Dyr 1

p. 302

Inż. Zygmunt Laskowski,

S-75

BIBLIOTEKA 35

S-02

TYCZENIE TRAS

623
Inż. Zygmunt Laskowski,
35 B
S-92
17355 II

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM XXII.

PROF. K. SKIBIŃSKI.

TYCZENIE TRAS

DRÓG, KOLEI ŻELAZNYCH, KANAŁÓW SPŁAWNYCH, REGULOWANYCH RZEK i t. d.

PODRĘCZNIK DLA INŻYNIERÓW I GEOMETRÓW

CZĘŚĆ I: OPISOWA.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

WE LWOWIE.
NAKŁADEM AUTORA.
Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE.
1909.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach

136583

Przedmowa.

Podręczniki używane przez inżynierów do tyczenia tras, zawierają przeważnie mało co więcej prócz tabel służących do tyczenia łuków dwoma metodami i do tyczenia parabolicznych krzywych przejściowych. A jednak gdy się rozejrzy w dotyczącej literaturze, okaże się, że w przedmiocie wynajdywania różnych metod tyczenia prostych i łuków, w rozwiązywaniu zawilszych zagadnień, nareszcie w tendencyi zastąpienia używanych krzywych przejściowych innemi krzywemi, — znachodzi się mnóstwo doskonałych prac rozrzuconych to w dziełach mniej znanych, to w czasopismach, szczególnie pracom geodetycznym poświęconych.

Zebranie najważniejszych z tych prac w jedną całość w podręczniku polskim, któryby wyrugował dotychczas używane obce podręczniki, nadto podanie sposobów rozwiązywania trudnych zagadnień, ustalenie granic dopuszczalności stosowania różnych metod i t. d., — jest zadaniem niniejszej pracy.

Podręcznik składa się z dwóch części. Część pierwsza, opisowa, zawiera w I rozdziale opis i teoretyczne uzasadnienia wszelkich metod tyczenia, jakoteż wskazówki do rozwiązywania zagadnień; w II rozdziale są omówione krzywe przejściowe. Na dodanym zbiorze rachowanych przykładów może uczący się wyćwiczyć w przeprowadzaniu potrzebnych obliczeń.

Część druga, ujęta w mały format, wygodny do użycia w polu, zawiera tabele liczbowe, po części o wiele obszerniejsze niż zwykle używane.

Osądzenie, o ile sprostałem postawionemu zadaniu, należy do fachowych kolegów, których proszę o rzeczową krytykę, jakoteż o nadsyłanie uwag co do pożądanych zmian.

Za koleżeńską pomoc w układaniu tematu podręcznika, wyrażam profesorowi drwi Lásce szczere podziękowanie.

Lwów, w kwietniu 1909 r. *Autor.*

Literatura

po części zużytkowana w niniejszym podręczniku:

Doleżalek (tunel przez Gottard), Ztschr. des Arch. u. Ing. Vereines, Hannower, 1878 i 1880.

Dörflinger (tunel zwrotny koło Wasen), Ztschr. f. Verm. Wesen 1877.

Gelpke (tunel przez Gottard), Zivilng. 1870 i Ztschr. f. Verm. Wesen 1880.

Graf (kolej Albula), Schweiz. Bauztg. 1902.

Hecht (łuki kołowe i krzywe przejściowe), Drezno 1893.

Hecht (krzywe stożkowe), Drezno 1893.

Helmert (krzywe przejściowe), Akwizgran 1872.

Koppe (tunel przez Gottard), Ztschr. f. Verm. Wesen 1875, 1876, 1880 i Eisenbahn 1880.

Koppe (siedem tunelów zwrotnych kolei Gottarda), Eisenbahn 1880.

Leber, Raccordements etc. Paryż 1892.

D'Ocagne, Leçons sur la Topométrie, Paryż 1901.

Pestalozzi (tunel przez Gottard), Eisenbahn 1877.

Prévot, Topométrie, Paris, Dunod 1900.

Rosenmund (tunel przez Simplon), Schweiz. Bauztg. 1901, 1902.

Roczniki czasopisma: Zeitschrift für Vermessungs-Wesen.

Niektóre bardziej używane podręczniki:

Hecht, jak powyżej.

Helmert, jak powyżej.

Knoll-Weitbrecht (tyczenie krzywych), Sztutgart 1902.

Kröhnke (tyczenie krzywych), Lipsk 1896.

Pernt (tyczenie krzywych kołowych i przejściowych, metodą biegunową), Wiedeń 1903.

Petrlik (bardzo obszerny zbiór tabel), Praga 1903.

Sarrazin i Oberbeck (krzywe kołowe i przejściowe), Berlin 1899.

Polski podręcznik nieznanego autora, drukowany we Lwowie w drukarni Ossolineum w r. 1872.

SPIS RZECZY CZĘŚCI I.

Rozdział I.

Proste, łuki kołowe i paraboliczne.

Str.

§ 1. Tyczenie trasy 1
§ 2. Tyczenie linij prostych 1
a) Tyczenie punktów pośrednich 2
b) Przedłużanie linii prostej 6
§ 3 Nomogram do tyczenia prostych 6
§ 4. Tyczenie prostych w tunelach 7
§ 5. Tyczenie łuków kołowych 9
§ 6. Określenie elementów zasadniczych 9
§ 7. Tyczenie głównych punktów 11
§ 8. Postępowanie przy tyczeniu głównych punktów 13
§ 9. Kontrola rachunków 13
§ 10. Tyczenie punktów pośrednich 14
a) Metoda tangencyalna 14
b) Tyczenie od cięciwy 16
c) Tyczenie ze środka 18
d) Metoda biegunowa 19
e) Metoda stałych kątów 20
f) Metoda siecznych 21
§ 11. Tyczenie łuku bez użycia przyrządu kątomierniczego 22
§ 12. Wyznaczenie kierunku stycznej w dowolnym punkcie łuku . 27
§ 13. Badanie łuku istniejącego toru 30
§ 14. Poprawka odchyłki łuków z dwóch stron tyczonych 31
§ 15. Zadania 31
§ 16. Tyczenie serpentyn drogowych 33
§ 17. Tyczenie łuków o małym kącie wierzchołkowym 34
§ 18. Przystosowanie wytyczonego łuku do trasy 38
§ 19. Do dwóch w polu wytyczonych łuków poprowadzić wspólną styczną 39
§ 20. Z dowolnego punktu wytyczyć styczną do łuku w polu wytyczonego 41
§ 21. Tyczenie łuków budowli wodnych 41
§ 22. Tyczenie wypukłego brzegu 42
§ 23. Tyczenie wklęsłego brzegu 43
§ 24. Tyczenie łuków koszowych 46
§ 25. Tyczenie łuków koszowych o dwóch łukach 47

Str.
§ 26. Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni 49
§ 27. Zastosowanie § 26 51
§ 28. Łuk koszowy o małym kącie wierzchołkowym 52
§ 29. Łuk koszowy o trzech łukach 52
§ 30. Łuk w zastępstwie krótkiej prostej 54
§ 31. Tyczenie łuku koszowego w trudniejszych warunkach . . . 56
§ 32. Tyczenie łuku w tunelu 58
§ 33. Tyczenie łuku koszowego w tunelu 59
§ 34. Połączenie odchylonych prostych kierunków w tunelu . . . 59
§ 35. Przykłady tras kolejowych z tunelami 59
§ 36. Parabola drugiego rzędu 64
§ 37. Tyczenie paraboli 67

Rozdział II.

Krzywe przejściowe.

Str.
Wstęp 71
§ 38. Przechyłka toru kolejowego 72
§ 39. Ogólna teorya krzywej przejściowej 73
§ 40. Krzywa przechyłki toru, której rzędne są proporcyonalne do długości rzutu poziomego krzywej przejściowej 74
§ 41. Na podstawie krzywej § 40 wyprowadzone krzywe przejściowe 75
a) Klotoida 75
b) Lemniskata 76
c) Parabola sześcienna 77
§ 42. Krzywa przejściowa w założeniu, że przechyłkę toru przeprowadzi się podług zmiennego nachylenia 78
§ 43. Parabola sześcienna jako krzywa przejściowa 78
§ 44. Łuk kołowy z krzywą przejściową 82
§ 45. Łuk kołowy zostaje przesunięty 86
§ 46. Położenie stycznych i środka łuku pozostaje nienaruszone . 89
§ 47. Łuk pierwotny pozostaje nienaruszony, natomiast styczna zostaje przesunięta 90
§ 48. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy zbliża się do 180° 93
§ 49. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy jest bardzo mały . . . 95
§ 50. Zastosowanie krzywej przejściowej do budowli wodnych . . 95
§ 51. Krzywa przejściowa styczna do dwóch łuków kołowych . . . 97
§ 52. Tyczenie krzywej przejściowej od łuku kołowego 101
§ 53. Łuk koszowy z krzywemi przejściowemi 102
§ 54. Zastosowanie krzywych przejściowych dla przypadku, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest krótka . 103
§ 55. Zastosowanie krzywej przejściowej na istniejących torach . . 106
§ 56. Zastosowanie wzorów z § 55*b* dla $d = \frac{r}{20}$ 108
§ 57. Wyokrąglenie załomów spadków 109
§ 58. Zagadnienie 111
Zbiór przykładów 121

Uzupełnienia i ważniejsze usterki.

Do §§ 2, 6. 7 i 10 należą numera 1 do 10 zbioru przykładów.

Zastosowanie § 11c znajduje się w numerze 11 zbioru przykładów.

Str. 5 w wzorach na AB ma być y_B i x_B zam. y i x. Można także AB wyznaczyć z wzorów $\frac{x_A}{\cos y}$ i $\frac{y_A}{\sin y}$.

Str. 11 wiersz 8 z góry, zam. dz rzutu, ma być d z rzutu.

Str. 13 wiersz 1 z dołu ma być $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Str. 15 w. 8 z dołu w wzorze na x ma być Δ zam. A.

Str. 18 w. 1 z dołu ma być Topométrie, zam. Topographie.

Str. 23 w. 10 z dołu ma być $AB'-x$, zam. $A'B-x$.

Str. 29 po wierszu 6 z góry dodać: Dla $s=s_1$ jest $\frac{\varphi}{2}=\frac{\varphi_1}{2}=\frac{180-\mu}{2}$.

Str. 36 w. 12 z góry ma być A_1P_1, zam. A_1P_2.

Str. 50 u góry dodać: Oznaczmy kąty przy P_1 i P_2 literami α_1 i α_2.

Str. 53 w. 13 z dołu opuścić: „punkt P_2“, gdyż już był wytyczony.

Str. 57 w. 5 z góry ma być raczej: o promieniu r_2 i kącie α_2.

Str. 60 w 4 z góry dodać: „Promień r łuków wyjęto z projektu“.

Str. 74 w. 8 z dołu po słowach: „przedstawi się“, i w. 5 z dołu po słowie: „krzywej“ dodać: „prawie“.

Str. 79 w. 4 z dołu ma być $\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, zam. $\left(\frac{3}{2}\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Str. 93 w. 7 i 8 z góry, zam. „niemożliwe“, ma być: „utrudnione (ob. § 54)“.

Str. 94 w. 1 z dołu zam. „wz. 23“, ma być „nr. 23“.

Str. 103 w. 9 z dołu zam. „prosta P“, ma być „prosta p“.

Str. 104 w. 1 z dołu po znaku — brakuje litery p.

Str. 120 w. 12 z dołu zam. P_1O_2, ma być P_1O_1.

Str. 122 w. 6 z góry ma być $x=66{\cdot}0763$.

Str. 123 w. 10 z góry ma być 9·8814587, a w. 12 z góry być 9·6727341.

Str. 135 w. 5 z dołu ma być $\lg\operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2}=9{\cdot}1396320$.

Str. 137 w. 2 z góry ma być WP'_1, zam. WP_1.

Str. 143 w. 7 z dołu ma być 31·9753, zam. 31·9750.

Str. 144 w. 14 z góry ma być $t'=2{\cdot}0$, zam. $t'=20$

Str. 146 w. 8 z góry ma być w kącie $\varphi+\alpha$: 26·2,“ zam. 56·2“.

Na rys. 23 należy umieścić literę T na przecięciu prostych MN i SO.

„ „ 50*a* na lewym końcu stycznej w P brakuje litery M.

„ „ 51 należy wierzchołek wieloboku opisanego między A i B oznaczyć liczbą 1, między B i Q liczbą 2, a po Q liczbą 3.

„ „ 55 prosta O_1O_n nie musi być przedłużeniem promienia PO_1.

„ „ 57 należy środki kół oznaczyć przez O_1 i O_2.

„ „ 60 punkt Q' ma leżeć na przecięciu prostych O_1M i O_3Q; na prostej W_2W_3 ma być M', zam. M, zaś na końcu łuku koszowego brakuje litery P_2.

„ „ 61 na prostej W_2W_3 ma być t_4, zam. t_u.

„ „ 82 należy z i z_0 zamienić, zaś w punkcie, z którego wychodzi promień ρ, należy umieścić literę C.

„ „ 84 na stycznej WW_1 należy umieścić literę C pionowo nad P_c, zaś literę P' pionowo nad P.

„ „ 97 należy umieścić literę A na początku krzywej przejściowej.

ROZDZIAŁ I.

Proste, łuki kołowe i paraboliczne.

§ 1. Tyczenie trasy.

Pod trasą rozumiemy wytyczoną na gruncie oś drogi, kolei żelaznej, kanału spławnego, wodociągu lub brzeg regulowanej rzeki. Dla trasy opracowuje się projekt w sytuacyi (rzut poziomy trasy) i w profilu podłużnym (rzut pionowy trasy), a podług danych otrzymanych w tym projekcie, jakoteż podług punktów nawiązkowych, znajdujących się w naturze, przenosi się trasę z projektu na grunt. Tę czynność zowiemy tyczeniem trasy.

Każda trasa składa się:

1. z linij prostych,

2. z łuków kołowych, lub parabolicznych, a nadto na trasie kolejowej

3. z krzywych przejściowych, łączących proste z łukami.

W niniejszej pracy przedstawimy w I. rozdziale tyczenie na gruncie prostych i łuków, a w II. rozdziale tyczenie krzywych przejściowych.

§ 2. Tyczenie linij prostych.

Prosta jest dana przez dwa punkty przeniesione z projektu na grunt, leżące na tej prostej. Wytyczyć prostą znaczy wyznaczyć dowolną ilość punktów pośrednich, położonych bądźto między tymi dwoma punktami, bądź też poza nimi. Stąd powstają dwa zadania:

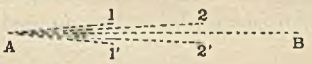
a) Tyczenie punktów pośrednich.

b) Przedłużanie linii prostej.

a) Tyczenie punktów pośrednich.

1. Metoda zwykła. Rys. 1. Dane w polu punkty A i B. Ustawiamy teodolit w A i tyczymy żerdki dokładnie w kierunku celowej AB.

Musimy o tem pamiętać, że wytyczyć linię prostą znaczy tyle, co wyznaczyć przekrój płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez dwa dane punkty tej prostej, z terenem. Jeżeli zatem oś obrotu lunety nie jest ściśle poziomą,



Rys. 1.

to oś celowa nie opisuje płaszczyzny pionowej, a rzut poziomy przekroju płaszczyzny, opisanej przez oś celową, z terenem, nie będzie identyczny z linią łączącą A i B.

Aby błąd stąd powstały wyrugować, tyczymy każdy punkt podwójnie, w obu położeniach lunety, a szukany punkt znajdziemy w połowie odległości 11', 22'...

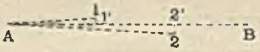
2. Metoda. Rys. 2. Tyczymy żerdki tylko w przybliżeniu w kierunku AB. W punkcie A odmierzamy kąty:

$$BA1=\alpha_1, \quad BA2=\alpha_2 \ldots$$

następnie mierzymy długość $A1=e_1$, $A2=e_2$... Odchylenia 1, 2... od prostej AB wyznaczą się z wzorów:

$$11'=e_1 \operatorname{tang} \alpha_1, \quad 22'=e_2 \operatorname{tang} \alpha_2 \ldots$$

Ponieważ kąty α_1, α_2, są bardzo małe, to możemy napisać:

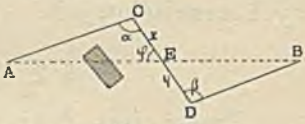


Rys. 2.

$$11'=\frac{e_1 \alpha_1''}{206265}, \quad 22'=\frac{e_2 \alpha_2''}{206265} \ldots$$

Te długości odczytamy z diagramu podanego na rys. 10. i tyczymy prostopadle do $A1$, $A2$..., przezco otrzymamy prawdziwe punkty 1', 2', 3'... prostej.

3. Metoda ogólna. Rys. 3. Jeżeli między punktami A i B są przeszkody (las, etc.), to obieramy punkty dogodne C, D i mierzymy: $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$, i kąty: α. β. Dla wyznaczenia pośredniego punktu E leżącego na prostej AB mamy równania, gdy oznaczymy CE przez x, ED przez y:



Rys. 3.

$$x+y=c=CD; \qquad (1)$$

następnie:

$$\frac{x}{a}=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}, \quad \frac{y}{b}=\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi} \text{ *)}$$

*) Funkcye trygonometryczne kątów zawiera tabela II. części II.

lub, gdy wykonamy dzielenie przez $\sin\varphi$:

$$\frac{x}{a}=\sin\alpha\operatorname{cotg}\varphi+\cos\alpha,\quad \frac{y}{b}=\sin\beta\operatorname{cotg}\varphi+\cos\beta,$$

a stąd:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a\sin\alpha}{x-a\cos\alpha}=\frac{b\sin\beta}{y-b\cos\beta},\ \text{więc:}$$

$$x\,b\sin\beta-ya\sin\alpha=-ab\sin(\alpha-\beta). \qquad (2)$$

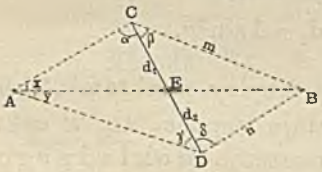
Równania 1. i 2. są to r ó w n a n i a z a s a d n i c z e t y c z e n i a o g ó l n e g o; one pozwolą wyznaczyć x i y. Mianowicie, gdy się wstawi wartość $y=c-x$ z (1) równania w (2) otrzyma się:

$$x=a\frac{c\sin\alpha-b\sin(\alpha-\beta)}{a\sin\alpha+b\sin\beta},\ \text{również:}$$

$$y=b\frac{c\sin\beta+a\sin(\alpha-\beta)}{a\sin\alpha+b\sin\beta}.$$

Dla $\alpha=\beta$, jest $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

Jeżeliby długości a i b na rys. 3. nie można zmierzyć, (np. gdy A i B są wieżami), to zmierzymy kąty α, β, γ, δ, jakoteż długość $CD=\Delta$ (Rys. 4.).



Rys. 4.

Punkt E na kierunku AB będzie wyznaczony, skoro wyznaczymy długość d_1, ewentualnie d_2. Oznaczmy tymczasem proste CB i BD literami m i n, to z trójkątów ACB, ADB i BCD, znajdziemy:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin x}=\frac{AB}{m}$$

$$\frac{\sin y}{\sin(\gamma+\delta)}=\frac{n}{AB}$$

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta}=\frac{m}{n}.$$

Wymnóżmy obie strony tych równań, a otrzymamy:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin y\sin\delta}{\sin x\sin(\gamma+\delta)\sin\beta}=1. \qquad (3)$$

*

Następnie z trójkątów AEC i AED:

$$\frac{d_1}{AE} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AE}{d_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin y}$$

a po obustronnem wymnożeniu:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}$$

Z (3) równania wynika, że:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \delta \sin (\alpha+\beta)}{\sin \beta \sin (\gamma+\delta)}, \text{ więc:}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \delta \sin \gamma \sin (\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta \sin (\gamma+\delta)}$$

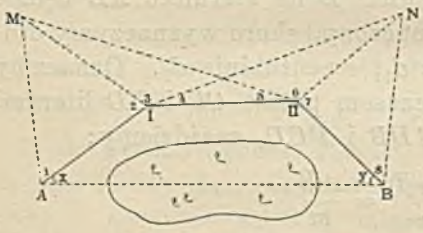
Podstawmy ten wyraz równy $\text{tang}^2\mu$, jeżeli μ jest kątem pomocniczym i dodajmy obustronnie $+1$, to:

$1+\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1+d_2}{d_2} = 1+\text{tang}^2\mu$. A gdy $d_1+d_2=\Delta$, zaś:

$$1+\text{tang}^2\mu = \frac{1}{\cos^2\mu}, \text{ to:}$$

$d_2 = \Delta \cos^2\mu$, a podobnie $d_1 = \Delta \sin^2\mu$.

4. Metoda ogólna. Rys. 5. Jeżeli między punktami A i B znajduje się las, to w celu wyznaczenia dokładnego kierunku AB położymy wokoło lasu wielobok $A\,I\,II\,B$ i obierzemy dwa dowolne punkty M i N tak położone, aby do M można celować z A, I i II, zaś do N z I, II i B. Zmierzymy kąty:



Rys. 5.

