ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: GÓRNICTWO z. 37 Nr kol. 246

BERNARD DRZĘŹLA

PIONOWE DEFORMACJE GÓROTWORU PRZY EKSPLOATACJI GÓRNICZEJ

Streszczenie. W artykule wyprowadzono wzory na nachylenia, krzywizny i skręcenie geodezyjne przekrojów pionowych niecki osiadania przy eksploatacji w kształcie prostokąta. Omówiono zagadnienie wyznaczania tych deformacji w różnych kierunkach. Podano wzory na określanie kierunku i wartości nachylenia maksymalnego oraz kierunków i wartości krzywizn głównych. Ponadto, w oparciu o ułożone na podstawie podstawowego wzoru teorii T. Kochmańskiego równanie powierzchni niecki osiadania, wyprowadzono równania różniczkowe izolinii osiadania, krzywej największego spadku, linii krzywiznowych i asymptotycznych.

1. Wstęp

Do pionowych deformacji górotworu przy eksploatacji górniczej autor zalicza te deformacje, które występują w przekrojach pionowych górotworu. Do podstawowych wskaźników deformacji pionowych należą: osiadania, nachylenia i krzywizny linii poziomych, odchylenie szybu od pionu oraz krzywizna szybu. Osiadania, jako zjawisko najlepiej poznane i opisane odpowiednimi formułami matematycznymi nie będą w artykule omawiane, a opracowanie wzorów na odchylenie szybu od pionu i krzywiznę szybu przewiduje się w następnej publikacji autora.

Dla pozostałych deformacji, aczkolwiek bezpośrednio wynikających z zaistniałych osiadań czy raczej różnic osiadań sąsiednich punktów powierzchni, brak było do niedawna ścisłych wzorów umożliwiających pełną analizę wpływu eksploatacji na powierzchnię pod kątem tych właśnie deformacji. W ostatnim czasie wzory takie zostały wyprowadzone w pracy [5] na pod-

stawie teorii T. Kochmańskiego. Treścią niniejszego opracowania jest alternatywne rozwiązanie tego samego zagadnienia. Ponadto, dzięki zastosowaniu równania powierzchni niecki osiadania, wyprowadzono równania różniczkowe izolinii osiadania, krzywej największego spadku oraz linii krzywiznowych i asymptotycznych niecki osiadania.

W artykule podano wzory ogólne dotyczące omawianych deformacji, ważne dla każdej teorii opisującej powierzchnię niecki osiadania oraz wzory szczegółowe dla eksploatacji w kształcie prostokąta, wyprowadzone na podstawie teorii T. Kochmańskiego [3]. Wzory ogólne, ujęte w pewien ciąg wynikania, są wzorami teorii pola skalarnego [4] i geometrii różniczkowej [1] odpowiednio przystosowanymi dla potrzeb niniejszego opracowania.

Wzory szczegółowe dotyczą eksploatacji pokładu poziomego.

2. Nachylenia terenu

2.1. Wzory ogólne

Załóżmy, że znane nam jest równanie powierzchni niecki osiadania we współrzędnych prostokątnych:

$$W = W(x,y) \tag{1}$$

Wtedy nachylenie przekroju pionowego niecki równoległego do osi x w dowolnym punkcie (x,y) wyniesie:

$$T_x(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x} \tag{2}$$

Analogicznie mamy w kierunku równoległym do osi y:

$$T_y(x,y) = \frac{\partial W}{\partial y} \tag{3}$$

W celu określenia nachylenia niecki w punkcie (x_0,y_0) i w kierunku dowolnej półprostej p o równaniach:

$$x = x_0 + t\cos\alpha \tag{4}$$

$$y = y_0 + t\sin\alpha \tag{5}$$

gdzie:

t - parametr; $t \geq 0$

α - kąt nachylenia półprostej p do osi x,

obliczamy tzw. pochodną kierunkową:

$$T_p(x,y) = \frac{\partial W}{\partial p} = T_x(x,y) \cos\alpha + T_y(x,y) \sin\alpha \tag{5}$$

Kierunek największego nachylenia znajdziemy rozwiązując względem α równanie:

$$\frac{dT_p}{d\alpha} = 0$$

Otrzymamy stąd:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{T_y}{T_x} \tag{6}$$

gdzie:

α_m - kąt między osią x, a kierunkiem największego nachylenia niecki.

