ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: AUTOMATYKA z. 17 Nr kol. 302

HENRYK KOLKA
Katedra Elektroniki

PEWNE PROBLEMY ZWIĄZANE Z ZAGADNIENIEM STEROWANIA CZASOWO-OPTYMALNEGO OBIEKTÓW LINIOWYCH Z ZERAMI W FUNKCJI PRZEJŚCIA

Streszczenie. W artykule zostały przedstawione pewne uwagi dotyczące praktycznej strony problemu sterowania obiektami liniowymi z zerami w funkcji przejścia.

Dokładniej został przedstawiony problem poszukiwania transformacji T(Y/Z). Na przykładzie obiektów opisanych równaniem różniczkowym 2 rzędu pokazano prosty sposób wyznaczania obszarów G_Z^+. Rozważono ogólnie strukturę układu sterującego z uwzględnieniem potencjalnych źródeł błędów, jakie mogą wystąpić w rzeczywistym układzie. Oceniono wpływ tych źródeł błędu na dokładność układu. Rozważania zobrazowano wykresami pracy układu, zamodelowanego na maszynie analogowej.

1. Wstęp

W większości przypadków w literaturze poświęconej układom optymalnym rozważa się sterowanie obiektami, które są opisane równaniem różniczkowym zawierającym sygnał sterujący bez pochodnych (np. prace [2], [7], [8]).

Inny przypadek tj. sterowanie czasowo-optymalne obiektami, które posiadają w swej funkcji przejścia zera, jest rozważany w pracach [1], [3], [4], [5], i [6].

Do obiektu opisanego funkcją przejścia z zerami nie można zastosować zasady maksimum ze względu na istnienie nieciągłości trajektorii w przestrzeni $\bar{Y}$, w chwilach przełączeń wartości sygnału sterującego. Trudność tę można pokonać przez zastosowanie pewnej transformacji T (Y/Z). Dzięki niej otrzymujemy obiekt ekwiwalentny zdefiniowany w przestrzeni $\bar{Z}$, do którego możemy już zastosować zasadę maksimum.

Artykuł niniejszy ma na celu przedstawienie pewnych uwag związanych z praktycznym zastosowaniem teorii sterowania czasowo-optymalnego do obiektów liniowych z zerami w funkcji przejścia.

2. Zdefiniowanie problemu

Rozważamy obiekt opisany funkcją przejścia H(D)

$$H(D) = \frac{Y(D)}{U(D)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} (b_i D^i)}{\sum_{j=0}^{n} (a_{(n-j)} D^j)} . \tag{1}$$

Warunki początkowe układu są określone przez wektory:

$$Y_o = \begin{bmatrix} y(o) \\ \dot{y}(o) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(o) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad U_o = \begin{bmatrix} u(o) \\ \dot{u}(o) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(n-1)}(o) \end{bmatrix} . \tag{2}$$

(w przypadku ogólnym $m \leqslant n$ - my dla uproszczenia przyjmujemy, me m=n).

Zadanie polega na tym, by wiedząc, że obiekt jest w położeniu początkowym, określonym przez wektory Y_0 i U_0, znaleźć sterowanie optymalne (w sensie czasowym), które przeprowadzi obiekt w przestrzeni $\overline{Y}$ z połczenia Y_0, do końcowego Y_1, przy czym po zakończeniu sterowania obiekt winien pozostać w tym położeniu. Istnieje szereg metod stosowanych do rozwiązywania tego rodzaju zagadnień. Najczęściej stosuje się dwie z nich:

1. Metoda programowania dynamicznego - Bellmana
2. Zasada maksimum - Pontriagina.

W rozważaniach opierać się będziemy na zasadzie maksimum, której dokładne sformułowanie znajduje się w pracy [8].

Ogólnie więc obiekt możemy opisać układem równań różniczkowych (3).

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}\,\mathbf{U}),$$

$$\text{gdzie} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ u^{(n-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u \end{bmatrix} \tag{3}$$

W przypadku obiektu liniowego, równanie (3) przyjmuje postać (3')

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Y} + \mathbf{B}\,\mathbf{U}. \tag{3'}$$

Załóżmy, że sygnał sterujący u(t) jest funkcją określoną, przedziałami ciągłą, która posiada w dowolnym, skończonym przedziale czasu co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. Załóżmy także, że pochodne $u^{(j)}(t)$ dla $j = 1,2...n$ istnieją w interesującym nas przedziale czasu poza punktami nieciągłości, w których posiadają lewo i prawostronne granice oraz, że wartości sygnału sterującego u(t) są zawarte w przedziale $-\alpha \leqslant U(t) \leqslant \alpha$, gdzie $\alpha > 0$.