1 2 3 4 5 6 7 8. Długość I, II obierzemy dowolnie, równą b. Przez wyznaczenie kątów x i y będzie kierunek AB ustalony.

$$I\,M = b\,\frac{\sin 5}{\sin (3+4+5)}; \quad A\,I = I\,M\,\frac{\sin (1+2)}{\sin 1}$$

zatem:

$$A\,I = a = b\,\frac{\sin 5 \sin (1+2)}{\sin (3+4+5) \sin 1}$$

podobnie: $$B\,\mathrm{II}=c=b\frac{\sin 4\sin(7+8)}{\sin(4+5+6)\sin 8}$$

Następnie obliczymy współrzędne wieloboku $A\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,B$, obrawszy początek współrzędnych w A, oś odciętych w $A\,\mathrm{I}$, oś rzędnych prostopadle do $A\,\mathrm{I}$:

$$x_A=0 \quad x_\mathrm{I}=a \quad x_\mathrm{II}=x_\mathrm{I}+b\cos(2+3+4-180^0)$$
$$y_A=0 \quad y_\mathrm{I}=0 \quad y_\mathrm{II}=\quad b\sin(2+3+4-180^0)$$
$$x_B=x_\mathrm{II}+c\cos(2+3+4+5+6+7-360^0)$$
$$y_B=y_\mathrm{II}+c\sin(2+3+4+5+6+7-360^0)$$

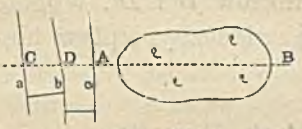
Ostatecznie jest $\operatorname{tang} x=\frac{y_B}{x_B}$.

W podobny sposób obliczy się $\operatorname{tang} y$, a dla kontroli ma być: $$x+y=(2+3+4+5+6+7)-360^0$$

Jeżeliby zależało także na poznaniu długości AB, wtedy nie można długości b przyjąć dowolnie, lecz trzeba jeden z boków a, b lub c zmierzyć, dwa inne boki podług powyższych wzorów obliczyć, następnie obliczyć x_B, y_B i $\operatorname{tang} x$. Długość AB obliczy się wzorów:

$$AB=\frac{y}{\sin x}, \quad \text{lub} \quad AB=\frac{x}{\cos x}$$

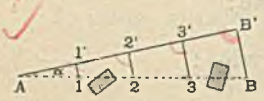
5. Metoda. Rys. 6. Przybliżony kierunek trasy AB znajdziemy, odmierzywszy na gruncie zmierzone w projekcie odstępy kilku przecięć linij AB z liniami parcel, od najbliższych granic parcel $(a, b, c...)$.



Rys. 6.

Również można za pomocą busoli taki przybliżony kierunek na gruncie wyznaczyć.

6. Metoda. Rys. 7. W celu wyznaczenia kilku punktów prostej AB, na której znajdują się przeszkody, tyczymy na wolnej przestrzeni pod małym kątem α prostą $1'$, $2'$, $3'$... tak daleko, aż będzie możność odrzucenia punktu B prostopadle na AB' i zmierzymy długość $A\,1'\,2'\ldots B'$, jakoteż BB'.

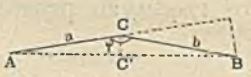


Rys. 7.

W diagramie rys. 10. wyszukamy linię kąta α, a na niej odczytamy wprost wartości $1'1$, $2'2$,... przynależnych do odstępów $A1'$, $A2'$... (z warunku, że $1'1=A1'\operatorname{tang}\alpha$...). Te

wartości odniesione na prostopadłych do AB', wyznaczą punkty 1, 2, 3... prostej AB.

7. Metoda. Rys. 8. Jeżeli między punktami A i B znajduje się wyniosłość, to przyjmiemy na niej punkt C, w pobliżu prostej AB, a punkt C', leżący na prostej AB wyznaczymy w następujący sposób: Mierzymy kąt φ dokładnie, zaś długości a i b tachymetrycznie. Wtedy jest w przybliżeniu powierzchnia $\Delta ACB = \frac{1}{2} ab \sin\varphi = \frac{1}{2}(a+b)CC'$, zatem

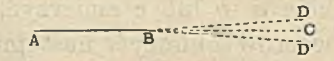


Rys. 8.

$$CC' = \frac{ab}{a+b} \sin\varphi.$$

b) Przedłużanie linii prostej. Rys. 9.

Błąd kolimacyjny *(k)* instrumentu wpływa oczywiście w całości na wynik. Jeżeli bowiem stojąc w punkcie B z instrumentem celujemy wstecz do A, poczem przerzucimy lunetę, to otrzymamy zamiast kierunku BC, kierunek BD, przyczem $\sphericalangle ABD = 180 - 2k$. Jeżeli teraz obrócimy limbus o 180°, znów celujemy do A i przerzucimy lunetę, to otrzymamy kierunek BD' po drugiej stronie prostej BC. Punkt prostej BC leży pośrodku odległości punktów D i D'. Wogóle przy tyczeniu prostych jest najbardziej widoczny wpływ błędów instrumentu na wynik pomiarów.



Rys. 9.

§ 3. Nomogram do tyczenia prostych. Rys. 10.

Przy tyczeniu prostych wypada często obrachować ilości

$$\varepsilon = e \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

dla bardzo małych kątów α. Możemy napisać:

$$\operatorname{tang} \alpha = \alpha'' \sin 1'' = \frac{\alpha''}{206265}, \quad \text{więc:}$$

$$\varepsilon = \frac{e\,\alpha''}{206265}$$

Jeżeli więc narysujemy e w skali $1 : M$ jako e_1, zaś ε w skali $1 : m$ jako ε_1, przyczem należy obrać liczbę M wielką w stosunku do m, to $e = e_1 M$, $\varepsilon = \varepsilon_1 m$.

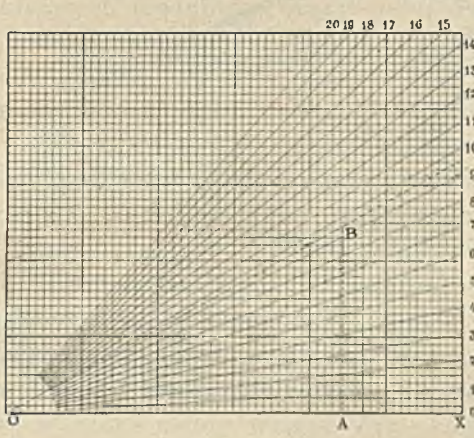
Po wstawieniu tych wartości we wzór na ε otrzymamy:

$$\varepsilon_1 m = \frac{e_1 M\alpha''}{206265}, \text{ czyli:}$$

$$\varepsilon_1 = e_1 \left(\frac{M\alpha''}{m\,206265} \right) = e_1 \operatorname{tang} \varphi,$$

gdzie: $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{M\alpha''}{m\,206265} \ldots a.$$

W celu otrzymania nomogramu rysujemy od punktu O promienie, nachylone do prostej Ox pod kątami φ, których tangens oblicza się z wzoru a. dla $\alpha = 1'$, $2'$, $3'$... i oznaczymy końce tych promieni przynależnymi kątami α. Jeżeli następnie na linii Ox odetniemy długość e w skali $1:M$ od O do A i wystawimy w A rzędną aż do przecięcia się z promieniem danego kąta α, w punkcie B, to AB mierzone w skali $1:m$ da szukaną długość ε.



Rys. 10.

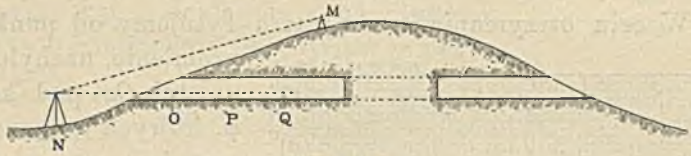
Przykład. W nomogramie na rys. 10., wykonanym na milimetrowym papierze, rysowano $\operatorname{tang} \varphi = 200 \operatorname{tang} \alpha$, czyli $M:m = 200$, zaczem i rzędne są wykreślone w skali 200 razy większej niż odcięte. Niech będzie dane $e = 44{\cdot}35\ m$, $\alpha = 9'30''$. Przyjmijmy $M = 1000$, to znaczy, że odcinamy e w skali $1:1000$ od O do A, to $OA = 44{\cdot}35 mm$. Rzędna w A przecina promień dla kąta $9'30''$ w punkcie B. Na AB odczytujemy długość $\varepsilon_1 = 24{\cdot}5\ mm$. Ponieważ rzędne są kreślone w skali 200 razy większej niż odcięte, to ε mamy odczytać w skali $1:5$, zatem $\varepsilon = e \operatorname{tang} \alpha = 5 . \varepsilon_1 = 122{\cdot}5\ mm$.

§ 4. Tyczenie prostych w tunelach.

Jeżeli oś tunelu jest prosta, to kierunek tej prostej ma być wprowadzony w podkop, który poprzedza wykonanie tunelu, następnie trzeba ten kierunek w miarę postępu podkopu przedłużać. Wyznaczenie kierunku osi podkopu może być dwojakie, zależne od długości tunelu.

a) Tyczenie prostych w krótszych tunelach. Rys. 11.

Trasę wytycza się przez górę, pod którą ma być wykonany tunel. Jeżeli punkty *M* i *N* są dokładnymi punktami trasy, z których *N* jest punktem dogodnym dla ustawienia teodolitu, zaś *M* punktem możliwie daleko położonym, natenczas celujemy do *M* i tę celowę wprowadzamy do podkopu



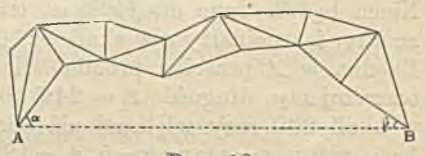
Rys. 11.

tak daleko, jak daleko niedostateczne światło w podkopie na to pozwoli. Tą celową ustalamy parę punktów jak *O*, *P*, z możliwą dokładnością, metodą podaną w § 2. pod *a* 1. (rys. 1.). Dalsze tyczenie w miarę postępu podkopu uskutecznia się przez przedłużanie linii *OP*, metodą podaną w §. 2. *b*. Podkop uskutecznia się przeważnie z dwóch stron, trzeba zatem wielkiej staranności w tyczeniu, aby w miejscu przebicia podkopu oś się zgodziła.

b) Tyczenie prostych w długich tunelach. Rys. 12.

Tunele pod głównymi alpejskimi działami wód posiadają kilka do kilkunastu kilometrów długości*).

Przez tak wysokie szczyty i przepaściste tereny, z jakimi w tym wypadku ma się do czynienia, jest wytyczenie i pomiar trasy na gruncie zbyt uciążliwe, albo wprost niemożliwe, dlatego ustala się w inny sposób kierunek osi tunelu. Po obu stronach działu wód obiera się dogodne punkty *A* i *B*, między którymi jest projektowane przebicie tunelu. Te punkty nawiązuje się albo do istniejącej, albo specyalnie w tym celu założonej sieci tryangulacyjnej, a za pomocą tej sieci oblicza się długość *AB* i kąty α i β, zawarte między



Rys. 12.

*) Do najdłuższych należą tunele przez Mont Cenis 12.200 *m* dł., przez Gottard 14.900 *m* dł., przez Arlberg 10.250 *m* dł. i przez Simplon 19.730 *m* dł.

prostą AB a najbliższymi bokami sieci**). Podług tych kątów tyczy się z dwóch stron oś tunelu w podkopie.

Kąty α i β muszą być bardzo dokładnie wyznaczone, gdyż błąd w kącie wynoszący 10'' powoduje:

na	1	10	20 *km* długości
odchyłkę	0·05	0·5	1·0 *m*.

Dlatego używa się do pomiaru kątów siatki nadzwyczaj dokładnych teodolitów. Kąty siatki trzeba należycie wyrównać.

Jeżeli punkty katastralne, do których miałoby się nawiązać siatkę, nie były dostatecznie dokładnie oznaczone, to pomiar osobnej basis będzie niezbędny.

W łatwiejszych warunkach wyznaczy się kierunek AB metodą w §. 2. pod 4. podaną.

§ 5. Tyczenie łuków kołowych.

Kolejno po sobie następujące proste kierunki, przeniesione z projektu na grunt, o jakich mówiono w poprzednich paragrafach, przecinają się w punktach, które zowiemy punktami wierzchołkowymi. One są wierzchołkami kątów, w które mamy włożyć łuki kołowe, łączące proste kierunki trasy.

Dla tych łuków należy:

1. określić elementa zasadnicze,
2. wytyczyć punkty główne,
3. wytyczyć punkty pośrednie.

§ 6. Określenie elementów zasadniczych.

Elementami zasadniczymi i wystarczającymi dla tyczenia łuku są to kąt wierzchołkowy β, który zawierają proste kierunki i promień łuku r. Wielkość promienia jest już dana z projektu, pozostaje zatem wyznaczenie kąta β. Rozróżniamy różne przypadki.

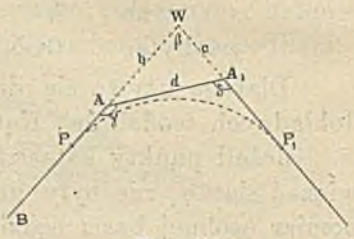
Rys. 13.

a) Punkt wierzchołkowy W jest dostępny. (Rys. 13.). Ustawiamy się w punkcie W przyrządem kątomierniczym i wykonujemy

**) O przeprowadzeniu takiego obliczenia patrz: Rosenmund, tyczenie tunelu Simplońskiego i rozprawa o kolei „Albula“ w Schweizerische Bauzeitung z r. 1903.

dokładny pomiar kąta β, podług metod podanych w miernictwie. Równocześnie należy wytyczyć kierunek prostej WO połowiącej ten kąt, bo się nam później przyda.

b) Punkt wierzchołkowy nie jest dostępny, albotež bardzo oddalony, co nastąpi, gdy kąt β jest mały. (Rys. 14.). Wtedy obieramy na danych prostych dowolne punkty A i A_1, byleby dokładny pomiar długości d prostej AA_1 był możliwy. Następnie wykonamy dokładny pomiar kątów γ i δ i obliczymy:



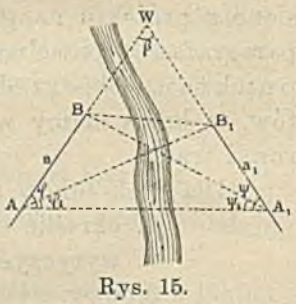
Rys. 14.

$$\beta = \gamma + \delta - 180^0$$

jakotež długości:

$$WA = b = \frac{d}{\sin\beta}\sin\delta, \quad WA_1 = c = \frac{d}{\sin\beta}\sin\gamma.$$

Jeżeli prostej AA_1 nie można wprost zmierzyć jak na rys. 15. z powodu przeszkody (np. rzeka), to odmierzymy dwie dowolne długości $AB = a$ i $A_1B_1 = a_1$, jakotež kąty φ, φ_1, ψ, ψ_1. Wtedy:



Rys. 15.

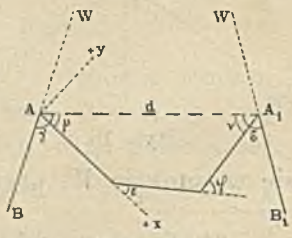
$$AA_1 = d = \frac{a\sin(\varphi+\psi_1)}{\sin\psi_1} = \frac{a_1\sin(\varphi_1+\psi)}{\sin\varphi_1}$$

Obydwa wzory należy obliczyć w celu kontroli.

Następnie:

$$\beta = 180 - (\varphi+\psi), \quad WA = b = \frac{d}{\sin\beta}\sin\psi, \quad WA_1 = c = \frac{d}{\sin\beta}\sin\varphi.$$

c) Zadanie jak pod *b*, gdy z A do A_1 nie można celować. Wtedy należy te punkty połączyć ciągiem polygonalnym, np. A 12 A_1 rys. 16*). Zmierzymy długości boków oraz zaznaczone kąty polygonu ε i φ a obliczymy $AA_1 = d$, jakotež kąty μ i ν w następujący sposób:



Rys. 16.

Oś X-ów obierzemy na kierunku $A1$, początek układu w A, wtedy:

*) Punkt 1 należy do kąta ε, punkt 2 do kąta φ.

$$x_A = 0, \quad x_1 = A1, \quad x_2 = x_1 + 12 \cos \varepsilon,$$
$$y_A = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = y_1 + 12 \sin \varepsilon,$$
$$x_{A_1} = x_2 + A_1 2 \cos (\varepsilon + \varphi),$$
$$y_{A_1} = y_2 + A_1 2 \sin (\varepsilon + \varphi).$$

Z tych współrzędnych obliczymy: $\operatorname{tang} \mu = \frac{y_{A_1} - y_A}{x_{A_1} - x_A}$ i wyznaczymy kąt μ, poczem:

$$d = \frac{y_{A_1} - y_A}{\sin \mu}, \text{ lub } d = \frac{x_{A_1} - x_A}{\cos \mu}, \quad \nu = \varepsilon + \varphi - \mu.$$

Dla kontroli można obliczyć długość dz rzutu polygonu na kierunek AA_1. Otrzyma się:

$$d = A1 \cos \mu + 12 \cos (\mu - \varepsilon) + A_1 2 \cos \nu.$$

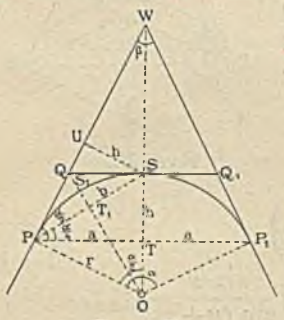
Po zmierzeniu kątów $BA1$ i B_1A_12 i doliczeniu do nich kątów μ i ν, wyznaczą się kąty γ i δ, nareszcie:

$$\beta = \gamma + \delta - 180^0.$$

W celu osiągnięcia większej dokładności można niezależnie od ciągu $A12A_1$ poprowadzić drugi ciąg polygonalny, najlepiej po drugiej stronie, aby mieć polygon zamknięty *).

§ 7. Tyczenie głównych punktów.

Głównymi punktami nazywamy (patrz rys. 17) punkty styczności P i P_1 łuku z danemi prostemi, następnie punkt środkowy łuku S, leżący na przecięciu prostej połowiącej kąt wierzchołkowy z łukiem; nareszcie punkty Q i Q_1, punkty wierzchołkowe połówek łuku, leżące na przecięciu stycznej poprowadzonej w punkcie S z danemi prostemi.



Rys. 17.

Jak już wspomniano, jest wielkość promienia łuku $OP = r$ dana z projektu, zaś kąt β został wyznaczony sposobami w § 6 podanymi. Na podstawie tych danych ustawimy następujące równania zasadnicze:

kąt przy O: $\alpha = 180^0 - \beta$,

$PW = P_1W = t = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, zowie się krótko styczną łuku.

*) Kontrolę rachunków do rys. 14, 15 i 16 obacz § 9.

$$WO = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

zatem: $$WS = WO - SO = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}} - r = r \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4},$$

$$PQ = QS = SQ_1 = Q_1P_1 = t_1 = r\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4},$$

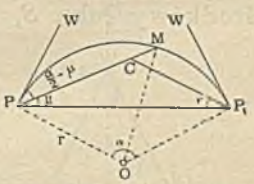
$$QS_1 = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{4}} - r = r\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{8},$$

$$PT = P_1T = a = r\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$ST = h = SO - TO = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2r\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\ ^*).$$

Nie trudno zauważyć, że prosta PS połowi kąt WPP_1 i że zawiera z prostemi PW i PP_1 kąt $\frac{\alpha}{4}$. Stąd wynika, że prosta SU poprowadzona prostopadle do PW równa się h, zaś PU równa się a.

Jeżeli tyczenie głównych punktów sposobem powyżej podanym jest z powodu przeszkód niemożliwe, to można dowolny punkt łuku M w inny sposób na gruncie wyznaczyć (rys. 18). Obierzemy w pobliżu łuku dowolny punkt C i zmierzymy kąty μ i ν, jakoteż długość: $PP_1 = 2a$. Chodzi o wyznaczenie długości $CM = x$. Z rys. 18 wynika, że:



Rys. 18.

$$PC = 2a\frac{\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)},$$

$$PM = 2r\cos\left(90 - \frac{\alpha}{2} + \mu\right),$$

zatem: $$x = PM - PC = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right) - 2a\frac{\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)},$$

co należy od punktu C w kierunku PC odmierzyć.

Liczba głównych punktów powinna być tem większa, im dłuższy jest łuk, aby skrócić partye, w których się tyczy punkty pośrednie (§ 10).

---

*) Wszystkie powyższe wartości wyznaczy się podług tabeli II. części II.

§ 8. Postępowanie przy tyczeniu głównych punktów.

Po wyznaczeniu kątów β i α i obrachowaniu ilości z § 7 odmierzy się długości $WP=WP_1=t$ (rys. 17), albo długości $t-b=AP$ i $t-c=A_1P_1$ (rys. 14), przez co początek i koniec łuku P i P_1 będą ustalone. Następnie odmierzy się $PQ=P_1Q_1$, a na prostej QQ_1 długości $QS=SQ_1$, które mają być równe PQ. Dla kontroli punktu S powinno wypaść $SU=h$ i $PU=a$, co należy zmierzyć.

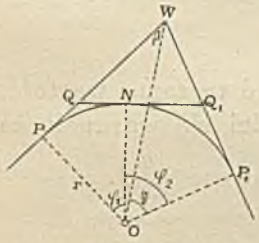
Również dla kontroli możnaby zmierzyć kąty w Q i Q_1 równe $180-\frac{\alpha}{2}$, a jeżeliby na połowiącej tych punktów odcięło się długości QS_1, uzyskałoby się dalsze dwa główne punkty, co mianowicie przy długich łukach jest wskazane.

Między głównymi punktami wytyczy się punkty pośrednie podług wskazówek § 10.

Dla łuków o małym kącie środkowym zachodzi nieraz trudność wyznaczenia głównych punktów. Te przypadki są omówione w §§ 16, 17, 21, 22, 23, 31 i 32.

§ 9. Kontrole rachunków. Rys. 19.