Na podstawie związków (5) i (6) obliczymy wielkość największego nachylenia (długość gradientu funkcji skalarnej W) niecki w danym punkcie:

$$T_m(x,y) = |\operatorname{grad} W| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \tag{7}$$

Korzystając z (6) określimy równanie różniczkowe linii największego spadku:

$$y'(x) = \frac{T_y(x,y)}{T_x(x,y)} \tag{8}$$

Łatwo wykazać, że kierunek nachylenia zerowego, czyli izolinii osiadania w danym punkcie jest prostopadły do kierunku największego nachylenia. Mamy więc:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{T_x}{T_y} \tag{9}$$

gdzie:

α_0 - kąt między osią x, a kierunkiem nachylenia zerowego.

Analogicznie do (8) otrzymujemy na podstawie wzoru (9) równanie różniczkowe izolinii osiadania:

$$y'(x) = -\frac{T_x(x,y)}{T_y(x,y)} \tag{10}$$

Jako uzupełnienie warto jeszcze odnotować wynikające z (5) wzory transformacyjne na nachylenia powierzchni w kierunkach równoległych do osi układu (ξ,η) obróconego względem układu (x,y) o kąt α :

$$\begin{aligned} T_\xi &= T_x\cos\alpha + T_y\sin\alpha \\ T_\eta &= -T_x\sin\alpha + T_y\cos\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

Z (11) wynika, wiadomy już na podstawie (7) związek:

$$T_x^2 + T_y^2 = T_\xi^2 + T_\eta^2 = T_m^2 \tag{12}$$

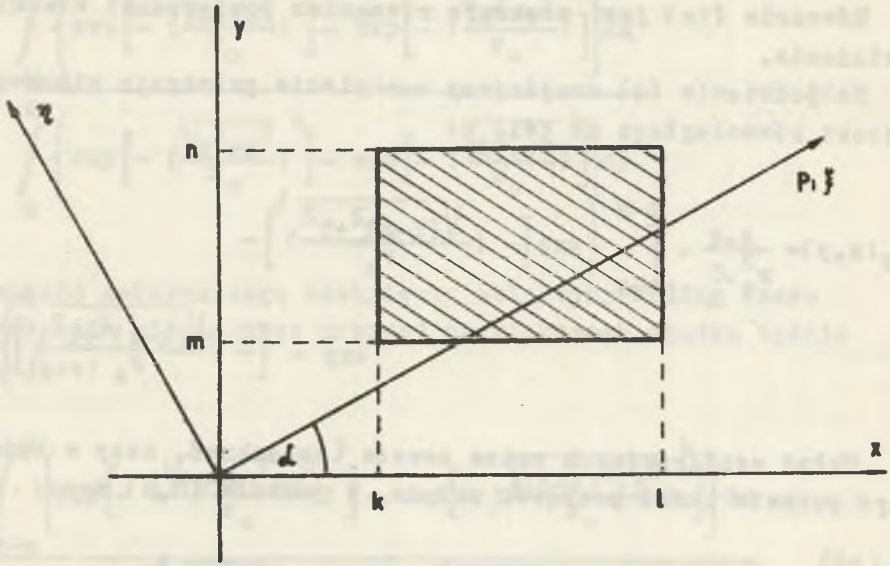
czyli suma kwadratów nachyleń w dwu prostopadłych kierunkach jest wielkością stałą dla danego punktu i równa się kwadratowi nachylenia maksymalnego w tym punkcie.

2.2. Wzory szczegółowe

Rozpatrzmy eksploatację w kształcie prostokąta, z którą najczęściej spotykamy się w praktyce górniczej.

