

ZBIGNIEW BORTLJCZEK

Katedra Technologii Urządzeń Automatyki

OPIS MATEMATYCZNY DWUFAZOWEJ MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ  
Z WIRNIKIEM KLATKOWYM LUB PUSZKOWYM

Streszczenie. W pracy wyprowadzono dwa układy równań opisujących - każdy oddzielnie - stan równowagi dynamicznej dwufazowej maszyny asynchronicznej z wirnikiem klatkowym lub puszkowym. Równania mogą stanowić podstawę dla bardziej szczegółowej analizy właściwości statycznych i dynamicznych podstawowych typów maszyny, wykorzystywanych w układach automatyki.

1. Założenia wstępne

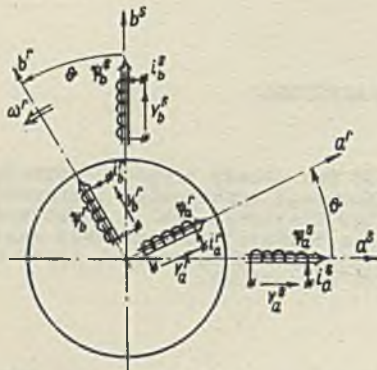
Rzeczywista maszyna elektryczna prądu zmiennego, traktowana jak układ dynamiczny o niejednorodnej bo elektromechanicznej strukturze fizycznej, stanowi obiekt złożony, którego dokładny opis matematyczny bądź w ogóle nie jest możliwy, bądź - z uwagi na trudności uzyskania użytecznego rozwiązania - nie ma praktycznego znaczenia. Powstaje zatem konieczność pewnej idealizacji zjawisk występujących w maszynie rzeczywistej, polegającej na pominięciu tych czynników komplikujących ogólny obraz, które można uznać za drugorzędne. W literaturze znane jest w związku z tym pojęcie maszyny elektrycznej idealizowanej, która - spełniając szereg warunków - posiada właściwości układu złożonego z liniowych obwodów elektrycznych o parametrach skupionych, przy czym obwody te zmieniają wzajemne położenie (por. np. [1], [3], [10]).

W pracy niniejszej równania opisujące stan równowagi dynamicznej dwufazowej maszyny asynchronicznej z wirnikiem klatkowym lub puszkowym (dalej - DAM) wyprowadzone zostaną w oparciu o model dwufazowej maszyny asynchronicznej idealizowanej (DAMI), równoważnej DAM. Właściwości DAMI - której schemat ideowy wraz z oznaczeniami zmiennych wejściowych i wyjściowych<sup>\*)</sup> przedstawia rys. 1 - określają następujące założenia:

1. Obwód magnetyczny DAMI tworzą dwa współosiowe cylindry wykonane z materiału ferromagnetycznego izotropowego i rozdzielone równomierną szczeliną tak, że jeden z cylindrów (wirnik) może wirować względem drugiego, który jest nieruchomy (stojan).

<sup>\*)</sup> por. DODATEK do niniejszej pracy, zawierający wykaz ważniejszych oznaczeń.

2. Zjawiska nasycenia, histerezy i prądów wirowych w obwodzie magnetycznym DAMI nie występują.



Rys. 1

3. Na stojanie DAMI znajdują się dwa uzwojenia o osiach przesuniętych względem siebie w przestrzeni o kąt elektryczny równy  $90^\circ$ . Liczby zwojów uzwojeń stojana mogą być różne, przekładnia zwojowa powinna jednak spełniać warunek:

$$x^2 = \left( \frac{x_b^s + k_b^s}{x_a^s + k_a^s} \right)^2 = \frac{R_b^s}{R_a^s} = \frac{L_b^s}{L_a^s} = \frac{L_{bg}^s}{L_{ag}^s} = \frac{L_{bs}^s}{L_{as}^s} = \left( \frac{L_{br}^{sr}}{L_{ar}^{sr}} \right)^2 \quad (2.1)$$

4. Każde z uzwojeń stojana może być zasilane napięciem bądź stałym, bądź sinusoidalnie zmiennym ze źródła o impedancji wewnętrznej równej zero.
5. Wirnik DAMI posiada dwa uzwojenia zastępcze o parametrach jednakowych i niezależnych od prędkości kątowej; osie uzwojeń przesunięte są względem siebie w przestrzeni o kąt elektryczny równy  $90^\circ$ .
6. Indukcja magnetyczna w szczelinie zmienia się wzdłuż obwodu maszyny sinusoidalnie.
7. Efekty wynikające ze skończonej wartości oporności magnetycznej materiału ferromagnetycznego oraz z istnienia żłobków można pominąć. Podobnie można pominąć zjawiska związane z istnieniem pojemności międzyzwojowych i międzyuzwojeniowych.
8. Część mechaniczną DAMI określa moment bezwładności wirnika oraz oporność mechaniczna. Zjawisko skręcania wału maszyny można pominąć. Podobnie można pominąć mechaniczne efekty nieliniowe (luzy, tarcie suche).