Przypuśćmy, że prosta QQ_1 jest styczną do łuku w punkcie N, wtedy wiemy, że:



Rys. 19.

$$PW=t=r\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$PQ=t_1=r\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi_1}{2}=QN,$$

$$P_1Q_1=t_2=r\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi_2}{2}=NQ_1.$$

Z trójkąta WQQ_1 wynika, że:

$$\frac{QQ_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}=\frac{WQ}{\sin\varphi_2},$$

czyli: $(t-t_1)\sin(\varphi_1+\varphi_2)=(t_1+t_2)\sin\varphi_2$,

i podobnie: $(t-t_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2)=(t_1+t_2)\sin\varphi_1$

jako próba rachunku.

Jeżeli: $\varphi_1=\varphi_2=\frac{\alpha}{2}$, jak na rys. 17, to punkt N przejdzie w środek łuku S, a próba opiewa:

$$(t-t_1)\sin\alpha=2t_1\sin\frac{\alpha}{2},\ \text{czyli:}\ (t-t_1)\cos\frac{\alpha}{2}=t_1.$$

Jeżeli kąt β został pośrednio wyznaczony, jak na rys. 14, 15 lub 16, to, gdy na rys. 20: $PW=t=r\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$, jest:

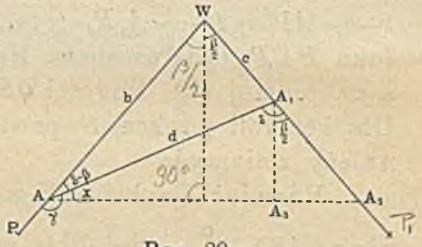
$AP=t-b$, $A_1P_1=t-c$.

Odetnijmy: $P_1A_2=PA$, to kąt:

$$x=\left(90-\frac{\beta}{2}\right)-(\delta-\beta)=90+\frac{\beta}{2}-\delta,$$

a gdy:

$$\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma+\delta}{2}-90,\ \text{to:}\ x=\frac{\gamma-\delta}{2}.$$



Rys. 20.

Spuśćmy z A_1 prostą A_1A_3, prostopadłą do AA_2, to z trójkątów AA_1A_3 i $A_1A_2A_3$ wynika:

$$A_1A_3=A_1A_2\cos\frac{\beta}{2}=d\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$

czyli:

$$(A_1P_1-AP)\cos\frac{\beta}{2}=d\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$

lub:

$$(b-c)\cos\frac{\beta}{2}=d\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Ten wzór należy obrachować dla kontroli rachunków.

Dalszą kontrolę da nam warunek, że na rys. 17:

$$\frac{TS}{SW}=\frac{a}{t}.$$

Obydwa stosunki obliczone mają mieć tę samą wartość.

Nareszcie z trójkąta PTO wyprowadzi się warunek, że wyjęta z tabel wartość: $\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$ ma się równać $\frac{a}{r-h}$.

§ 10. Tyczenie punktów pośrednich.

Pomiędzy główne punkty, wyznaczone możliwie dokładnie, tyczy się punkty pośrednie co 5 m, do najwyżej 20 m, za pomocą następujących różnych metod.

a) Metoda tangencyalna (tyczenie rzędnemi od stycznej).

Jeżeli M na rys. 21 jest głównym punktem, a MN_1 styczną do łuku w tym punkcie, to zachodzi związek:

$$(r-y)^2+x^2=r^2. \qquad (1)$$

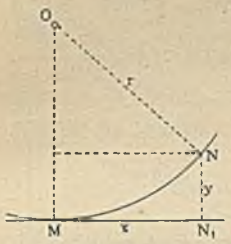
Z tego równania lub wprost z rysunku wyznaczy się:

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad (2)$$

jako dokładny wzór, podług którego dla obranych wartości x (np. co 2, 5 lub 10 m) obrachowano rzędne y w tabeli III. części II.

Z wzoru (1) otrzymamy:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r}. \qquad (1a)$$



Rys. 21.

Dla płaskich łuków jest: $\frac{y^2}{2r}$ tak małą ilością wobec $\frac{x^2}{2r}$, że można ją opuścić, a wtedy otrzymamy prosty przybliżony wzór:

$$y = \frac{x^2}{2r}. \qquad (3)$$

Jestto równanie paraboli o parametrze r, którą zastąpiliśmy łuk kołowy. Rzędne rosną w kwadracie odciętych, więc:

dla $x = x_1$ jest $y = y_1$,
„ $x = 2x_1$ „ $y = 4y_1$,
„ $x = 3x_1$ „ $y = 9y_1$,
i t. d.

Z wzoru (3) otrzymamy y mniejsze niż z dokładnego wzoru (2) lub (1a), a błąd popełniony wynosi:

$$\Delta = \frac{y^2}{2r}, \text{ a stąd: } y \leqq \sqrt{2r\Delta}. \qquad (4)$$

Jeżeli za Δ wstawimy granicę dopuszczalnego błędu, ustaloną stosownie do dokładności, którą chcemy uzyskać, to znajdziemy z wzoru (4) granicę dla rzędnej y. Gdy w (4) wzór wstawi się: $y = \frac{x^2}{2r}$, to się otrzyma: $\Delta = \frac{x^4}{8r^3}$, skąd: $x \leqq \sqrt[4]{8r^2\Delta}$, jako granicę dla x. Jednakże ten wzór nie jest wygodny do rachowania.

Np. jeżeli dopuścimy błąd: $\Delta = 0{\cdot}01$ m, to dla:

$r =$ 10, 20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000 m,
max $y =$ 0·447, 0·632, 1·000, 1·414, 2·000, 2·450, 3·162, 4·472 m.

Zróżniczkujmy wzór (3):

$$dy = \frac{x}{r}\,dx. \qquad (5)$$

To równanie zużytkujemy, aby dla pośrednich wartości x, nie znajdujących się w tabelach, szybko obliczyć y*). Np. chcielibyśmy obliczyć rzędną dla $x=31\ m$ i $r=400\ m$. W tabeli III. znajdziemy dla $x=30$, $y=1{\cdot}127$. Tu $dx=1\ m$, więc:

$$dy=\frac{30}{400}.1=0{\cdot}075,$$

zatem: $y=1{\cdot}127+0{\cdot}075=1\ 202\ m$, dla $x=31\ m$.

Wzór (3) może dać dokładniejszy wynik, przez wprowadzenie poprawki, do której użyjemy wzoru (1a): $y=\frac{x^2+y^2}{2r}$.

Obliczymy naprzód podług przybliżonego wzoru: $y_1=\frac{x^2}{2r}$ i odmierzymy od P do P_1.

Rys. 22.

Następnie zmierzymy $AP_1=s_1$, a gdy $s_1=\sqrt{x^2+y^2}$, to podług (1a) drugie przybliżenie jest: $y_2=\frac{s_1^2}{2r}$, co obliczymy i odmierzymy od P do P_2.

Np. dla $r=400$ i $x=30$, obliczy się: $y_1=\frac{900}{800}=1{\cdot}125$.

Gdy zmierzymy: $s_1=30{\cdot}02$, to:

$$y_2=\frac{901{\cdot}2}{800}=1{\cdot}1265,$$

zgodnie z dokładną wartością 1·127.

b) Tyczenie od cięciwy. Rys. 23.

Zamiast tyczenia pośrednich punktów łuku od stycznej w M, N lub S za pomocą rzędnych, opisanego pod (a), możemy te punkty tyczyć za pomocą rzędnych od cięciwy, łączącej dwa główne punkty M i N. W tym celu należy długość $MN=2d$ zmierzyć.

Przedłużmy dowolną rzędną z do przecięcia w O' z równoległą do MN, poprowadzoną z punktu O, to w prostokątnym trójkącie OQO', jest:

Rys. 23.

*) Ob. także rozprawę p. Schulze w Allg. Vermessungs-Nachrichten nr. 25 z r. 1902 p. t.: „Ueber das Stationiren von Kreiskrümmungen".

$$\measuredangle OQO' = \frac{\alpha}{2} - \delta = \frac{\gamma - \delta}{2}, \text{ zatem: } O'Q = r \cos \frac{\gamma - \delta}{2},$$

$$O'Q' = r \cos \frac{\alpha}{2} = r \cos \frac{\gamma + \delta}{2},$$

zatem:

$$z = O'Q - O'Q' = r\left(\cos \frac{\gamma - \delta}{2} - \cos \frac{\gamma + \delta}{2}\right) = 2r \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (6)$$

jestto wzór dokładny dla obrachowania rzędnych z.

Dla płaskich łuków o małych kątach α można zastosować prostszy wzór przybliżony, podstawiając arcus kątów γ i δ za sinus. Wtedy:

$$z = 2r \operatorname{arc} \frac{\gamma}{2} \operatorname{arc} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} r \operatorname{arc} \gamma \operatorname{arc} \delta.$$

A jeżeli zważymy, że $r \operatorname{arc} \gamma$ i $r \operatorname{arc} \delta$ są to łuki MQ i QN, to ostatecznie:

$$z = \frac{MQ \cdot QN}{2r}, \quad (7)$$

wzór przybliżony dający trochę za wielkie rzędne.

Wzór w tej formie bywa nieraz w innych przypadkach stosowany; dla celów tyczenia nie jest przydatny, gdyż długości łuków nie znamy.

Inny wzór przybliżony otrzymamy, zastępując płaski łuk kołowy parabolą podług wz. (3). Jeżeli NQ' oznaczymy literą a, to ten wzór przejdzie w następujący:

$$y = \frac{(d-a)^2}{2r}, \text{ a dla punktu } N: h = ST = \frac{d^2}{2r}.$$

Otóż: $$z = h - y = \frac{d^2 - (d-a)^2}{2r} = \frac{a(2d-a)}{2r}.$$

Oznaczmy $MQ' = 2d - a = b$, to ostatecznie:

$$z = \frac{a \cdot b}{2r}, \text{ a dla środka: } h = \frac{d^2}{2r}*). \quad (8)$$

Wzory proste, które dozwalają na polu obliczyć z dla dowolnych odcinków. Z (8) wzoru obliczone z daje cośkolwiek mniejszą wartość, niż z wzoru (6). Różnica Δ wyznacza się również wzorem (4), zatem granice dla z są te same, które poprzednio podano dla y. Metoda ta z powodu swej prostoty jest chętnie stosowana (Ob. nr. 11 zbioru przykładów).

*) Ob. także § 37. d.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

c) Tyczenie ze środka.

Jestto to sposób pod *(b)* podany, gdy się uwzględni tylko rzędną w środku cięciwy. W tym celu zmierzy się długość cięciwy, wystawi w jej środku prostopadłą i odmierzy długość określoną wz. 2. I tak (rys. 24):

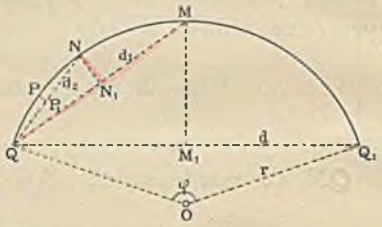
$$\left.\begin{array}{l} \text{dla } QQ_1 = 2d, \text{ jest } MM_1 = r - \sqrt{r^2 - d^2} \\ \text{dla } QM = 2d_1, \text{ jest } NN_1 = r - \sqrt{r^2 - d_1^2} \\ \text{dla } QN = 2d_2, \text{ jest } PP_1 = r - \sqrt{r^2 - d_2^2} \text{ i t. d.} \end{array}\right\} \quad (9^*)$$

M, N, P są wtedy punktami łuku.

Dla płaskich łuków zastosujemy wzór 8:

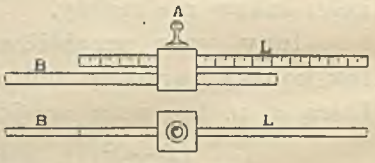
$$M_1M = \frac{d^2}{2r}, \quad N_1N = \frac{d_1^2}{2r},$$

$$P_1P = \frac{d_2^2}{2r} \text{ i t. d.} \quad (10)$$

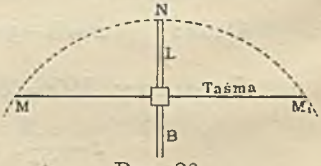


Rys. 24.

Na podstawie tych wzorów skonstruował Moreau**) przyrząd do tyczenia łuków, o promieniach od 23 do 10000 m. Na lineale L (rys. 25) jest umieszczona podziałka do nastawiania na różne promienie. B jest to balans, także w pochewce przesuwać się dający, a służący do zrównoważenia lineału, tak aby trzymając przyrząd za guzik A, lineały były poziome. Do guzika można przyczepić końce dwóch taśm mierniczych. Jeżeli długość lineału L została wyznaczona z wz. (9) lub (10) na podstawie długości taśmy d i promienia r, natenczas N (rys. 26) jest punktem łuku.



Rys. 25.



Rys. 26.

Przyrząd jest tak urządzony że dla promieni:

23	do 60 m	wynosi	długość	cięciwy	MM_1	10 m,
60	„ 1000 m	„	„	„	„	20 m,
1000	„ 10000 m	„	„	„	„	40 m.

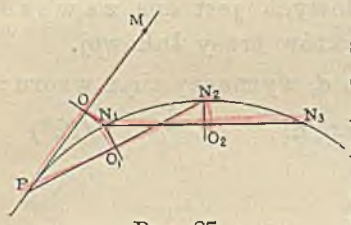
---

*) Albotеż $MM_1 = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$, $N_1N = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{4}\right)$ do obrachowania podług tabeli II. części II.

**) Ob. dzieło: Topographie p. Eugène Prévot, Paris Dunod 1900.

Dla tych długości cięciw i promieni są na podziałce zaznaczone przynależne strzałki łuków.

Gdy się nastawi indeks na tę strzałkę, zrównoważy balansem i przyczepi taśmy, to tyczenie łuku tak się przedstawi:



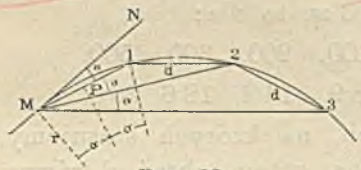
Rys. 27.

Koniec jednej taśmy przykłada się do początku łuku P i wyciąga obie taśmy w kierunku stycznej do M; w punkcie N_1 wbija się kołek. N_1 jest punktem łuku (ob. rys. 17, gdzie $US = ST$). Następnie obróci się przyrząd tak, aby przy wyciągniętej taśmie PN_2, koniec strzałki padł na N_1, wtedy koniec taśmy wyznaczy drugi punkt łuku N_2. Podobnie gdy się wyciągnie taśmy od N_1 ku N_3, tak aby koniec strzałki padł na N_2, to N_3 jest nowym punktem łuku i t. d.

Ten sposób tyczenia wymaga bardzo mało miejsca a jest dosyć dokładny, może być zatem korzystnie stosowany w lesie, w zbożu, a szczególnie w podkopach tunelowych dla przedłużenia łuku w międzyczasie pomiędzy dokładnemi kontrolami trasy.

d) Metoda biegunowa (metoda promieniowania). Rys. 28.

Zasadza się na tej własności koła, że równym długościom cięciw $M1 = 12 = 23 ... = d$, odpowiadają przy biegunie M równe kąty α. Z trójkąta MPO wyznaczy się, gdy O jest środkiem koła:



Rys. 28.

$MP = MO \sin \alpha$, więc: $\sin \alpha = \frac{MP}{MO}$,

czyli: $$\sin \alpha = \frac{d}{2r}. \qquad (11^*)$$

Przyjąwszy d w okrągłej liczbie, zwykle 10 lub 20 m (długość taśmy), znajdziemy z tablic kąt α. Jeżeli od stycznej w głównym punkcie M łuku, z M jako bieguna wytyczymy kąt $NM1 = \alpha$, a równocześnie figurant przyłoży do M jeden koniec taśmy, zaś drugi koniec zaopatrzony w żerdkę wprowadzi w kierunek $M1$, to punkt 1 będzie punktem łuku.

*) Kąt α wyznaczy się z tabeli IV części II.

Przykładając następnie taśmę do punktu 1 i wprowadzając jej koniec w celowę $M2$, wyprowadzoną od stycznej o 2α, otrzyma się punkt 2 łuku i t. d.

Ta metoda jest szczególnie w terenie płaskim chętnie stosowana, gdyż dozwala wytyczyć łuk równie szybko jak prostą linię, zaś w podkopach tunelowych jest ona zawsze stosowana dla głównej kontroli punktów trasy łukowej.

Długość łuku s, którego cięciwa d, wyznaczy się z wzoru:

$$s = r \text{ arc } 2\alpha = 2r \text{ arc } \alpha, \qquad (12^*)$$

lub:

$$s = \frac{2r\,\alpha''}{206265}.$$

Zwykle obierze się tak małą długość cięciwy d, że ją można zastąpić długością łuku s. Nastąpi to wtedy, gdy różnica $s-d$ jest mniejszą niż dokładność przyłożenia taśmy. Nazwijmy błąd przyłożenia taśmy Δ, to ma być $s-d \leqq \Delta$, to znaczy:

$$2r \text{ arc } \alpha - 2r \sin \alpha \leqq \Delta,$$

lub gdy $\sin \alpha$ rozwiniemy w szereg, z którego zatrzymamy tylko dwa pierwsze człony:

$$2r \frac{\alpha^3}{6} \leqq \Delta.$$

Gdy $\alpha = \frac{s}{2r}$, to otrzymamy ostatecznie:

$$s \leqq \sqrt[3]{24r^2\Delta}, \text{ a w przybliżeniu: } d \leqq \sqrt[3]{24r^2\Delta}. \qquad (13)$$

Przypuśćmy, że Δ wynosi 0·003 m, to dla:

$$r = 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 300,\ 500,$$

może być s lub $d \leqq$ 1·9, 3·0, 5·6, 8·9, 14·2, 18·6, 26·0.

Dla głównych kolei żelaznych, na których stosujemy promienie większe niż 300 m, można zatem obrać d równe długości 20 metrowej taśmy (Ob. tabelę IV).

e) Metoda stałych kątów. Rys. 29.

Jeżeli M i N są głównymi punktami łuku, a MM' i NN' styczne w tych punktach, to kąt PMM' równa się połowie kąta MOP, zaś kąt PNN' równy połowie kąta PON.

---

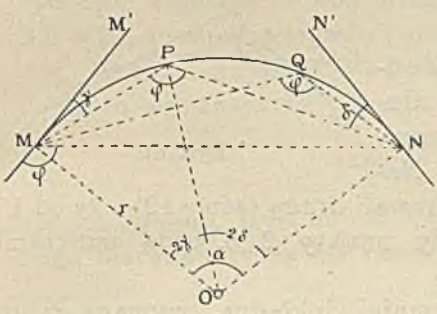
*) Długość łuku wyznaczy się podług tabeli I.

Z czworoboku $MPNO$ wynika, że:

$$360^0 = \alpha + \varphi + (90^0 - \gamma) + (90^0 - \delta),$$
$$= 180^0 + \varphi + \alpha - (\gamma + \delta),$$

a gdy: $\gamma + \delta = \frac{\alpha}{2}$, to $360^0 = 180^0 + \varphi + \frac{\alpha}{2}$,

a stąd: $$\varphi = 180^0 - \frac{\alpha}{2} \qquad (14)$$

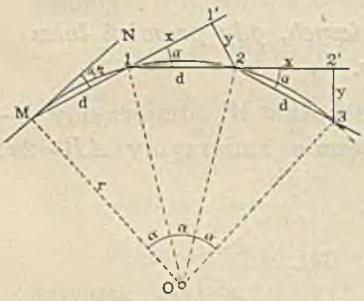


Rys. 29.

Taki sam kąt będzie przy innym dowolnym punkcie Q. Jeżeli zatem mamy pryzmat podwójny, t. zw. arcograf, który dozwala na takie ustawienie, że daje możność tyczenia kąta $180^0 - \frac{\alpha}{2}$, wtedy każdy punkt, jak P, Q, na którym nastąpi w arcografie pokrycie obrazów tyczek M i N, jest punktem łuku. Ta metoda należy do najmniej dokładnych.

f) Metoda siecznych, zwana także metodą przedłużania lub angielską.

Dla obranej długości d na rys. 30. obliczymy kąt α z wzoru:



Rys. 30.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2r}\ ^*) \qquad (15)$$

Punkt 2 wyznaczymy za pomocą współrzędnych:

$$x = d\cos\alpha, \quad y = d\sin\alpha. \qquad (16)$$

Do stycznej MN głównego punktu M wytyczymy kąt $\frac{\alpha}{2}$ i odmierzymy $M1 = d$, to punkt 1 leży na łuku. Na przedłużeniu prostej $M1$ odmierzymy $x = 11'$ i prostopadle $y = 1'2$, podobnie $22' = x$ na przedłużeniu prostej 12 i $2'3 = y$, to punkty 2, 3... będą punktami łuku.

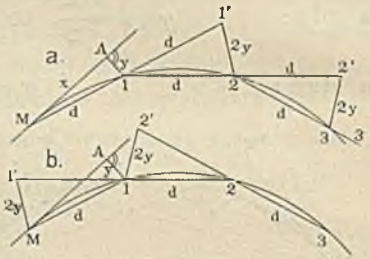
*) Kąt α wyznaczy się z tab. IV. części II.

Bez użycia przyrządu kątomierniczego bywa ta metoda w praktyce w innej formie stosowana (rys. 31. a.):

Obieramy stosownie małą długość cięciwy d i obliczamy rzędną $A1=y$ z dokładnego wzoru 1*a*.

$$y=\frac{x^2+y^2}{2r}=\frac{d^2}{2r}.$$

Długości $1'2=2'3\ldots$ równają się dokładnie: $2y=\frac{d^2}{r}$.



Rys. 31.

