{4Z-3}{24\,Z^4},$$

$$\varkappa_*^{5/2} I_4 = \frac{(3Z^3 + 2Z^2 - 24Z + 16)\sqrt{Z-1}}{128\,Z^4} + \frac{3}{128}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{Z-1},$$

$$\varkappa_*^2 I_5 = \frac{9Z^4 - 96Z^2 + 128Z - 48}{384\,Z^4}, \qquad (6.16)$$

$$\varkappa_*^{7/2} I_6 = \frac{(15Z^3 - 118Z^2 + 136Z - 48)\sqrt{Z-1}}{384\,Z^4} + \frac{5}{128}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{Z-1},$$

$$\varkappa_*^4 I_7 = \frac{15Z^4 - 192Z^3 + 288Z^2 - 192Z + 48}{384\,Z^4},$$

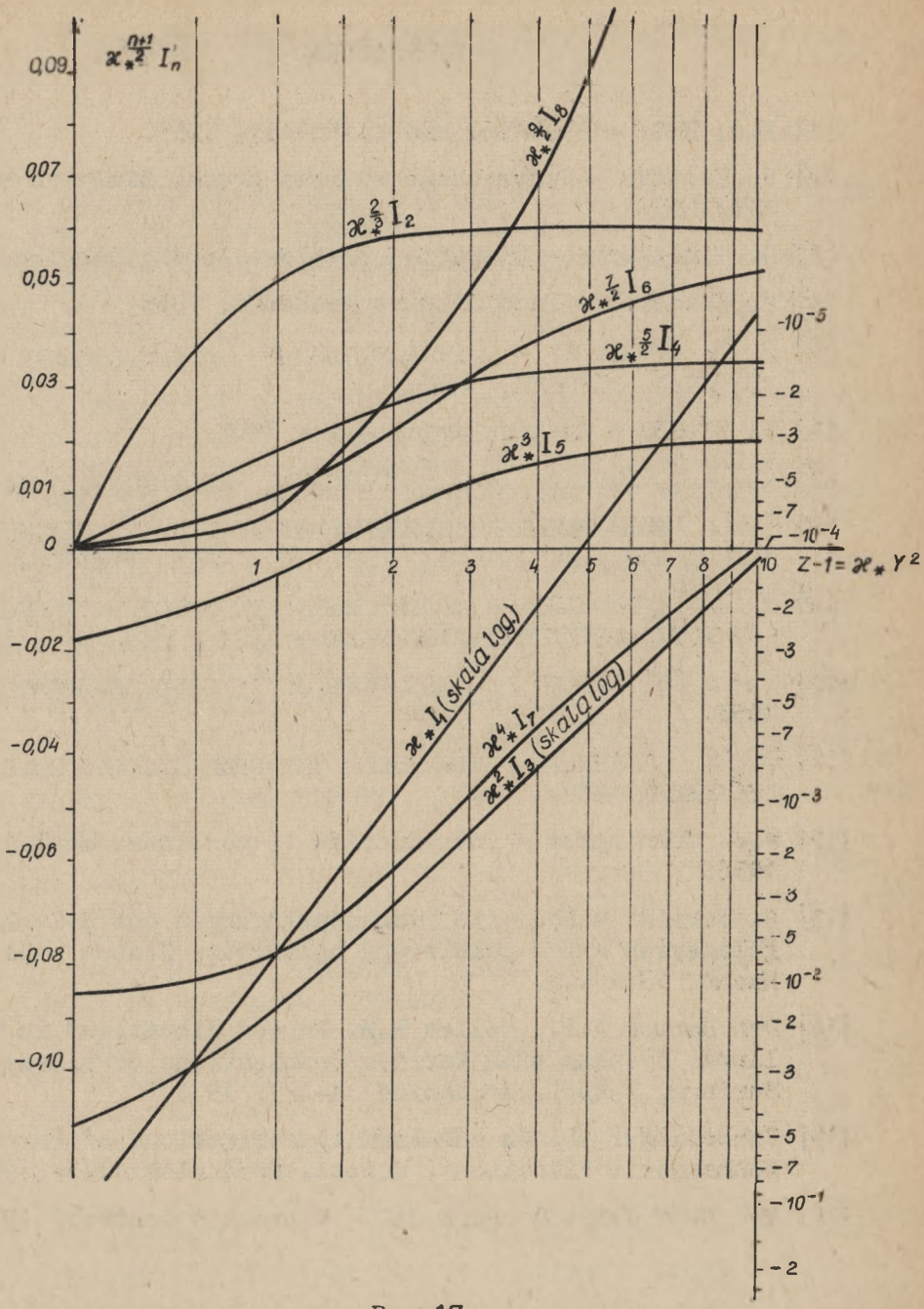
$$\varkappa_*^{9/2} I_8 = \frac{(-279Z^3 + 326Z^2 - 200Z + 48)\sqrt{Z-1}}{384\,Z^4} + \frac{35}{128}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{Z-1}.$$