Twierdzenie o równoważności DAMI i DAM jest prawdziwe pod warunkiem, że DAM spełnia wszystkie przytoczone założenia, co jest możliwe również w przypadku założenia 5, jeżeli wziąć pod uwagę, że wirnik klatkowy lub puzzkowy można zastąpić uzwojeniem wielofazowym symetrycznym [2], któremu z kolei odpowiada uzwojenie dwufazowe symetryczne [4], [10]. W dalszym ciągu określenie "DAM" będzie więc rozumiane jako "DAM idealizowana" w omówionym sensie.

## 2. Wybór metody analizy

Teoria układów elektromechanicznych - w szczególności teoria elektromechanicznego przetwarzania energii - rozwija się współcześnie w dwóch zasadniczych ujęciach:

- w oparciu o podstawowe prawa fizyki, takie jak prawo zachowania energii, zasada d'Alemberta, prawa Kirchhoffa itd. (por. np. [1], [5], [8]),
- w oparciu o zasadę wariacyjną Hamiltona i wywodząca się z niej równania Eulera - Lagrange'a (por. np. [6], [7], [10]).

W pierwszym przypadku elektromechaniczny przetwornik energii typu DAM traktowany jest jak układ liniowych obwodów elektrycznych o parametrach skupionych, znajdujących się we względnym ruchu. Część elektryczną przetwornika opisuje się wtedy przy pomocy równań napięciowych wynikających z II prawa Kirchhoffa z uwzględnieniem prawa Faradaya, część mechaniczną - przy pomocy równania ruchu wynikającego bezpośrednio z zasady d'Alemberta, przy czym siły mechaniczne pochodzenia elektrycznego oblicza się na ogół w oparciu o prawo zachowania energii i zasadę pracy wirtualnej.

W ujęciu drugim - wykorzystującym zasadę Hamiltona - przetwornik typu DAM bada się jak układ dynamiczny o skończonej liczbie stopni swobody z więzami typu holonomicznego, co pozwala zapisać funkcję Lagrange'a maszyny w zależności od czterech prądów, położenia kątownego i prędkości kątowej wirnika i - dla uzyskania równań opisujących stan równowagi dynamicznej - bezpośrednio wykorzystać równania Eulera - Lagrange'a.

Z punktu widzenia stopnia sformalizowania oczywista jest wyższość metody analizy opartej o zasadę Hamiltona. Z drugiej jednak strony przedmiot niniejszej pracy - ograniczony z założenia do analizy pojedynczej, wyodrębnionej z układu maszyny - sprawia, że wyższość ta nie ujawnia się w sposób na tyle oczywisty, by można było bez wahania zrezygnować z metody tradycyjnej<sup>\*)</sup>. Z tego względu wszystkie zależności wyjściowe będą w dalszym ciągu wyprowadzone z wymienionych już podstawowych praw fizyki.

## 3. Ogólna postać równań wyjściowych

### 3.1. Równania różniczkowe DAM

A. Zgodnie z tym, co powiedziano wyżej stan równowagi dynamicznej w obwodach elektrycznych DAM opisują równania napięciowe, wynikające z II prawa Kirchhoffa z uwzględnieniem prawa Faradaya.

<sup>\*)</sup> Na ten temat por. uwagi na str. 197 pracy D.C. White'a i H.H. Woodsona [10].

Wykorzystując oznaczenia z rys. 1 równaniom tym można nadać następującą postać macierzową:

$$\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \cdot \mathbf{i}_{ab} + d\boldsymbol{\psi}_{ab}, \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{v}_{ab} = \begin{bmatrix} v_a^s \\ v_b^s \\ v_a^r \\ v_b^r \end{bmatrix} \mathbf{i}_{ab} = \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_b^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{ab} = \begin{bmatrix} \psi_a^s \\ \psi_b^s \\ \psi_a^r \\ \psi_b^r \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} R_a^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_b^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^r \end{bmatrix}$$

Zależność liniowa  $\boldsymbol{\psi}$  od prądu  $\mathbf{i}$  wyrazić można następująco:

$$\boldsymbol{\psi}_{ab} = \mathbf{L}_{ab} \cdot \mathbf{i}_{ab}, \quad (4)$$

gdzie:

$$\mathbf{L}_{ab} = \begin{bmatrix} L_a^s & 0 & L_a^{sr} \cdot \cos\theta & -L_a^{sr} \cdot \sin\theta \\ 0 & L_b^s & L_b^{sr} \cdot \sin\theta & L_b^{sr} \cdot \cos\theta \\ L_a^{sr} \cos\theta & L_b^{sr} \sin\theta & L^r & 0 \\ -L_a^{sr} \sin\theta & L_b^{sr} \cos\theta & 0 & L^r \end{bmatrix} \quad (5)$$

- macierz indukcyjności, w której - zgodnie z założeniami 1, 3, 5 i 7 -

$$\begin{aligned} L_a^s &= (r_a^s)^2 \cdot (\Lambda_g + \Lambda_s^s) \\ L_b^s &= (z_b^s)^2 \cdot (\Lambda_g + \Lambda_s^s) \\ L^r &= (z^r)^2 \cdot (\Lambda_g + \Lambda_s^r) \\ L_a^{sr} &= z_a^s \cdot z^r \cdot \Lambda_g \\ L_b^{sr} &= z_b^s \cdot z^r \cdot \Lambda_g \end{aligned} \quad (6)$$

przy czym:

$\Lambda_g$  - przewodność magnetyczna dla strumienia głównego (w szczelinie),  
 $\Lambda_s$  - przewodność magnetyczna dla strumienia rozproszenia.