Taśmę $M1'$ o długości $2d$ odsuniemy od stycznej MA o długość y w punkcie 1, wtedy otrzymamy pierwszy punkt łuku. Następnie będziemy kolejno odsuwali drugą taśmę $12'$ o $2y$ od $1'$, taśmę $23'$ o $2y$ od $2'$..., wtedy punkty 2, 3, będą punktami łuku.

Metoda siecznych jest mniej dokładna, wymaga za to mało czasu i mało miejsca.

§ II. Tyczenie łuków bez użycia przyrządu kątomierniczego.

W przypadkach, gdy się nie ma pod ręką przyrządu kątomierniczego, można tyczenie łuku uskutecznić wyłącznie za pomocą taśmy mierniczej.

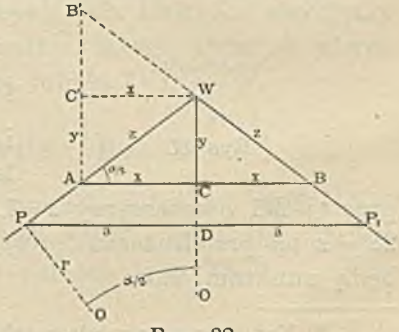
Niektóre sposoby wymagają jeszcze bębenka lub pryzmatu, w celu tyczenia prostopadłych.

a) Wyznaczenie elementów zasadniczych, gdy promień łuku jest dany.

1. Sposób. Rys. 32. Z wierzchołka W odmierzymy dowolne długości $WA=WB=z$, następnie zmierzymy $AB=2x$, przepołowimy w punkcie C i zmierzymy $WC=y$. Dla kontroli należy obliczyć $z^2=x^2+y^2$.

Z podobieństwa trójkątów POW i WAC wynika $t:r=y:x$, więc $t=r\frac{y}{x}$, gdy t jest styczną łuku $PW=WP_1$.

Odmierzywszy te długości, otrzymamy początek i koniec



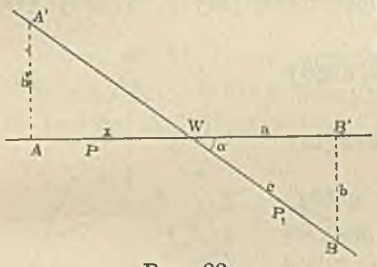
Rys. 32.

łuku. Dalszą kontrolę uzyskamy, gdy zmierzymy $PP_1=2a$ i z proporcyi $a:x=t:z$ obliczymy $a=t\frac{x}{z}$. Nareszcie wyznaczy się D w połowie PP_1 i zmierzy CD, wtedy ma być: $WD=y+CD=t\frac{y}{z}$, jako dalsza kontrola. Jeżeli kąt wierzchołkowy jest bardzo rozwarty, wtedy wygodniej będzie przedłużyć P_1W i odciąć obraną długość $z=WA$ i WB', zmierzyć $AB'=2y$, przepołowić w C', nareszcie zmierzyć $WC'=x$.

W razie gdyby znajomość kąta środkowego α była pożądana, to wyznaczymy z wzoru:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{y}{x}\ ^{*})$$

2. Sposób. Rys. 33. W dowolnych punktach A i B' jednego kierunku tyczy się prostopadłą na ten kierunek do A' i B na drugim kierunku. Następnie zmierzy się b, b' i AB'. Jeżeli $AW=x$, to:



Rys. 33.

$$\frac{x}{AB'-x}=\frac{b'}{b},\ \text{stąd:}\ x=\frac{AB'.b'}{b+b'}$$

Gdy się obliczoną długość x odmierzy, to się otrzyma punkt W, który powinien wypaść dokładnie na kierunku $A'B$. Następnie znajdziemy: $WB'=a=A'B-x$, zaś zmierzymy $WB=c$.

Styczna $WP=WP_1=t=r\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, a gdy:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{c.\sin\alpha}{c+c.\cos\alpha}=\frac{b}{a+c},$$

to nareszcie: $t=\frac{rb}{a+c}$, co się odmierzy.

Prościej, choć mniej dokładnie dojdzie się do wartości t, gdy się wprost zmierzy a, b, c po ustaleniu wierzchołka W.

3. Sposób (rys. 34) zastosuje się wtedy, gdy punkt wierzchołkowy W nie jest dostępny. Przesuniemy jeden kierunek, np. AW równolegle i dokładnie o dowolny wymiar h, tak

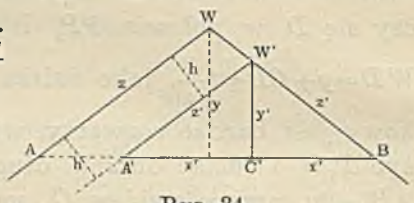
*) Podług tab. II. części II.

aby przecięcie się tej przesuniętej prostej z drugą prostą w punkcie W' było możliwe.

Następnie odmierzymy dowolną długość $W'A'=z'=W'B$, i zmierzymy $A'B=2x'$ i $W'C'=y'$. Jeżeli przedłużymy BA' do A i zmierzymy AA', to:

$$AB=2x=AA'+2x',$$

$$z=\frac{z'}{x'}x, \quad y=\frac{y'}{x'}x.$$

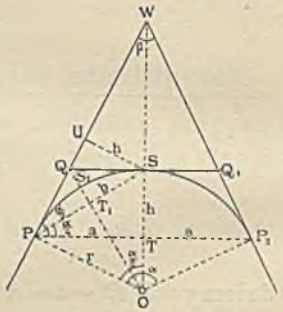


Rys. 34.

Znając te wartości nastąpi dalsze obrachowanie jak 1. sposobem.

b) Wyznaczenie głównych i pośrednich punktów łuku. Rys. 35.

Poprzednio zmierzyliśmy lub też obliczyli już $PT=TP_1=a$ i wyznaczyliśmy: tang $\frac{\alpha}{2}$, którą ilość nazwijmy k. Z trójkąta POT wynika, że $OT=a\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{k}$, a gdy $TS=h=r-OT$, to $h=r-\frac{a}{k}$. Odmierzymy tę długość na kierunku TW, a otrzymamy środek łuku S. Prostopadła z S na styczną PW równa się także h, gdyż prosta PS połowi kąt WPT; z tego też powodu $PU=a$, zatem $WU=t-a$. Odmierzymy tę długość, to prostopadła z U powinna trafić punkt S, a nadto US ma być równe h, co posłuży do skontrolowania punktu S. Teraz możemy łuk wytyczyć albo od cięciwy (§ 10 *b*), albo od środka (§ 10 *c*). Można też dalsze główne punkty S_1, S_2 w ten sposób wyznaczyć, że się zmierzy $PT_1=T_1S=b$, wystawi w T_1 prostopadłą na PS do punktu Q i zmierzy ją, a następnie zmierzy i skontroluje $PQ=QS=t_1$. Po obliczeniu tang $\frac{\alpha}{4}=\frac{T_1Q}{b}=k_1$, obliczy się $S_1T_1=h_1=r-\frac{b}{k_1}$, przezco otrzyma się główny punkt S_1.



Rys. 35.

Jeżeli łuk PS_1S jest dostatecznie płaski, to według wzoru (8) § 10 jest $h_1=\frac{b^2}{2r}$, zaś $OT_1=r-h_1$. Z podobieństwa

trójkątów OPQ i OT_1S wynika, że $t_1 : r = b : r - h_1$, skąd obliczy się $t_1 = \frac{rb}{r-h_1}$, co posłuży dla kontroli wyznaczenia punktów Q i Q_1.

c) Wyznaczenie długości łuku.

Ponieważ znamy $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{z}$, lub $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r}$, to wyznaczymy α, a wtedy długość łuku równa $r\alpha$. Można jednakże podług danych a i r wyprowadzić wzór na długość łuku. Oznaczmy $\sin\frac{\alpha}{2}$ literą x, to:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots = \frac{\alpha}{2},$$

zatem długość łuku: $r\alpha = 2r\left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right) + r\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}$.

Jeżeli dokładność pomiaru długości przyjmiemy na 1:1000, to drugi wyraz powyższego równania można opuścić skoro będzie mniejszy niż $r\alpha : 1000$, zatem:

$$r\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} \lessgtr \frac{r\alpha}{1000} \lessgtr \frac{2r\left(x + \frac{x^3}{6}\right)}{1000},$$

stąd: $x^4 - \frac{2}{900}x^2 - \frac{4}{300} \lessgtr 0$, lub $x^2 \lessgtr \frac{1+\sqrt{1+10800}}{900}$,

a gdy jedynki w czynniku opuścimy, to:

$$x \lessgtr \sqrt{\frac{\sqrt{10800}}{900}} \lessgtr 0{\cdot}34 \gtrless \sin\frac{\alpha}{2} \gtrless \frac{a}{r}.$$

stąd w okrągłych cyfrach:

$$\alpha \lessgtr 40^0, \quad a \lessgtr \frac{r}{3}.$$

Dla mniejszej dokładności pomiaru długości 1:213 otrzyma się $\alpha \lessgtr 60^0$, $a \lessgtr \frac{r}{2}$.

Zatem tylko dla takich wartości można drugi człon we wzorze na $r\alpha$ opuścić, wtedy pozostanie długość łuku:

$$r\alpha = 2a\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

Jeżeli kąt środkowy łuku jest większy niż 40^0, to należy go podzielić na partye mniejsze niż 40^0, i dla każdej osobno długość łuku obliczyć.

Jeżeli punkty główne lub pośrednie zostały wyznaczone w tak małych odległościach, że cięciwa między nimi mierzona czyni zadosyć równaniu (13) w § 10, natenczas przyjmujemy długość łuku równą długości cięciwy*).

d) Wyznaczenie elementów zasadniczych, gdy dany początek łuku.

Wtedy promień r nie jest znany, nie można zatem użyć wzorów pod *a)* i *b)* podanych. Skoro położenie punktu P (rys. 35) jest dane, zmierzymy $WP=t$ i odniesiemy tę samą długość od W do P_1; następnie zmierzy się $PP_1=2a$ i $TW=p$. Dla kontroli pomiarów obliczy się $t^2=a^2+p^2$. Ponieważ PS połowi kąt WPT, to w trójkącie WPT mają się do siebie odcinki WS i ST jak przyległe boki, zatem:

$p-h:h=t:a$, więc także: $p:h=t+a:a$, a stąd: $h=\frac{ap}{t+a}$.

Po odmierzeniu $SD=h$, otrzyma się punkt S. Długość promienia r wyznaczy się z trójkąta POT:

$r^2=a^2+(r-h)^2$, a stąd: $r=\frac{a^2+h^2}{2h}$.

Jeżeliby zależało na zaokrągleniu promienia r na całkowitą liczbę r', to wtedy należy t, p i h pomnożyć stosunkiem $\frac{r'}{r}$ i te zmienione długości wytyczyć.

Na podstawie tych wyznaczonych ilości nastąpi wytyczenie łuku jak pod *b)*.

*e) Dany mniej więcej środek łuku S***).

Ten przypadek zachodzi nieraz na drogach lub rowach, gdy się je chce oprowadzić około jakiejś przeszkody. Wtedy znajdzie się przez próbny pomiar krokami takie przybliżone

*) Vogler w rozprawie „Zur Kreisabsteckung ohne Theodolit“ (Ztschr. f. Vermessungswesen z r. 1894) podaje na długość łuku wzór: $2a+\frac{2}{3}(t-a)-\frac{4}{9}\frac{(t-a)^2}{t}$, w którym t oznacza długość stycznej, zaś a połowę długości cięciwy. Ten wzór daje dla $r=1$, a $\alpha=30$ do 90^0 wyniki zgodne na trzy dziesiętne.

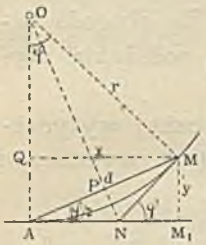
**) Vogler, jak powyżej.

położenie punktów Q i Q_1 (rys. 35), aby prosta QQ_1 przeszła przez dany punkt S. Następnie zmierzymy dokładnie: $WQ = WQ_1 = t - t_1$, jakoteż długość $QQ_1 = 2t_1$, a w połowie tej długości ustalimy punkt S.

Jeżeli następnie odmierzymy $PQ = P_1Q_1 = t_1$, to otrzymamy początek i koniec łuku. Dalsze tyczenie podług *a)*, *b)*, *d)*.

§ 12. Wyznaczenie kierunku stycznej w dowolnym punkcie łuku.

Potrzeba wytyczenia stycznej w dowolnym punkcie łuku zachodzi bardzo często. Rozpatrzymy różne przypadki.



Rys. 36.

a) Jeżeli wytyczono łuk od A ku M (rys. 36) metodą biegunową, to kąt $MAN = \frac{\varphi}{2}$ jest znany. Przypuśćmy, że w celu dalszego tyczenia łuku trzeba przestawić się przyrządem kątomierniczym w punkcie M, to wyznaczy się położenie stycznej w tym punkcie przez wytyczenie kąta $AMN = \frac{\varphi}{2}$. Prosta MN jest styczną w M. Od tej stycznej nastąpi dalsze tyczenie łuku. Potrzeba takiego częstego przestawiania zachodzi w tyczeniu osi sztolni (§ 32).

b) W pobliżu punktu M, w którym chcemy wytyczyć styczną, znajduje się wytyczona styczna w punkcie A (rys. 36). Jeżeli z poprzedniego tyczenia, lub też wprost z pomiaru jest znana długość łuku $AM = s$, wtedy: arc $\varphi = \frac{s}{r}$. Z tablic wyznaczymy φ i albo wytyczymy $\frac{\varphi}{2}$ jak pod *a)*, albotoż obliczymy i odmierzymy:

$$AN = r \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

Zamiast długości łuku można zmierzyć cięciwę $AM = d$ i wyznaczyć φ z wzoru:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{d}{2r}.$$

Prosta MN jest styczną w M.

Wprost można punkt N wyznaczyć, jako punkt przecięcia prostopadłej do cięciwy, wytyczonej w jej środku P ze styczną AM_1.

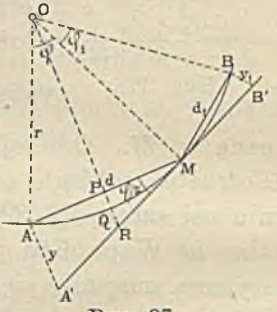
c) Jeżeli styczna w A jest dana, jednak punkt A nie jest pewnie oznaczony (np. na istniejącym torze kolejowym), wtedy spuścimy z M prostopadłą MM_1 do stycznej AM_1 i zmierzymy jej długość y. Długość $AM_1 = QM = x$ obliczymy z wzoru (ob. § 10 *a*) $x = \sqrt{(2r-y)y}$, która wyznaczy początek łuku A, poczem zastosujemy sposoby powyżej pod *b)* podane.

Alboteż można wprost wyznaczyć długość M_1N. Z podobieństwa trójkątów OAN i AM_1M wynika, że:

$$AN : r = y : x, \text{ czyli: } AN = \frac{ry}{x}$$

Znając długość AN, jest $M_1N = x - AN$. Tę długość odmierzy się od M_1 do N, w celu otrzymania położenia stycznej MN.

d) Jeżeli w pobliżu punktu M niema stycznej wytyczonej do łuku, wtedy obierzemy dowolny punkt A, wyznaczymy jak pod *b)* kąt φ z długości łuku $AM = s$, lub z długości cięciwy d i wytyczymy styczną MA'. Można przyjąć drugi punkt B (rys. 37) i wyznaczyć styczną MB' dla kontroli; punkty A', M i B' mają leżeć na jednej prostej.


Rys. 37.

Bez pomiaru kąta można dojść do położenia stycznej przez wyznaczenie długości prostej $AA' = y$, wyprowadzonej z punktu A prostopadle do cięciwy AM. Z trójkąta MAA' otrzyma się $MA' = \sqrt{d^2 + y^2}$.

Z podobieństwa trójkątów MAA' i OPM wynika:

$$m \ldots MA' : y = r : \frac{d}{2}, \text{ czyli: } yr = MA' \frac{d}{2},$$

a po wstawieniu wartości za MA' wyznaczy się:

$$y = \frac{2\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Podobnie można wyznaczyć B'.

e) Jeżeli promień łuku nie jest znany, to można różnie postąpić.

a) Obierze się możliwie dalekie punkty A i B i zmierzy długości łuków $AM = s$ i $MB = s_1$. Ponieważ w mierze łukowej:

$$\varphi=\frac{s}{r},\quad \varphi_1=\frac{s_1}{r},\ \text{to}\ \varphi:\varphi_1=s:s_1$$

Następnie zmierzy się dokładnie kąt $AMB=\mu$. Otóż:

$$\mu+\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi_1}{2}=180^0$$

Jeżeli się w to równanie wstawi za φ_1 wartość z powyższej proporcyi, otrzyma się:

$$\frac{\varphi}{2}=\frac{180-\mu}{s+s_1}s \quad \text{i analogicznie:} \quad \frac{\varphi_1}{2}=\frac{180-\mu}{s+s_1}s_1$$

Za pomocą tych kątów wyznaczy się kierunek stycznej. Gdy z górnych równań jest:

$$r=\frac{s}{\varphi},\ \text{zaś:}\ \varphi=\frac{\varphi''}{206265},$$

to:
$$r=\frac{206265.s}{\varphi''},\ \text{lub:}\ r=\frac{206265.s_1}{\varphi''_1}$$

β) Obierze się dowolny, możliwie daleki punkt A i zmierzy się $MA=d$ i strzałkę łuku $PQ=h$.

Otóż wiadomo (ob. rys. 17), że $\text{tang}\frac{\varphi}{4}=\frac{2h}{d}$. Stąd wyznaczy się φ i położenie stycznej; albo obliczy się:

$$AA'=y=d\,\text{tang}\frac{\varphi}{2},\quad r=\frac{d}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

γ) Bez wyznaczenia kąta φ można tak postąpić: Z § 11 *d)* wiadomo, że:

$$QR:PQ=MA':d,\ \text{lub:}\ PQ+QR:PQ=MA'+d:d$$

Gdy:
$$PQ+QR=\frac{y}{2},\quad PQ=h,\quad MA'=\sqrt{d^2+y^2},$$

więc:
$$\frac{dy}{2}=hd+h\sqrt{d^2+y^2},$$

a stąd:
$$y=\frac{d^2h}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-h^2}$$

zaś z równania *m* pod *d)* wyznaczy się:

$$r=\frac{d\sqrt{d^2+y^2}}{2y}=\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2}{2h}\ ^*)$$

*) W § 13 podano jeszcze inny sposób wyznaczania promienia r z pomiaru rzędnych od cięciwy.

Podobnie obliczy się dla kontroli y_1 i r dla punktu B.

Jeżeli w powyższych przypadkach okaże się, że albo punkty A', M i B' nie leżą na jednej prostej, albo że wartości promienia obliczone dla różnych punktów łuku nie są zgodne, to albo łuk nie jest w porządku, albo nie jest jednolity, a wtedy należy postąpić podług § 13.

§ 13. Badanie łuku istniejącego toru.

Powyżej w § 12 *c)* widzieliśmy, że mogą wypaść różne wartości promienia dla tego samego łuku. Nastąpi to wtedy, gdy łuk toru kolejowego został albo przez ruch pociągów zdeformowany, albo ma się do czynienia z łukiem koszowym, albo też wchodzi się w krzywą przejściową toru kolejowego, gdy jeden z punktów A lub B znajduje się w pobliżu początku łuku.

O tych stosunkach łuku można się najłatwiej przekonać, jeżeli od możliwie długiej cięciwy odmierzy się rzędne symetrycznie względem jej środka położone. Długości dwóch symetrycznie ułożonych rzędnych mają być równe, a różnić się mogą tylko w granicach dopuszczalnego błędu. Takie pomiary winno się uskutecznić w różnych partyach łuku. Z relacyi wz. (8) w § 10, gdy rzędne nie przekraczają dozwolonych długości:

$$z=\frac{ab}{2r},\ \text{lub}:\ h=\frac{d^2}{2r}$$

obliczy się promień r, który ze wszystkich pomiarów powinien otrzymać tę samą wartość.

Jeżeli się znajdzie różnice w pomiarze rzędnych, lub w obliczonych wartościach promienia, wtedy trzeba łuk na nowo tyczyć. W tym celu należy zmierzyć kąt wierzchołkowy β, wyznaczyć punkt S na przecięciu połowiącej kąt β z łukiem, następnie zmierzyć albo WS (rys. 17), albo $SU=h$. Wtedy wyznaczy się promień r z wzorów:

$$WS=r\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{4},\ \text{lub}\ h=2r\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

Tym promieniem wytyczy się łuk. Teraz pokaże się czy łuk toru jest jednolity, czy koszowy, lub też czy były stosowane krzywe przejściowe. W tych ostatnich wypadkach należy tyczenie łuku przeprowadzić podług § 25 i dalszych, ewentualnie podług wskazówek zawartych w II rozdziale.

Jeżeliby wyznaczenie ilości zasadniczych łuku nastąpiło podług § 11, to odnośnie do rys. 35 i 32 nie trudno ustawić proporcyę:

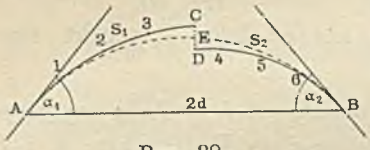
$$WO : r = t : a = z : x,$$

a stąd: $$WO = \frac{z}{x} r, \quad WS = WO - r = \frac{z-x}{x} r,$$

a zatem: $$r = WS \frac{x}{z-x}, \text{ lub: } r = h \frac{z}{z-x}$$

§ 14. Poprawka odchyłki łuków z dwóch stron tyczonych. Rys. 38.