Dla tak zdefiniowanego dopuszczalnego sygnału sterującego, otrzymamy w n-wymiarowej przestrzeni fazowej $\bar{Y}$ trajektorię, która będzie linią przedziałami ciągłą (jej punkty nieciągłości odpowiadają analogicznym punktom na wykresie sygnału sterującego u(t)*).

Jak wiadomo dla obiektu opisanego równaniem typu (3') do znalezienia sterowania optymalnego nie można stosować zasady Pontriagina (6).

Zastosowanie transformacji T(Y/Z) pozwala na przejście z przestrzeni $\bar{Y}$ do $\bar{Z}$ tak, by otrzymany w ten sposób obiekt ekwiwalentny był opisany równaniem:

$$\dot{Z} = \mathbf{A}_1\,\mathbf{Z} + \mathbf{h}\,u, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{h}$ - jest macierzą kolumnową.

Wówczas do takiego obiektu będzie można zastosować zasadę maksimum w celu określenia strategii optymalnej.

3. Omówienie transformacji T(Y/Z)

Mamy obiekt opisany układem równań różniczkowych:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Y} + \mathbf{B}\,\mathbf{U},$$

przy czym

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} : \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ u^{(n-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u \end{bmatrix}. \tag{4'}$$

*) Dokładne sformułowanie tego problemu można znaleźć w części 2 pracy (4) lub w pracy (5).

Zdefiniujemy T(Y/Z) jako: $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\,\mathbf{Z} + \mathbf{D}\,\mathbf{U}_1$,

$$\text{gdzie } \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} u^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ u \end{bmatrix} : \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Wstawiając (5) i (4') otrzymamy:

$$\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{A}\,(\mathbf{C}\,\mathbf{Z} + \mathbf{D}\,\mathbf{U}_1) + \mathbf{B}\,\mathbf{U}, \tag{6'}$$

a stąd ostatecznie

$$\dot{\mathbf{Z}} = (\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C})\,\mathbf{Z} + (\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{D})\,\mathbf{U}_1 + (\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{B})\,\mathbf{U} - (\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{D})\,\dot{\mathbf{U}}_1. \tag{6''}$$

Jak widać, warunek realizacji powyższych przekształceń jest następujący:

$$\det \mathbf{C} \neq 0. \tag{6'''}$$

Równanie (6") możemy zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}_1\mathbf{Z} + \mathbf{H}\,\mathbf{U}. \tag{6}$$

Ponieważ macierze **C** i **D** w równaniu (5) są dowolne (musimy zapewnić det **C** ≠ 0) zatem dobieramy je tak, by w równaniu (6) otrzymać w miejsce **H U** - wyrażenie **h**.u, (gdzie **h** - macierz kolumnowa).

W pracy [1] autorzy a priori podają taką transformację przy pomocy układu równań algebraicznych. Zakładają oni, że macierz **C** jest macierzą jednostkową*).

*) Rozważając dokładniej istotę przekształcenia T(Y/Z) dochodzimy do wniosku, że takich transformacji jest znacznie więcej. Wynika to stąd, że aby człon (**H** . **U**) w równaniu (6) był równoważny wyrażeniu (**h**u) musimy wyzerować (n^2) elementów macierzy **H**. Dzięki temu dla wyznaczenia elementów macierzy **C** i **D** - których jest (2 n^2) otrzymujemy (n^2) równań oraz ograniczenie na elementy macierzy **C** w postaci (6'''). Ta różnica między ilością niewiadomych i warunków, pozwala uniezależnić dobór elementów macierzy **D** od elementów macierzy **C**. Z praktycznego punktu widzenia wygodnie jest więc przyjąć, że macierz **C**, np. jest macierzą jednostkową (co też autorzy pracy [1] czynią), bo wówczas $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. Lecz jak widać nie jest to jedyna droga prowadząca do otrzymania równania (9').