Zależność poszczególnych elementów macierzy  $L_{ab}$  od położenia wirnika (kąt  $\theta$ ) wynika bezpośrednio z założeń 1, 5, 6;  $L^{sr}$  oznacza wartość indukcyjności wzajemnej pary uzwojeń, z których jedno znajduje się na stojanie, drugie - na wirniku, w przypadku, gdy osie uzwojeń pokrywają się. Należy ponadto zauważyć, że macierz kolumnowa  $\mathbf{V}_{ab}$  zawiera dwa elementy zerowe, co wynika z faktu, że uzwojenia zastępcze wirnika - z uwagi na konstrukcję wirnika klatkowego lub puszkiowego - są zwarte. W związku z tym

$$\mathbf{v}_a^r = \mathbf{v}_b^r = 0. \quad (7)$$

Warunek (7) zostanie uwzględniony w końcowej części wyprowadzenia.

B. Równanie macierzowe (2) posiada dwie zmienne:  $\mathbf{i}_{ab}$  oraz  $\Psi_{ab}$ , związane zależnościami (4), z których jedną należy wybrać jako zmienną niezależną. W związku z tym rozpatrywane będą dwa przypadki.

a. Zmienną niezależną jest  $\mathbf{i}_{ab}$ . Wynik podstawienia wyrażenia (4) do równania (2) będzie następujący:

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \cdot \mathbf{i}_{ab} + D(\mathbf{L}_{ab} \cdot \mathbf{i}_{ab}) = (\mathbf{R}_{ab} + D\mathbf{L}_{ab}) \cdot \mathbf{i}_{ab} = \mathbf{X}_{ab} \cdot \mathbf{i}_{ab} \quad (8)$$

przy czym:

$$\mathbf{E}_{ab} = \mathbf{R}_{ab} + \mathbf{DL}_{ab} = \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} R_a^s + DL_a^s & 0 & DL_a^{sx} \cdot \cos\theta & -DL_a^{sx} \cdot \sin\theta \\ 0 & R_a^s + DL_a^s & DL_b^{sx} \cdot \sin\theta & DL_b^{sx} \cdot \cos\theta \\ DL_a^{sx} \cdot \cos\theta & DL_b^{sx} \cdot \sin\theta & R^x + DL^x & 0 \\ -DL_a^{sx} \cdot \sin\theta & DL_b^{sx} \cdot \cos\theta & 0 & R^x + DL^x \end{bmatrix} \quad (10)$$

b. Zmienną niezależną jest  $\psi_{ab}$ . Wyrażenie (4) należy więc przekształcić do postaci:

$$\mathbf{i}_{ab} = (\mathbf{L}_{ab})^{-1} \cdot \psi_{ab} \quad (11)$$

a następnie podstawić (11) do (2). Wynik będzie następujący:

$$\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{L}_{ab})^{-1} \cdot \psi_{ab} + \mathbf{D} \psi_{ab} = [\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{L}_{ab})^{-1} + \mathbf{D}] \cdot \psi_{ab} = \mathbf{A}_{ab} \cdot \psi_{ab}, \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

przy czym:

$$\mathbf{A}_{ab} = \mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{L}_{ab})^{-1} + \mathbf{D} = \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} (1/\sigma_a \tau_a^s) + D & 0 & -(k_a^x / \sigma_a \tau_a^s) \cos\theta & (k_a^x / \sigma_a \tau_a^s) \sin\theta \\ 0 & (1/\sigma_b \tau_b^s) + D & -(k_b^x / \sigma_b \tau_b^s) \sin\theta & -(k_b^x / \sigma_b \tau_b^s) \cos\theta \\ -(k_a^s / \sigma_a \tau_a^x) \cos\theta & -(k_b^s / \sigma_b \tau_b^x) \sin\theta & (1/\sigma_a \tau_a^x) + D & 0 \\ (k_a^s / \sigma_a \tau_a^x) \sin\theta & -(k_b^s / \sigma_b \tau_b^x) \cos\theta & 0 & (1/\sigma_b \tau_b^x) + D \end{bmatrix} \quad (14)$$