Osiadanie punktu leżącego w początku układu współrzędnych pod wpływem wybrania prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych (rys. 1) wyraża się w teorii T. Kochmańskiego wzorem:

$$W = \frac{a.g}{r_0^2.C} \int_k^l dx \int_m^n \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right)^b\right] dy$$



Rys. 1. Rzut rozpatrywanego kształtu eksploatacji na powierzchnię ziemi

gdzie:

a – współczynnik zależny od sposobu kierowania stropem,

g – grubość pokładu,

r_0, b – parametry teorii

$r_0^2 \cdot C$ – czynnik normujący całkę we wzorze;

$$C = C(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{b}{2}}\right] d\eta$$

Dla obliczenia osiadania dowolnego punktu (x,y), należy w powyższym wzorze odpowiednio zmienić granice całkowania. Mamy więc:

$$W(x,y) = \frac{a \cdot g}{r_0^2 \cdot C} \cdot \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{r_0}\right)^b\right] dt \qquad (1a)$$

Równanie (1a) jest szukanym równaniem powierzchni niecki osiadania.

Na podstawie (2) znajdujemy nachylenie przekroju pionowego niecki równoległego do osi x:

$$T_x(x,y) = \frac{a \cdot g}{r_o^2 \cdot C} \cdot \int_{m-y}^{n-y} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+t^2}}{r_o} \right)^b \right] - \exp - \left[-\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+t^2}}{r_o} \right)^b \right] \right\} dt$$

Układ współrzędnych można zawsze tak dobrać, żeby w badanym punkcie leżał początek układu. W punkcie (0,0) mamy:

$$T_x = \frac{a \cdot g}{r_o^2 \cdot C} \int_m^n \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k^2+y^2}}{r_o} \right)^b \right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{l^2+y^2}}{r_o} \right)^b \right] \right\} dy \qquad (2a)$$

gdzie:

k,l,m,n - odległości badanego punktu od odpowiednich krawędzi eksploatacji

Analogiczny wzór otrzymujemy dla kierunku osi y:

$$T_y = \frac{a \cdot g}{r_o^2 \cdot C} \cdot \int_k^l \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{r_o} \right)^b \right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{n^2+x^2}}{r_c} \right)^b \right] \right\} dx \qquad (3a)$$

Obliczone wzorem (2a) lub (3a) nachylenie niecki będzie dodatnie, gdy teren opada w dodatnim kierunku danej osi, a ujemnie, gdy teren wznosi się. To samo dotyczy nachylenia niecki w kierunku dowolnej półprostej (wzór 5) wychodzącej z badanego punktu.

Kierunek największego nachylenia w punkcie (0,0) znajdziemy ze wzoru:

$$tg\alpha_m = \frac{\int_k^l \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{r_o}\right)^b\right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{n^2+x^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\} dx}{\int_m^n \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{k^2+y^2}}{r_o}\right)^b\right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{l^2+y^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\} dy} \tag{6a}$$

Wielkość maksymalnego nachylenia obliczymy według wzoru (6). Równanie różniczkowe krzywej największego spadku będzie następujące:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_{k-x}^{l-x} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(m-y)^2+s^2}}{r_o}\right)^b\right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(n-y)^2+s^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\} ds}{\int_{m-y}^{n-y} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right] - \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\} dt} \tag{8a}$$

Równanie (8a) jest rozwiązalne jedynie metodami przybliżonymi, przy zadanym z góry warunku początkowym. Punktem osobliwym równania (węzeł) jest punkt leżący nad środkiem wybranego prostokąta $(\frac{k+l}{2}, \frac{m+n}{2})$.