Wówczas to otrzymujemy równość $A=A_1$. Macierz **D** natomiast przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_0 & h_1 \\ h_0 & h_1 & \cdots & \cdots & b_{n-2} & h_{n-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

przy czym elementy macierzy **h** przyjmują wartości:

$$\begin{aligned} h_0 &= b_n \qquad\qquad k=1,2\ldots n-1 \\ h_{n-k} &= b_k \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot a_{i+k} \end{aligned} \tag{8}$$

W rezultacie otrzymamy obiekt ekwiwalentny pisany nowym układem równań:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{bmatrix} \cdot u \tag{9}$$

co można zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z} + \mathbf{h}\cdot u\,. \tag{9'}$$

4. Omówienie sterowania w przestrzeni stanu $\bar{Z}$

Ponieważ obiekt opisany układem równań (3) w przestrzeni $\bar{Y}$, został przy pomocy transformacji T(Y/Z) sprowadzony do postaci obiektu ekwiwalentnego, opisanego układem równań (9) w przestrzeni stanu $\bar{Z}$, zatem możemy teraz uściślić problem sterowania dla naszego obiektu.

W przestrzeni $\bar{Z}$ wyznaczamy początkowy punkt trajektorii Z_0. Zgodnie z równaniem (5) punkt ten odpowiada punktom Yo i Uo, które są określone następująco:

$$\begin{aligned} Yo &= Y\,(t_0^-) \\ Uo &= U\,(t_0^-). \end{aligned} \tag{10}$$

Ponieważ trajektoria $Z(t)$ jest funkcją ciągłą, więc w chwili $t=t_0$ przechodzi ona przez punkt $Z_0 = Z(t_0) = Z(t_0^-) = Z(t_0^+)$. Zastanówmy się obecnie nad tym, co się dzieje w przedziale czasu $t > t_1$ (gdzie t_1 - moment, w którym obiekt osiąga żądane położenie końcowe $Y_1 = Y(t_1^+) = 0$). Żądamy, aby obiekt pozostał w położeniu końcowym, to znaczy musimy znaleźć dla $t > t_1$ także sterowanie dopuszczalne $u(t)$, aby odpowiadająca mu trajektoria była opisana równaniem:

$$Y(t) = Y_1 = 0 \quad \text{dla} \quad t > t_1 .$$

Spełnienie tego warunku wymaga, aby sterowanie $u(t)$ dla $t > t_1$ było takim sterowaniem dopuszczalnym, które spełnia równanie:

$$b_m u^{(m)} + b_{m-1} U^{(m-1)} + - - - - + b_1 u + b_0 = 0. \qquad (11)$$

Oznaczamy przez G_u^+ zbiór wszystkich punktów $U_1 = U_1(t_1) = U_1(t_1^+)$ przestrzeni $\bar{U}_1$ takich, że rozwiązania równania (11) z warunkami początkowymi w punkcie U_1 spełniają dla $t > t_1$ ograniczenia narzucane przez sterowanie dopuszczalne. Oczywiście tak zdefiniowany zbiór G_u^+ będzie zbiorem domkniętym. W podobny sposób w przestrzeni stanu $\bar{Z}$ zdefiniujemy zbiór G_z^+ - jako zbiór takich punktów Z_1, że odpowiadają one zgodnie z równaniem (5) wszystkim parom punktów ($Y_1 = C$ i $U_1 \in G_u^+$). Teraz więc postarajmy się zdefiniować problem sterowania w przestrzeni $\bar{Z}$:

Jeżeli przez $U^*(t)$ (dla $t > t_0$) oznaczymy sterowanie optymalne, które w minimalnym czasie $T = t_1 - t_0$ przeprowadzi nam obiekt w przestrzeni $\bar{Y}$ z położenia początkowego Y_0, do końcowego Y_1, przy czym obiekt ten dla $t > t_1$ pozostanie w tym położeniu końcowym (tzn. $Y(t) = Y(t_1) = Y_1$, dla $t > t_1$), to wówczas:

a) $U^*(t)$ w przedziale czasu $t_0 < t < t_1$ jest funkcją przedziałami stałą. W tym przedziale sterowanie wynika z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego z punktu Z_0 do zbioru G_z^+.

b) dla czasu $t > t_1$ sterowanie pokrywa się z rozwiązaniem równania (11), którego warunek początkowy jest w punkcie:

$$U_1 = - D^{-1} C Z_1 . \qquad (11')$$

(Równanie (11') można otrzymać z (5) przez założenie $Y = C$).

