ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: GÓRNICTWO z. 41 Nr kol. 269

Krystian Kalinowski
Katedra Elektryfikacji Kopalń

ZASTOSOWANIE MASZYNY CYFROWEJ DO OKREŚLENIA OPTYMALNYCH WARUNKÓW WZBOGACENIA KOPALIN

Streszczenie: Posługując się metodą programowania dynamicznego podano algorytm obliczenia optymalnych warunków wzbogacenia kopalin, przy czym jako kryterium optymalności przyjęto maksymalną wartość wyprodukowanego koncentratu (1).

Danymi wyjściowymi do obliczeń to masy kopalin, ich krzywe wzbogacalności oraz współczynniki wartości c_i poszczególnych klas koncentratów.

Rozpatrzono również przypadek kiedy narzucone są ograniczenia w postaci konieczności wyprodukowania minimalnej ilości koncentratu o określonej jakości.

Ze względu na pracochłonność należy obliczenia wykonywać na maszynie cyfrowej.

Własności wzbogacania kopalin charakteryzowane są przez krzywe wzbogacalności:

$$\lambda = f(\gamma)$$

gdzie:

λ - procentowa zawartość zanieczyszczeń w koncentracie otrzymanego w wyniku wzbogacania kopaliny,

γ - procentowa zawartość koncentratu o zanieczyszczeniu λ w kopalinie.

Są one monotonicznie rosnące, oznacza to, że im większa jakość koncentratu (o mniejszym zanieczyszczeniu) tym mniej można go otrzymać z danej ilości kopaliny.

Ponieważ jednak większa jakość koncentratu zwiększa jego wartość (np. cenę sprzedaży), problem optymalizacji jest oczywisty.

Optymalizacja będzie polegała na określeniu alokacji mas zasobów różnych typów kopalin (o różnych krzywych wzbogacalności) tak by wartość produktów wyjściowych była maksymalna. Należy więc znaleźć takie m_{ij} by

$$Z(m_{ij}) = \max\left[c_1 g_1(m_{11}, m_{12} \ldots m_{1k}) + c_2 g_2(m_{21}, m_{22} \ldots m_{2k}) + \right.$$

$$\left. + \ldots c_N g_N(m_{N1}, m_{N2}, \ldots, m_{Nk})\right] \tag{1}$$

przy warunku

$$m_{ij} \geqslant 0$$

$$m_{11} + m_{21} + \ldots m_{N1} = M_1$$

$$m_{12} + m_{22} + \ldots m_{N2} = M_2$$

$$m_{1k} + m_{2k} + \ldots + m_{Nk} = M_k$$

$$i + 1,2,\ldots N, \quad j = 1,2,\ldots K$$

gdzie:

Z - całkowita wartość wyprodukowanych koncentratów

m_{ij} - masa j-tej kopaliny przeznaczona na wzbogacenie do i-tej klasy,

$g_i(m_{ij})$ - maksymalna masa koncentratu - i-tej klasy otrzymanej w wyniku zmieszania koncentratów pochodzących od $m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{ik}$

N - ilość klas koncentratów

K - ilość typów kopalin

c_i - współczynnik wartosci i-tej klasy koncentratu

Funkcja $g_i(m_{i1}, m_{i2} \ldots m_{ik})$ ma następującą postać:

$$g_i(m_{i1}, m_{i2} \ldots m_{ik}) = \gamma_{i1} m_{i1} + \gamma_{i2} m_{i2} + \ldots + \gamma_{ik} m_{ik}$$

przy czym $\gamma_{i1}, \gamma_{i2} \gamma_{ik}$ wyznacza się z układu równań:

$$Q_{i1}(\gamma_{i1}) = Q_{i2}(\gamma_{i2}) = \ldots Q_{ik}(\gamma_{ik})$$

$$\sum_{j=1}^{K} (Q_{ij} - \lambda_i \gamma_{ij}) m_{ij} = 0 \tag{3}$$

gdzie:

$$Q = \lambda j$$

$$Q' = \frac{dQ}{dj}$$

Rozwiązanie zagadnienia dla K = 1 jest proste:

$$Z = \max \left\{ c_i j_i M \right\} \qquad i = 1, 2 \ldots N$$

Wartość j_i odpowiada w tym przypadku maksymalnemu zanieczyszczeniu i tej klasy (wyznacza się z krzywej wzbogacalności) Wystarczy więc obliczyć iloczyny $c_1 j_i$ przy czym najkorzystniej jest wzbogacić całą masę kopaliny do klasy dla której iloczyn ten przyjmuje maksymalną wartość.