Do równania (14) wprowadzono - w wyniku pewnych przekształceń - następujące współczynniki:

$$k_a^s = \frac{L_a^{sr}}{L_a^s} \quad k_a^r = \frac{L_a^{sr}}{L_a^r} \quad (15)$$

$$k_b^s = \frac{L_b^{sr}}{L_b^s} \quad k_b^r = \frac{L_b^{sr}}{L_b^r}$$

$$\sigma_a = 1 - k_a^s \cdot k_a^r \quad (16)$$

$$\sigma_b = 1 - k_b^s \cdot k_b^r$$

oraz

$$\tau_a^s = \frac{L_a^s}{R_a^s} \quad \tau_b^s = \frac{L_b^s}{R_b^s} \quad \tau^r = \frac{L^r}{R^r} \quad (17)$$

Oznaczając:

$$k^s = \frac{\Lambda_g}{\Lambda_g + \Lambda_s} \quad k^r = \frac{\Lambda_g}{\Lambda_g + \Lambda_s^r} \quad (18)$$

oraz uwzględniając (6), wyrażenia (15) można przekształcić do postaci następującej:

$$\left. \begin{aligned} k_a^s &= \frac{N_H}{N_a^s} \cdot k^s & k_a^r &= \frac{N_a^s}{N_H} \cdot k^r \\ k_b^s &= \frac{N_b^s}{N_c^s} \cdot k^s & k_b^r &= \frac{N_b^s}{N_H} \cdot k^r \end{aligned} \right\} (19)$$

skąd:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_a^s}{k_b^s} &= \frac{N_a^s}{N_b^s} = \chi \\ \frac{k_a^r}{k_b^r} &= \frac{N_b^s}{N_a^s} = \frac{1}{\chi} \end{aligned} \right\} (20)$$

Na podstawie (20) będzie więc:

$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma. \quad (21)$$

Z kolei na podstawie (1):

$$\tau_a^s = \tau_b^s = \tau^s. \quad (22)$$

W rezultacie macierz  $A_{ab}$  przyjmuje postać następującą:

$$A_{ab} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^s) + D & 0 & -(k_a^r/\sigma\tau^s)\cos\theta & (k_a^r/\sigma\tau^s)\sin\theta \\ 0 & (1/\sigma\tau^s) + D & -(k_b^r/\sigma\tau^s)\sin\theta & -(k_b^r/\sigma\tau^s)\cos\theta \\ -(k_a^s/\sigma\tau^r)\cos\theta & -(k_b^s/\sigma\tau^r)\sin\theta & (1/\sigma\tau^s) + D & 0 \\ (k_a^s/\sigma\tau^r)\sin\theta & -(k_b^s/\sigma\tau^r)\cos\theta & 0 & (1/\sigma\tau^r) + D \end{bmatrix} \quad (23)$$

C. Zgodnie z zasadą d'Alemberta i na podstawie założenia 8 stan równowagi dynamicznej części mechanicznej DAM opisuje następujące równanie momentów:

$$M = J \cdot D\omega^r + B \cdot \omega^r - M_e, \quad (24)$$

gdzie:

- M - moment obrotowy doprowadzony z zewnątrz,
- J - moment bezwładności wirnika,
- B - oporność mechaniczna

oraz:

- $M_e$  - moment obrotowy pochodzenia elektromagnetycznego (moment elektromagnetyczny), który dla  $\omega^r > 0$
- $M_e < 0$  w przypadku pracy prądnicowej DAM,
- $M_e > 0$  w przypadku pracy silnikowej DAM.

Moment elektromagnetyczny  $M_e$  obliczyć można - zgodnie z przyjętym trybem postępowania - w oparciu o prawo zachowania energii i zasadę pracy wirtualnej [7], [10], przy czym zapis końcowy wyniku zależy od wyboru zmiennych niezależnych. Podobnie jak w B. należy tu więc rozważyć dwa przypadki.



a. Zmiennymi niezależnymi są  $\theta$ ,  $i_{ab}$ . Moment elektromagnetyczny

$$M_e = + \frac{\partial W'_m(1, \theta)}{\partial \theta}, \quad (25)$$

gdzie:

$$W'_m(1, \theta) = \int_{C, \dots, 0}^{i_a^s, i_b^s, i_a^r, i_b^r} \sum_{k=1}^4 \psi_k \cdot di_k. \quad (26)$$

Ponieważ jednak - zgodnie z założeniem 2 - zależności  $\psi_k = f(i_k)$  są liniowe, kcenergia magnetyczna  $W'_m$  równa się energii magnetycznej  $W_m$ . Zachodzi więc:

$$W'_m = W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \psi_k \cdot i_k = \frac{1}{2} (\psi_{ab})_t \cdot i_{ab} \quad (27)$$

skąd, po uwzględnieniu (4)

$$W'_m(1, \theta) = \frac{1}{2} \cdot (i_{ab})_t \cdot L_{ab} \cdot i_{ab} \quad (28)$$

oraz:

$$M_e = + \frac{1}{2} \cdot (i_{ab})_t \cdot \frac{\partial L_{ab}}{\partial \theta} \cdot i_{ab}. \quad (29)$$