Dla ułatwienia obliczeń na rys.17 podano wykresy powyższych funkcji dla argumentu $\varkappa_* Y^2 \equiv Z - 1$; przy pomocy tych krzywych można szybko wyznaczyć ze wzoru (6.15) funkcję ϕ, a następnie poprawkę $4\varkappa_*(\phi - \phi_0)$, występującą we wzorze (6.14). W ten przybliżony sposób uwzględniliśmy wpływ skróceń osiowych pręta na amplitudę jego drgań poprzecznych.

Na rys.16 linią przerywaną wkreślono krzywą całkową odpowiadającą drugiemu przybliżeniu; widoczne jest pewne zmniejszenie amplitudalnego ugięcia w porównaniu z krzywą ciągłą, która dotyczy pręta z osią nieściśliwą.

6.5. Wnioski. W sposób analogiczny do przedstawionego powyżej można by również ustalić dalsze przybliżenia. Jednakże, jak wykazują obliczenia, nawet w przypadku bardzo małej krzywizny pierwotnej już drugie przybliżenie zapewnia na ogół zadawalającą dokładność obliczeń.

Tak więc zagadnienie określenia amplitudy drgań swobodnych pręta dwuprzegubowego z masą skupioną na końcu, z uwzględnieniem jego ściśliwości można uznać za rozwiązane z wystarczającą dla praktyki dokładnością.


$x_*^{\frac{n+1}{2}} I_n$
0,09
0,07
0,05
0,03
0,01
0
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
$x_*^{\frac{2}{3}} I_2$
$x_*^{\frac{9}{4}} I_8$
$x_*^{\frac{7}{2}} I_6$
$x_*^{\frac{5}{2}} I_4$
$x_*^3 I_5$
$x_* I_1$ (skala log)
$x_*^4 I_7$
$x_*^2 I_3$ (skala log)
1
2
3
4
5
6
7
8
10
$Z-1 = x_* Y^2$
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}

Rys.17

LITERATURA

[1] N.J. Hoff - Buckling and stability, 1955.

[2] S. Kaliski - Stateczność udarowa pręta, Biuletyn WAT - XIV/1955.

[3] S. Timoshenko - Vibration problems in enginnering, 1955.

[4] H. Kauderer - Nichtlineare Mechanik, 1958.

[5] В.В. Болотин - Динамическая устойчивость упругих систем, 1956.

[6] S. Ziemba - Analiza drgań t.I - 1957.

[7] Т.К. Суслов - Теоретическая механика, 1946.

[8] И.И. Метелицын - Принцип наименшего принуждения в теории удара, Изв. АН. ОТН 11/1957.

[9] Э.И. Григолюк - Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек - Изв. АН. ОТН 3/1955.

[10] С.П. Стрелков - Введение в теорию колебаний, 1958.

[11] Н.В. Бутенин - Элементы теорий нелинейных колебаний, 1962.

[12] W.J. Cunningham - Introduction to nonlinear analysis, 1958.

[13] G. Schmidt - Uber die Biegeschwingungen des gelenking gelagerten axial pulsierend belasteten Stabes - Math. Nachr. 1961 z.2.

[14] Den Hartog J.P., Heiles R.M.-Forced Vibrations in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs, J.Appl. Mechanics 3A-127, 1936.

[15] Schwesinger G., On one-term Approximations of Forced Nonharmonic Vibrations, J.Appl. Mechanics 17/2/,1959.