5. Określenie obszarów G_z^+

W literaturze [1] - problem poszukiwania równania trajektorii dla $t > t_1$ i wyznaczenie obszaru G_z^+ jest szczegółowo rozważony. Autor wychodzi z założenia, że jeśli dla $t > t_1$ obiekt jest w położeniu $Y(t)=Y(t_1)=0$, to jak wynika z (5)

$$C = \mathbf{C}\,\mathbf{Z} + \mathbf{D}\,\mathbf{U} \tag{5'}$$

stąd $z_1(t) = -h_0 \cdot u(t)$ oraz $u(t) = -\frac{1}{h_0} \cdot z_1(t)$. (5")

Wstawiając (5") do (9) otrzymamy

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{Z}. \tag{12}$$

Stąd otrzymamy rozwiązanie, będące równaniem trajektorii w G_z^+

$$\mathbf{Z}(t) = e^{\mathbf{Q}\cdot(t-t_1)} \cdot Z(t_1). \tag{12'}$$

Pierwszy wyraz rozwiązania zapisany jako iloczyn skalarny będzie miał postać:

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^{n} q_{1i}(t-t_1) \cdot z_i(t_1) = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{Z}_1 \rangle. \tag{13}$$

Zakładając, że sygnał sterujący ma ograniczenie typu $|u(t)| \leq 1$, otrzymamy warunek na G_z^+

$$G_z^+ = \left\{ \mathbf{Z}: \left| -\frac{1}{h_0} \langle \mathbf{q}(t-t_1), \mathbf{Z}_1(t_1) \rangle \right| \leq 1, \text{ dla } t \geq t_1 \right\}. \tag{14}$$

Postać (14) jest bardzo niewygodna w użyciu. Określenie zbioru G_z^+ z tej definicji prowadzi często do złożonych zależności. Prócz tego, z zależności tej nie wynika zbyt wyraźnie, iż zbiór G_z^+ jest ściśle związany z postacią równania (11), a jest to pomocne w zrozumieniu istoty transformacji $T(Y/Z)$ i późniejszego sposobu definiowania problemu sterowania w przestrzeni $\bar{Z}$. Rozważmy teraz ten problem szczegółowo, wykorzystując do tego celu obiekt opisany równaniem różniczkowym 2 rzędu w postaci:

$$(D^2 + Da_1 + a_2) \cdot y(t) = (b_2 D^2 + b_1 D + b_0) \cdot u(t). \tag{15}$$

Równanie to można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2, & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{AY} + \mathbf{BU}. \tag{16}$$

Przez znaną transformację otrzymujemy równanie, opisujące obiekt zastępczy w przestrzeni stanu $\bar{Z}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_2 \\ b_0 - a_1 b_- {}_1 \; a_1^2 b_2 - a_2 b_2 \end{bmatrix} \cdot u \tag{17}$$

co można zapisać wektorowo:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Z} + \mathbf{b}u\,.$$

Gdy $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_1 = 0$ dla $t > t_1$, to jak już stwierdziliśmy musi być spełnione

$$b_2\ddot{u} + b_1\,\dot{u} + b_p u = 0 \tag{18}$$

oraz

$$|u(t)| < 1.$$

Równanie (18) można zapisać w postaci macierzowej

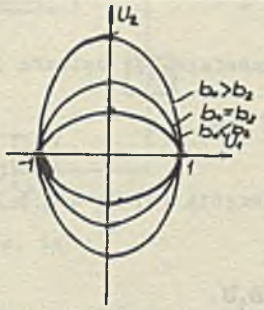
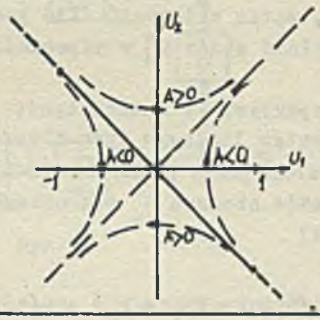
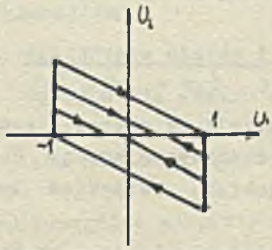
$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_0}{b_2} & -\frac{b_1}{b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \begin{matrix} u_1 = \dot{u}\,. \\ u_2 = \dot{u}_1 \end{matrix} \tag{19}$$

Rozwiązując układ (19) otrzymujemy rozwiązanie w postaci parametrycznej:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(t, u_{10}, u_{20}) \\ u_2 &= \varphi_2(t, u_{10}, u_{20}). \end{aligned} \tag{20}$$