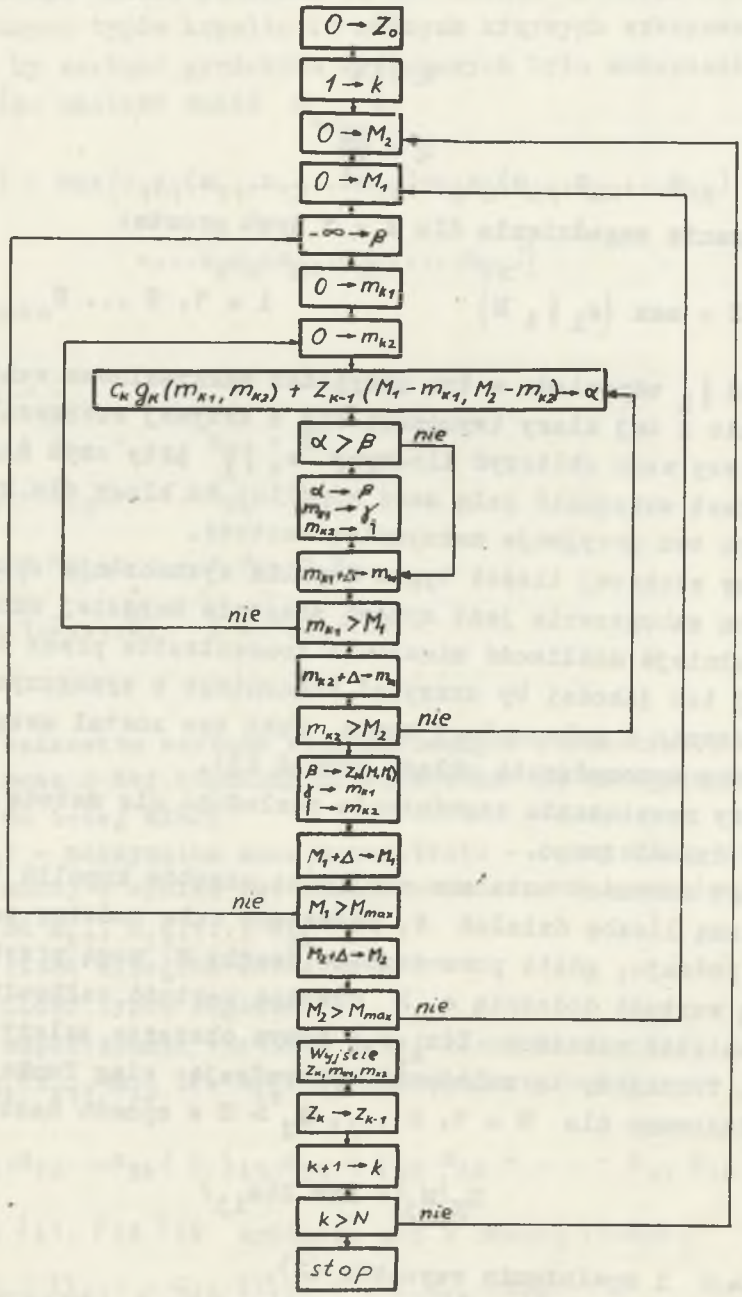
Przy większej ilości typów kopalin wyznaczenie optymalnego sposobu wzbogacenia jest sprawą znacznie bardziej skomplikowaną. Istnieje możliwość mieszania koncentratów przez dobranie takiej ich jakości by otrzymać koncentrat o wymaganym zanieczyszczeniu i maksymalnej masie. Fakt ten został uwzględniony przez wprowadzenie układu równań (3).