[16] Mac Duff J.N., Curreri J.R., Vibration Control, 1958.

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

Р е з ю м е

В работе анализируется динамика стержня шарнирно опертого, на подвижном конце которого имеется сосредоточенная масса. Существование этой массы вводит в уравнение движения стержня нелинейную инерционность с характеристическим выражением типа (1.2).

Перемещение подвижного шарнира является результатом прогиба стержня, а также сжатия силой инерционности груза. Учитывая одновременно оба эти факторы получается нелинейное интегродифференциальное уравнение движения стержня.

В связи с трудностями при разрешении этого уравнения рассматривается сначала систему с одной степенью свободы, имеющую нелинейною инерционность. Если подобрать параметры системы так, чтобы обеспечить его статическое и кинематическое подобие со стержнем, то эта система может служить как теоретическая модель стержня с несжимаемой осью, который имеет груз прикрепленный к подвижному концу.

В результате проделанного анализа собственных колебаний этой системы автор получил формулы, позволяющие определить амплитуду и круговою частоту поперечных колебаний. Движение системы представлено на фазовой плоскости.

Затем, применяя метод малого параметра (который надо дополнить принципом равновесия гармонических), разрешена задача вынуждённых колебаний, что сделало возможным составить амплитудно-частотную характеристику.

Во второй части анализируются собственные колебания системы со стержнем с распределонной массой.

Сначала разрешено более лёгкий случай стержня с несжимаемой осью, затем, применяя метод последовательных приближений определено поправку, учитывающую сжимаемость оси.

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH AN INERTIAL NON-LINEARITY

S u m m a r y

In the paper an analysis has been carried out of dynamics of a two-jointed bar with an attached weight on its mobile end. Existence of this weight has introduced into the motion equation the non-linearity of inertial type with a characteristic link of (1.2) type.

Displacement of a joint is a result of a bar deflection and of compression by weight inertia.

Taking into consideration simultaneously both these factors, a non-linear differential - integral equation of the bar motion has been achieved (Chapter 4).

Due to the difficulties caused by the solution of this equation, first (Chapter 2) a system with one degree of freedom of an inertial non-linearity has been discussed. If we select parameters of a system so that its statical and kinematic similarity to a bar has been mede sure - then this system might serve as a theoretical bar model (with an incompressible axis) having a weight attached to its mobile joint.

As a result of carried out analysis of free vibrations in this system (Chapter 2), formulae have been derived for the amplitude and own frequency of lateral vibrations. Free vibrations have been pictured on the phase plane.

Then (Chapter 3) applying a method of a small parameter supplemented by a principle of harmonic equilibrium, the problem of force vibration has been solved; as a result of this fact a characteristics of amplitude - forced frequency was made.

In the second part of the paper free vibrations of the system with a bar regarded as a material continuum have been discussed.

First of all (Chapter 5) a simpler case of a bar having an incompressible axis was solved, and then by the application of successive approximations a correction has been determined which was taking into consideration this compressibility.

POLITECHNIKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii M:

Mechanika z. 1, 1954 r., s. 90, zł 8,45
Mechanika z. 2, 1955 r., s. 92, zł 13,50
Mechanika z. 3, 1956 r., s. 88, zł 13,—
Mechanika z. 4, 1957 r., s. 122, zł 27,—
Mechanika z. 5, 1958 r., s. 169, zł 33,—
Mechanika z. 6, 1960 r., s. 167, zł 43,35
Mechanika z. 7, 1960 r., s. 48, zł 14,—
Mechanika z. 8, 1961 r., s. 77, zł 15,30
Mechanika z. 9, 1961 r., s. 86, zł 20,60
Mechanika z. 10, 1962 r., s. 100, zł 7,45
Mechanika z. 11, 1962 r., s. 152, zł 11,75
Mechanika z. 12, 1962 r., s. 39, zł 2,90
Mechanika z. 13, 1962 r., s. 83, zł 6,25
Mechanika z. 14, 1962 r., s. 50, zł 3,75
Mechanika z. 15, 1962 r., s. 83, zł 7,65
Mechanika z. 16, 1962 r., s. 129, zł 10,95

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3361 163