Przy tyczeniu łuków popełnia się nieuniknione błędy, które są przyczyną, że łuki z dwóch stron od głównych punktów A i B tyczone nie zejdą się dokładnie w tym samym punkcie, okaże się jakaś odchyłka $CD = \Delta$, która wymaga poprawienia łuków. Przyjmujemy, że odchyłka jest proporcyonalna do długości wytyczonego łuku. Jeżeli zatem długości łuków AC i BD nazwiemy s_1 i s_2, a ich odchyłki:



Rys. 38.

$$\Delta_1 \text{ i } \Delta_2, \text{ to } \Delta_1 : \Delta_2 = s_1 : s_2,$$

a stąd: $\Delta_1 : \Delta_1 + \Delta_2 = s_1 : s_1 + s_2$, a gdy: $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$ zmierzono,

to: $$\Delta_1 = s_1 \cdot \frac{\Delta}{s_1 + s_2}, \quad \Delta_2 = s_2 \frac{\Delta}{s_1 + s_2}$$

Po odmierzeniu tych odchyłek otrzyma się wspólny punkt zetknięcia E. W celu poprawienia poszczególnych punktów łuku zważmy, że wyraz $\frac{\Delta}{s_1 + s_2}$ jest odchyłką przypadającą na jednostkę długości łuku, że zatem poprawka np. dla punktu 2 wyniesie:

$$s \frac{\Delta}{s_1 + s_2}$$

jeżeli s jest długością łuku $A2$ (Ob nr. 12. zbioru przykładów).

W ten sposób poprawi się mniejsze odchyłki. Dla większych odchyłek należy postąpić podług § 27.

§ 15 *).

Zadanie. *Położyć łuk stycznie do trzech danych kierunków.* Rys. 39. Dane kierunki AW_1, W_1W_2 i W_2B. Zmierzy się dłu-

*) Zadania podług Voglera.

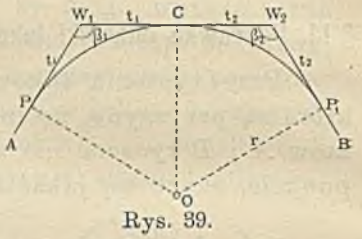
gość $W_1W_2=t_1+t_2$ i kąty β_1 i β_2. $W_1C=t_1$ i $CW_2=t_2$ są to styczne dla kątów β_1, β_2 i nieznanego promienia r, więc (ob. § 7): $W_1W_2=t_1+t_2=r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}\right)$,

zatem: $$r=\frac{t_1+t_2}{\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}}=(t_1+t_2)\frac{\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}}{\sin\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)}$$

Obliczy się:

$$t_1=r\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2},\quad t_2=r\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2},$$

przyczem suma musi się zgodzić ze zmierzoną długością W_1W_2; następnie odmierzy się: $W_1C=W_1P=t_1$ i $W_2C=W_2P_1=t_2$, przezco otrzyma się początek i koniec łuku i punkt styczność C.

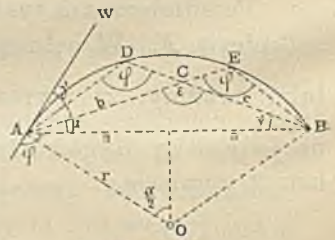


Rys. 39.

Zadanie. *Między dwa dane punkty A i B łuku wytyczyć trzeci punkt, jeżeli z A nie można celować do B.* Punkty A i B są na gruncie dane, a pomiędzy nimi nie można celować z powodu istniejącej przeszkody. Rozróżnimy dwa przypadki.

a) Położenie stycznej w punkcie A jest dane. Rys. 40. Wtedy promień łuku r jest określony, nie można go zatem z góry obrać. Obierzemy dowolny punkt C tak, aby z tego punktu można celować i mierzyć ku A i ku B. Zmierzymy kąt ε i długości: $AC=b$, $CB=c$. Z tych ilości obliczymy: $AB=2a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\varepsilon}$, następnie z warunku, że:

$$\frac{\sin\mu}{c}=\frac{\sin\nu}{b}=\frac{\sin\varepsilon}{2a}$$



Rys. 40.

obliczymy: $\sin\mu=\frac{c}{2a}\sin\varepsilon$, $\sin\nu=\frac{b}{2a}\sin\varepsilon$.

Dla kontroli ma być: $\mu+\nu+\varepsilon=180^0$.

Następnie zmierzymy kąt $WAC=\gamma$, to: $\frac{\alpha}{2}=\mu+\gamma$, zaś:

$$r=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Teraz można wyznaczyć np. punkt D, leżący na przedłużeniu BC, przez obliczenie długości CD (gdy $\varphi = 180 - \frac{\alpha}{2}$ podł. § 10 *e*):

$$CD = b\frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\sin\varphi}, \text{ podobnie: } CE = c\frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\sin\varphi},$$

a dla kontroli obliczyć:

$$AE = b + CE = 2a\frac{\sin(\mu+\varphi)}{\sin\varphi} = 2r\sin(\mu+\varphi),$$

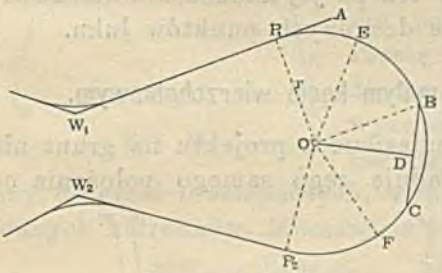
$$BC = c + CD = 2a\frac{\sin(\nu+\varphi)}{\sin\varphi} = 2r\sin(\nu+\varphi).$$

b) Dane są punkty A i B i promień r.

Postępowanie to samo co przed tem, tylko zamiast pomiaru kąta γ, potrzebnego do wyznaczenia kąta α, obliczymy ten kąt z wzoru: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r}$. (Ob. nr. 13. zbioru przykładów).

§ 16. Tyczenie serpentyn drogowych. Rys. 41.

Serpentyny drogowe należą do łuków o małym kącie wierzchołkowym, o których mowa w następującym paragrafie; gdy jednak promienie łuków w takich serpentynach stosowane są małe, w granicach od 10 do 25 m, to może być odmienna metoda tyczenia stosowana.



Rys. 41.

Jeżeli wierzchołek W_1 i kierunek W_1A może być na polu ustalony, wtedy odmierzy się długość W_1P_1 wyjętą z projektu i na prostopadłej z P_1 odmierzy się długość $P_1O = r$. Jeżeliby natomiast dwa punkty B i C łuku mogły być na gruncie ustalone, natenczas społowimy prostą BC i wystawimy do niej z D prostopadłą, którą przetniemy długością $BO = r$. Dla niewielkiej długości łuku BC można podług § 10 wz. (8) wyznaczyć: $DO = r - \frac{(BC)^2}{8r}$ i tę długość od D odmierzyć.

Gdy w ten sposób środek O jest ustalony, odmierzy się wprost r na dowolnie obranych kierunkach do punktów E, F, G..., przez co otrzyma się szereg pośrednich punktów łuku.

To odmierzenie powinno być poziomo wykonane, więc dla punktów jak E, F, leżących w pobliżu linii największego spadu stoku, trzeba wykonać pomiar za pomocą łaty i libeli, sposobem schodkowym, zaś dla innych punktów wprost taśmą możliwie poziomo ułożoną.

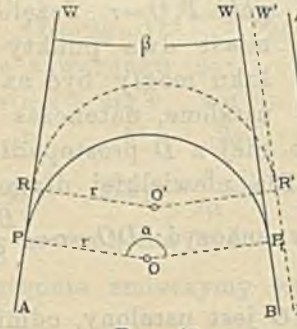
Jeżeli punkt O wyznaczono pierwszym sposobem od P_1, trzeba będzie z następnego wierzchołka W_2 poprowadzić styczną do wytyczonego łuku i wyznaczyć koniec łuku P_2. Tę styczną poprowadzi się dostatecznie dokładnie podług oka, poczem prostopadła z O do tej stycznej poprowadzona wyznaczy P_2. Można też za pomocą pryzmatu wyznaczyć punkt P_2 jako wierzchołek prostego kąta W_2P_2O, a zarazem odległego od O na długość taśmy równej r. Jeżeli punkt O wyznaczyło się z punktów B, C, wtedy oba końce łuku trzeba w ten sposób wyznaczyć.

W tym wypadku może się zdarzyć, że punkty W_1 i W_2 nie będą na gruncie ustalone, lecz wyznaczone z warunku pewnej, w projekcie przewidzianej długości W_1P_1 i W_2P_2. Wtedy zużytkujemy pryzmat do wyznaczenia przez próby takiego kąta prostego, aby punkty P miały przepisane odstępy od W i od O.

Środek łuku powinien być za pomocą pala ustalony, aby, czy to podczas budowy, czy też po jej ukończeniu umożliwić szybkie, a pewne wytyczenie dowolnych punktów łuku.

§ 17. Tyczenie łuków o małym kącie wierzchołkowym.

Kierunki prostych przeniesione z projektu na grunt nie mają względem siebie dokładnie tego samego położenia co



Rys. 42.

Rys. 43.

w projekcie. Różnice stąd powstałe między położeniem łuku

w projekcie i na gruncie będą nie wielkie, jeżeli kąt wierzchołkowy β jest wielki, mogą być jednakże znaczne, gdy kąt β zbliża się do zera, a kąt środkowy α do 180^0.

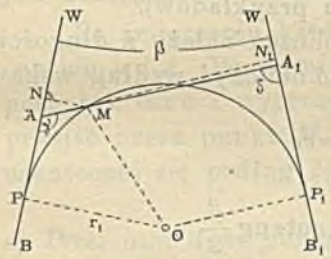
Na rys. 42 jest $\beta > 0$, $\alpha < 180^0$, zaś na rys. 43 $\beta < 0$, $\alpha > 180^0$. Obydwa rysunki pokazują, że drobne przesunięcie prostych WB na gruncie wobec $W'B'$ w projekcie, powoduje znaczne przesunięcie łuku na polu wobec projektu.

Ponieważ takie znaczniejsze przesunięcie łuku jest nieraz z różnych powodów niedopuszczalne, zatem trzeba położenie łuku na polu ustalić, przez przeniesienie jednego lub dwóch punktów łuku z projektu na grunt.

Tu mogą zajść różne przypadki.

a) Przez punkt łuku M dany na gruncie wytyczyć łuk łączący dwa proste kierunki, bez naruszenia ich położenia. Rys. 44.

Przez dany punkt M i dwa styczne kierunki jest łuk zupełnie określony; nie można zatem z góry obrać promienia r_1, lecz trzeba jego wielkość wyznaczyć. Przy małym kącie β wypada punkt wierzchołkowy daleko, a często jest niedostępny, więc dla wyznaczenia kąta wierzchołkowego zastosujemy sposób podany w § 6 pod *b)* lub *c)*. Prostę AA_1 położymy przez punkt M, zmierzymy kąty δ i γ, poczem wyznaczymy $\beta = \gamma + \delta - 180^0$. Następnie zmierzymy AM i MA_1 i obliczymy długości prostopadłych, wyprowadzonych z punktu M do danych kierunków. Mianowicie jest:



Rys. 44.

$$MN = p = AM \sin \gamma, \quad MN_1 = q = MA_1 \sin \delta.$$

Między długościami $PN = x$ i $P_1N_1 = x_1$, a rzędnemi p i q zachodzą związki:

$$p = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}, \quad q = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x_1^2},$$

z których obliczy się:

$$x = \sqrt{(2r_1 - p)p}, \quad x_1 = \sqrt{(2r_1 - q)q}.$$

Jeżeli wykonamy rzut zamkniętego wieloboku $OPNMN_1P_1O$ na kierunek promienia OP, to otrzymamy równanie:

$$r_1 - p - q \cos \beta - x_1 \sin \beta + r_1 \cos \beta = 0,$$

*

a po wstawieniu za x_1 powyżej wyznaczonej wartości:

$$\sin\beta\sqrt{(2r_1-q)q} = -p-q\cos\beta+r_1(1+\cos\beta).$$

Po obustronnem kwadrowaniu i należytem uporządkowaniu, otrzyma się równanie dla niewiadomej r_1:

$$r_1^2(1+\cos\beta)^2-2r_1[p+(p+q)\cos\beta+q]+p^2+2pq\cos\beta+q^2=0,$$

a stąd: $$r_1=\frac{p+q\pm\sqrt{2pq(1-\cos\beta)}}{1+\cos\beta}=\frac{p+q}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}\left(1\pm2\frac{\sqrt{pq}}{p+q}\sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Z dwóch znaków przed pierwiastkiem odnosi się znak + do przypadków przedstawionych na rys. 42 i 43; znak — odnosi się do uzupełnień do pełnego koła.

Podług wyznaczonego promienia r_1 obliczy się x i x_1, jakoteż $AN=-AM\cos\gamma$ i $A_1N_1=-MA_1\cos\delta$, co posłuży do wyznaczenia: $AP=x-AN$, $A_1P_2=x_1-A_1N_1$. Po odmierzeniu tych długości będą wyznaczone początek P i koniec łuku P_1, zaś łuk wytyczy się podanymi sposobami.

Promień r_1 tylko nieznacznie będzie się różnić od promienia r projektu. (Ob. nr. 14. zbioru przykładów).

W celu kontroli powyższych obliczeń należy z długości $AA_1=d$ i z pomierzonych kątów γ i δ obliczyć według wskazówek § 6 *b)*

$$WA=b \text{ i } WA_1=c.$$

Kontrolą będzie warunek, że:

$$PA+b=P_1A_1+c=t=r_1\operatorname{cotang}\frac{\beta}{2}$$

Prościej niż rachunkiem można dojść do przybliżonej wartości r_1 próbnym wykresem, wykonanym na podstawie w polu pomierzonych ilości γ, δ, AM i MA_1. Podług tej wartości r_1 obliczymy wprost:

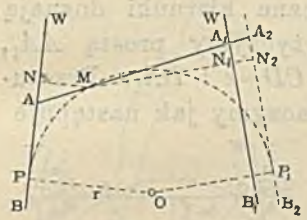
$$t=r_1\operatorname{cotang}\frac{\beta}{2} \text{ i } AP=t-b,\quad A_1P_1=t-c.$$

Te ostatnie długości posłużą do wyznaczenia początku i końca łuku. Tą przybliżoną wartością promienia r_1 wytyczony łuk nie przejdzie dokładnie przez dany punkt M.

b) Zadanie jak pod a), lecz prosta B_1W może doznać równoległego przesunięcia. Rys. 45.

W tym przypadku przeprowadzimy przez M łuk o promieniu r z projektu, a wyznaczymy wielkość przesunięcia

prostej $B_1 W$. Pomiary kątów i długości, jakoteż obliczenie długości p, q i x uskuteczni się jak pod *a)*.



Rys. 45.

Oznaczmy przez q_1 długość MN_2 i wykonajmy rzut tego samego wieloboku co pod *a)* na kierunek promienia OP_1, to otrzymamy równanie:

$$r - p\cos\beta - q_1 - x\sin\beta + r\cos\beta = 0,$$

a stąd:

$$q_1 = r(1+\cos\beta) - p\cos\beta - x\sin\beta.$$

Znając q_1, znajdziemy $q_1 - q$ jako szukaną wielkość równoległego przesunięcia prostej $B_1 W$.

Zmieniona długość $P_1 N_2 = x_1 = \sqrt{(2r - q_1)\,q_1}$.

Dalsze obliczenia i kontrola rachunku jak pod *a)*. Zamiast równoległego przesunięcia można także inny kierunek nadać prostej przesuniętej, jak o tem będzie mowa w §§ 19 i 20.

Powyższe zadanie przedstawia się w prostszej formie jak następuje:

Po zmierzeniu kątów γ i δ, jakoteż długości AM, oblicza się p i x. Po odmierzeniu długości $NP = x$ otrzyma się początek łuku i wytyczy cały łuk, który powinien dokładnie przejść przez punkt M. Połączenie tego łuku z dalszą trasą uskuteczni się podług §§ 19 i 20.

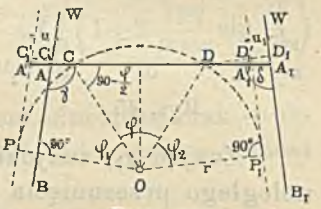
c) Przez dwa dane punkty C i D wytyczyć łuk bez naruszenia prostych BW i $B_1 W$.

Prostę AA_1 przeprowadzimy przez dane punkty i zmierzymy AC, CD, DA_1 i kąty γ i δ (rys. 46). Sposobem pod *a)* podanym wyznaczymy rachunkiem lub wykresem promień r_1' dla łuku przechodzącego przez C i promień r_1'' dla łuku przechodzącego przez D, a podług średniej r_1 z tych dwóch promieni wyznaczymy: $t = r_1 \operatorname{cotang} \frac{\beta}{2}$ i odmierzymy $AP = t - b$ i $A_1 P_1 = t - c$, w celu otrzymania początku i końca łuku. Łuk promieniem r_1 wytyczony przejdzie w pobliżu danych punktów C i D. Prościej można tę średnią wartość r_1 wyznaczyć wprost z wykresu.

d) Przez dwa dane punkty C i D przeprowadzić łuk o danym promieniu r. Rys. 46.

W tym przypadku obydwa styczne kierunki doznają przesunięcia. Przez dane punkty wytyczymy prostą AA_1, zmierzymy kąty γ i δ i długości AC, $CD=e$ i DA_1. Przesunięcia u i u_1 prostych BW i B_1W wyznaczymy jak następuje

Prostopadłe $CC_1=p$ i $DD_1=q$ wyznaczymy jak w poprzednich zadaniach z długości AC i DA_1. Następnie podług zmierzonej długości $CD=e$ obliczymy: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{e}{2r}$. Znając φ, wyznaczymy z warunku, że:



Rys. 46.

$$\varphi_1+\frac{\varphi}{2}+90+\gamma+90=360^0,$$

$$\varphi_1=180^0-\gamma-\frac{\varphi}{2},\ \text{podobnie:}\ \varphi_2=180^0-\delta-\frac{\varphi}{2}.$$

Długość: $CC'_1=r(1-\cos\varphi_1)=p+u$, więc:

$$u=r(1-\cos\varphi_1)-p,\quad u_1=r(1-\cos\varphi_2)-q,$$

przyczem dodatnia lub ujemna wartość u lub u_1 wskazuje, że przesunięcie prostej następuje na zewnątrz lub na wewnątrz.

Punkta P i P_1 wyznaczy się jak w poprzednich zadaniach podano, albo też z wzorów:

$$A'P=C'_1P-A'C'_1=r\sin\varphi_1-(p+u)\operatorname{cotang}(180-\gamma),$$

$$A'_1P_1=D'_1P_1-A'_1D'_1=r\sin\varphi_2-(p+u_1)\operatorname{cotang}(180-\delta).$$

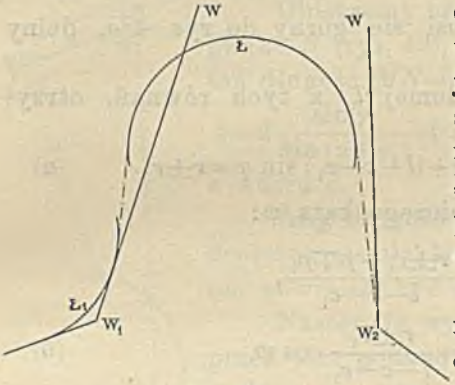
Kontrolę rachunku przeprowadzi się jak pod *a)* podano.

Jeżeli równoległe przesunięcie prostych nie jest pożądane, natenczas przez główne punkty C i D wytyczy się cały łuk o danym promieniu r i połączy obustronnie z dalszą trasą za pomocą stycznych podług §§ 19 i 20.

§ 18. Przystosowanie wytyczonego łuku do trasy w tym przypadku, jeżeli przy wytyczeniu łuku nastąpiła zmiana położenia danych prostych kierunków. Rys. 47.

W zagadnieniach pod *b)* i *d)* poprzedniego paragrafu przyjęliśmy, że jedna prosta lub obie proste zostały równolegle przesunięte. Takie równoległe przesunięcie nie będzie

zawsze dopuszczalne. Jeżeli mianowicie przed uważanym łukiem $Ł$ (rys. 47) był już wytyczony łuk $Ł_1$, to należy do obydwu łuków poprowadzić wspólną styczną; lub też jeżeli w trasie po łuku $Ł$ następującej wierzchołek W_2 nie może zmienić swego położenia, wtedy należy z tego punktu poprowadzić styczną do łuku $Ł$.



Rys. 47.

Te obydwa zagadnienia rozpatrzymy w następujących paragrafach.

§ 19. Do dwóch w polu wytyczonych łuków poprowadzić wspólną styczną.

Obydwa łuki mogą być jednakowo lub odwrotnie skierowane. Rysunki 48 i 49.

a) Przeprowadzenie ogólne.

Na dokładnie wyznaczonych głównych punktach M i M_1 wykonamy pomiar kątów α i α_1, zawartych między stycznemi w tych punktach, a prostą MM_1 i zmierzymy długość $MM_1 = l$. Następnie obliczymy:

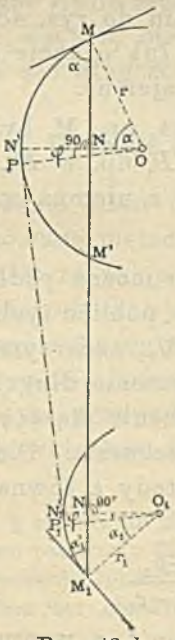
$$MN = c = r \sin \alpha,$$

$$M_1N_1 = c_1 = r_1 \sin \alpha_1,$$

$$NN' = p = r(1 - \cos \alpha),$$

$$N_1N'_1 = p_1 = r_1(1 - \cos \alpha_1).$$

Rys. 48 *a*.



Rys. 48 *b*.