Kierunek nachylenia zerowego (kierunek izolinii osiadania w danym punkcie) obliczymy ze wzoru:

$$tg\,\alpha_o = \frac{-1}{tg\alpha_m}$$

czyli

$$\alpha_o = \alpha_m \pm 90^o \tag{9a}$$

I wreszcie równanie różniczkowe izolinii osiadania będzie mieć postać:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\int_{m-y}^{n-y}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right]-\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\}dt}{\int_{k-x}^{l-x}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(m-y)^2+s^2}}{r_o}\right)^b\right]-\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(n-y)^2+s^2}}{r_o}\right)^b\right]\right\}ds} \tag{10a}$$

Punktem osobliwym równania (środek) jest punkt $\left(\frac{k+l}{2}, \frac{m+n}{2}\right)$.

Rozwiązanie równania różniczkowego izolinii osiadania:

$$\int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right]dt = D \tag{12}$$

gdzie:

D - stała całkowania.

Przy danym warunku początkowym (x_o, y_o) mamy:

$$D = W(x_o, y_o) \cdot \frac{r_o^2 \cdot C}{a \cdot g} = \int_{k-x_o}^{l-x_o} dx \int_{m-y_o}^{n-y_o} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_o}\right)^b\right]dy$$

3. Krzywizny przekrojów pionowych niecki

3.1. Wzory ogólne

Krzywizna przekroju pionowego w dowolnym punkcie (x,y) i w kierunku równoległym do osi x wyniesie:

$$\varkappa_x = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{(1 + T_x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Biorąc pod uwagę, że mianownik powyższego wyrażenia w przypadku niecki osiadania niewiele różni się od jedności, można przyjąć:

$$K_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{14}$$

gdzie:

K_x – przybliżona krzywizna przekroju pionowego równoległego do osi x.

Analogiczny wzór otrzymamy dla kierunku równoległego do osi y:

$$K_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \tag{15}$$

W celu określenia krzywizny przekroju pionowego w punkcie (x_0, y_0) i w kierunku półprostej p o równaniach parametrycznych (4) weźmy pod uwagę równanie wektorowe krzywej powstałej z przecięcia się płaszczyzny pionowej przechodzącej przez półprostą p z powierzchnią niecki osiadania:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(x(t), y(t), z(t)) \tag{16}$$

gdzie:

$$x(t) = x_0 + t \cos\alpha$$

$$y(t) = y_0 + t \sin\alpha$$

$$z(t) = W(x(t), y(t))$$

Krzywizna tak określonej krzywej wyniesie:

$$\varkappa_p = \frac{|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}|}{|\dot{\bar{r}}|^3} = \left[\frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos^2\alpha + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \sin^2\alpha}{(1 + T_p^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{t=0}$$

gdzie:

T_p – nachylenie niecki osiadania w kierunku półprostej p (wzór 5)

Przyjmując analogicznie jak wyżej $T_p^2 \cong 0$ oraz oznaczając:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = K_{xy} \tag{17}$$

gdzie:

K_{xy} – przybliżona wielkość skręcenia geodezyjnego przekroju pionowego równoległego do osi x

otrzymamy:

$$K_p = K_x \cdot \cos^2\alpha + 2K_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + K_y \sin^2\alpha \tag{18}$$

gdzie:

K_p – krzywizna przybliżona przekroju pionowego w kierunku półprostej p

Na podstawie wzoru (18) łatwo jest wyprowadzić wzory transformacyjne na krzywizny i skręcenie geodezyjne przekrojów pionowych w kierunkach równoległych do osi układu (ξ, η) obróconego względem układu (x,y) o kąt α:

$$\begin{aligned} K_\xi &= K_x \cos^2\alpha + 2K_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + K_y \sin^2\alpha \\ K_\eta &= K_x \sin^2\alpha - 2K_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + K_y \cos^2\alpha \\ K_{\xi\eta} &= \frac{1}{2}(K_y - K_x) \sin 2\alpha + K_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

Stąd wynika mogący mieć praktyczne zastosowanie związek:

$$K_\xi + K_\eta = K_x + K_y \tag{20}$$

czyli suma krzywizn w dwu prostopadłych kierunkach jest wielkością stałą dla danego punktu. Wzór (20) jest przy tym ściśle ważny dla każdej powierzchni o krzywiźnie regularnej.