Tablica 1

$$b_2\ddot{U} + b_1\dot{U} + b_0 = 0$$

Obraz geometryczny G_U^t	Uwagi :
	$b_1=0 \quad \frac{b_0}{b_2}>0$ $b_2\ddot{U}+b_0=0$ $U_1 = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}t+\phi\right)$ $U_2 = A\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}\cos\left(\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}t+\phi\right)$ $\begin{cases}\left(\frac{U_{10}}{A}\right)^2+\left(\frac{U_{20}}{A\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}}\right)^2=1\\ \lvert U\rvert\leq 1\end{cases}$
	$b_1=0$ $\frac{b_0}{b_2}=-C<0$ $\begin{cases}U_{20}=-\sqrt{C}\,U_{10}\\ \lvert U_{10}\rvert\leq 1\end{cases}$
	$b_0=0$ $C=\frac{b_1}{b_2}>0$ $\begin{cases}-C-CU_{10}\leq U_{20}\leq C-CU_{10}\\ \lvert U_{10}\rvert\leq 1\end{cases}$

Równania (20) w połączeniu z ograniczeniem $|u_1(t)| \leq 1$ dają szukany obszar G_u^+. Załóżmy, że brzeg tego obszaru jest opisany układem:

$$u_1 = f_1(t)$$
$$u_2 = f_2(t). \tag{21}$$

Z drugiej strony wiemy, że jeżeli transformacja opisana jest równaniem:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{U} \tag{22}$$

(równanie (22) jest inną postacią równania (5) to dla $t > t_1$ $\mathbf{Y}(t) = 0$ i słuszna jest zależność:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}_1\mathbf{U}. \tag{23}$$

Ponieważ znamy postać zbioru G_u^+, zatem zależność (23) pomoże nam liniowo (poprzez macierz $\mathbf{B}_1$) przekształcić zbiór G_u^+ w odpowiadający mu na płaszczyźnie $\bar{Z}$ – zbiór G_z^+.

Ponieważ zbiory G_u^+ są zbiorami wypukłymi i domkniętymi, zatem przekształcenie (23) będzie przekształceniem liniowym tych zbiorów w zbiory G_z^+. Znając własności liniowych przekształceń można prosto znajdować zbiory G_z^+.

Obecnie przedstawię kilka przykładów obszaru G_u^+ dla obiektu 2 rzędu opisanego równaniem różniczkowym: (15)

$$(D^2 + a_1 D + a_2) \cdot y(t) = (D^2 b_2 + D b_1 + b_0) \cdot u(t).$$

7. Realizacja obiektu ekwiwalentnego i układu sterowania

By ocenić współpracę rzeczywistego układu sterującego z ekwiwalentnym obiektem, zmodelowano cały układ regulacji na maszynie analogowej. Obiekt sterowany jest opisany równaniem różniczkowym 2 rzędu. Jak wiadomo, dla takiego obiektu obszar G_z^+ może być punktem, odcinkiem lub inną figurą płaską.

Zastanówmy się jak wygląda cały układ regulacji. Jak to jest pokazane na rys. 1a, jest to układ zamknięty zawierający dwa człony: obiekt zastępczy i układ sterujący.

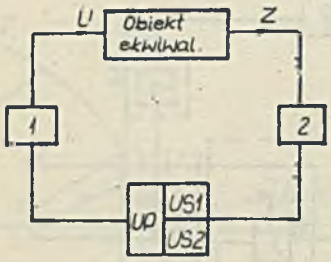
Przy czym

US 1 – układ sterujący, realizujący sterowanie w G_z^+

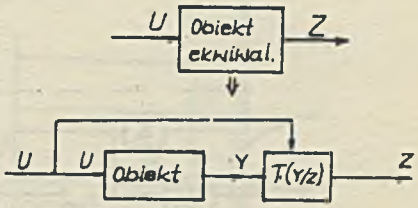
US 2 – układ sterujący, realizujący sterowanie poza obszarem G_z^+

UP – układ wybierający sterowanie z US 1, lub z US 2 w zależności od położenia wektora stanu obiektu w przestrzeni stanu Z.