Wynik końcowy - po wykonaniu pewnych przekształceń - przyjmuje postać następującą:

$$M_e = n \cdot \left[ (L_b^{sr} \cdot i_a^r \cdot i_b^s - L_b^{sr} \cdot i_b^r \cdot i_a^s) \cdot \cos \theta - (L_a^{sr} \cdot i_a^r \cdot i_a^s + L_b^{sr} \cdot i_b^r \cdot i_b^s) \sin \theta \right] \quad (30)$$

b. Zmiennymi niezależnymi są  $\theta$ ,  $\psi_{ab}$ . Moment elektromagnetyczny

$$M_e = - \frac{\partial W_m(\psi, \theta)}{\partial \theta}, \quad (31)$$

gdzie:

$$W_m(\psi, \theta) = \int_0^{\psi_a^s, \psi_b^s, \psi_a^r, \psi_b^r} \sum_{k=1}^4 1_k \cdot d\psi_k. \quad (32)$$

Uwzględniając w równaniu (27) zależność (11), funkcję (32) można teraz wyrazić w postaci:

$$W_m(\psi, \theta) = \frac{1}{2} \cdot (\psi_{ab})_t \cdot (\mathcal{L}_{ab})^{-1} \cdot \psi_{ab} \quad (33)$$

skąd:

$$M_e = -\frac{1}{2} \cdot (\psi_{ab})_t \cdot \frac{\partial (\mathcal{L}_{ab})^{-1}}{\partial \theta} \cdot \psi_{ab}. \quad (34)$$

W konsekwencji wynik końcowy przyjmuje postać następującą:

$$M_e = \frac{R}{\Omega L^r} \cdot \left[ (k_b^s \cdot \psi_a^r \cdot \psi_b^s - k_a^s \cdot \psi_b^r \cdot \psi_a^s) \cdot \cos n\theta - (k_a^s \cdot \psi_a^r \cdot \psi_a^s + k_b^s \cdot \psi_b^r \cdot \psi_b^s) \sin n\theta \right]. \quad (35)$$

D. Dwa układy równań różniczkowych, uzyskane w przedstawionym wyprowadzeniu - mianowicie (8) i (30) oraz (12) i (35) - opisują, każdy oddzielnie, stan równowagi dynamicznej DAM. Zmienne niezależne tych równań - cztery prądy w uzwojeniach lub cztery liniczwoje uzwojeń oraz położenie kątowe wirnika - to wielkości rzeczywiste, które można mierzyć lub rejestrować. Równocześnie jednak w obu przypadkach równania są nieliniowe niejednorodne o współczynnikach zmiennych okresowo - a tym samym mało przydatne do dalszego wykorzystania.

Operacją, która pozwala przejść do układu równań o stałych współczynnikach jest transformacja liniowa zmiennych danego układu równań na zmienne nowe, zazwyczaj fikcyjne.

W ogólnej teorii maszyn elektrycznych wykorzystuje się kilka rodzajów transformacji zmiennych, przydatnych w zależności od typu maszyny lub rodzaju zadania (por. np. [1], [5], [10]). W rozpatrywanym przypadku wystarczająco efektywna będzie transformacja Stanleya [9], zwana także transformacją typu d-q [10].

### 3.2. Przekształcenie równań różniczkowych DAM przy pomocy transformacji Stanley'a

A. Postać transformacji Stanley'a, która będzie wykorzystana w dalszym ciągu, można zdefiniować jako transformację kogredientną o ortogonalnej macierzy transformacji.

Istotnie, jeżeli macierze kolumnowe  $\mathbf{v}_{ab}$  oraz  $\mathbf{i}_{ab}$  (lub  $\boldsymbol{\psi}_{ab}$ ) tworzą parę układów zmiennych pierwotnych, zaś macierze kolumnowe  $\mathbf{v}_{dq}$  oraz  $\mathbf{i}_{dq}$  (lub  $\boldsymbol{\psi}_{dq}$ ) - parę układów zmiennych nowych, to transformację Stanley'a stanowi para przekształceń liniowych tych zmiennych o postaci:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{ab} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_{dq} \\ \mathbf{i}_{ab} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}_{dq} \end{aligned} \right\} (36)$$

lub:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{ab} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_{dq} \\ \boldsymbol{\psi}_{ab} &= \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\psi}_{dq}, \end{aligned} \right\} (37)$$

gdzie:

$\mathbf{v}_{ab}, \mathbf{i}_{ab}, \boldsymbol{\psi}_{ab}$  - jak w równaniach (3),

$$\mathbf{v}_{dq} = \begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_{dq} = \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_{dq} = \begin{bmatrix} \psi_d^s \\ \psi_q^s \\ \psi_d^r \\ \psi_q^r \end{bmatrix} \quad (38)$$

oraz:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (39)$$

przy czym macierz transformacji  $C$  spełnia następujące warunki:

$$\det C \neq 0$$

$$C \cdot C_t = 1$$

jest więc nieosobliwa i ortogonalna.