Wykażemy teraz, że krzywizna przekroju pionowego w dowolnym kierunku bardzo mało różni się od krzywizny normalnej powierzchni niecki osiadania obliczonej w tym samym kierunku. Żeby móc przy tym skorzystać z uproszczonego zapisu wzorów według umowy sumacyjnej Einsteina, będziemy w pewnych przypadkach przyjmować następujące oznaczenie zmiennych:

$$x = u_1$$

$$y = u_2$$

Krzywizna normalna powierzchni wyraża się wzorem:

$$k_n = \frac{b_{ij}\, du_i\, du_j}{g_{ij}\, du_i\, du_j}$$

gdzie:

g_{ij}, b_{ij} – współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni

$g_{ij} = \overline{R}_i \cdot \overline{R}_j$

$\overline{R}_i$, $\overline{R}_j$ – pochodne równania wektorowego niecki osiadania $\overline{R}$ względem parametrów odpowiednio u_i i u_j $(i,j = 1,2)$

$$\overline{R}_i = \frac{\partial \overline{R}}{\partial u_i}; \quad \overline{R}_j = \frac{\partial R}{\partial u_j}$$

$$\overline{R} = (u_1; u_2, w(u_1, u_2))$$

$$b_{ij} = \bar{R}_{ij} \cdot \frac{\bar{R}_1 \times \bar{R}_2}{|\bar{R}_1 \times \bar{R}_2|}$$

$$\bar{R}_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial u_i \, \partial u_j}$$

W kierunku półprostej p krzywizna normalna powierzchni niecki osiadania wyniesie:

$$k_{np} = \mathcal{H}_p \cdot \sqrt{\frac{1 + T_p^2}{1 + T_m^2}} \qquad (21$$

gdzie:

T_m – maksymalne nachylenie niecki w danym punkcie (wzór 7)

Stąd widać, że z dużym przybliżeniem można przyjąć:

$$K_p \cong k_{np} \qquad (22)$$

dlatego w przypadku niecki osiadania, możemy utożsamiać pojęcia krzywizny normalnej i krzywizny przekroju pionowego.

Ze wzoru (21) wynika, że krzywizna geodezyjna obliczona w kierunku największego nachylenia wynosi zero.

Mamy bowiem:

$$k_{gp} = \sqrt{\mathcal{H}_p^2 - k_{np}^2} = \mathcal{H}_p \cdot T_{p+90^o} \qquad (23)$$

gdzie:

k_{gp} – wielkość krzywizny geodezyjnej w kierunku półprostej p,

T_{p+90°} – nachylenie niecki w kierunku tworzącym kąt $\alpha + 90^o$ z kierunkiem osi x;

$$T_{p+90^o} = -T_x \sin\alpha + T_y \cos\alpha$$

Jeśli kierunek półprostej p pokrywa się z kierunkiem największego nachylenia ($T_p = T_m$), to na podstawie (21) zachodzi równość $\mathcal{H}_p = k_{np}$, czyli $k_{gp} = 0$. W danym przypadku mamy zresztą $T_p + 90^o = 0$, ponieważ w kierunku prostopadłym do kierunku największego nachylenia występuje nachylenie zerowe.

Idąc dalej śladem tego rozumowania stwierdzamy, że linie największego nachylenia są liniami geodezyjnymi, ponieważ krzywizna geodezyjna tych linii jest tożsamościowo równa zeru. Linie największego nachylenia realizują więc najkrótsze połączenia na powierzchni niecki osiadania między punktami tych linii.

Przybliżona równość (22) ma duże znaczenie praktyczne, pozwoli bowiem, w oparciu o wzory geometrii zewnętrznej powierzchni określić wielkości ekstremalne krzywizn i kierunki krzywizn ekstremalnych (krzywizny główne i kierunki główne).