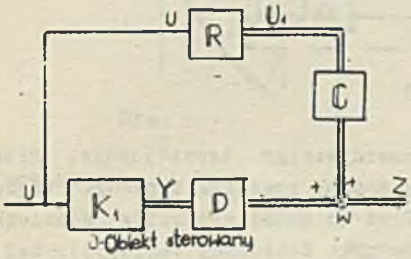
Natomiast strukturę obiektu zastępczego przedstawiono na rys. 1b. Na rys. 2 przedstawiono dokładniej budowę obiektu zastępczego,



Rys. 1a



Rys. 1b



Rys. 2

gdzie:

- u – sygnał sterujący
- Y – sygnał wyjściowy obiektu sterowanego
- R – ozłon dynamiczny (różniczkujący)
- A_1, B_1 – operatory liniowe (patrz równanie 22 i 5)
- W – sumator.

Problem tworzenia obiektu ekwiwalentnego przedstawię na przykładzie obiektu opisanego równaniem

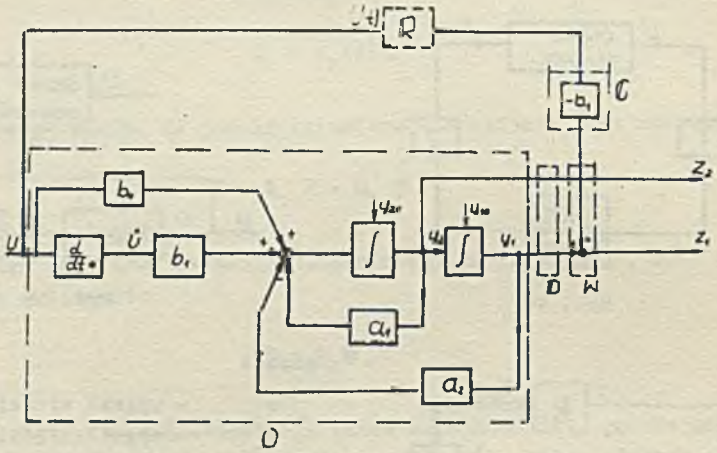
$$(D^2 + Da_1 + a_2) \cdot y(t) = (b_1 D + b_0) \cdot u(t).$$

Odpowiadająca temu równaniu struktura obiektu zastępczego przedstawiona jest na rys. 3.

Rozważmy poszczególne elementy obiektu zastępczego

- mamy obiekt sterowany K_1 – zamodelowany na maszynie analogowej posiada jako wejście sygnał u(t) oraz dwa wyjścia y_1 i y_2
- operator A_1 – w tym przypadku nie istnieje, ponieważ macierz A_1 jest macierzą jednostkową
- operator B_1 – zrealizowany jest jako wzmacniacz (inwertor)
- operator W – jest sumatorem.

Analizując budowę poszczególnych członów układu (rys. 2) możemy wskazać potencjalne źródła błędów, dzięki którym proces regulacji jest w wie-



Rys. 3

lu przypadkach bardzo odległy od przewidywanego teoretycznie. Przede wszystkim operatory A_1 B_1 i W realizują zadane operacje z pewnym błędem. Wyjątkowego omówienia wymaga człon R. Jest to układ elementów różniczkujących. Znane są problemy jakie istnieją przy dokładnej realizacji tej operacji, dlatego też przy ocenie pracy takiego elementu należy uwzględnić także występujący tu błąd metody.

Ponieważ wskazane zostały główne źródła błędnej pracy obiektu zastępczego, zastanówmy się krótko nad dokładnością pracy układu sterującego. Jeżeli rozważymy np. obiekt, opisany równaniem:

$$\dot{y} = b_1\dot{u} + b_0 u .$$

Zakładając, że $b_1 = 1$, $b_0 = \beta > 0$, oraz $|u| \leq 1$ stwierdzimy, że zbiór G_z^+ jest tu zdefiniowany następująco:

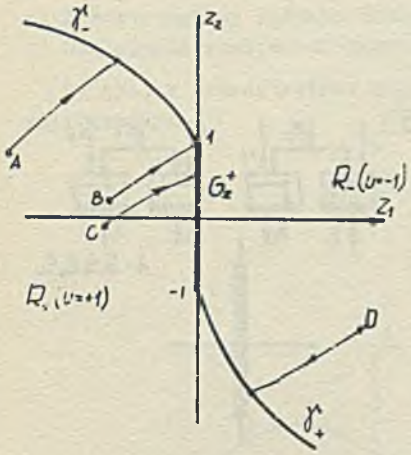
$$G_z^+ = \left\{ z: \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ |z_2| < 1 \end{array} \right\}$$

a strategia optymalna w płaszczyźnie $\bar{Z}$ będzie taka, jak to pokazano na rys. 4.

