ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970
Seria: Automatyka z. 16 Nr kol. 289

JERZY BŁAHUT
Ośrodek Maszyn Matematycznych

ALGORYTM OPTYMALNEGO DOBORU PAR ELEMENTÓW Z DANEJ SERII

Streszczenie. Algorytm, przedstawiony w pracy pozwala dobrać z danej serii elementów (takich, jak np. opory, diody półprzewodnikowe itp.) maksymalną ilość par zdatnych do współpracy elementów przy pewnych założeniach, dotyczących kryterium zdatności. W pracy podano twierdzenia, na których algorytm się opiera i definiuje niezbędnych pojęć, oraz opis algorytmu przedstawiony w postaci ciągu instrukcji. Omówiono rolę poszczególnych twierdzeń i intuicyjne podłoże definicji, dowody twierdzeń będą przedmiotem osobnej publikacji w "Zastosowaniach Matematyki".[x)]

Wskazane zostały konkretne możliwości zastosowań technicznych.

1. Wstępne postawienie zagadnienia

Dla współpracy dwu elementów tego samego rodzaju w jednym układzie często istotna jest nie tyle ich zgodność z pewnym ustalonym wzorcem, ile to, by elementy te możliwie mało różniły się między sobą.

Tak jest na przykład przy dobieraniu par grzejników do współpracy w termicznych analizatorach gazu, lub par prostowników do mierników magnetoelektrycznych prądu zmiennego. W pierwszym wypadku potrzebna jest zgodność w otoczeniu punktu pracy charakterystyk oporu grzejników w funkcji temperatury otoczenia i prądu zasilającego (czasem istotna jest także zależność od ciśnienia otoczenia) co sprowadza się do równości w punkcie pracy i w kilku punktach sąsiednich dla obu grzejników funkcji $R = f(T,I)$ (gdzie R - opór grzejnika, T - temperatura otoczenia, I - prąd zasilający) oraz jej pochodnych cząstkowych, lub do małej różnicy między tymi wielkościami dla obu grzejników w każdym z ustalonych punktów pomiarowych. W przypadku prostowników wymagana jest dobra zgodność charakterystyk prądowo-napięciowych w całym zakresie pracy (co znów sprowadza się do równości, lub małej różnicy między wartościami napięć i między opornościami dynamicznymi w kilku punktach zakresu pracy); można także wymagać, by zgodność charakterystyk prądowo-napięciowych utrzymywała się przy zmianach temperatury pracy.

Dla produkcji seryjnej najbardziej celowe wydaje się dokonanie doboru par w sposób, który rozwiązywałby następujące, na razie nie całkiem ściśle postawione zagadnienie:

[x)] "Zastosowanie Matematyki" XI.4. (1970) str. 451-467.

dane jest n elementów, ponumerowanych liczbami $\{1, 2, \ldots, n\}$; elementy te możemy łączyć w pary postaci $\{k, l\}$ (elementy są tu reprezentowane przez swoje numery, pary $\{k, l\}$ są zbiorami dwuelementowymi, nie zaś tzw. parami uporządkowanymi), przy czym

(1) skoro element k występuje w parze z elementem l to nie może występować w parze z żadnym innym elementem oraz

(2) każda z utworzonych par musi czynić zadość ustalonemu uprzednio kryterium zdatności do współpracy;

spośród wszystkich sposobów doboru par, spełniających warunki (1) i (2) należy wybrać taki, przy którym ilość utworzonych par jest największa ze wszystkich możliwych.

Efektywne i ogólne rozwiązanie tak postawionego zagadnienia pozwoliłoby nam w sposób najbardziej ekonomiczny wykorzystać każdą konkretną serię elementów, od razu jednak można się spodziewać, że będzie ono w praktyce pracochłonne; dlatego doboru dokonuje się w rzeczywistości na ogół metodą prób, z góry rezygnując z optymalności doboru. Jednak w przypadkach takich, jak opisane na początku oraz we wszystkich innych, w których wchodzą w grę długotrwałe z konieczności pomiary temperaturowe dla wielu par, poszukiwanie rozwiązania optymalnego w naszkicowanym wyżej sensie i opartego o porównanie pomierzonych parametrów p o j e d y n c z y c h elementów staje się znacznie bardziej pożądane, a jego pracochłonność relatywnie maleje.

Celem tej pracy jest przedstawienie algorytmu znajdowania doboru par, spełniającego warunki (1), (2) oraz dającego maksymalną ilość par dla dowolnej serii elementów i dowolnego n; przy tym kryterium zdatności pary do współpracy zostanie określone w sposób, pozostawiający dużą swobodę wyboru kryterium w praktyce (zob. punkt 3 i poczynione tam uwagi). Przedstawione będą także przesłanki teoretyczne, które doprowadziły do skonstruowania algorytmu oraz sformułowane potrzebne twierdzenia z uwagami o ich praktycznym wykorzystaniu i niekiedy szkicami dowodów. Pełne dowody przedstawionych tu twierdzeń zreferowane zostały przez autora na seminarium prof. J. Łukaszewicza na Uniwersytecie Wrocławskim i będą przedmiotem osobnej publikacji w "Zastosowaniach Matematyki". W tej pracy ograniczymy się w zasadzie do przeglądu wyników, kładąc nacisk na ich znaczenie praktyczne.

2. Pojęcie serii i doboru

Nie stracimy na zrozumiałości, a zyskamy na zwięzłości wypowiedzi, jeśli w dalszym ciągu będziemy mówić nie o elementach, a o liczbach, które są ich numerami. Dla ustalenia tego sposobu mówienia wprowadzimy następującą definicję.

Definicja 1: Zbiór $\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ n najmniejszych liczb całkowitych dodatnich nazywamy serią długości n.

Serię długości n oznaczać będziemy konsekwentnie przez S_n. Oczywiście seria S_{n-1} jest częścią serii S_n i zawiera o jeden element mniej, niż S_n.

Przystąpimy teraz do określenia pojęcia doboru.

Definicja 2: Doborem z serii S_n będziemy nazywać każdą funkcję f taką, że

W1) f jest określona na pewnym zbiorze A(f) liczb z serii S_n i przyjmuje wartości z tego samego zbioru A(f);

W2) skoro $i \neq j$ są liczbami z A(f), to $f(i) \neq f(j)$;

W3) dla każdego i z A(f) $f(i) \neq i$;

W4) dla każdego i z A(f) skoro $f(i) = k$, to $f(k) = i$.

Wskażemy w jaki sposób definicja ta odzwierciedla bardziej konkretne pojęcie doboru z punktu 1. Utwórzmy w tym celu wszystkie pary postaci $\{i, f(i)\}$, gdzie i przebiega zbiór A(f); przez parę będziemy tu rozumieć zbiór dwuelementowy, a nie tzw. parę uporządkowaną. W ten sposób funkcja f istotnie dobiera pewne pary liczb ze zbioru A(f); dzięki warunkowi W1 definicji zbiór A(f) jest zarazem zbiorem wszystkich liczb z S_n, które ma ją parę. Nie musi to być zbiór wszystkich liczb z S_n, bo nie żądaliśmy w punkcie 1, by wszystkie elementy serii były połączone w pary, a nawet nie możemy tego żądać. Warunek W3 definicji gwarantuje, że żaden element nie zostanie skojarzony sam ze sobą - samo pojęcie funkcji nie wyklucza takiej możliwości. Wreszcie warunki W2 i W4 łącznie gwarantują, że każdy element zbioru A(f) występuje w dokładnie jednej parze.