Najmniejszą i największą wartość krzywizny w danym punkcie obliczymy z równania kwadratowego:

$$K^2 - 2HK + K_G = 0$$

gdzie:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{22}}{g}$$ – krzywizna średnia powierzchni,

$K_G = \frac{b}{g}$ – krzywizna Gaussa,

g,b – wyróżniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Stosując przyjęte w niniejszej pracy oznaczenia, otrzymamy:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{(1 + T_x^2)K_y - 2T_xT_yK_{xy} + (1 + T_y^2)K_x}{(1 + T_m^2)^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{1}{2}(K_x + K_y)$$

$$K_G = \frac{K_x \cdot K_y - K_{xy}^2}{(1 + T_m^2)^{\frac{3}{2}}} \cong K_x \cdot K_y - K_{xy}^2 \qquad (24)$$

Stąd krzywizny główne wyniosą:

$$K_{1,2} = \frac{1}{2}(K_x + K_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(K_x - K_y)^2 + K_{xy}^2} \qquad (25)$$

Natomiast kierunki główne znajdziemy z równania różniczkowego linii krzywiznowych (linie mające w każdym swym punkcie kierunek główny):

$$\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 + \frac{g_{22}b_{11} - g_{11}b_{22}}{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}} \cdot \frac{du_2}{du_1} - 1 = 0$$

W konkretnym punkcie wyrażenie $\frac{du_2}{du_1}$ oznacza bowiem kierunek stycznej do linii krzywiznowej, czyli kierunek główny w tym punkcie. Zastępując więc $\frac{du_2}{du_1}$ przez $tg\varphi$ otrzymamy (z pominięciem wielkości małych wyższego rzędu):

$$tg\varphi = \frac{K_y - K_x \pm \sqrt{(K_x - K_y)^2 + 4K_{xy}^2}}{2K_{xy}}$$

co w prostszy sposób można zapisać następująco:

$$tg\,2\varphi = \frac{2K_{xy}}{K_x - K_y} \qquad (26)$$

gdzie:

φ – kąt między kierunkiem głównym, a osią x.

Jak łatwo widzieć równość (26) określa dwa ortogonalne kierunki główne (w punktach nieumbilikalnych), które odpowiadają największej i najmniejszej wartości krzywizn przekrojów pionowych w danym punkcie.

Wracając do równania linii krzywiznowych, to według przyjętych oznaczeń i uproszczeń zapiszemy je w postaci:

$$K_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (K_x - K_y)\frac{dy}{dx} - K_{xy} = 0 \qquad (27)$$

przy czym wielkości K_x, K_y, K_{xy} muszą tu być obliczone w punkcie bieżącym (x,y).

Iloczyn pierwiastków równania (27) wynosi - 1, więc określa ono dwie ortogonalne rodziny linii.

Wzory (25) można również otrzymać bezpośrednio ze wzorów transformacyjnych (19) [2]. Autor wybrał nieco dłuższy sposób wyprowadzenia tych wzorów, żeby uzasadnić stosowanie pojęć dotyczących krzywizny normalnej w odniesieniu do krzywizny przekrojów pionowych. Przy okazji też został podany uproszczony wzór na krzywiznę gaussowską powierzchni (24), w oparciu o którą bada się położenie otoczenia danego punktu powierzchni względem płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Istnieje następująca klasyfikacja punktów powierzchni w zależności od znaku krzywizny gaussowskiej w danym punkcie:

$K_G > 0$ - punkt eliptyczny (powierzchnia synklastyczna),

$K_G = 0$ - punkt paraboliczny

$K_G < 0$ - punkt hiperboliczny (powierzchnia antyklastyczna)

Jako uzupełnienie warto jeszcze odnotować równanie różniczkowe linii asymptotycznych (linie mające w każdym swym punkcie krzywiznę normalną równą zero):

$$b_{ji}\, du_i\, du_j = 0$$

które, po uproszczeniach, przyjmie postać:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-K_{xy} \pm \sqrt{-K_G}}{K_y} \qquad (28)$$

Prawa strona wzoru (28), obliczona w danym punkcie, określa kierunki zerowych krzywizn przekrojów pionowych w tym punkcie. W punkcie hiperbolicznym istnieją dwa takie kierunki, w parabolicznym - jeden, a w punkcie eliptycznym we wszystkich kierunkach krzywizna jest różna od zera.