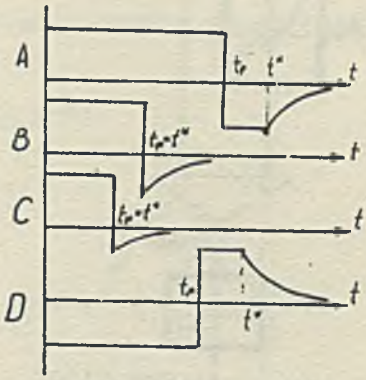
Tym czterem przypadkom sterowania, które są uwidocznione na rys. 4, odpowiadają przebiegi czasowe sygnałów sterujących pokazane na rys. 4.

Jeżeli γ_-, γ_+ oraz G_z^+ określić funkcją $z_1 = \phi(z_2)$, to sterowanie poza G_z^+ można określić jako:

$$u = \mathrm{sign}\left[\phi(z_2) - z_1\right].$$



Rys. 4

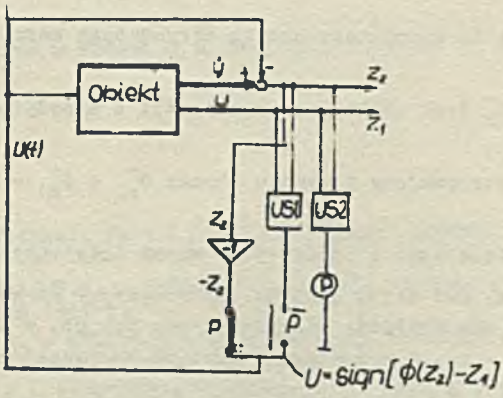


Rys. 4'

W G_z^+ natomiast:

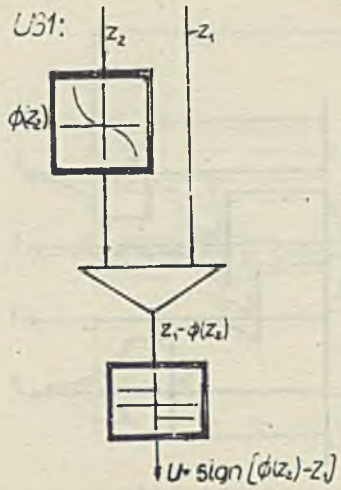
$$u = -z_2.$$

Natomiast struktura układu sterującego może być taka, jak to pokazano na rys. 5.

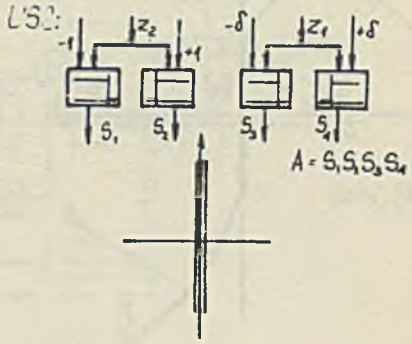


Rys. 5

Pokazane na rys. 5 układy US1 i US2 mogą być zrealizowane w różny sposób. Jedna z takich możliwych realizacji jest pokazana na rys. 6a i rys. 6b.



Rys. 6a



Rys. 6b

Jak więc widać, wymagane jest, by US2 wykrywał obszar G_z^+ będący odcinkiem. Taki układ jest niemożliwy do zrealizowania, dlatego też budujemy układ wykrywający obszar G_{z1}^+ będący prostokątem ($|z_1| \leq \delta$ $|z_2| \leq 1$). W rzeczywistości otrzymujemy obszar G_{z2}^+ określony następująco:

$$1+\delta_1 \leq z_2 \leq -1+\delta_2, \quad \delta_3 \leq z_1 \leq \delta_4.$$

Wnioski odnoszące się do pracy tego układu sterującego można sformułować następująco:

a) Nie każdy obszar G_z^+ jest możliwy do realizacji z zasady buduje się obszar $G_{z1}^+ \neq G_z^+$.

b) W rzeczywistości otrzymujemy w wyniku obszar $G_{z2}^+ \neq G_{z1}^+$ – jest to poważne źródło błędu.

c) Sam przekaźnik P działając z opóźnieniem wnosi dodatkowy błąd.

d) W rzeczywistości sygnał u(t), jaki ma być dołączony na wejście obiektu, gdy $Z \in G_z^+$ różni się wyraźnie od wymaganego. Tak np. w naszym przypadku żądamy, by $u = -z_2$, a w rzeczywistości ma on postać $u_1 = -kz_2 - \delta$ (przy czym $k \neq 1$ i $\delta \neq 0$).