B. Definicję transformacji Stanley'a podaną w A. można wykorzystać bezpośrednio dla przekształcenia zmiennych wyprowadzonych w 3.1 równań różniczkowych DAM. Należy w tym celu podstawić: wyrażenie (36) - do równań (8) i (29), wyrażenie (37) - do równań (12) i (34). Wyniki podstawień przedstawione zostaną dla obu wariantów równań DAM.

a. Zmiennymi niezależnymi są  $\Theta$ ,  $i_{dq}$ . Równanie napięciowe (8) po transformacji przyjmuje postać:

$$v_{dq} = C^{-1} \cdot z_{ab} \cdot C \cdot i_{dq} = C_t \cdot z_{ab} \cdot C \cdot i_{dq} = z_{dq} \cdot i_{dq}, \quad (40)$$

gdzie:

$$z_{dq} = C_t \cdot z_{ab} \cdot C =$$

$$= \begin{bmatrix} R_a^s + L_a^s \cdot D & 0 & L_a^{sx} \cdot D & 0 \\ 0 & R_b^s + L_b^s \cdot D & 0 & L_b^{sx} \cdot D \\ L_a^{sx} \cdot D & L_b^{sx} \cdot n \cdot \omega^x & R^x + L^x \cdot D & L^x \cdot n \cdot \omega^x \\ -L_a^{sx} \cdot n \cdot \omega^x & L_b^{sx} \cdot D & -L^x \cdot n \cdot \omega^x & R^x + L^x \cdot D \end{bmatrix}, \quad (42)$$

zaś wyrażenie na moment elektromagnetyczny:

$$M_e = + \frac{1}{2} \cdot (i_{dq})_t \cdot C_t \cdot \frac{\partial L_{ab}}{\partial \Theta} \cdot C \cdot i_{dq} = + n \cdot (L_b^{sx} \cdot i_d^x \cdot i_q^s - L_a^{sx} \cdot i_q^x \cdot i_d^s) \quad (43)$$

b. Zmiennymi niezależnymi są  $\Theta$ ,  $\psi$ . Równania napięciowe przyjmują postać:

$$v_{dq} = C_t \cdot \Lambda_{ab} \cdot C \cdot \psi_{dq} = \Lambda_{dq} \cdot \psi_{dq}, \quad (44)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{dq} = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{C} = \quad (45)$$

$$= \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^s) + D & 0 & -k_a^x/\sigma\tau^s & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^s) + D & 0 & -k_b^x/\sigma\tau^s \\ -k_a^s/\sigma\tau^x & 0 & (1/\sigma\tau^x) + D & n\omega^x \\ 0 & -k_b^s/\sigma\tau^x & -n\omega^x & (1/\sigma\tau^x) + D \end{bmatrix} \quad (46)$$

a moment elektromagnetyczny:

$$\begin{aligned} M_e &= -\frac{1}{2} \cdot (\Psi_{dq})_t \cdot \mathbf{C}_t \cdot \frac{\partial(L_{ab})^{-1}}{\partial\theta} \cdot \mathbf{C} \cdot \Psi_{dq} = \\ &= + \frac{n}{\sigma L^x} \cdot (k_b^s \cdot \Psi_d^x \cdot \Psi_q^s - k_a^s \cdot \Psi_q^x \cdot \Psi_d^s). \end{aligned} \quad (47)$$

Konieczne jest - w związku z powyższym - podkreślenie faktu, że równania (41) i (46) stanowią tylko zapis formalny związków łączących macierze  $\mathbf{E}_{ab}$  i  $\mathbf{E}_{dq}$  oraz  $\mathbf{A}_{ab}$  i  $\mathbf{A}_{dq}$ . Macierze te zawierają operator różniczkowania  $D$  odnoszący się nie tylko do zmiennej  $\theta$ , ale i do zmiennych  $i$  (lub  $\Psi$ ). Obliczenia macierzy  $\mathbf{E}_{dq}$  i  $\mathbf{A}_{dq}$  przeprowadzono więc według zależności (40) i (45). Na przykład w przypadku  $\mathbf{E}_{dq}$  kolejność obliczeń była następująca: wykonanie mnożeń  $\mathbf{C} \cdot i_{dq}$  oraz  $\mathbf{E}_{ab} \cdot (\mathbf{C} \cdot i_{dq})$ , wykonanie różniczkowania, przekształcenie wyniku do postaci  $(\mathbf{E}_{ab} \cdot \mathbf{C}) \cdot i_{dq}$ , wykonanie mnożenia  $\mathbf{C}_t \cdot [(\mathbf{E}_{ab} \cdot \mathbf{C}) \cdot i_{dq}]$ . Podobnie obliczono  $\mathbf{A}_{dq}$ .