Znany z geometrii różniczkowej wzór Eulera na krzywiznę normalną w dowolnym kierunku w sposób oczywisty zawiera się we wzorach transformacyjnych (19). To samo można powiedzieć o wzorze określającym skręcenie geodezyjne w zależności od krzywizn głównych.

3.2. Wzory szczegółowe

Dla eksploatacji jak na rys. 1, otrzymujemy na podstawie równania powierzchni niecki osiadania (1a) następujące wzory:

$$K_x = \frac{a.g.b}{r_o^3\,C} \cdot \frac{k-x}{r_o} \int_{m-y}^{n-y} \left[\frac{(k-x)^2+t^2}{r_o^2}\right]^{\frac{b}{2}-1}$$

$$\cdot \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right] dt - \frac{a.g.b}{r_o^3\,C} \cdot$$

$$\cdot \frac{l-x}{r_o} \int_{m-y}^{n-y} \left[\frac{(l-x)^2+t^2}{r_o^2}\right]^{\frac{b}{2}-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right] dt \qquad (14a)$$

$$K_y = \frac{agb}{r_o^3\,C} \cdot \frac{m-y}{r_o} \int_{k-x}^{l-x} \left[\frac{(m-y)^2+s^2}{r_o^2}\right]^{\frac{b}{2}-1}$$

$$\cdot \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{(m-y)^2+s^2}}{r_o}\right)^b\right] ds - \frac{agb}{r_o^3\,C} \cdot$$

$$\cdot \frac{n-y}{r_o} \int_{k-x}^{l-x} \left[\frac{(n-y)^2+s^2}{r_o^2} \right]^{\frac{b}{2}-1} \cdot \exp\left[- \left(\frac{\sqrt{(n-y)^2+s^2}}{r_o} \right)^b \right] ds \qquad (15a)$$

$$K_{xy} = \frac{ag}{r_o^2 C} \left\{ \exp\left[- \left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+(m-y)^2}}{r_o} \right)^b \right] - \right.$$

$$- \exp\left[- \left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+(n-y)^2}}{r_o} \right)^b \right] \Bigg\} - \frac{ag}{r_o^2 C} \cdot \left\{ \exp\left[- \left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+(m-y)^2}}{r_o} \right)^b \right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[- \left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+(n-y)^2}}{r_o} \right)^b \right] \right\} \qquad (17a)$$

Podane powyżej wzory określają krzywizny i skręcenie geodezyjne w kierunku osi układu dla punktu bieżącego (x,y). W tej postaci wzory te muszą być stosowane w przypadku równań różniczkowych (27) i (28). W innych przypadkach będziemy przyjmować początek układu współrzędnych w badanym punkcie, w związku z czym podstawimy we wzorach $x = y = 0$, przy czym wielkości k, l, m, n będą oznaczać odległości punktu od odpowiednich krawędzi rzutu eksploatacji na powierzchnię ziemi.

Krzywizny obliczone wzorami (14a) i (15a) będą dodatnie przy wypukłości terenu w górę, a ujemne przy wypukłości terenu w dół. Natomiast skręcenie geodezyjne osi x będzie dodatnie dla obszarów eksploatacji leżących w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, a ujemne dla obszarów w drugiej i czwartej ćwiartce.

4. Uwagi i wnioski

1. Załóżmy, że osie x i y mają kierunki główne. Wtedy na podstawie [1] (str. 247, twierdzenie 2) mamy:

$$g_{12} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = T_x \cdot T_y = 0$$

Widzimy więc, że w kierunku jednej z osi wystąpi nachylenie zerowe, a w takim razie w kierunku drugiej osi będzie nachylenie maksymalne.

Z powyższego wnioskujemy, że jeden z kierunków głównych krzywizn musi się pokrywać z kierunkiem nachylenia maksymalnego, a drugi z kierunkiem nachylenia zerowego.