Następująca definicja ułatwi sformułowanie dalszych wypowiedzi.

Definicja 3: Niech przy pewnym n f będzie doborem z serii S_n oraz niech A(f) ma znaczenie takie, jak w definicji 2. Wówczas nazwiemy mocą doboru f i oznaczymy przez P(f) liczbę taką, że 2P(f) jest ilością liczb w zbiorze A(f).

Uwaga: łatwo zauważyć, że P(f) jest po prostu ilością par, skojarzonych przez dobór f.

Z definicji 2 łatwo można wyciągnąć następujący Wniosek: jeżeli $m < n$ i jest doborem z S_m to f jest doborem z S_n.

Definicja doboru nie uwzględnia w żaden sposób pojęcia zdatności pary, które zostanie wprowadzone do rozważań osobno w następnym punkcie.

3. Funkcja zdatności

Zaczniemy od podania formalnej definicji, którą następnie dokładniej omówimy.

Definicja 4: Będziemy nazywać funkcją zdatności na S_n każdą funkcję z (i, j) dwu zmiennych, określoną dla i, j przebiegających S_n, przyjmującą dla każdej pary argumentów wartość 0 lub 1 oraz symetryczną tzn. taką, że

$$s(i, j) = s(j, i)$$

dla dowolnych i, j ze zbioru S_n.

Parę $\{i, j\}$ elementów S_n nazywamy zdatną do współpracy ze względu na funkcję zdatności s wtedy i tylko wtedy gdy $s(i, j) = 1$.

Taka definicja funkcji zdatności i następnie pojęcia zdatności pary nie zawiera żadnych wskazówek co do realnej treści pojęcia zdatności, nakłada natomiast pewne ograniczenia formalne przez założenie o symetrii funkcji s. Omówimy bliżej praktyczne znaczenie tego założenia, w dalszym ciągu zaś zastanowimy się nad sposobami określenia funkcji zdatności w konkretnych przypadkach.

Każdy element z danej pary $\{i, j\}$ umieszczony jest w określonym miejscu montowanego przez nas układu. Można założyć, że miejsce jego numeru (np. i) w symbolu s(i, j) związane jest z miejscem w układzie, w którym element umieszczamy. Założenie o symetrii funkcji s oznacza wówczas, że zamiana miejsc elementów dowolnej pary w układzie nie wpływa na zdatność tej pary do współpracy.

Naszkicujemy teraz przykładowy sposób definiowania funkcji zdatności, który jak się zdaje dobrze odpowiada typowym zagadnieniom praktycznym. Wydaje się oczywiste, że na zdatność elementów pary $\{i, j\}$ do współpracy wpływają parametry tych elementów. Każdemu elementowi i przyporządkować można układ $\bar{x}(i) = \langle x_1(i), x_2(i), \ldots\ldots, x_N(i)\rangle$ N charakteryzujących go parametrów, można traktować ten układ jako wektor z N-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej R^N x).

Celowo będzie oceniać zdatność pary $\{i, j\}$ do współpracy z punktu widzenia całego układu. Załóżmy, że praca układu scharakteryzowana jest przez pewną wielkość F, która jest funkcją 2N zmiennych $x_1, \ldots, x_N, y_1 \ldots\, y_N$ postaci $F(x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_N-y_N)$, przy czym $|F(x_1-y_1, \ldots\ldots, x_N-y_N)| = |F(y_1-x_1, \ldots\ldots, y_N-x_N)|$. Można założyć, że w przypadku idealnej pracy układu $F = 0$ (F jest swego rodzaju "błędem układu"). Kładąc dla ustalonego $t > 0$

$s(i, j) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|F(x_1(i) - x_1(j), \ldots, x_N(i) - x_N(j))| \leq t \qquad (*)$$

otrzymujemy funkcję zdatności o własnościach postulowanych przez definicję 3 i odpowiadającą intuicyjnemu pojęciu zdatności.

x) W związku z własnościami tych przestrzeni zob. np. I.M. Gel'fand "Lekcji po linejnoj al'gebre".

Można w następujący sposób związać tę definicję z pojęciem normy i odległości w przestrzeniach liniowych (zob. np. I. M. Gel'fand, op. cit.). Załóżmy, że F $(u_1, \ldots\ldots, u_N)$ ma względem zmiennych $u_1, \ldots\ldots u_N$ różniczkę zupełną w punkcie $\langle 0, \ldots\ldots, 0\rangle$ postaci $dF = A_1 du_1 + \ldots\ldots + A_N du_N$. Można definiujący funkcję zdatności warunek (*) o postaci nierówności nałożyć nie na F a na wyrażenie

$$|A_1|\ |x_1(i)-x_1(j)| + \ldots + |A_N|\ |x_N(i) - x_N(j)|.$$

Łatwo sprawdzić, że wyrażenie to ma własności zdefiniowanej przez normę odległości w przestrzeni liniowej R^N o N wymiarach możemy więc mówić, że para $\{i,j\}$ jest zdatna do współpracy, gdy elementy jej są "bliskie" w sensie pewnej definicji odległości. Oczywiście wybór t jest już sprawą czysto praktyczną.

4. Dobory dopuszczalne i maksymalne. Ścisłe sformułowanie zagadnienia z punktu 1

W dalszym ciągu długość n serii S_n oraz określoną dla S_n funkcję zdatności z będziemy uważali za ustalone. Będziemy również przyjmować, że określenie funkcji zdatności z dla serii S_n określa tym samym odpowiednie funkcje zdatności dla wszystkich serii S_p gdzie $p \leqslant n$.

<u>Definicja 5:</u> Dobór f z serii S_p $(p \leqslant n)$ nazwiemy doborem dopuszczalnym w S_p ze względu na funkcję zdatności z wtedy i tylko wtedy, gdy $z(i,f(i)) = 1$ dla dowolnego i ze zbioru A(f). Oznaczenie A(f) rozumiemy tu jak w definicji 2.

Dobór f z serii S_p będziemy nazywali maksymalnym doborem z S_p wtedy i tylko wtedy, gdy jest on dopuszczalny ze względu na funkcję zdatności z oraz dla dowolnego doboru g z S_p, dopuszczalnego ze względu na z zachodzi nierówność

$$P(g) \leqslant P(f),$$

gdzie P(f), P(g) oznaczają odpowiednio moce doborów f, g.

Moc maksymalnego doboru z S_p oznaczać będziemy przez P_p.

Celowość określenia zawartych w tej definicji pojęć dla wszystkich $p \leqslant n$ stanie się jasna w punkcie następnym. Użyte w definicjach 1, 2, 3, 4, 5 oznaczenia będziemy w dalszym ciągu stosowali konsekwentnie w tym samym znaczeniu, nie podkreślając tego za każdym razem.