C. Przekształcenia wprowadzone dla uproszczenia równań różniczkowych DAM można zakończyć uwzględniając w wyrażeniach (38) warunek (7). W konsekwencji:

$$\mathbf{v}_{dq} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v}_{ab} = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{v}_{ab} = \begin{bmatrix} v_d^c \\ v_q^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

lub:

$$\dot{v}_d^x = \dot{v}_q^x = 0. \quad (49)$$

Ostatecznie układ równań różniczkowych opisujących stan równowagi dynamicznej DAM przyjmuje jedną z dwóch następujących postaci:

a. Zmiennymi niezależnymi są  $\theta$ ,  $\dot{1}_{dq}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_d^s \\ \dot{v}_q^s \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a^s + L_a^s D & 0 & L_a^{sx} D & 0 \\ 0 & R_b^s + L_b^s D & 0 & L_b^{sx} D \\ L_a^{sx} D & L_b^{sx} n \omega^x & R^x + L^x D & L^x n \omega^x \\ -L_a^{sx} n \omega^x & L_b^{sx} D & -L^x n \omega^x & R^x + L^x D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{1}_d^s \\ \dot{1}_q^s \\ \dot{1}_d^x \\ \dot{1}_q^x \end{bmatrix}. \quad (50)$$

$$M = JD\omega^x + B\omega^x - n(L_b^{sx} \dot{1}_d^x \dot{1}_q^s - L_a^{sx} \dot{1}_q^x \dot{1}_d^s) \quad (51)$$

b. Zmiennymi niezależnymi są  $\theta$ ,  $\dot{\psi}_{dq}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_d^s \\ \dot{v}_q^s \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/\sigma\tau^s) + D & 0 & -k_a^x/\sigma\tau^s & 0 \\ 0 & (1/\sigma\tau^s) + D & 0 & -k_b^x/\sigma\tau^s \\ -k_a^s/\sigma\tau^x & 0 & (1/\sigma\tau^x) + D & n\omega^x \\ 0 & -k_b^s/\sigma\tau^x & -n\omega^x & (1/\sigma\tau^x) + D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi}_d^s \\ \dot{\psi}_q^s \\ \dot{\psi}_d^x \\ \dot{\psi}_q^x \end{bmatrix}. \quad (52)$$

$$M = JD\omega^x + B\omega^x - \frac{n}{\sigma L^x} (k_b^s \dot{\psi}_d^x \dot{\psi}_q^s - k_a^s \dot{\psi}_q^x \dot{\psi}_d^s). \quad (53)$$

D. Podsumowując przedstawione wyprowadzenia stwierdzić można o następujące:

- W wyniku transformacji zmiennych uzyskano dwa układy równań różniczkowych (50) i (51) oraz (52) i (53), opisujących - każdy oddzielnie - stan równowagi dynamicznej DAM. Są to równania o stałych współczynnikach, liniowe w przypadku, gdy prędkość kątowna  $\omega^x = \text{const}$ , nieliniowe - gdy  $\omega^x = \text{var}$ .

- Wyprowadzone równania stanowią mogą podstawę dla analizy właściwości statycznych DAM ( $\omega^r = \text{const}$ ) i właściwości dynamicznych DAM ( $\omega^r = \text{var}$ ) z uwzględnieniem stanów niestabilnych w łob obwodach elektromagnetycznych. W przypadku drugim równania należy linearyzować, np. dla małych przyrostów wielkości wejściowej.
- W niektórych konkretnych przypadkach analizy właściwości dynamicznych DAM (nr. obliczanie transmitancji operatorowych) wygodniej jest korzystać z równań (52) i (53), w których napięcia i moment elektromagnetyczny DAM wyrażone są w zależności od linijowości. Wynika to z faktu, że macierz  $A_{dq}$  - w porównaniu z macierzą  $Z_{dq}$  - zawiera więcej elementów zerowych.

#### 4. Uwagi końcowe

Dwufazowa maszyna asynchroniczna z wirnikiem klatkowym lub puszkowym wykorzystywana jest w układach automatyki w trzech co najmniej postaciach, mianowicie jako:

- prądnica tachometryczna,
- miernik przyspieszenia kątownego (akcelerometr),
- sterowany silnik wykonawczy.

Pojedyncze jednostki można poza tym łączyć mechanicznie w zespoły dwu- lub trójmaszynowe, co jest szczególnie chętnie stosowane np. w serwowo-mechanizmach.

Ta różnorodność możliwości przetwarzania sygnałów przy pomocy DAM, z drugiej zaś strony prostota budowy poszczególnych typów DAM i niezawodność w pracy, stanowią o wadze, jaką dość powszechnie przywiązuje się do możliwości wszechstronnego poznania ich właściwości. Dorobek w tej dziedzinie jest szczególnie bogaty w zakresie analizy właściwości statycznych wymiennych typów DAM. Brakuje natomiast ogólnej i jednolitej metody badania ich właściwości dynamicznych z punktu widzenia wpływu na te właściwości konstrukcji maszyny.