2. Wyprowadzone wzory na nachylenia i krzywizny mogą być również stosowane do przewidywania wielkości tych deformacji w głębi górotworu. Będzie to tylko wymagać podstawienia do wzorów odpowiednich wielkości parametrów teorii, właściwych dla danej głębokości.

3. Przedstawiona metoda wyprowadzenia wzorów na nachylenia i krzywizny może mieć dalsze zastosowania. Obliczając bowiem wielkość dowolnej deformacji w punkcie bieżącym (x,y), można otrzymać, poprzez kolejne operacje różniczkowania (względnie całkowania), wszystkie deformacje pochodne. Tą metodą można np. otrzymać wzory na odkształcenia właściwe poziome, krzywiznę poziomą, kąt obrotu prostej poziomej, odchylenie szybu od pionu itp.

LITERATURA

[1] Goetz Abraham - Geometria różniczkowa, PWN Warszawa 1965 r.

[2] Huber Maksymilian - Teoria sprężystości, PWN Warszawa 1954 r.

[3] Kochmański Tadeusz - Obliczanie ruchów punktów górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej, PWN Warszawa 1956 r.

[4] Średniawa Bronisław, Weyssenhoff Jan - Mechanika środowisk rozciągłych, PWN Warszawa 1967 rok.

[5] Magdziorz Jan - Nowe metody obliczania ruchów górotworu nad eksploatacją - referat dla Wyższego Urzędu Górniczego, maj 1967 r.

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ ГОРНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Р е з ю м е

В статью включён вопрос исчисления наклона и кривизны мульды оседания при горной эксплуатации. Для нужд обсуждаемого вопроса применимы формулы теории плоского скалярного поля и дифференциальной геометрии определяющие величины этих деформаций в разных направлениях, направление и значение максимального наклона в точке а также направления и значения главных кривизн.

Опираясь на основную формулу теории Т. Кохманского составлено уравнение поверхности мульды оседания (при эксплуатации, как на рис. 1):

$$W(x,y) = \frac{a \cdot g}{r_o^2 \cdot C} \cdot \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{r_o}\right)^b\right] dt$$

где:

a - эксплуатационный коэффициент,

g - толщина эксплуатированного пласта,

b, r_o - параметры теории,

$$C = 2\pi \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^b} d\lambda$$

Вышеуказанное уравнение дало возможность вывести формулы на наклон, кривизну и геодезическое кручение в двух перпендикулярных направлениях, а это в свою очередь позволяет находить величины этих деформаций в любом направлении. Уравнение поверхности мульды оседания дало также возможность вывести дифференциальные уравнения изолиниии оседания, кривой наибольшего надения, асимптотических линий, а также линии, имеющих в каждой своей точке главное направление.

VERTICAL ROCK DEFORMATIONS RESULTING FROM THE MINING EXPLOITATION

S u m m a r y

The author deals in this paper with the problem of the settlement basin slope and curvature in mining exploitation. For the need of the discussed problem the formulae of the flat scalar field theory and differential geometry determining quantities of these deformations in different directions, the direction and maximum gradient value in the point as well as directions and values of main curvatures have been adapted.

On the ground of the fundamental T. KOCHMAŃSKI's formula, the equation of the settlement basin surface (in exploitation conditions, as in fig. 1) has been formed:

$$W(x,y) = \frac{a \cdot g}{r_o^2 \cdot C} \int_{k-x}^{l-x} ds \int_{m-y}^{n-y} \exp\left[-\left(\frac{s^2+t^2}{r_o}\right)^b\right] dt$$

where:

a - exploitation coefficient

g - thickness of the exploited stratum

b, r_0 - theory parameters

$$C = 2\pi \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^b} d\lambda$$

This equation makes possible formulae derivation for slope, curvature and geodesic contorsion in two vertical directions. That in turn enables finding of these deformations in any direction.

The equation of settlement basin surface enabled also derivation of settlement isolines differential equations, of maximum curva decline, curvature lines and asymptotic lines.