Przy rozwiązaniu zagadnienia posłużono się metodą programowania dynamicznego.
Zamiast rozważać ustalone wielkości zasobów kopalin M_j i ustaloną liczbę działań N, rozważano całą rodzinę zagadnień tego rodzaju, gdzie poszczególne zasoby M_j mogą przybierać dowolną wartość dodatnią a N dowolną wartość całkowitą.

Ponieważ maksimum $Z(m_{ij})$ w danym obszarze zależy od $\{M_j\}$ i N, formujemy tę zależność wprowadzając ciąg funkcji $Z_N\{M_j\}$ zdefiniowany dla $N = 1, 2 \ldots, M_j > 0$ w sposób następujący.

$$Z_N\{M_j\} = \max Z(m_{ij})$$

$m_{ij} > 0$ i spełnieniu warunków (2).
Funkcja Z_N jest więc optymalną wartością N - klas koncentratów wyprodukowanych z kopalin o masach $M_1, M_2, \ldots, M_k$.


0 → Z₀
1 → k
0 → M₂
0 → M₁
-∞ → β
0 → m_k1
0 → m_k2
c_k g_k(m_k1, m_k2) + Z_k-1 (M₁ - m_k1, M₂ - m_k2) → α
α > β
nie
α → β
m_k1 → γ
m_k2 → j
m_k1 + Δ → m_k1
nie
m_k1 > M₁
m_k2 + Δ → m_k2
m_k2 > M₂
nie
β → Z_k(M₁,M₂)
γ → m_k1
j → m_k2
M₁ + Δ → M₁
nie
M₁ > M_max
M₂ + Δ → M₂
M₂ > M_max
nie
Wyjście
Z_k, m_k1, m_k2
Z_k → Z_k-1
k + 1 → k
k > N
nie
stop

Rys. 1

Korzystając z zasady optymalności R. Bellmana L (1) można napisać równanie rekurencyjne wiążące Z_N i Z_{N-1}

$$Z_N \{M_j\} = \max_{\{m_{Nj}\}} \left[c_N\, g(m_{N1}, m_{N2} \ldots m_{Nk}) + Z_{N-1}\,(M_1-m_{N1}, M_2-m_{N2})\right] \quad 4$$

$$m_{Nj} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

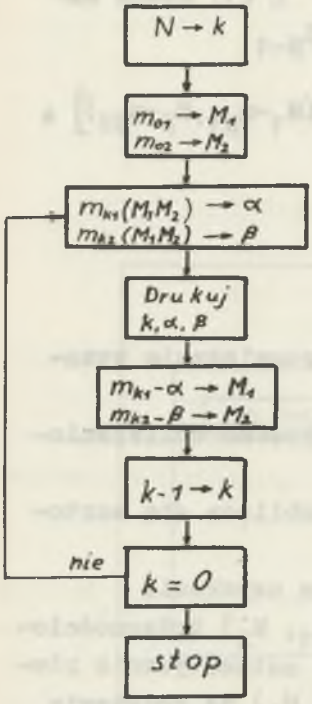
Ze względu na wielowymiarowość problemu, rozwiązanie wymaga użycia cyfrowej maszyny matematycznej.

Na rys. 1 pokazany jest schemat blokowy procesu obliczeniowego dla dwóch zasobów kopalin.

Na podstawie równania rekurencyjnego (4) oblicza się wartości $z_k(M_1, M_2)$ w oparciu o $z_{k-1}(M_1, M_2)$.
Aby uniknąć układania odrębnych programów dla uzyskania $z_1(M_1, M_2)$ wprowadza się nową funkcję $z_0\,(M_1, M_2)$ tożsamościowo równą zeru. Obszar $z_0(M_1, M_2)$ jest wtedy automatycznie równy zeru. Maszyna może więc wyznaczyć $z_1(M_1, M_2)$ na podstawie $z_0(M_1\ M_2)$ tak samo, jak wyznacza $z_k(M_1, M_2)$ w oparciu o $z_{K-1}(M_1\ M_2)$.