Podstawą dla takiej metody może stać się - jak się wydaje - opis matematyczny DAM uzyskany w niniejszej, pierwszej części pracy. W częściach drugiej i trzeciej równania różniczkowe DAM przekształcone zostaną do postaci umożliwiającej bezpośrednio obliczanie transmitancji operatorowych dwufazowej asynchronicznej prądnicy tachometrycznej, dwufazowego asynchronicznego miernika przyspieszenia kątownego i dwufazowego asynchronicznego silnika wykonawczego\*).

\*) Część druga i trzecia niniejszej pracy ukazały się w ZNPSI "Elektryka" 1971 r. 29 oraz z. 30.

## LITERATURA

- [1] Adkins B. - The General Theory of Electric Machines. Chapman and Hall, London 1959.
- [2] Čečet J.S. - Upravlj'aemyj asinhronnyj dvigatel' s polym rotorom. Gosenergoizdat, Moskva 1955.
- [3] Fitzgerald A.E., Kingsley Jr Ch. - Electric Machinery. McGraw-Hill, New York 1961.
- [4] Gruzov L.N. - Metody matematičeskogo issledcvanija élektričeskich mašin, Gosenergoizdat, Moskva 1953.
- [5] Ku Y.H. - Electric Energy Conversion. Ronald Press, New York 1959.
- [6] Ładziński P. - Opis matematyczny układów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody. Prace Instytutu Automatyki PAN, 1967, z. 62.
- [7] Meissl J. - Zasady elektromechanicznego przetwarzania energii (tłum. z ang.). WNT, Warszawa 1970.
- [8] Messerle H.K. - Dynamic Circuit Theory. Pergamon Press, Oxford 1965.
- [9] Stanley H.C. - An Analysis of the Induction Machine. AIEE Transactions, 1938, vol.57, s. 751-757.
- [10] White D.C., Woodson H.H. - Electromechanical Energy Conversion. John Wiley and Sons, New York 1959.

Rękopis złożono w Reakcji w dniu 30.X.1970 r.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОЙ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ  
С КОРТКОЗАМКНУТЫМ ИЛИ ПОЛЫМ РОТОРОМ

Резюме

В работе дан вывод двух систем уравнений, описывающих - каждая в отдельности - состояние динамического равновесия двухфазной асинхронной машины с короткозамкнутым или полным ротором. Уравнения эти могут быть основными для более подробного анализа статических и динамических свойств основных типов машин, применяемых в системах автоматического регулирования.



MATHEMATICAL DESCRIPTION OF TWO-PHASE ASYNCHRONOUS MACHINE  
WITH SQUIRREL-CAGE OR DRAG-CUP ROTOR

## Summary

In the paper two systems of equations describing - each separately - dynamic balance state of two-phase asynchronous machine with squirrel-cage or drag-cup rotor have been introduced. The equations can be the base for more specific analysis of the static and dynamic characteristics of the main types of machines used in automatic control systems.

## DODATEK

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

$a$	- wartość chwilowa,
$\mathbf{A}$	- macierz kwadratowa,
$\mathbf{A}_t$	- macierz transponowana względem $\mathbf{A}$ ,
$\mathbf{A}^{-1}$	- macierz odwrotna względem $\mathbf{A}$ ,
$\det \mathbf{A}$	- wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ ,
$\mathbf{1}$	- macierz jednostkowa
$t$	- czas,
$D = d/dt$	- operator Heaviside'a,
$v$	- napięcie elektryczne,
$i$	- prąd elektryczny,
$\psi$	- liniozwoje,
$f$	- częstotliwość,
$\omega = 2\pi f$	- pulsacja,
$n$	- liczba par biegunów fazy DAM,
$z$	- liczba zwojów fazy DAM,
$\xi$	- współczynnik uzwojenia,
$\chi$	- współczynnik transformacji,
$\Lambda$	- przewodność magnetyczna,
$R$	- rezystancja,
$L$	- indukcyjność,
$k$	- współczynnik sprzężenia magnetycznego,
$\sigma$	- współczynnik rozproszenia magnetycznego,
$\tau$	- stała czasowa,
$\theta$	- kąt obrotu wirnika DAM,
$\omega^r = D\theta$	- prędkość kątowna wirnika DAM,
$M$	- moment obrotowy doprowadzony z zewnątrz,
$M_e$	- moment elektromagnetyczny DAM,
$J$	- moment bezwładności wirnika DAM,
$B$	- oporność mechaniczna.

## Indeksy przy wielkościach dotyczą:

górne:  $s$  - stojana,

$r$  - wirnika,

dolne:  $a$  - uzwojenia DAM rzeczywistej w osi  $a$ ,

$b$  - uzwojenia DAM rzeczywistej w osi  $b$ ,

$d$  - uzwojenia DAM w osi  $a$  po transformacji,

$q$  - uzwojenia DAM w osi  $b$  po transformacji,

$g$  - strumienia w szczelinie,

$s$  - strumień  $a$  rozproszenia.