Zauważmy, że dobór dopuszczalny w S_n spełnia warunki (1) i (2), sformułowane w punkcie 1, jeśli pojęcie zdatności sprecyzujemy tak, jak w punkcie 3.

Dzięki temu staje się jasne, że zagadnieniu z punktu 1 odpowiada następujące ściśle sformułowanie.

Zagadnienie: Znaleźć maksymalny dobór z danej serii S_n przy ustalonej funkcji zdatności z (i,j).

W następnych dwu punktach podamy twierdzenia i wzory, niezbędne dla rozwiązania tego zagadnienia.

5. Twierdzenie podstawowe

Pokażemy, jak można skonstruować dobór maksymalny z danej serii S_n w sposób rekurencyjny, tworząc kolejno dobory maksymalne dla serii S_p, gdzie $p = 1, 2, \ldots, n$. Twierdzenie podstawowe, które wskazuje na taką możliwość, poprzedzimy jednym twierdzeniem pomocniczym i jedną definicją.

Twierdzenie 1: Dla $p < n$ moce doborów maksymalnych z serii S_p i S_{p+1} spełniają nierówności

$$P_p \leqslant P_{p+1} \leqslant 1+P_p.$$

Dowód jest łatwy i można go tu przedstawić. Lewa nierówność jest oczywista, gdyż każdy dobór z S_p jest doborem z serii S_{p+1} i jest to prawdą także dla doborów dopuszczalnych. Załóżmy, że niesłuszna jest nierówność prawa i że dla maksymalnego doboru f z serii S_{p+1} jest $P(f) = P_{p+1} > 1 + P_p$. Wynika stąd łatwo sprzeczność. Zbiór A(f) musi zawierać liczbę $p+1$, inaczej bowiem f byłby doborem z S_p i musiałoby być $P(f) \leqslant P_p$. Skoro tak, to usuńmy z A(f) liczby $p+1$ i $f(p+1)$. Przyporządkowując liczbom pozostałego zbioru (zawartego już w S_p) wartości, jakie dla tych liczb przyjmuje funkcja f otrzymujemy dobór dopuszczalny g dla którego A(g) jest częścią S_p. Wobec tego musi być z jednej strony $P(g) \leqslant P_p$, z drugiej zaś $P(g) = P(f) - 1 > P_p$ bo $P(f) > 1+P_p$. W ten sposób powstaje sprzeczność, która dowodzi nierówności prawej.

Twierdzenie to, jak zobaczymy, odgrywa rolę w dowodzie podstawowego twierdzenia 2, można także wyciągnąć z niego pożyteczny wniosek. Oznaczmy przez $[x]$ największą liczbę całkowitą, nie większą od x (tzw. część całkowitą z x). Jest np. $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[3] = 3$. Łatwo zauważyć, że $P_p \leqslant \left[\frac{p}{2}\right]$. Niech $P_p = \left[\frac{p}{2}\right] - k$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{p}{2}\right]$. Stosując (n-p) - krotnie nierówność prawą twierdzenia 1, otrzymujemy

Wniosek: Jeżeli $P_p = \left[\frac{p}{2}\right] - k$, to

$$P_n \leqslant n - k - \frac{p}{2} \text{ gdy p parzyste, oraz}$$

$$P_n \leqslant n - k - \left(\left[\frac{p}{2}\right] + 1\right) \text{ gdy p nieparzyste.}$$

Pozwala to w trakcie konstruowania poszczególnych doborów maksymalnych z S_p, $p = 1, 2, \ldots$ szacować od góry przewidywaną moc doboru maksymalnego z S_n.

Twierdzenie, którym się teraz zajmiemy, pozwala dla danej funkcji zdatności i danego $p < n$ rozstrzygnąć, czy P_{p+1} jest równe P_p, czy $1 + P_p$. Zawiera ono także podstawową ideę metody konstrukcji doboru maksymalnego. Dokładniej omówimy znaczenie twierdzenia po jego wypowiedzeniu i częściowym wykazaniu, aby zaś móc je wysłowić możliwie krótko, wprowadzimy najpierw następującą definicję.

Definicja 6: Niech f będzie doborem dopuszczalnym w S_p ze względu na funkcję z. Wówczas nazwiemy (f, z) – drogą o początku i ze zbioru $A(f)$ i końcu j ze zbioru $A(f)$ ciąg

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \quad \langle i_2, f(i_2)\rangle, \ldots, \quad \langle i_s, f(i_s)\rangle$$

par uporządkowanych taki, że

$$i_1 = i, \quad f(i_s) = j$$

oraz dla $r = 1, 2, \ldots, s-1$

$$z\,(f(i_r), \quad i_{r+1}) = 1.$$

Uwaga: mówimy o parze uporządkowanej $\langle a, b\rangle$, gdy interesują nas miejsca, jakie poszczególne symbole zajmują wewnątrz nawiasów; najłatwiej (jeśli nie chcemy przytaczać szczegółowej definicji pojęcia) podkreślić można ten punkt widzenia, robiąc umowę, że pary $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$ równocześnie i np. $\langle 0, 1\rangle \neq \langle 1, 0\rangle$. Szczegółową definicję znaleźć można np. w podręczniku K. Kuratowskiego "Wstęp do teorii mnogości i topologii". Podamy teraz zapowiedziane twierdzenie.

Twierdzenie 2: Niech f będzie maksymalnym doborem z serii S_p. Wówczas

1) jeżeli istnieje takie $q \leqslant p$, które nie należy do zbioru $A(f)$ i przy tym $z\,(p+1, q) = 1$, to dobór g określony wzorami

$$g(p+1) = q, \quad g(q) = p+1,$$

oraz

$$g(i) = f(i) \text{ dla każdego } i \text{ ze zbioru } A(f)$$

jest maksymalnym doborem z serii S_{p+1};

2) jeżeli istnieją takie i, j ze zbioru $A(f)$ i takie $q \leqslant p$ poza tym zbiorem, że istnieje (f,z) - droga

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \quad \langle i_2, f(i_2)\rangle, \ldots, \langle i_s, f(i_s)\rangle$$

o początku i oraz końcu j, przy czym

$$z(i,p+1) = z(j,q) = 1, \text{ to dobór } g, \text{ określony}$$

wzorami

$$g(p+1) = i, \qquad g(i) = p+1$$

$$g(q) = j, \qquad g(j) = q$$

$$g(i_{r+1}) = f(i_r), \qquad g(f(i_r)) = i_{r+1}$$

dla $r = 1, 2, \ldots, s-1$

oraz $g(k) = f(k)$ dla tych k ze zbioru $A(f)$, dla których g nie określają wzory poprzednie jest maksymalnym doborem z serii S_{p+1};

3) jeżeli założenia punktów 1 ani 2 twierdzenia nie są spełnione, to f jest maksymalnym doborem z serii S_{p+1}.