Oznaczmy przez l_0 długość stycznej PP_1, a przez φ kąt zawarty między tą styczną a prostą MM_1, to te dwie ilości należy wyznaczyć. W tym celu wykonajmy rzut wieloboku $NN'PP_1N'_1N_1N$ na kierunek prostej MM_1 i na prostopadłą do tego kierunku, a otrzymamy dwa równania:

$$l-c-c_1=r\sin\varphi+l_0\cos\varphi\pm r_1\sin\varphi,$$

$$p\pm p_1=r(1-\cos\varphi)+l_0\sin\varphi\pm r_1(1-\cos\varphi).$$

Z dwóch znaków odnosi się górny do rys. 48*a*, dolny do rys. 48*b*.

Po wyłączeniu niewiadomej l_0 z tych równań, otrzyma się:

$$(r\pm r_1-p\mp p_1)\cos\varphi+(l-c-c_1)\sin\varphi=r\pm r_1. \qquad (a)$$

Podstawmy dla pomocniczego kąta ψ:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{r\pm r_1-p\mp p_1}{l-c-c_1},$$

a otrzymamy: $$\sin(\psi+\varphi)=\frac{r\pm r_1}{l-c-c_1}\cos\psi, \qquad (b)$$

wzór dla wyznaczenia kąta φ. Po wstawieniu tej wartości w pierwotne równania znajdzie się:

$$l_0=\frac{l-c-c_1-(r\pm r_1)\sin\varphi}{\cos\varphi}, \text{ albo: } l_0=\frac{p\pm p_1-(r\pm r_1)(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} \qquad (c)$$

Dla kontroli należy l_0 z obydwu wzorów obliczyć.

Punkty styczności P i P_1 wyznaczy się w zastosowaniu do rys. 48*a* przez wytyczenie łuku o kącie $\alpha+\varphi$ z M, zaś o kącie $\alpha_1+\varphi$ z M_1; w zastosowaniu do rys. 48*b* wytyczy się z M łuk o kącie $\alpha\pm\varphi$, a z M_1 łuk o kącie $\alpha_1\mp\varphi$, podług tego, czy $p-p_1$ jest dodatnie czy ujemne.

Uwaga. Jeżeliby obrany punkt, np. M, był położony po drugiej stronie punktu styczności P, np. w M', wtedy przynależny kąt α należy wprowadzić z ujemną wartością, więc i c otrzyma znak ujemny.

b) W zastosowaniu praktycznem można podług oka ocenić położenie punktów styczności, a w pobliżu tych punktów wyznaczymy dokładnie punkty M i M_1, zmierzymy MM_1 i kąty α i α_1 jak przedtem. Również obliczenie długości c, c_1, p i p_1 pozostaje to samo, tylko wyznaczenie kąta φ, który teraz będzie bardzo mały, dozna uproszczenia. Dla małego kąta możemy podstawić $\cos\varphi=1$, a wtedy z równania (*a*) otrzyma się wzór prosty:

$$\sin\varphi=\frac{p\pm p_1}{l-c-c_1}$$

Podług tej wartości obliczy się l_0 z wzoru (*c*).

Zamiast dokładnego pomiaru długości l wystarczy pomiar tachymetryczny, albotež w następujący sposób:

Rys. 49.

Obierzemy na łuku dokładnie wyznaczony punkt N (rys. 49), zmierzymy kąty γ i γ_1, jakoteż długość $MN=d$, a wtedy obliczymy:

$$l=d\frac{\sin\gamma_1}{\sin(\gamma+\gamma_1)}$$

i $\sin\varphi$ z górnego wzoru, a l_0 z wzoru c.

Aby długość obliczona z tego wzoru była dostatecznie dokładna dla wyznaczenia kąta φ, nie powinien być stosunek $d:l$ zbyt mały.

Następnie wytyczy się punkty P i P_1 jak przed tem podano i zmierzy dokładnie l_0. Nie może ono zupełnie zgodzić się z wartością obrachowaną podług wzoru e, gdyż l nie było dostatecznie dokładnie wyznaczone *).

§ 20. Z dowolnego punktu wytyczyć styczną do łuku w polu wytyczonego (np. z punktu W_2 na rys. 47).

To zagadnienie redukuje się do poprzedniego, skoro promień r_2 zmniejszy się do zera. Jeżeli zatem w wzory § 19. wprowadzimy $r_1=c_1=p_1=0$, otrzymamy wzory potrzebne do wyznaczenia kąta φ i długości l_0.

§ 21. Tyczenie łuków budowli wodnych.

O ile tyczenie łuku uskutecznia się na suchym lądzie, mogą być stosowane metody podane w poprzednich paragrafach. W § 6. jest także podane jak sobie poradzić należy, jeżeli punkt wierzchołkowy nie jest dostępny, gdyż wpada w rzekę. Inaczej rzecz się przedstawia, jeżeli linia regulacyjna brzegu rzeki, wzdłuż której ma być zbudowana tama, leży w wodzie. W tym przypadku jest postępowanie odmienne dla wypukłego lub wklęsłego brzegu **).

---

*) Do tego § ob. nr. 15. zbioru przykładów.

**) Następne paragrafy 22. i 23. głównie podług dziełka: Inżynier Regiec: „O wytyczaniu łuków przy budowlach lądowych i wodnych". Kraków 1895. Tam też obszerne tabele ułatwiające tyczenie budowli wodnych.

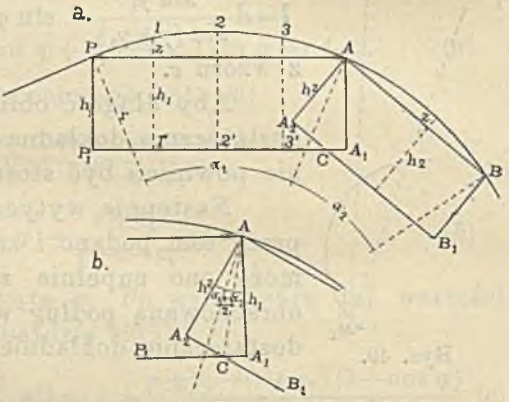
§ 22. Tyczenie wypukłego brzegu. Rys. 50. *a* i *b*.

Zastosujemy tyczenie rzędnemi od cięciwy, podług § 10 *b*). W tym celu obierzemy długość łuku PA, stosownie do wielkości promienia r tak, aby łuk był dostatecznie płaski, obliczymy przynależny kąt środkowy α_1 i długość cięciwy:

$$PA = 2r \sin \frac{\alpha_1}{2}.$$

Kąt: $MPP_1 = 90 - \frac{\alpha_1}{2}$

wytyczymy, a na prostej PP_1 odmierzymy taką długość h_1, aby prosta P_1A_1 równoległa do PA wypadła na wolnem, suchem miejscu. Tę równoległą również wytyczymy za pomocą prostego kąta przy P_1 i odmierzymy na niej obliczoną długość PA. Teraz obierzemy na P_1A_1 dowolną ilość punktów 1′, 2′, 3′... i obliczymy dla nich podług § 10 *b*) rzędne z; w tych punktach wystawimy prostopadłe do P_1A_1 i tak będziemy kierować łódką na wodzie, aby można wstawić w wodę tykę w kierunku tej prostopadłej i w odległości $h_1 + z$, mierzonej taśmą. Dla ustalenia tyki trzeba ją będzie nieraz otoczyć narzutem kamiennym.



Rys. 50.

W celu tyczenia następnego elementu łuku AB o kącie środkowym α_2, można po wykonaniu tamy PA ustawić się w A, odmierzyć od AP kąt PAA_2 równy: $90 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, obrać $AA_2 = h_2$ i postąpić jak poprzednio. Gdyby jednak ustawienie w punkcie A przedstawiało trudności, to można prostą A_2B_1 wytyczyć za pomocą punktu C, leżącego na przecięciu prostych P_1A_1 i A_2B_1. W celu wyznaczenia tego punktu wykonajmy rzut linii AA_1C na kierunek AA_2 (rys. *b*), zważywszy, że kąt przy A równy $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$:

$$h_2 = h_1 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + A_1C \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

a stąd: $$A_1C=\frac{h_2-h_1\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

i podobnie: $$A_2C=\frac{h_1-h_2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

Przez odmierzenie obliczonej długości A_1C otrzyma się punkt C, a przez wytyczenie kąta $P_1CB_1=180-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ otrzyma się kierunek CB_1, na którym odmierzona długość A_2C wyznaczy punkt A_2. Z A_2 odmierzy się A_2B_1 równe obliczonej długości AB etc.

Dla $\alpha_1=\alpha_2$ i $h_1=h_2$, jest $A_1C=A_2C=h_1\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha_1}{2}$.

§ 23. Tyczenie wklęsłego brzegu.

Przy tyczeniu tam łukowych przy wklęsłym brzegu możemy tylko tak postąpić, że na podstawie elementu łuku tamy w wodzie już zbudowanego, wyznaczamy kierunek dla następnego elementu. Mniej dokładnie uskuteczni się tyczenie metodą w § 10 *f)* na rys. 31*b* podaną. Punkt 1 należy wytyczyć rzędną od stycznej, a po zbudowaniu elementu $M1$ wyznaczymy tyczkami wstecz kierunek 1'1 i w jego przedłużeniu wybudujemy element 12 i t. d.

Ta metoda wystarczy na krótkie łuki. Dokładniejsze metody są następujące:

*a)**) Tyczymy styczną w punkcie początkowym łuku (rys. 51), a na niej odmierzamy dogodnę długość $PM=D$. W M tyczymy prostą kierunkową MN, prostopadłą do PM. Na łuku obieramy równe długości s tak wielkie, żeby je można uważać za elementy proste. Styczne w punktach A, B..., pomyślmy sobie przedłużone ku stycznej PM i ku linii kierunkowej MN.

Kąt α elementu łuku wyznaczymy podług $\alpha=\frac{s}{r}$ i obliczymy:

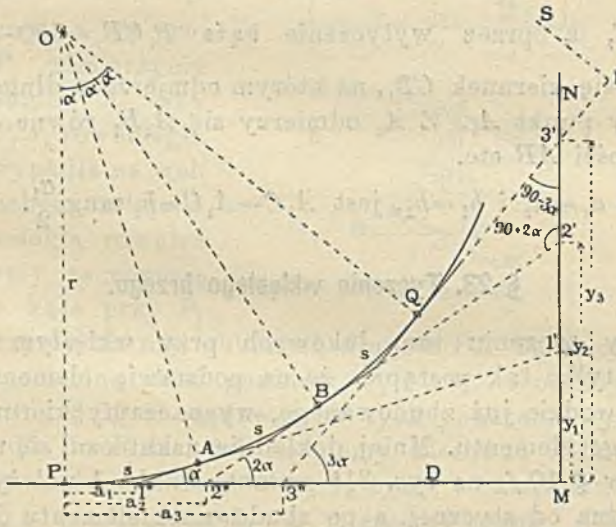
*) Trochę odmiennie jak w dziełku inż. Regieca.

$$a_1 = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \quad a_2 = r \operatorname{tang} 2\frac{\alpha}{2}, \ldots, a_n = r \operatorname{tang} n\frac{\alpha}{2}$$

Różnica długości dwóch po sobie następujących odcinków równa się:

$$a_n - a_{n-1} = r\left[\operatorname{tang}\frac{n\alpha}{2} - \operatorname{tang}\frac{(n-1)\alpha}{2}\right] = \frac{r \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

Ten wzór posłuży do kontroli rachunku.



Rys. 51.

Teraz można obliczyć odcinki na linii kierunkowej:

$$y_1 = (D - a_1) \operatorname{tang} \alpha,$$
$$y_2 = (D - a_2) \operatorname{tang} 2\alpha,$$
$$y_3 = (D - a_3) \operatorname{tang} 3\alpha$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_n = (D - a_n) \operatorname{tang} n\alpha.$$

Te odcinki odmierzy się.

Postępowanie przy tyczeniu łuku jest następujące:

Naprzód zbuduje się element tamy $P1''$ o długości a_1 w kierunku PM; następnie celując ku $1'$ buduje się element $1''1$ o długości s; następnie celując z 1 ku $2'$ wykona się element 12 o długości s i t. d. W ten sposób tyczy się wielobok opisany $1''12\ldots$, który można uważać za łuk, jeżeli dłu-

gość s obrano odpowiednio małą. Jeżeli się odmierzy długości a_1, a_2, a_3 ..., to się ma kontrolę roboty w warunku, że punkty 1″, 1, 1′, lub 2″, 2, 2′ muszą leżeć dokładnie na jednej prostej.

Jeżeli łuk jest długi, to może jedna linia kierunkowa nie wystarczyć; natenczas możemy obrać dowolny już wytyczony styczny kierunek i do niego odnieść nową linię kierunkową. Np. obierzemy styczny kierunek 3″3′, dokładnie wytyczymy, a na nim obrany punkt Q w środku boku 23 będzie nowym początkiem łuku, od którego w dogodnym odstępie D obierzemy punkt R, poprowadzimy linię kierunkową RS i t. d.

Aby błędy poprzednio tyczonego łuku na ten nowy układ się nie przeniosły, dobrze będzie punkty 2 i Q na nowo wyznaczyć. Mianowicie z trójkąta 2′23′ obliczy się:

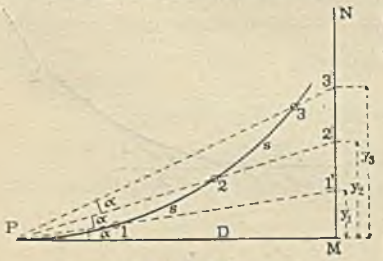
$$22' = (y_3 - y_2)\frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha}$$

i odmierzy dokładnie od 2′ do 2, poczem odmierzy się:

$$2Q = Q3 = a_1 = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}.$$

Metoda *a)* może być korzystnie zastosowana dla tam faszynowych.

b) Można także zastosować metodę biegunową, podaną w § 10 pod *d)* z tą różnicą, że i tu poprowadzimy jak przedtem linię kierunkową (rys. 52), obliczymy:



Rys. 52.

$$y_1 = D \operatorname{tang} \alpha,$$
$$y_2 = D \operatorname{tang} 2\alpha$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_n = D \operatorname{tang} n\alpha$$

i odmierzymy te odcinki na linii kierunkowej.

Teraz można poszczególne punkty łuku w wodzie tyczyć. Kierujemy z punktu P łódź tak, aby żerdka z łodzi trzymana weszła w kierunek $P1'$ i miała od P odległość s. Tę żerdkę wbijemy i otoczymy narzutem kamiennym. Następnie kierujemy łódź z żerdką w kierunek $P2'$ i wbijamy ją w odległości s od punktu 1 i t. d.

Ta metoda może być z korzyścią dla kamiennych tam stosowana.

Dla długich łuków można przyjąć w dowolnym n-tym

punkcie nową styczną i nową linię kierunkową. W celu otrzymania dokładnych podstaw dla dalszego tyczenia, należy punkt, w którym chce się poprowadzić styczną, dokładnie ustalić a styczną dokładnie wyznaczyć. Punkt n (rys. 53) ustalimy za pomocą współrzędnych:

$$x_n = r \sin 2n\alpha,$$

$$y_n = r(1-\cos 2n\alpha) = 2r \sin^2 n\alpha,$$

zaś dla wyznaczenia kierunku stycznej obliczymy i odmierzymy albo: $PQ = r \operatorname{tang} n\alpha$, albo z trójkąta PQR, $PR = PQ \operatorname{tang} 2n\alpha = r \operatorname{tang} n\alpha \operatorname{tang} 2n\alpha$.

Rys. 53.

c) Jeżeliby linia kierunkowa w powyższych metodach stosowana wypadła również w rzekę, co się zdarzyć może przy przejściu z wklęsłego do wypukłego brzegu, lub też na tamie separacyjnej, budowanej na wylocie bocznego dopływu rzeki, natenczas trzeba styczną PM (rys. 54) poprowadzić wstecz pod bieg rzeki, a linię kierunkową obrać powyżej początku łuku. Jeżeli zastosujemy metodę *a)*, to różnica w wzorach na y będzie tylko ta, że w nawiasach będzie znak +. Zatem:

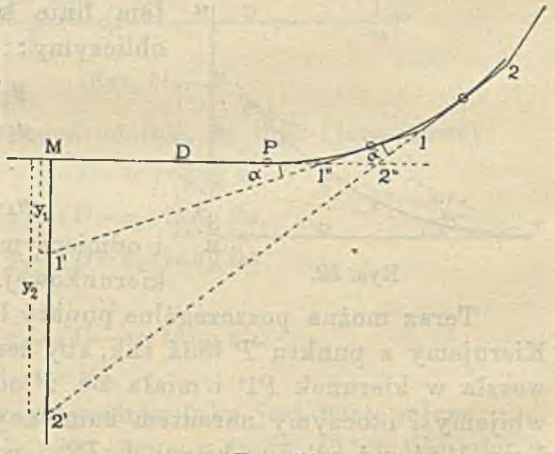
$$y_1 = (D + a_1) \operatorname{tang} \alpha,$$

$$y_2 = (D + a_2) \operatorname{tang} 2\alpha$$

. . . . . .

$$y_n = (D + a_n) \operatorname{tang} n\alpha.$$

Zresztą postępowanie przy tyczeniu łuku nie wymaga objaśnienia.

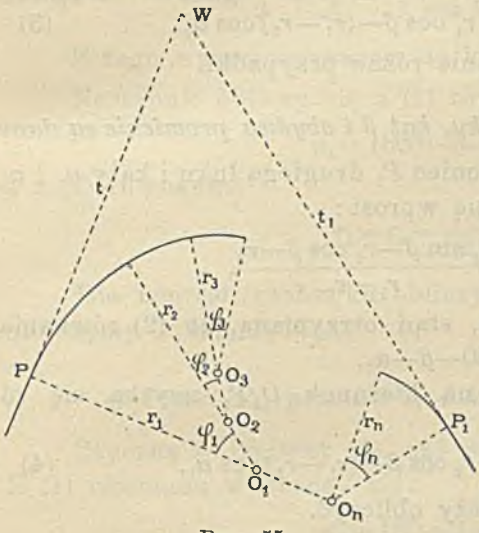


Rys. 54.

§ 24. Tyczenie łuków koszowych. Rys. 55.

W celu lepszego zastosowania się do trudnego górskiego terenu, lub też w celu obejścia jakiejś przeszkody, stosuje się nieraz łuki koszowe.

Jeżeli w łuku koszowym o n łukach połączymy środki kół, to otrzymamy wielobok $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ o n bokach.



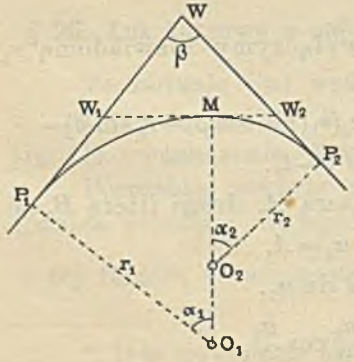
Rys. 55.

Przyjmijmy*), że z projektu są znane długości wszystkich promieni łuków, to długości boków tego wieloboku, z wyjątkiem boku O_1O_n równają się różnicy przylegających promieni. Długość boku O_1O_n wyznaczy się podług danych długości t i t_1 z pięcioboku $O_1PWP_1O_nO_1$.

Między kątami φ a bokami wieloboku zachodzą trzy związki, wyznaczone trzema równaniami. Jedno równanie otrzyma się z warunku, że $\Sigma\varphi = 180 - \beta$. Dwa inne równania otrzymamy z rzutów wieloboku $O_1O_2O_3 \ldots O_n$ na dwa dowolne kierunki. Należy zatem z projektu wyjąć wartości $n-3$ kątów φ, zaś pozostałe trzy kąty wyznaczy się z tych trzech równań. Przez to redukuje się wyznaczenie łuku koszowego o n łukach, na łuk koszowy o trzech łukach.

§ 25. Tyczenie łuków koszowych o dwóch łukach. Rys. 56.

Do rozwiązywania zagadnień dotyczących łuków koszowych potrzeba nam, jak to wykazano w poprzednim paragrafie, trzech równań.



Rys. 56.

Jedno równanie wyznacza warunek, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180 - \beta. \qquad (1)$$

Dwa dalsze równania uzyskamy z rzutu wieloboku $O_1P_1WP_2O_2O_1$ na dwa dowolne kierunki. Długości stycznych P_1W i P_2W oznaczmy przez t_1 i t_2.

Rzut wieloboku na kierunek WP_2 da równanie:

*) Podług Pullera w Ztschr. f. Verm. 1892.

$$t_2 = t_1 \cos\beta + r_1 \sin\beta - (r_1 - r_2)\sin\alpha_2. \qquad (2)$$

Rzut na kierunek O_2P_2 do poprzedniego prostopadły:

$$r_2 = t_1 \sin\beta - r_1 \cos\beta - (r_1 - r_2)\cos\alpha_2. \qquad (3)$$

Rozpatrzymy następnie różne przypadki.

a) Początek P_1 jednego łuku, kąt β i obydwa promienie są dane.

Należy wyznaczyć koniec P_2 drugiego łuku i kąty α_1 i α_2. Z (3) równania otrzyma się wprost:

$$\cos\alpha_2 = \frac{t_1 \sin\beta - r_1 \cos\beta - r_2}{r_1 - r_2},$$

a wstawiwszy wartość α_2, stąd otrzymaną, do (2) równania, obliczymy t_2. Zaś: $\alpha_1 = 180 - \beta - \alpha_2$.

Z rzutu wieloboku na kierunek O_1P_1 uzyska się równanie:

$$r_1 = t_2 \sin\beta - r_2 \cos\beta + (r_1 - r_2)\cos\alpha_1, \qquad (4)$$

które dla kontroli należy obliczyć.