Wyniki wyprowadza się z wyjścia (krok 20) w postaci tablic $z_k(M_1, M_2)$, $m_{k1}(M_1, M_2)$, $m_{k2}(M_1\ M_2)$.
Posłużą one dla wyznaczenia optymalnej alokacji zasobów kopalin i wobec tego należy je zapisać na taśmie.
Obliczenie wartości m_{k1}, m_{k2} odbywa się według schematu blokowego rys. 2. Wykorzystano tu fakt, że ostatnia tablica daje początkową alokację dla procesu obejmującego N - klas koncentratów, co z kolei wyznacza początkowy zasób dla zagadnienia (N-1) rodzajów klas koncentratów. Przedostatnia tablica wyznacza wtedy optymalną drugą decyzję. Szukane wartości m_{k1}, m_{k2} można odczytać z tablic $m_{k1}\,(M_1, M_2)$, $m_{k2}\,(M_1, M_2)$.

W podobny sposób można rozwiązać zagadnienie optymalizacji kiedy do ograniczeń (2) dochodzą dodatkowe warunki odnośnie ilości wyprodukowania koncentratu danej klasy.



Rys. 2

Problem ten można sformułować w następujący sposób: należy określić takie wartości m_{ij}, m'_{ij} by

$$Z\{m_{ij}, m'_{ij}\} = \max \left[c_1 g_1(m_{11}, m_{12} \ldots m_{1k}) + c_2 g_2(m_{21}, m_{12} \ldots m_{2k}) + \ldots + c_N g_N(m_{N1}, m_{N2} \ldots m_{Nk})\right] \quad (5)$$

przy warunkach:

$$m_{11} + m_{21} + \ldots + m_{N1} + m_{L1} = M_1$$

$$m_{12} + m_{22} + \ldots + m_{N2} + m'_{12} = M_2 \quad (6)$$

$$m_{1k} + m_{Lk} + \ldots m_{Nk} + m'_{1k} = M_k$$

$$g'_1(m'_{11}, m'_{12}, \ldots m'_{1k}) = A_1 \quad (7)$$

gdzie:

$l = 1, 2 \ldots k$

A_l - założona ilość koncentratu klasy l.

Zakłada się, że ilość nadawy M_1, M_2 ... M_k jest wystarczająca by zostały spełnione warunki (6, 7).

Rozwiązując zagadnienie przy pomocy mnożnika Lagrange'a zadanie sprowadza się do wyznaczenia maksimum nowej funkcji.

$$Z'(m_{ij}, m'_{11}) = \max \left[c\, g(m_{11}\, m_{12} \ldots m_{1,2}) + c_2 g_2(m_{21}, m_{22} \ldots m_{2k}) + \ldots c_N g_N(m_{N1}, m_{N1} \ldots m_{Nk}) + a_1 g'_1(m'_{11}, m'_{12}, \ldots m'_{1k})\right]$$

przy warunku (6).

Przyjmując wartości a_l zadanie jest identyczne z rozwiązanym już poprzednio.

Można więc napisać

$$m_{ij} = m_{ij}\ (a_1)$$

$$m'_{1j} = m_{1j}\ (a_1)$$

Metodę iteracji wyznacza się takie a_1 by spełnione było

$$g_1(m_{11}\ (a_1),\ m_{12})(a_1),\ \ldots\ m_{1k}(a_1)) = A_1$$

Należy również zaznaczyć L [1], że $A_1\ (a_1)$ ma charakter monotoniczny co znacznie upraszcza obliczenia.

Ponieważ nie wykonano narazie żadnych obliczeń dla konkretnych sytuacji ruchowych, nie można nic powiedzieć o opłacalności wykonywania takich obliczeń.

LITERATURA

[1] Bellman R.E., Dreyfus S.E.: Programowanie dynamiczne PWE W-wa 1967.