Wykażemy najpierw prawdziwość części pierwszej i drugiej twierdzenia; będzie to zresztą bardzo łatwe.
W pierwszym wypadku równość $z(p+1,q) = 1$ a w drugim równości $z(p+1,i) = z(q,j) = 1$ oraz fakt, że ciąg par

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \ldots, \langle i_s, f(i_s)\rangle$$

jest (f,z) - drogą gwarantują, że w obu przypadkach dobór g jest dopuszczalny w S_{p+1} ze względu na z. Zarazem w obu częściach $P(g) = P(f) + 1$, co łatwo sprawdzić i wobec twierdzenia 1 i tego, że $P(f) = P_p$ mamy $P(g) = P_{p+1}$, co dowodzi słuszności tych części twierdzenia. Dowód części trzeciej jest kilkustronicowy i opiera się na paru sztucznych nieco pomysłach, dlatego nie będzie tu przytoczony. Tymbardziej należy omówić bliżej znaczenie tej części dla całego twierdzenia. Części pierwsza i druga wskazują metody, za pomocą których można dla danego doboru dopuszczalnego f skonstruować nowy dobór dopuszczalny o mocy większej o 1. Część trzecia mówi między innymi, że są to metody jedyne, o ile dobór f jest maksymalnym doborem z S_p, a także, że skoro metody te nie dają się zastosować, to $P_{p+1} = P_p$. Twierdzenie mówi więc, że o ile dysponujemy którymkolwiek z doborów maksymalnych z S_p i potrafimy dla niego sprawdzić zachodzenie założeń części pierwszej i drugiej twierdzenia, to zawsze możemy skonstruować dobór maksymalny z serii S_{p+1}. Jeśli r jest najmniejszą liczbą taką, że $z(q,r) = 1$ dla pewnego $q < r$, to dobór f określony wzorami

$$f(q) = r,$$

$$f(r) = q$$

jest maksymalnym doborem z serii S_r. O ile więc potrafimy dla doboru maksymalnego z serii S_p sprawdzić, czy spełnia on założenia części pierwszej lub drugiej twierdzenia 2 (dla części pierwszej jest to proste, dla drugiej nieco skomplikowane) to możemy konstruując kolejno dobory maksymalne z serii S_r, S_{r+1}, S_{r+2}, ... otrzymać w końcu dobór maksymalny z serii S_n dla dowolnego n.

6. Twierdzenia o drogach

Pragniemy znaleźć metodę, która pozwoli nam przy danym p sprawdzić dla dowolnie zadanego doboru maksymalnego f z serii S_p, czy spełnia on założenia części drugiej twierdzenia 2 z poprzedniego punktu i - w razie gdy tak jest - wskazać konkretną drogę, której istnienie założenia te postulują. To ostatnie jest niezbędne, by móc następnie skonstruować dobór maksymalny z serii S_{p+1}. Metoda, której szukamy, musi się dać stosować zupełnie mechanicznie, winna więc polegać na kolejnym wykonywaniu pewnych ustalonych, elementarnych operacji. Jest przy tym pożądane z praktycznego punktu widzenia, by ilość operacji prowadzących do rozwiązania nie była zbyt wielka. Metoda, sugerowana przez twierdzenia, które w tym punkcie podamy, rozwiązuje w rzeczywistości zagadnienie nieco ogólniejsze, które sformułujemy poniżej.

<u>Zagadnienie:</u>

Dany jest dobór f, dopuszczalny w S_p ze względu na funkcję zdatności z oraz zbiory P i Q liczb z S_p, takie, że każdy ich element jest elementem zbioru A(f) (zob. definicja 2 pkt 2)

<u>Należy:</u>

1. Sprawdzić, czy istnieje (f,z) - droga, której początek jest elementem P, zaś koniec elementem Q.
2. Znaleźć dla danego s i danego q ze zbioru Q (f,z) - drogę

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \ldots, \langle i_s, f(i_s)\rangle \quad \text{taką, że } i_1 = r,$$

r jest liczbą z P, zaś $f(i_s) = q$ przy założeniu, że taka (f,z) - droga istnieje.

Jeżeli f jest doborem maksymalnym z S_p, P jest zbiorem wszystkich takich i z A(f), że $z(i,p+1) = 1$, zaś Q jest zbiorem wszystkich j z A(f) takich, że $z(j,l) = 1$ dla pewnego l z S_p, to sformułowane wyżej zagadnienie sprowadza się do zagadnienia węższego, które nas interesuje.

Wprowadzimy najpierw definicje, które ułatwią nam sformułowanie potrzebnych twierdzeń (twierdzenia będą mimo to bardzo długie).

Definicja 7: Nazwiemy numeracją par doboru f funkcję nr (i,f(i)), określoną dla wszystkich par uporządkowanych $\langle i,f(i)\rangle$ takich, że i należy do A(f), przyjmującą wartości 1,2, ..., 2 P(f) i taką, że:

1) dla $i < f(i)$, $j < f(j)$ zachodzi

$$nr\ (i,f(i)) < nr\ (j,f(j)) < P(f) \text{ skoro tylko } i < j,$$

oraz

2) dla $i > f(i)$ zachodzi

$$nr\ (i,f(i)) = P(f) + nr\ (f(i),i).$$

Można łatwo wykazać, że dla danego f istnieje dokładnie jedna numeracja.

Definicja 8: Niech Z będzie zbiorem, którego jedynymi elementami są liczby 0 i 1, niech $\langle a,b\rangle$ będzie dowolną parą uporządkowaną liczb z Z, zaś $\langle a_1, a_2,..., a_n\rangle$ dowolnym ciągiem n - wyrazowym o wyrazach z Z. Wówczas, na mocy definicji

$a +' b$ jest większą z liczb a,b

$\sum_{i=1}^{n}{}' a_i$ jest największym wyrazem ciągu $\langle a_1,...,a_n\rangle$.

Łatwo zauważyć, że działania $a +' b$, ab, $1-a$ na elementach zbioru Z są identyczne odpowiednio z działaniami: dodawania, mnożenia i negacji dwuelementowej lagebry Boole'a.[x)]

Definicja 9: Macierz $M = \| m_{ik} \|$ nazwiemy macierzą zerojedynkową wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej wyraz różny od zera jest jedynką.

[x)] zob. np. A.W. Mostowski, "Algebry Boole'a i ich zastosowania"

Niech $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $A^{(1)} = \|a_{ik}^{(1)}\|$,

$A^{(2)} = \|a_{ik}^{(2)}\|, \ldots, A^{(n)} = \|a_{ik}^{(n)}\|$ będą macierzami zerojedynkowymi jednakowego stopnia (pxq). Wówczas na mocy definicji

$$A +' B = \|c_{ik}\| = C$$

$$A \wedge B = \|d_{ik}\| = D$$

$$\sum_{j=1}^{n}{}' A^{(j)} = \|e_{ik}\| = E$$

gdzie macierze C, D, E są stopnia (pxq) każda oraz

$$c_{ik} = a_{ik} +' b_{ik}$$

$$d_{ik} = a_{ik} \cdot b_{ik}$$

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^{n}{}' a_{ik}^{(j)} \quad \text{dla dowolnych } i,k.$$

Definicja 10: Niech $A = \|a_{ik}\|$ będzie macierzą zerojedynkową stopnia (pxq) Wówczas, na mocy definicji

$$A_t = \begin{Vmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{pt} \end{Vmatrix}, \quad A^t = \begin{Vmatrix} a_{t1} \\ a_{t2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{tq} \end{Vmatrix} \quad A_{tr} = \begin{Vmatrix} a_{tr} \\ a_{tr} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{tr} \end{Vmatrix}$$

gdzie A_{tr} jest macierzą kolumnową o p wierszach.
Mówiąc nieściśle A_t i A^t są odpowiednio kolumną o numerze t i wierszem o numerze t zapisanymi w postaci kolumnowej.