Dla tyczenia przydatne będą jeszcze długości:

$$P_1W_1 = W_1M = r_1 \operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2}, \qquad P_2W_2 = W_2M = r_2 \operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2},$$

które odmierzymy.

Równość długości $P_1W_1 = W_1M$ i $P_2W_2 = W_2M$ będzie dalszą kontrolą. W ten sposób otrzymamy wspólny punkt M i koniec łuku P_2.

b) Punkty P_1 i P_2 i promień r_1 są dane.

Oprócz tego dany jest kąt β, a długości t_1 i t_2 są również dane, lub zmierzymy je w polu. Wyznaczyć należy α_1, α_2 i r_2.

Jeżeli z (2) i (3) równania wyłączymy niewiadomą r_2, to otrzymamy równanie:

$$\cos\alpha_2[t_1\cos\beta + r_1\sin\beta - t_2] + \sin\alpha_2[r_1(1+\cos\beta) - t_1\sin\beta] = \\ = t_1\cos\beta + r_1\sin\beta - t_2.$$

Oznaczmy pierwszy nawias literą A, drugi literą B, to:

$$A\cos\alpha_2 + B\sin\alpha_2 = A,$$

czyli:

$$A(1-\cos\alpha_2) = B\sin\alpha_2,$$

lub:

$$A\sin^2\frac{\alpha_2}{2} = B\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2},$$

a stąd: $$\operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2}=\frac{B}{A}=\frac{2r_1\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-t_1\sin\beta}{t_1\cos\beta+r_1\sin\beta-t_2}$$

Z tego wzoru wyznaczy się kąt α_2.

Następnie obliczy się z (1) równania:

$$\alpha_1=180^0-\beta-\alpha_2,$$

a z (2) równania:

$$r_2=r_1-\frac{A}{\sin\alpha_2}$$

Dla kontroli rachunku obliczymy równanie (4). Również obliczymy P_1W_1, P_2W_2...

c) Punkt P_1, promień r_1 i kąty α_1 i β są dane.

Styczną t_1 zmierzy się, zaś wyznaczyć należy t_2, r_2 i α_2. Z (1) równania wyznaczy się:

$$\alpha_2=180-\beta-\alpha_1.$$

Z (3) równania:

$$r_2=\frac{t_1\sin\beta-r_1(\cos\beta+\cos\alpha_2)}{1-\cos\alpha_2},$$

albo w formie wygodniejszej dla rachunku logarytmami:

$$r_2=\frac{t_1\sin\beta-2r_1\cos\frac{\beta+\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta-\alpha_2}{2}}{2\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)}$$

Podług tych wartości obliczy się t_2 z (2) równania.

§ 26. Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni. Rys. 57*).

To zadanie jest ważne szczególnie dla trasy kolei.

Dane są punkty P_1 i P_2, i kąt β, zatem t_1 i t_2 zmierzy się. Do wyznaczenia mamy r_1 i r_2 i kąty α_1 i α_2.

Potrzebne czwarte równanie uzyskamy z założenia, że różnica promieni ma być jak najmniejsza, które wprowadzimy w tej formie, że stosunek $\frac{r_2}{r_1}$ ma być jak największy.

*) Inne rozwiązanie patrz: D'Ocagne, Leçons sur la Topométrie.

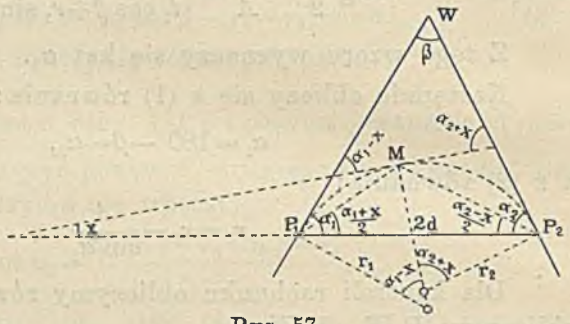
W punkcie wspólnym M poprowadzona styczna niech zawiera z prostą P_1P_2 kąt x, to z trójkąta P_1MP_2 wynika, że:

$$\frac{P_2M}{P_1M}=\frac{\sin\frac{\alpha_1+x}{2}}{\sin\frac{\alpha_2-x}{2}}$$

zaś z trójkątów P_1MO_1 i P_2MO_2 wyznaczy się:

$$P_1M=2r_1\sin\frac{\alpha_1-x}{2}$$

$$P_2M=2r_2\sin\frac{\alpha_2+x}{2}$$



Rys. 57.

co wstawiwszy w poprzednie równanie wyznaczy:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sin\frac{\alpha_1+x}{2}\sin\frac{\alpha_1-x}{2}}{\sin\frac{\alpha_2-x}{2}\sin\frac{\alpha_2+x}{2}}=\frac{\cos x-\cos\alpha_1}{\cos x-\cos\alpha_2}$$

W tym wyrazie jest tylko x ilością zmienną. Znajdźmy jego pochodną podług x:

$$\frac{d\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{dx}=\frac{-\sin x(\cos x-\cos\alpha_2)+\sin x(\cos x-\cos\alpha_1)}{(\cos x-\cos\alpha_2)^2}=$$

$$=\frac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}{(\cos x-\cos\alpha_2)^2}\sin x$$

Dla $\max\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ ma ten wyraz równać się zeru, co nastąpi, gdy $x=0$, czyli gdy styczna w punkcie M będzie równoległa do prostej P_1P_2.

Wobec tego wyniku, są kąty α_1 i α_2 przy P_1 i P_2 zarazem kątami środkowymi łuków. Można je albo wprost zmierzyć, jeżeli z P_1 do P_2 można celować, albotež można je wyznaczyć.

Mianowicie z trójkąta P_1WP_2 otrzyma się:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{\sin(\beta+\alpha_1)}{\sin\alpha_1},$$

czyli: $\operatorname{cotang}\alpha_1 = \dfrac{\frac{t_1}{t_2} - \cos\beta}{\sin\beta}$, podobnie $\operatorname{cotang}\alpha_2 = \dfrac{\frac{t_2}{t_1} - \cos\beta}{\sin\beta}$

przyczem ma być $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0 - \beta$.

W celu wyznaczenia wielkości promieni, zużytkujemy wzór powyżej ustawiony, w który wstawimy $x=0$:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} \qquad (a)$$

Jeżeli zważymy, że prosta MO_1 stoi prostopadle do P_1P_2, to:

$$P_1P_2 = 2d = r_1 \sin\alpha_1 + r_2 \sin\alpha_2. \qquad (b)$$

Wartość dla d otrzymamy albo wprost przez zmierzenie, albo z wzoru: $2d = t_2 \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha_1} = t_1 \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha_2}$.

Jeżeli z wzoru (a) otrzymaną wartość za r_2 wstawimy w wzór (b), to otrzymamy równanie:

$$2r_1\left(\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) = 2d\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right),$$

z którego ostatecznie wyznaczy się:

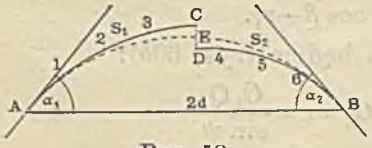
$$r_1 = \frac{d\sin\frac{\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta}{2}}, \text{ podobnie } r_2 = \frac{d\sin\frac{\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

Dla kontroli rachunku należy obliczyć wzór (2) lub (3) z poprzedniego paragrafu*).

Dla tyczenia łuków obliczymy (ob. rys. 56) styczne $P_1W_1 = W_1M$ i $MW_2 = W_2P_2$.

§ 27. Zastosowanie § 26. Rys. 58.

Dłuższe łuki tyczone z dwóch stron nie zejdą się w jednym wspólnym punkcie, z powodu nieuniknionych błędów popełnionych przy tyczeniu. Jeżeli odchyłka Δ jest mała, to ją równomiernie na obydwa łuki rozdzielimy podług § 14. Jeżeli zaś jest większa, to pomiędzy dwa dokła-



Rys. 58.

*) Ob. nr. 16 zbioru przykładów.

dnie wytyczone punkty A i B wstawimy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni. W tym celu zmierzymy kąty α_1 i α_2 zawarte między stycznemi w tych punktach a prostą AB, następnie zmierzymy albo długości stycznych, albo $AB=2d$. Dalsze obliczenie jak w § 26.

§ 28. Łuk koszowy o małym kącie wierzchołkowym. Rys. 59.

Odwołując się na to, co powiedziano w § 17, należy ustalić na polu choć jeden punkt łuku koszowego. Jeżeli M jest tym punktem, to spuścimy prostopadłą do stycznej i zmierzymy $MM_1=p$; albotеż dojdziemy do wartości p przez postępowanie wskazane w § 17*a*.

Długość promienia r_1 weźmie się z projektu, wtedy obliczymy i odmierzymy:

$$M_1P_1=\sqrt{p\,(2r_1-p)}$$

przezco otrzyma się punkt P_1, a po wyznaczeniu długości M_1W, wyznaczy się: $t_1=M_1P_1+M_1W$. Dalsze tyczenie łuku nastąpi podług § 25.

Rys. 59.

§ 29. Łuk koszowy o trzech łukach *).

Rozpatrzymy dwa różne przypadki.

a) Dane początek i koniec łuku i wszystkie trzy promienie. Rys. 60 i 61.

Styczne t_1 i t_2, jakoteż kąt β zmierzy się na gruncie. Wyznaczyć mamy kąty α_1, α_2 i α_3. Nazwijmy różnice promieni $O_1O_2=d_1$ a $O_2O_3=d_2$. Poprowadźmy na rys. 60*a* $O_3Q \parallel O_1P_1$, zaś $O_1Q \perp O_3Q$ i wykonajmy rzut wieloboku $O_1P_1WP_2O_3QO_1$ na kierunek P_1W i na prostopadłą do tego kierunku, a otrzymamy:

$$O_1Q=t_1-t_2\cos\beta-r_3\sin\beta,$$

$$O_3Q=t_2\sin\beta-r_3\cos\beta-r_1.$$

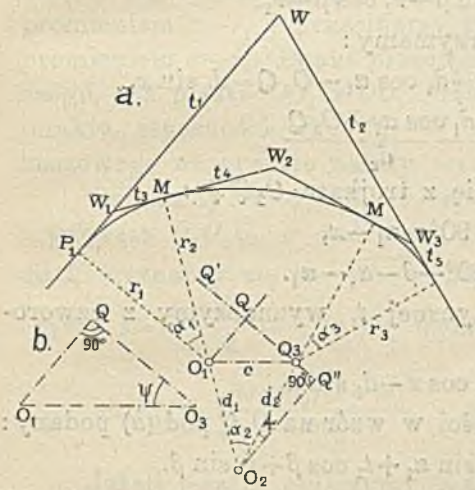
Jeżeli te ilości obliczymy, to będzie (rys. 60*b*):

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{O_1Q}{O_3Q},\quad O_1O_3=c=\frac{O_1Q}{\sin\psi}$$

*) Puller, Zeitschr. für Vermessungswesen z r. 1893: „Ueber das Abstecken von Kreisbögen".

W trójkącie $O_1O_2O_3$ oznaczmy $s=\frac{d_1+d_2+c}{2}$, to:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2}=\sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{s(s-c)}}$$



Rys. 60.

Z trójkąta O_1O_3Q' wynika, że kąt $O_2O_1O_3=\alpha_1+\psi$, zatem:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_1+\psi}{2}=\sqrt{\frac{(s-d_1)(s-c)}{s(s-d_2)}}$$

wreszcie:

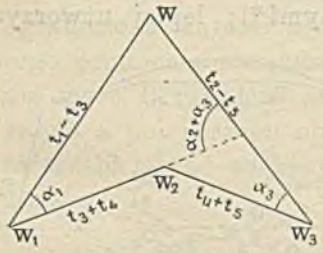
$$\alpha_3=180-\beta-\alpha_1-\alpha_2.$$

W miarę zwiększania się kąta α_1 zmniejsza się kąt ψ, a staje się zerem, skoro promień O_1P_1 spadnie z kierunkiem O_1O_3, czyli gdy kąt $P_1O_1O_3$ osiągnie 180°. Dla kąta $P_1O_1O_3$ większego niż 180°, staje się kąt ψ ujemny, na co przy obliczaniu należy zwrócić uwagę.

Gdy kąt β jest ujemny, jak np. na rys. 43 lub 63, natenczas jest: $360^0-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=180^0-\beta$,

czyli: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180+\beta$, więc: $\alpha_3=180+\beta-\alpha_1-\alpha_2$.

Podług wyznaczonych kątów α_1, α_2 i α_3 obrachuje się i wytyczy styczne okalające łuki, punkt P_2 i punkty wspólne M i M'.



Rys. 61.

Z czworoboku stycznych (rys. 61) możemy otrzymać dwa równania, wykonując rzut tego czworoboku na kierunki prostopadłe do głównych stycznych WW_1 i WW_3:

$$(t_1-t_3)\sin\beta=(t_3+t_4)\sin(\alpha_2+\alpha_3)+$$
$$+(t_4+t_5)\sin\alpha_3,$$
$$(t_2-t_5)\sin\beta=(t_3+t_4)\sin\alpha_1+$$
$$+(t_4+t_5)\sin(\alpha_1+\alpha_2).$$

Te równania należy obliczyć dla kontroli*).

*) Ob. nr. 17 zbioru przykładów.

b) Dane wszystkie trzy promienie, kąt α_1 i koniec łuku P_2.

Zmierzymy kąt β i $WP_2 = t_2$, a wyznaczyć należy t_1, α_2 i α_3. Podług wzoru pod (*a*) obliczy się:

$$O_3Q = t_2 \sin\beta - r_3 \cos\beta - r_1.$$

Z trójkąta O_3O_2Q'' otrzymamy:

$$O_3Q'' = QQ'' - O_3Q = d_1 \cos\alpha_1 - O_3Q = d_2 \sin x,$$

stąd:
$$\sin x = \frac{d_1 \cos\alpha_1 - O_3Q}{d_2}$$

Znając x, wyznaczy się z trójkata $O_2Q'Q''$:

$$\alpha_2 = 90^0 - \alpha_1 - x,$$

wreszcie:
$$\alpha_3 = 180^0 - \beta - \alpha_1 - \alpha_2.$$

W celu obliczenia stycznej t_1 wyznaczymy z czworoboku O_2O_1QQ'':

$$O_1Q = d_2 \cos x - d_1 \sin\alpha_1,$$

a po wstawieniu tej wartości w wzór na O_1Q pod (*a*) podany:

$$t_1 = d_2 \cos x - d_1 \sin\alpha_1 + t_2 \cos\beta + r_3 \sin\beta.$$

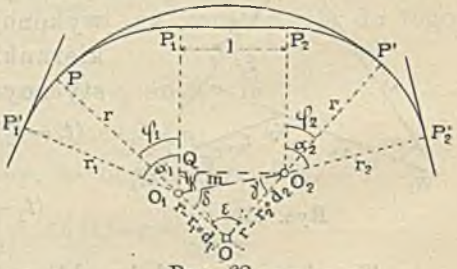
Dla kontroli rachunku obliczy się te same równania, co pod (*a*).

c) Jeżeliby zamiast t_2 było dane t_1, wtedy obliczenie redukuje się do łuku koszowego o dwóch łukach.

d) Jeżeliby jeden punkt, np. pierwszego łuku był ustalony, natenczas wyznaczy się t_1 jak w § 28, a dalsze obliczenie uskuteczni się jak pod (*a*) lub (*b*).

§ 30. Łuk w zastępstwie krótkiej prostej. Rys. 62.

Na trasie kolejowej należy unikać krótkich prostych między łukami jednakowo skierowanymi*); lepiej utworzyć łuk koszowy, a więc zastąpić prostę łukiem stycznym do danych łuków. Na rysunku obok zastąpiliśmy prostę l łukiem PP' o promieniu r. Ten promień musi być większy niż r_1 i r_2, jest jednakże pożądane, aby różnica mię-



Rys. 62.

*) Ob. rozdz. II § 54.

dzy promieniem r i danymi promieniami była niewielka. Jeżeli taki łuk zastępczy chcemy wprowadzić w projekcie, to obieramy wielkość promienia r, a punkty styczności P i P' wyznaczy się w następujący sposób. Ze środka O_1 kreślimy łuk promieniem $r-r_1$ i przecinamy go łukiem zakreślonym z O_2 promieniem $r-r_2$. Punkt przecięcia jest środkiem łuku zastępczego, zaś proste OO_1 i OO_2 przedłużone do łuków, wyznaczą punkta styczności P i P'. W celu wytyczenia tego łuku koszowego na gruncie należy wyznaczyć kąty φ_1 i φ_2.

Oznaczmy: $r-r_1=d_1$, $r-r_2=d_2$, $r_1-r_2=c$, $O_1O_2=m$, to z trójkąta O_1O_2Q, w którym O_2Q poprowadzono równolegle do l, wyznaczy się $m=\sqrt{l^2+c^2}$. Jeżeli dla trójkąta OO_1O_2 oznaczymy $s=\frac{d_1+d_2+m}{2}$, to się wyznaczy:

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-d_2)(s-m)}{md_2}}, \qquad \sin\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{(s-d_1)(s-m)}{md_1}}$$

Jeżeli jeszcze obliczymy $\sphericalangle QO_1O_2$ z $\operatorname{tang}\psi=\frac{l}{c}$, to:

$$\varphi_1=180^0-\psi-\delta, \quad \varphi_2=\psi-\gamma.$$

Dla kontroli rachunku można wyznaczyć kąt ε z wzoru:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{d_1d_2}}$$

Kąt ε ma się równać $\varphi_1+\varphi_2$.

Znając kąty φ_1 i φ_2 wyznaczymy punkt P tycząc albo z P_1 łuk o kącie φ_1, albo z P'_1 łuk o kącie $\alpha_1-\varphi_1$.

Podobnie wyznaczy się P', poczem wytyczy się łuk PP'.

Uwaga. Dowolność w obiorze wielkość promienia r jest ograniczona kątami α_1 i α_2. Bowiem w miarę zmniejszania tego promienia zwiększają się kąty φ_1 i φ_2, których wielkość nie może oczywiście przekroczyć wartości α_1 i α_2. Jeżeliby zatem z powyższego obliczenia wypadło $\varphi_1>\alpha_1$ lub $\varphi_2>\alpha_2$, to trzeba obrać większy promień r*). (Ob. nr. 18 zbioru przykładów).

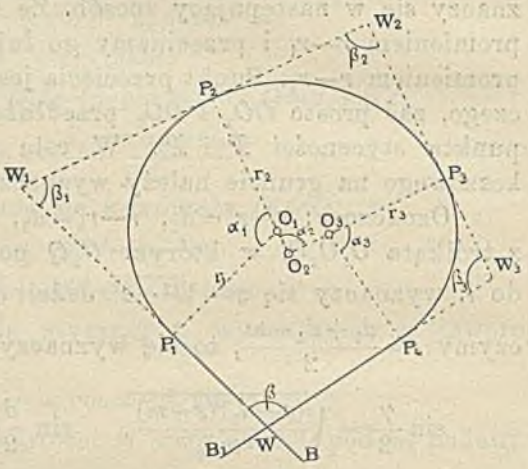
---

*) Nie trudno wyprowadzić wzór dla najmniejszego jeszcze dopuszczalnego promienia r; mianowicie dla $\varphi_1=\alpha_1$ jest $\delta=180^0-\psi-\alpha_1$, a wtedy z powyższego wzoru dla $\sin\frac{\delta}{2}$ wyznaczy się:

$$\min d_1=\frac{l^2}{2[c-m\cos(\psi+\alpha_1)]} \text{ i podobnie: } \min d_2=\frac{l^2}{2[m\cos(\psi-\alpha_2)-c]}$$

§ 31. Tyczenie łuku koszowego w trudniejszych warunkach. Rys. 63.

Na trasie kolei żelaznych czy to w serpentynach, czy też w miejscach, gdzie mają być wykonane tunele zwrotne, mamy nieraz do czynienia z łukiem o jednym promieniu, lub też z łukami koszowymi, których kąt środkowy jest większy niż 180°. Przytem, z powodu trudności terenu bywa pomiar kątów jak β_1, β_2..., a tembardziej pomiar stycznych WW_1, W_1W_2..., albo bardzo utrudniony, albo wprost niemożliwy. Wtedy postąpimy w inny sposób. Przyjmiemy, że tylko kierunki końcowych stycznych BW i B_1W są dane, a kąt β może być zmierzony.



Rys. 63.

1. Łuk o jednym promieniu r.

Dla zmierzonego kąta β obliczymy długość stycznych $WP_1 = WP_4 = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$, odmierzymy je i wytyczymy łuk z dwóch stron. Jeżeli w punkcie zetknięcia będzie różnica mała, to ją wyrównamy.

Jeżeliby zaś różnica była większa, to obierzemy dwa dokładnie wytyczone punkty, np. P_2 i P_3 i włożymy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni, podług § 26.

2. Łuk koszowy o kilku łukach.