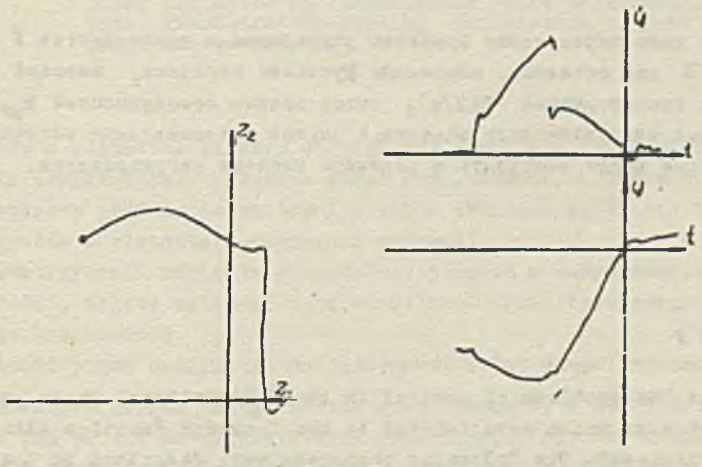
Omówione powyżej źródła błędów w rzeczywistym układzie oddziaływują razem i rezultat końcowy sterowania jest trudny do przewidzenia. Przy reali-

zacji obiektów na maszynie analogowej otrzymano rezultaty, analiza których wykazała, że najpoważniejszy wpływ na dokładność pracy układu wywierają:

1) Różnica między żądanym obszarem G_z^+ i rzeczywistym G_{z2}^+.
2) Dokładność realizacji transformacji T (Y/Z).

Na rys. 7 przedstawiono proces sterowania obiektem opisanym równaniem różniczkowym

$$\ddot{y} = \dot{u} + \beta u \quad (\beta > 0).$$



Rys. 7

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 20.I.1970 r.

LITERATURA

[1] Athans Michael, Falb L. Peter - OPTIMAL CONTROL, Mc GRAW HILL BOOK COMPANY, New York 1966.

[2] Bołtianskij W.G. - Matiematiczieskije miatody optimalnogo uprawlienija, Moskwa 1966 r.

[3] Dmowski R. - STEROWANIE OPTYMALNE DLA OBIEKTÓW O PRZEPUSTOWOŚCI ZAWIERAJĄCEJ ZERA - PRACA DOKTORSKA (1964 r.).

[4] Gessing R.- STEROWANIE CZASOWO-OPTYMALNE OBIEKTAMI O FUNKCJACH PRZEJŚCIA ZAWIERAJĄCYCH ZERA. PRACA HABILITACYJNA NR 91 - ZESZYT NAUKOWY POLIT. ŚL. Nr 251 (1969 r.).

[5] Gessing R. - Sterowanie czasowo-optymalne dla obiektów, których funkcje przejścia posiadają zera. Archiwum automatyki i telemechaniki (w druku).

[6] Gessing R. - Time Optimal Control of Plants Whose Transfer Fuction Contains Zeros. Zastosowania matematyki (w druku).

[7] Feldbaum A.A. - Podstawy teorii optymalnych układów sterowania-1967 r.

[8] Pontriagin L.S., Bołtianskij W.G., Gamkrelidze R.W., Miszczenko E.F. - Matiematiozieskaja tieorija optimalnych prociessow - Moskwa-1961 r.

Р е з ю м е

В статье дано определение проблемы управления в пространстве $\bar{Y}$ и в пространстве $\bar{Z}$ для объектов, описанных функцией передачи, имеющей нуль. Рассмотрена трансформация $T(Y/z)$, метод поиска совокупностей $G_{\bar{z}}$ а также реализация эквивалентного объекта, с учётом потенциальных источников ошибок, которые могут выступить в реальной системе регулирования.

S u m m a r y

In the paper the problems of control in the N-dimentional phase space Y and Z for objects which were defined by the transfer function with zeros have been discussed. The following phenomena were described in the paper: transformation $T(Y/Z)$, method of looking for $G_{\bar{z}}^{+}$, and method of equivalent object realization, taking into account possible sources of errors, which may accour in the actual control systems.