Definicje 11: Dla ustalonego doboru f i zbioru P liczb ze zbioru A(f) macierze zerojedynkowe $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(s)}$ U, Z zdefiniujemy przez następujące umowy

1) $C^{(s)} = \| c_{it}^{(s)} \|$ jest macierzą stopnia ((2P(f)) x s) zaś $c_{it}^{(s)} \neq 0$ (czyli $c_{it}^{(s)} = 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (f,s) - droga

$$\langle j_1, f(j_1)\rangle, \ldots, \langle j_t\ f(j_t)\rangle, \ldots, \langle j_s, f(j_s)\rangle$$

taka, że j_1 jest elementem zbioru P oraz

$$nr(j_t, f(j_t)) = i$$

2) $Z = \| z_{ik} \|$ jest macierzą stopnia ((2P(f))x(2P(f))), zaś $z_{ik} \neq 0$ (czyli $z_{ik} = 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy $i = nr\ (j,f(j))$, $k = nr\ (l,f(l))$, gdzie dla par $\langle j,f(j)\rangle$, $\langle l,f(l)\rangle$ zachodzą relacje $j \neq l$, $j \neq f(l)$ oraz $z(f(j),l) = 1$.

3) $U = \| u_{ik} \|$ jest macierzą stopnia ((2P(f))x(2P(f))), zaś $u_{ik} \neq 0$ (czyli $u_{ik} = 1$) wtedy i tylko wtedy gdy dla par $\langle j,f(j)\rangle$, $\langle l,f(l)\rangle$ takich że $nr\ (j,f(j)) = i$, $nr\ (l,f(l)) = k$ zachodzą relacje $l \neq j \neq f(l)$.

Sformułujemy teraz twierdzenia, które rozwiązują pierwszą część zagadnienia, postawionego w tym punkcie.

Twierdzenie 3: Niech f będzie ustalonym doborem, zaś P ustalonym zbiorem pewnych liczb z A(f).
Wówczas dla

$$C^{(1)} = \left\| \begin{matrix} c_{11}^{(1)} \\ c_{21}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{2P(f),1}^{(1)} \end{matrix} \right\|$$

$c_{j1}^{(1)} \neq 0$ (czyli $c_{j1}^{(1)} = 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla pary $\langle i, f(i)\rangle$ takiej, że nr $(i,f(i)) = j$ liczba i jest elementem zbioru P.

To oczywiste twierdzenie sformułowane zostało po to, by wskazać sposób obliczania macierzy $C^{(1)}$; polegać on będzie na przeglądzie par

$$\langle j_1, f(j_1)\rangle, \ \langle j_2, f(j_2)\rangle, \ldots, \langle j_{2P(f)}, f(j_{2P(f)})\rangle$$

o numerach 1,2, ..., 2P(f) i kolejnym sprawdzaniu, czy j_k jest elementem P (zob. punkt 8).

Następnie macierze $C^{(s)}$, $s > 1$ obliczać będziemy zgodnie z wzorami, zawartymi w twierdzeniu 4.

Twierdzenie 4: Niech dla ustalonego doboru f, zbioru P pewnych liczb z A(f), oraz danej macierzy $C^{(s)}$, $s > 1$ będzie

$$B_{s+1}^{(o)} = \sum_{l=1}^{2P(f)}{}' (C_{ls}^{(s)} \wedge Z^l)$$

$$B_{q-1}^{(o)} = \sum_{l=1}^{2P(f)}{}' (B_{lq}^{(o)} \wedge Z_l) \text{ dla } 1 < q \leqslant s + 1$$

$$E_1^{(o)} = B_1^{(o)}$$

$$E_{q+1}^{(o)} = \sum_{l=1}^{2P(f)}{}' (E_{lq}^{(o)} \wedge Z^l) \text{ dla } 1 \leqslant q \leqslant s,$$

$$A^{(o)} = \| a_{it}^{(o)} \| = B^{(o)} \wedge E^{(o)}$$

Niech dalej W będzie zbiorem wszystkich takich niewiększych od P(f) liczb w_1, że przy ustalonym i $a_{w_1 t}^{(o)} +' a_{P(f)+w_1,t}^{(o)} = 1$ dla więcej niż jednego t, zaś dla niepustego $W = \{w_1, \ldots, w_M\}$ oraz dla $j=1,2,\ldots,M$ niech $\{t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{rj}\}$ będzie zbiorem wszystkich liczb t_{jk} niewiększych od 2 P(f) i takich, że przy ustalonym k

$$a_{w_j, t_{jk}}^{(o)} +' a_{P(f)+w_j, t_{jk}}^{(o)} = 1.$$

Ponadto, niech $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_K$ gdzie $K = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_M$ będą wszystkimi ciągami postaci $\langle t_{1k_1}, t_{2k_2}, \ldots, t_{Mk_M} \rangle$. Niech, wreszcie dla ustalonego j i przy oznaczeniu $\tau_j = \langle t_1, \ldots, t_M \rangle$ będzie

$$U_q^{(j)} = (U_{w_1} \wedge U_{w_2} \wedge \ldots \wedge U_{w_M}) +'$$

$$+ \sum_{l=1}^{s+1}{}' (\Delta_{qt_l} \wedge V_{w_l}),$$

gdzie $\Delta = \| \delta_{ik} \|$, $V = \| v_{ik} \|$ są zerojedynkowymi macierzami stopnia $((2P(f)) \times (2P(f)))$ przy czym $\delta_{ik} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = k$ zaś $v_{ik} = 1 - u_{ik}$ oraz niech

$$B_q^{(j)} = A_q^{(o)} \wedge U_q^{(j)} \text{ dla } 1 \leqslant q \leqslant s + 1$$

$$D_{s+1}^{(j)} = B_{s+1}^{(j)}$$

$$D_{q-1}^{(j)} = \sum_{l=1}^{2P(f)}{}' (D_{lq}^{(j)} \wedge Z_l) \text{ dla } 1 < q \leqslant s + 1$$

$$E_1^{(j)} = D_1^{(j)}$$

$$E_{q+1}^{(j)} = \sum_{l=1}^{2P(f)}{}' (E_{lq}^{(j)} \wedge Z^l) \text{ dla } 1 \leqslant q \leqslant s$$

$$A^{(j)} = E^{(j)} \wedge D^{(j)}.$$

Wówczas, jeśli zbiór W jest pusty to

$C^{(s+1)} = A^{(o)}$, jeśli zaś jest niepusty, to

$$C^{(s+1)} = \sum_{j=1}^{K}{}' A^{(j)}.$$

<u>Uwaga:</u> Zbiór nazywamy pustym, gdy nie ma on żadnych elementów (np. zbiór rozwiązań rzeczywistych równania $x^2+1=0$).

Dowód twierdzenia 4 nosi charakter czysto rachunkowy, jest żmudny i nie będzie tu przytoczony. Pozwala ono obliczyć, wraz z twierdzeniem 3, macierz $C^{(s)}$ dla dowolnego s. Można łatwo wykazać, że dla $s > P(f)$ macierz $C^{(s)}$ musi składać się z samych zer. Dla ustalonego $s \leqslant P(f)$ łatwo można sprawdzić, czy $c^{(s)}_{is} = 1$ przy pewnym i, takim, że $i = nr\ (j,f(j))$ gdzie f(j) jest elementem zbioru Q ze sformułowanego poprzednio zagadnienia; jeśli tak jest (i tylko wtedy), to istnieje (f,z) - droga

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \ldots, \langle i_s, f(i_s)\rangle$$

taka, że i_1 jest elementem P, zaś $f(i_s)$ elementem Q. Jeśli tak nie jest dla żadnego $s \leqslant P(f)$, to taka (f,z) - droga przy żadnym s nie istnieje; mamy więc metodę, która rozwiązuje część pierwszą zagadnienia i sprowadza się do kolejnego stosowania wzorów, wypisanych w twierdzeniu 4, da się więc zmechanizować. Pozostaje do rozwiązania druga część zagadnienia, którą rozwiążemy, stosując następne twierdzenie.

Twierdzenie 5: Niech dla danego $C^{(s+1)}$, $s+1 \leqslant P(f)$, będzie $c^{(s+1)}_{k,s+1} = 1$. Wówczas (przy zachowaniu oznaczeń twierdzenia 4):

1) istnieje takie j ze zbioru $\{0,1,\ldots, M\}$, że $a^{(j)}_{k,s+1} = 1$;

2) dla ciągu $k_1, k_2, \ldots, k_{s+1}$, gdzie $k_{s+1} = k$, zaś dla danych k_p, $p \geqslant q > 1$, k_{q-1} jest najmniejszą z liczb l, takich, że $a^{(j)}_{l,q-1} \cdot z_{lk_p} = 1$ (zbiór takich l jest zawsze niepusty) spełniona jest równość

$$\prod_{p=1}^{s} a^{(j)}_{k_p p} \cdot z_{k_p k_{p+1}} = 1; \qquad (*)$$

3) jeżeli ciąg $k_1, k_2, \ldots, k_{s+1}$, gdzie $k_p = nr\ (i_p, f(i_p))$, $p = 1,2,\ldots, s+1$, spełnia równość (*) to ciąg par $\langle i_1, f(i_1)\rangle, \ldots, \langle i_{s+1}, f(i_{s+1})\rangle$ jest (f,z) - drogą.

Uwaga: Definiując ciąg $k_1, \ldots, k_{s+1}$ zgodnie ze wskazówkami twierdzenia 5 i biorąc $\langle i_p, f(i_p)\rangle$ tak, by $nr\ (i_p, f(i_p)) = k_p$, otrzymujemy przy k dobranym tak, by było $k = nr\ (i,f(i))$ dla pewnego f(i) z Q(f,z) - drogę

$$\langle i_1, f(i_1)\rangle, \ldots, \langle i_{s+1}, f(i_{s+1})\rangle$$

taką, że i_1 jest elementem P, zaś $f(i_{s+1})$ elementem Q. Z analogicznych przyczyn, jak dla twierdzenia 4, dowód twierdzenia 5 nie będzie tu podany.

7. Algorytm konstrukcji doboru maksymalnego

Wyniki, podane w poprzednich punktach, pozwalają określić dokładnie postępowanie, które prowadzi do konstrukcji pewnego doboru maksymalnego z dowolnie zadanej serii S_n w której określona jest funkcja zdatności $z(i,j)$. Postępowanie ma charakter algorytmiczny i jego opis przedstawiony w tym punkcie, ma postać ciągu instrukcji; w każdej z tych instrukcji określone są – niekiedy w sposób warunkowy – numery instrukcji, do których należy przejść po wykonaniu instrukcji bieżącej. Analogiczną strukturę mają programy dla maszyn matematycznych, nasz opis jest jednak o wiele mniej sformalizowany. Dla zwięzłości występują w nim zwroty "obliczyć ...", gdzie w miejscu kropek występuje zawsze symbol pewnej funkcji, macierzy, lub tp. Symbol taki w każdym wypadku został wyraźnie określony bądź w którymś z punktów 1–6, bądź w części punktu 7, poprzedzającej właściwy opis algorytmu. Podobnie bądź w którymś z punktów 1–6, bądź w uwagach poprzedzających bezpośrednio opis algorytmu został sprecyzowany sens zwrotu "obliczyć". Jeśli sposób obliczenia zawarty jest w punktach 1–6, instrukcja zawiera w nawiasie odsyłacz do odpowiedniego miejsca w tekście. W ten sposób opis algorytmu ma zawsze dokładnie jedną interpretację, mimo nieco nieformalnego charakteru opisu.

Uwagi wstępne do opisu algorytmu

1) Przez $f_0 = f_1$ rozumiemy zbiór pusty; dla $p > 1$ przez f_p rozumiemy bądź zbiór pusty, bądź pewien dobór (dopuszczalny) z serii S_p. Przez $A(f_p)$ rozumiemy bądź zbiór pusty, jeśli f_p jest zbiorem pustym, bądź zbiór argumentów doboru f_p, gdy f_p jest doborem. Przez zwrot "dane jest f_p" należy rozumieć, że dysponujemy listą wszystkich i ze zbioru S_p, na której przy każdym i ze zbioru $A(f_p)$ podana jest wartość $f_p(i)$. Przez K_p oznaczamy zbiór tych i z S_p, które nie należą do $A(f_p)$; liczba i należy więc do K_p wtedy i tylko wtedy, gdy przy i nie występuje na liście wartość $f_p(i)$; jeżeli f_p (a więc i $A(f_p)$) jest zbiorem pustym, to K_p jest całą serią S_p, co również można odczytać z listy. Liczby ze zbioru K_p (o ile istnieją) są uporządkowane od najmniejszej do największej co czyni jasnym zwroty takie, jak "pierwszy", "następny", "ostatni" w odniesieniu do elementów K_p. Zwroty "kładziemy $f_{p+1} = f_p$", lub "określamy f_{p+1} wzorami ..." należy rozumieć również jako instrukcję sporządzenie odpowiedniej listy dla serii S_{p+1}.

2) Zakładamy, że dysponujemy jednoznacznym zapisem informującym, jaka jest wartość $z(i,j)$ funkcji zdatności z dla dowolnych i,j z serii S_n.

3) Ogólnie o każdej funkcji, którą uważamy za daną zakładamy, że dana jest tabela określająca wartości funkcji dla wszystkich wartości argumentów, o każdej macierzy, którą uważamy za daną zakładamy, że dysponujemy zapisem tej macierzy oraz zakładamy, że obliczenie funkcji (lub macierzy) pociąga za sobą sporządzenie odpowiedniego zapisu.

4) Dla dowolnego doboru f_p funkcję nr $(i, f_p(i))$ można określić następująco, opierając się o definicję z punktu 6.

4.1) W oparciu o listę, omówioną w uwadze 1. przeliczamy elementy zbioru $A(f_p)$. Ich ilość równa jest $2P(f_p)$, gdzie $P(f_p)$ jest mocą doboru f_p.

4.2) Dla najmniejszego i ze zbioru $A(f_p)$ kładziemy nr $(i,f_p(i)) = 1$.

4.3) Jeżeli dane jest nr $(i,f_p(i)) < P(f_p)$ to dla najmniejszego j z $A(f_p)$, dla którego nr $(j,f_p(j))$ nie jest jeszcze określone kładziemy nr $(j,f_p(j)) = 1 + $ nr $(i, f_p(i))$.

Jeżeli dane jest nr $(i,f_p(i)) \geqslant P(f_p)$, to dla najmniejszego j z $A(f_p)$ dla którego nr $(j,f_p(j))$ nie jest jeszcze określone kładziemy

$$\text{nr } (j,f_p(j)) = P(f_p) + \text{nr}(f_p(j), j)$$

Zakładamy, że i jest największą liczbą z $A(f_p)$ dla której określono już nr $(i,f_p(i))$ oraz, że skoro $A(f_p)$ zawiera liczbę k, $k < i$, to nr $(k,f_p(k))$ został już określony uprzednio. Wobec tego powtarzając opisane w 4.3 postępowanie aż do wyczerpania zbioru $A(f_p)$ jesteśmy w stanie obliczyć nr $(i,f_p(i))$ dla wszystkich i z $A(f)$.

Opis algorytmu

Instrukcja 0. Dane jest $p < n$ oraz f_p; jeżeli K_p jest zbiorem pustym, przechodzimy do instrukcji 1; jeżeli K_p nie jest zbiorem pustym, przechodzimy do instrukcji 2.

Instrukcja 1. Kładziemy $f_{p+1} = f_p$ i przechodzimy do instrukcji 27.

Instrukcja 2. Oznaczamy przez q pierwszy element zbioru K_p i przechodzimy do instrukcji 3.

Instrukcja 3. Jeżeli $z(q,p+1) = 1$, przechodzimy do instrukcji 5; jeżeli $z(q,p+1) = 0$ i q nie jest ostatnim elementem zbioru K_p, kładziemy $r = q$ i przechodzimy do instrukcji 4; jeżeli $z(q,p+1) = 0$ i q jest ostatnim elementem zbioru K_p, przechodzimy do instrukcji 6.

Instrukcja 4. Oznaczamy przez q następny po r element zbioru K_p i przechodzimy do instrukcji 3.

Instrukcja 5. Kładziemy $f_{p+1}(i) = f_p(i)$ dla wszystkich i ze zbioru $A(f_p)$ oraz $f_{p+1}(p+1) = q$ i $f_{p+1}(q) = p+1$ i przechodzimy do instrukcji 27.

Instrukcja 6. Oznaczamy przez q najmniejszy element zbioru $A(f_p)$ i przechodzimy do instrukcji 7.

Instrukcja 7. Jeżeli $z(q,p+1) = 1$ to zaliczamy q do zbioru P (czynimy to np. przez dopisanie nowej pozycji na odpowiedniej liście); jeżeli $z(q,p+1) = 0$ to nie zaliczamy q do zbioru P (nie dopisujemy nowej pozycji na liście). Po zbadaniu $z(q,p+1)$ kładziemy $r = q$ i przechodzimy do instrukcji 8, o ile q nie jest największym elementem zbioru $A(f_p)$; jeżeli q jest największym elementem z $A(f_p)$ to przechodzimy do instrukcji 9.

Instrukcja 8. Oznaczamy przez q następny po r element zbioru $A(f_p)$ i przechodzimy do instrukcji 7.

Instrukcja 9. Obliczamy wartości funkcji nr $(i,f(i))$ dla wszystkich i z $A(f_p)$, obliczamy następnie macierze Z,U. Przechodzimy do instrukcji 10. (Macierze Z,U obliczamy w oparciu o definicje z pktu 6).

Instrukcja 10. Obliczamy macierz $C^{(1)}$. Jeżeli elementami $C^{(1)}$ są same zera, przechodzimy do instrukcji 1. Jeżeli istnieją niezerowe elementy $C^{(1)}$ przechodzimy do instrukcji 11, kładąc przedtem $i = 1$.

Instrukcja 11. Jeżeli $c_{ii}^{(1)} = 1$, $i = \text{nr}\,(q,f_p(q))$ gdzie $z(f_n(q), l) = 1$ dla pewnego l z K_p, to oznaczamy przez m najmniejsze z takich l, że $z(f_p(q),l) = 1$ i przechodzimy do instrukcji 12. Jeżeli $c_{ii}^{(1)} = \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 0$ gdzie $i = \text{nr}\,(q,f_p(q))$ oraz $i < 2P(f_p)$, to kładziemy $j=i$ i przechodzimy do instrukcji 13. Jeżeli $c_{ii}^{(1)} = \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 0$ gdzie $i = \text{nr}(q,f(q))$ oraz $i = 2P(f_p)$, to przechodzimy do instrukcji 14.

Instrukcja 12. Kładziemy $f_{p+1}(j) = f_p(j)$ dla $q \neq j \neq f_p(q)$, oraz $f_{p+1}(q) = p + 1$, $f_{p+1}(f_p(q)) = m$. Przechodzimy do instrukcji 27.

Instrukcja 13. Kładziemy $i=j+1$ i przechodzimy do instrukcji 11.

Instrukcja 14. Kładziemy $s = 1$ i przechodzimy do instrukcji 15.

Instrukcja 15. Dane jest $C^{(s)}$. Obliczamy $A^{(o)}$ według wzorów z tw. 3. (p-t 6). Jeżeli wszystkie elementy $A^{(o)}$ są zerami, to przechodzimy do instrukcji 1. Jeżeli istnieją niezerowe elementy macierzy $A^{(o)}$ oraz zbiór W (zdefiniowany w tw. 4) jest pusty, to kładziemy $C = A^{(o)}$ i przechodzimy do instrukcji 22. Jeżeli $A^{(o)}$ nie składa się z samych zer i zbiór W nie jest pusty, to sporządzamy listę ciągów $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (zob. twierdzenie 3), oznaczamy przez H macierz stopnia $(2P(f_p) \times (s+1))$, której wszystkie elementy są zerami, kładziemy $j=1$ i przechodzimy do instrukcji 16.

Instrukcja 16. Obliczamy macierz $A^{(j)}$ (według wzorów z twierdzenia 4), kładziemy $i=1$ i przechodzimy do instrukcji 17.

<u>Instrukcja 17.</u> Jeżeli $a^{(j)}_{i,s+1} = \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 1$[x], gdzie $i = nr\,(q,f_p(q))$, to kładziemy $G = A^{(j)}$ i przechodzimy do instrukcji 22. Jeżeli $a^{(j)}_{i,s+1} \cdot \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 0$[x] oraz $i<2P(f_p)$ to kładziemy $k=i$ i przechodzimy do instrukcji 18. Jeżeli $a^{(j)}_{i,s+1} \cdot \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 0$[x] oraz $i = 2P(f_p)$ to kładziemy $J = A^{(j)} +' H$ i przechodzimy do instrukcji 19.

<u>Instrukcja 18.</u> Kładziemy $i = k + 1$ i przechodzimy do instrukcji 17.

<u>Instrukcja 19.</u> Jeżeli $j < K$, to kładziemy $H = J$, $k = j + 1$ i przechodzimy do instrukcji 20. Jeżeli $j = K$, to kładziemy $t = s + 1$ i $C^{(t)} = J$ oraz przechodzimy do instrukcji 21.

<u>Instrukcja 20.</u> Kładziemy $j = k$ i przechodzimy do instrukcji 16.

<u>Instrukcja 21.</u> Kładziemy $s = t$ i przechodzimy do instrukcji 15.

<u>Instrukcja 22.</u> Dane jest $G = |g_{ik}|$. Kładziemy $k = s+1$ oraz przez i_{s+1} oznaczamy najmniejsze takie i, że $g_{is+1} \cdot \sum'_{l\in K_p} z(f_p(q),l) = 1$, gdzie $i = nr(q,f_p(q))$, zaś przez q_{s+2} najmniejsze takie l, że $z\,(f_p(q_{s+1}),l) = 1$, l jest elementem K_p.[xx]. Przechodzimy do instrukcji 23.

<u>Instrukcja 23.</u> Dla $i_k = nr(q_k,f(q_k))$, jeżeli $k = 1$, przechodzimy do instrukcji 26. Jeżeli $k > 1$, to kładziemy $t = k - 1$ i przechodzimy do instrukcji 24.

<u>Instrukcja 24.</u> Kładziemy $k = t$, przechodzimy do instrukcji 25.

<u>Instrukcja 25.</u> Przez i_k oznaczamy najmniejsze takie i, że $g_{i,k} \cdot g_{ii_{k+1}} = 1$ Przechodzimy do instrukcji 23.

<u>Instrukcja 26.</u> Kładziemy $f_{p+1}(i) = f_p(i)$ dla tych i, dla których $q_k \neq i \neq f_p(q_k)$ przy $k = 1,2,\ldots, s + 1$. Kładziemy $f_{p+1}(p+1) = q_1$, $f_{p+1}(q_1) = p + 1$ oraz $f_{p+1}(f_p(q_k)) = q_{k+1}$, $f_{p+1}(q_{k+1}) = f_p(q_k)$ dla $k = 1,2\ldots,s+1$. Przechodzimy do instrukcji 27.

<u>Instrukcja 27.</u> Jeżeli $p + 1 < n$, to kładziemy $r = p+1$ i przechodzimy do instrukcji 28. Jeżeli $p + 1 = n$, to <u>kończymy postępowanie</u>.

<u>Instrukcja 28.</u> Kładziemy $p = r$ i przechodzimy do instrukcji 0.

Jeżeli wykonamy instrukcję 0 dla $p = 0$ to dalsze postępowanie nakazane przez tę instrukcję i instrukcje następnie wykonane powodują skonstruowanie doboru f_n, który jest doborem maksymalnym na S_n na mocy twierdzeń z punktów 5 i 6.

---

[x] W obu wypadkach $i = nr\,(q,f_p(q))$.

[xx] Zakładamy, że $i_{s+1} = nr(q_{s+1}, f_p(q_{s+1}))$.

8. Uwagi końcowe

Przedstawiony w poprzednim punkcie opis algorytmu może służyć jako podstawa do opracowania programu dla maszyny matematycznej.

Łatwo zauważyć, że jednym z głównych problemów do rozwiązania będzie wówczas wykorzystanie miejsca w pamięci maszyny w sposób możliwie ekonomiczny; będzie to ważne zwłaszcza w przypadku małych maszyn.

Warto w tym miejscu wskazać na dwie możliwości, związane z zapisem macierzy zerojedynkowych takich, jak $C^{(s)}$, Z, U, i operacjami na tych macierzach.

Po pierwsze liczba o n pozycjach dwójkowych może być interpretowana jako jeden wiersz (jedna kolumna) zerojedynkowej macierzy o n kolumnach (n wierszach). W maszynie w której jedna komórka pamięci zawiera np. 34 pozycje dwójkowe można wobec tego jeden wiersz macierzy stukolumnowej zapisać w trzech kolejnych komórkach pamięci. Po drugie, języki wewnętrzne wielu maszyn matematycznych zawierają rozkazy, powodujące np. wykonanie dla dwu danych liczb operacji, dającej w wyniku liczbę, której k-ta pozycja jest sumą logiczną (iloczynem logicznym) k-tych pozycji obu liczb danych. Umiejętne wykorzystanie tego rodzaju rozkazów może być przydatne przy zaprogramowaniu szybkich zmechanizowanych rachunków na macierzach zerojedynkowych, zapisanych w sposób poprzednio zasugerowany.

Żadna z tych uwag nie rozwiązuje całkowicie zasygnalizowanych zagadnień. Wskazują one natomiast, że nie byłoby korzystne bezpośrednie tłumaczenie podanego w punkcie poprzednim opisu algorytmu na jakiś język algorytmiczny taki, jak np. ALGOL i że, z drugiej strony odpowiedni program, sporządzony z uwzględnieniem cech języka wewnętrznego maszyny może umożliwić wykonanie w dostatecznie krótkim czasie obliczeń dla wielu praktycznie interesujących przypadków nawet przy użyciu małej maszyny.

Uwaga: Już w czasie druku pracy autor zauważył, że część 3 twierdzenia 2 może być uzyskana, jako prosty wniosek z twierdzenia Berge'a, Normana i Rabina (zob. np. C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications, New York and London, 1964, str. 175). Dokładniejsze wskazówki na ten temat znajdą się we wspomnianym już artykule autora w "Zastosowaniach Matematyki".

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 15.12.1969 r.

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОТБОРА ПАР ИЗ ДАННОЙ СЕРИИ ЭЛЕМЕНТОВ

Резюме

Предлагаемый в работе алгоритм позволяет из данной серии элементов (таких, как со противления, полупроводниковые диоды и т.п.) подобрать максимальное количество пар элементов, способных к совместной работе (напр. в измерительной системе) при некоторых предложениях относительно критерия способности.

Даются теоремы, на которых алгоритм обоснован, определения основных понятий и описание алгоритма, сформулировано как последовательность инструкций. Обсуждается роль отдельных теорем для построения алгоритма и интуитивная мотивировка употребляемых определений. Доказательства теорем будут опубликованы отдельно.

В работе указаны даже некоторые конкретные возможности применений метода к техническим вопросам.

THE ALGORITHM OF OPTIMAL SELECTION OF PAIRS OF ELEMENTS FROM A GIVEN BATCH

S u m m a r y

The algorithm, presented in the paper, enables us to choose from given batch of elements (such, as the resistors, semiconductor diodes etc.) a maximal number of pairs of elements, which are capable to collaborate one with another (in a measuring system, say) under certain conditions, concerning the critherion of capability. There are given theorems, on which the algorithm is based, the definitions of the necessary notions, and the description of the algorithm, formulated as the sequence of instructions. The role of presented theorems is explained and the intuitive motivation of definitions is given; the proofs of the theorems will be published. Some possible technical applications are sketched in the paper too.