Dla dokładnie zmierzonego kąta β, który będzie się cokolwiek różnić od kąta β projektu, wyrysujemy przez próby łuk koszowy, któryby możliwie dokładnie zgodził się z projektem. Z tego wykresu wyjmiemy długość WP_1, odmierzymy ją i wytyczymy łuk P_1P_2 dla promienia r_1 i kąta α_1, wyjętych również z wykresu. Tyczenie tego łuku może nastąpić

albo przy pomocy wierzchołka W_1, albo też bez jego pomocy. Otrzymamy w ten sposób punkt P_2. Dalsze postępowanie może być różne.

a) Po wyznaczeniu położenia stycznej w P_2 (§ 12), tyczymy łuk P_2P_3 promieniem r_2 i kątem α_2 wyjętymi z wykresu i to znów przy pomocy wierzchołka W_2 lub bez jego pomocy. Po wyznaczeniu położenia stycznej w P_3 wyznaczy się W_3 i zmierzy P_3W_3. Kąt β_3 lub α_3 jest dany, gdyż:

$$\beta_3 = 360^0 - \beta - \beta_1 - \beta_2, \text{ zaś: } \alpha_3 = 180^0 + \beta - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Dla kontroli można kąt β_3 na miejscu zmierzyć. Ponieważ zmierzona długość $P_3W_3 = r_3 \operatorname{tang} \frac{\alpha_3}{2}$, więc wyznaczy się:

$$r_3 = P_3W_3 \operatorname{cotang} \frac{\alpha_3}{2}$$

Gdy się jeszcze odmierzy $W_3P_4 = P_3W_3$, to można wytyczyć łuk P_3P_4 o obliczonym promieniu r_3.

Jeżeliby jednak wierzchołka W_3 nie można wyznaczyć, a drobna zmiana w położeniu końcowej stycznej WP_4 była dopuszczalna, natenczas z punktu P_3 tyczymy łuk o promieniu r_3 wyjętym z wykresu i o kącie α_3 powyżej wyznaczonym. Ten łuk w ogóle nie będzie styczny do WB_1, wtedy z następnego wierzchołka położonego na prostej WB_1 wytyczymy styczną do łuku podług § 20.

b) Można jeszcze inaczej postąpić. Mianowicie wyjmiemy z wykresu długość WP_4 i odmierzymy w polu. Następnie tyczymy z dwóch stron, więc łuk P_1P_2 i łuk P_4P_3, dla promieni i kątów wyjętych z projektu, następnie włożymy między P_2 i P_3 łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni podług § 26.

c) Jeżeli łuk koszowy składa się z trzech łuków, to zamiast powyższych sposobów można dla zmierzonego kąta β i wyjętych z wykresu długości promieni, wyznaczyć dokładnie kąty α_1, α_2 i α_3, na podstawie przyjętych w wykresie długości $WP_1 = t_1$ i $WP_4 = t_2$, podług § 29 *a)*. Tyczenie nastąpi z dwóch stron, a małą niedokładność, która się pokaże przy zetknięciu, poprawimy, zaś przy większej różnicy włożymy łuk koszowy podług § 26.

§ 32. Tyczenie łuku w tunelu.

Robotę tunelową rozpoczyna się przebijaniem podkopu (sztolni), w którym w miarę postępu tyczymy oś. Dla głównego tyczenia stosuje się tu zawsze metodę biegunową (§ 10 *d*) jako najdokładniejszą i najlepiej nadającą się do tyczenia w sztolni. Natomiast do prowizorycznego przedłużenia łuku w sztolni zastosuje się korzystnie metoda siecznych (§ 10 *f*). Przy takiem tyczeniu niema mowy o wyznaczeniu punktu wierzchołkowego i głównych punktów łuku. Jeżeli łuk zaczyna się dopiero wewnątrz tunelu, wtedy wyznacza się jego początek za pomocą dokładnego pomiaru prostej poprzedzającej ten łuk, a od tego punktu na podstawie prostej jako stycznej łuk się tyczy. Jeżeli zaś łuk już z zewnątrz wchodzi w tunel, to się wyznacza dokładnie punkt łuku w bliskości wlotu sztolni położony, wyznacza położenie stycznej w tym punkcie, a na jej podstawie wprowadza się łuk do sztolni. W celu późniejszej kontroli należy położenie tej stycznej za pomocą wbitych pali dokładnie ustalić. Tyczenie łuku metodą biegunową odbywa się krótkiemi partyami, na jakie ograniczona szerokość sztolni pozwala. Jeżeli szerokość sztolni, jak to zwykle bywa, nie wiele przekracza 2 *m*, wtedy z jednego stanowiska można wytyczyć łuk tylko o takiej długości, jaka odpowiada strzałce 1 *m*. Jeżeli przez α nazwiemy kąt środkowy tego łuku, to strzałka:

$$p = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2r\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right),$$

skąd:

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{p}{2r}}$$

Dla $p = 1\ m$ jest $\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$. Dla różnych wartości r otrzyma się następujące kąty α i długości łuku w zaokrąglonych wartościach:

$r =$	50,	100,	200,	300,	400,	500 *m*
$\alpha =$	22°57′,	16°13′,	11°28′,	9°22′,	8°6′	7°15′,
łuk =	20·0,	28·3,	40·0,	49·0,	56·6,	63·3 *m*.

Po wytyczeniu tak niewielkiej długości trzeba się z instrumentem przestawić.

Jeżeli sztolnię pędzi się z dwóch stron, to w punkcie przebicia sztolni łuki się nie zgodzą. Drobną odchyłkę usu-

niemy poprawką łuków. Przy większej odchyłce włożymy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni podług § 26.

§ 33. Tyczenie łuku koszowego w tunelu.

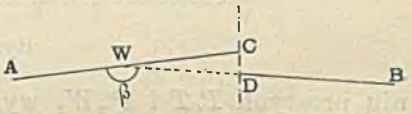
Łuk koszowy jak na rysunku 63. wytyczy się z dwóch stron, dokładnie jak § 31 *c)* podano.

§ 34. Połączenie odchylonych prostych kierunków w tunelu.

Proste kierunki tyczone z dwóch stron nigdy w punkcie przebicia sztolni się nie zgodzą, należy je zatem za pomocą włożonych łuków ze sobą połączyć. Mogą tu zajść dwa przypadki.

a) Prostą BD (rys. 64) przedłużymy po za punkt zetknięcia D aż do przecięcia z kierunkiem AC w punkcie W, zmierzymy kąt β i włożymy łuk o dowolnym promieniu.

b) Jeżeli punkt przecięcia W wypadnie po za obręb prostej AC, albo jeżeli odchylenie prostych nastąpi po obu stronach prostej trasy tunelu, natenczas może nastąpić połączenie prostych tylko za pomocą odwrotnych łuków. Między odwrotne łuki żądane jest wstawienie prostej o pewnej długości, zależnej od wielkości promieni łuków. Mamy więc zadanie włożyć między dwie proste dwa odwrotne łuki o przyjętym promieniu r i prostą l zawartą między nimi. Na danych prostych obierzemy dwa punkty W_1 i W_2, zmierzymy dokładnie kąty β_1 i β_2 i włożymy w nie łuki. Ażeby między łukami zmieściła się żądana prosta l, wypada długość W_1W_2 obrać conajmniej na 50 m dla wielkich promieni r, a na 70 m dla najmniejszych na danej trasie stosownych promieni.



Rys. 64.

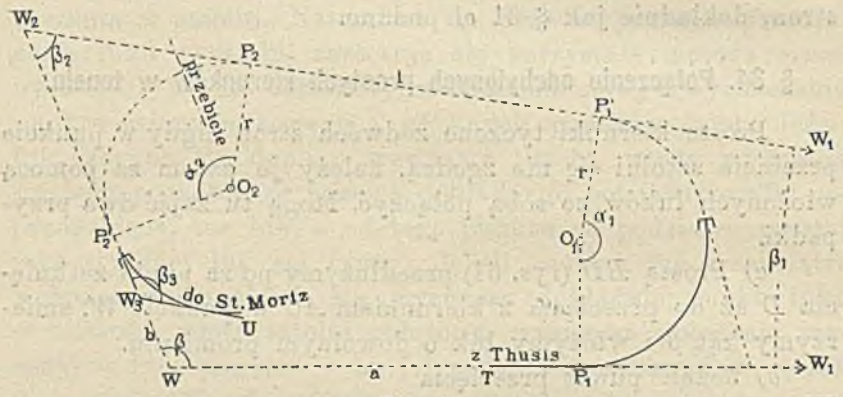
Rys. 65.

§ 35. Przykłady tras kolejowych z tunelami.

Jako przykłady tyczenia tras w trudnych warunkach, przytoczymy kilka przykładów z kolei Albuli, między Thusis

a St. Moritz w Szwajcaryi*). Wszelkie tyczenia łuków wykonano metodą biegunową.

1. Tunel zwrotny Greifenstein. Rys. 66. Na polu ustalono proste kierunki TP_1, $W_3P'_2$ i wierzchołek W_3. Ze zmierzonego kąta β_3 obliczono i odmierzono styczną $W_3P'_2$. Po przedłuże-



Rys. 66.

niu prostych P_1T i P'_2W_3 wyznaczono W i zmierzono kąt β, jakoteż długość $WP_1=a$ i $WP'_2=b$. Dla tyczenia potrzebna znajomość kątów α_1 i α_2, jakoteż długości $P'_1P_2=l$. Pomiędzy kątami zachodzą związki:

$$\alpha_1=180^0-\beta_1, \quad \alpha_2=180^0-\beta_2, \quad \beta+\beta_1+\beta_2=180^0,$$

a stąd:

$$\alpha_1+\alpha_2-\beta=180^0.$$

Z rzutu wieloboku $WP_1P'_1P_2P'_2W$ na kierunek prostopadły do l otrzymamy jedno równanie:

$$a\sin\beta_1+r(1+\cos\beta_1)=b\sin\beta_2+r(1+\cos\beta_2),$$

a po wstawieniu $180^0-\beta-\beta_1$ za β_2 i uporządkowaniu:

$$\cos\beta_1(r-b\sin\beta+r\cos\beta)-\sin\beta_1(b\cos\beta+r\sin\beta-a)=0,$$

z którego wyznaczy się nareszcie:

$$\operatorname{tang}\beta_1=\frac{r-b\sin\beta+r\cos\beta}{b\cos\beta+r\sin\beta-a},$$

i podobnie:

$$\operatorname{tang}\beta_2=\frac{r-a\sin\beta+r\cos\beta}{a\cos\beta+r\sin\beta-b},$$

przyczem ma się zgodzić, że $\beta_1+\beta_2=180^0-\beta$.

*) Wyjęte z Schweizerische Bauzeitung z r. 1902, tom 40, str. 281 i dalsze. Sposób obliczania podany przez autora niniejszego podręcznika.

Z rzutu tego samego wieloboku na kierunek l wyznaczy się:

$$l = a\cos\beta_1 - r\sin\beta_1 + b\cos\beta_2 - r\sin\beta_2.$$

W celu kontroli rachunku można jeszcze l wyznaczyć z trójkąta WW_1W_2. Mianowicie jest:

$$WW_1 = WP_1 + P_1W_1 = a + r\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2},$$

zaś: $$\frac{WW_1}{\sin\beta_2} = \frac{W_1W_2}{\sin\beta}, \text{ czyli: } W_1W_2 = WW_1\frac{\sin\beta}{\sin\beta_2}.$$

Wstawmy za WW_1 powyższą wartość i zważmy, że:

$$W_1W_2 = l + r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}\right),$$

zaś: $$\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2} = \frac{\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}{\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}},$$

to będzie ostatecznie:

$$l = \left(a + r\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}\right)\frac{\sin\beta}{\sin\beta_2} - r\frac{\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}{\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}}$$

lub analogicznie:

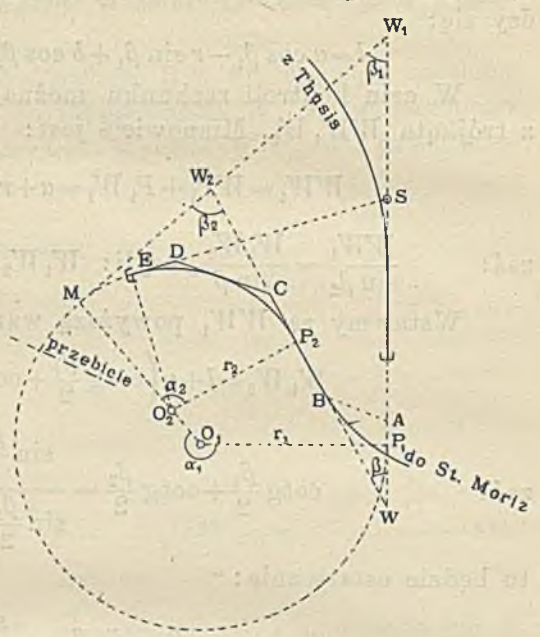
$$l = \left(b + r\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}\right)\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} - r\frac{\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}{\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}}$$

Tyczenie uskuteczniono z dwóch stron, od strony góry na krótszej partyi, a przebicie nastąpiło w naznaczonym punkcie, z odchyłką wynoszącą tylko 0·02 m i różnicą długości 0·03 m.

2. Tunel zwrotny w Rugnux. Rys. 67. Dane było położenie stycznych W_1W i P_2W, jakoteż punkt P_2, jednakże punktu przecięcia stycznych W nie można było wyznaczyć, trzeba więc było wytyczyć i zmierzyć pomocniczą prostą AB, zmierzyć kąty przy A i B (ob. § 6*b*) i obliczyć kąt β, jakoteż długość BW i AW. W ten sposób była długość $WP_2 = a$ wyznaczona.

Ponadto były dane promienie r_1 i r_2, pozostaje zatem dla tego łuku koszowego o dwóch łukach do wyznaczenia kąty α_1 i α_2, jakoteż długość $P_1W = x$.

To zadanie może być całkowicie rozwiązane podług § 25 *a)*, gdy wzory tam podane będą należycie zastosowane. Jednakże dla ćwiczenia czytającego przeprowadzimy obliczenie cokolwiek inaczej.



Rys. 67.

Z trójkąta WW_1W_2 wynika, że $\beta_2=\beta+\beta_1$, a gdy:

$$\alpha_1=180^0+\beta_1,$$

$$\alpha_2=180^0-\beta_2,$$

to: $\alpha_1+\alpha_2=360^0-\beta$.

Rzut wieloboku $WP_2O_2O_1P_1W$ na kierunek prostopadły do WP_1 wyznacza równanie:

$$a\sin\beta+r_2\cos\beta-(r_1-r_2)\cos(\alpha_1-180^0)-r_1=0,$$

stąd:
$$\cos\alpha_1=\frac{r_1-a\sin\beta-r_2\cos\beta}{r_1-r_2}=-\cos\beta_1,$$

zatem znane α_2, β_1, β_2. Z rzutu tego samego wieloboku na kierunek WP_1, otrzymamy wprost:

$$x=a\cos\beta-r_2\sin\beta-(r_1-r_2)\sin(\alpha_1-180^0),$$

lub:
$$x=a\cos\beta-r_2\sin\beta+(r_1-r_2)\sin\alpha_1.$$

Dla kontroli rachunku wyznaczymy z trójkąta WW_1W_2:

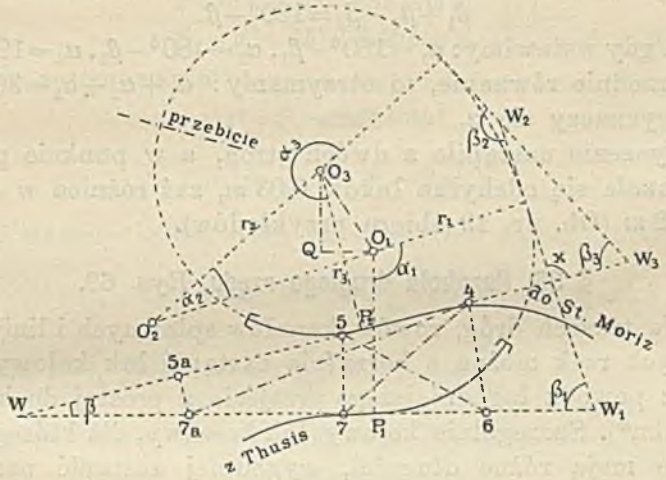
$$\frac{x+r_1\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}}{\sin\beta_2}=\frac{a+r_2\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}}{\sin\beta_1}$$

Z tego wzoru obliczone x powinno się zgodzić z poprzednio obliczonem.

Tyczenie rozpoczęto od P_2 położeniem stycznych do łuku P_2CDE, aż do punktu E położonego w bliskości projektowanego wylotu tunelu, poczem przedłużono styczną ED wstecz aż do przecięcia się ze styczną WP_1 w punkcie S. W tym punkcie ustawiono murowany sygnał, na który brano celową

przy wszystkich kontrolach w tunelu, tak łuku P_1M, jak też łuku P_2M. W punkcie przebicia skonstatowano odchyłkę łuków 0·10 *m* i skrócenie długości 0·30 *m*.

3. Dolny tunel Toua. Rys. 68. Trasa tunelu jest łukiem koszowym o trzech łukach, dla którego ustalenie ilości zasadniczych przedstawiało pewne trudności. Mianowicie na gruncie można było z projektu wyznaczyć tylko krótkie partye 45 i 67 końcowych stycznych. Zmierzono również 57 i 46, jakoteż wszystkie kąty, poczem wyznaczono rachunkiem długości $5W$ i $7W$ i kąt β (Ob. § 6 *b*). Później po przecięciu



Rys. 68.

lasu wykonano jeszcze pomiar 67*a* i 5*a*7*a* i kąty przy 7*a* i 4, co posłużyło do kontroli pierwszego rachunku. Następnie obrano z projektu położenie punktów P_1 i P_2, więc długości $WP_1=t_1$ i $WP_2=t_2$ były znane. Gdy i promienie r_1, r_2, r_3 zostały z projektu przyjęte, pozostało tylko do obrachowania α_1, α_2, α_3.

To obrachowanie jest zawarte w § 29, my je jeszcze raz przeprowadzimy. Poprowadźmy więc O_1Q i O_3Q prostopadle i równolegle do promienia O_1P_1 i nazwijmy kąt $O_1O_3Q=\psi$. Z rzutu wieloboku $P_1WP_2O_3QO_1P_1$ na te same dwa kierunki otrzymamy:

$$O_1Q=t_1-t_2\cos\beta+r_3\sin\beta,$$

$$O_3Q=t_2\sin\beta+r_3\cos\beta-r_1,$$

$$\text{tang}\,\psi = \frac{O_1Q}{O_3Q}, \quad O_1O_3 = c = \frac{O_1Q}{\sin\psi}$$

Jeżeli $d_1 = r_2 - r_1$, $d_2 = r_2 - r_3$, a $s = \frac{d_1 + d_2 + c}{2}$, to:

$$\text{tang}\,\frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{s(s-c)}}, \quad \text{tang}\,\frac{\alpha_1 - \psi}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-c)}{s(s-d_2)}}$$

Tu jest $\frac{\alpha_1 - \psi}{2}$, bo kąt $O_2O_1O_3 = \alpha_1 - \psi$. Te wzory wyznaczą α_1 i α_2.

Nareszcie między kątami istnieje taki związek:

$$x = 180^0 - \beta - \beta_1, \quad \beta_2 = \beta_3 + x = 180^0 - \beta - \beta_1 + \beta_3,$$

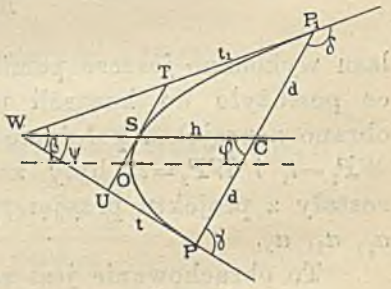
czyli: $$\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 180^0 - \beta.$$

A gdy wstawimy: $\alpha_1 = 180^0 - \beta_1$, $\alpha_2 = 180^0 - \beta_2$, $\alpha_3 = 180^0 + \beta_3$ w poprzednie równanie, to otrzymamy: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^0 + \beta$, skąd wyznaczy się α_3.

Tyczenie nastąpiło z dwóch stron, a w punkcie przebicia okazała się odchyłka łuków 0·03 *m*, zaś różnica w długości 0·02 *m* (Ob. nr. 19 zbioru przykładów).

§ 36. Parabola drugiego rzędu. Rys. 69.

Na trasach dróg, rowów, kanałów spławnych i linij regulacyjnych rzek można z korzyścią zastąpić łuk kołowy parabolą, z powodu łagodniejszego przejścia z prostej do krzywizny łuku*). Szczególnie kołowy łuk koszowy, dla którego obie styczne mają różne długości, wygodniej zastąpić parabolą. Rozpatrzmy jakie stosunki zachodzą między zasadniczemi ilościami paraboli drugiego rzędu.



Rys. 69.

Parabola PSP_1 będzie wyznaczona, skoro będzie znany kąt β i położenie początku P i końca P_1 paraboli. Kąt β zmierzy się wprost, albo pośrednio podług § 6.

Jeżeli można zmierzyć $PP_1 = 2d$ i kąty γ i δ, wtedy:

$$\beta = \gamma + \delta - 180^0, \quad WP = t = 2d\frac{\sin\delta}{\sin\beta}, \quad WP_1 = t_1 = 2d\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

*) Tylko na trasach kolei żelaznych, gdzie się stosuje przechyłkę toru, nie można zastąpić koła parabolą.

Styczne t i t_1 mogą być ewentualnie wprost zmierzone. W ten sposób wyznaczymy podstawowe ilości β, t i t_1, które w zupełności parabolę wyznaczają. Na ich podstawie wyznaczymy inne ilości, które się nam w dalszym ciągu przydadzą.

Gdy $PP_1=2d$, to z trójkąta PWP_1 wynika:

$$4d^2=t^2+t^2_1-2tt_1\cos\beta, \text{ więc: } d=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^2_1-2tt_1\cos\beta} \quad (1)$$

Jeżeli oznaczymy $WC=2h$, zważywszy, że dla paraboli jest $WS=SC=h$, to z trójkątów WPC i WP_1C ustawimy równania:

$$\left.\begin{aligned} t^2&=d^2+4h^2-4dh\cos\varphi,\\ t^2_1&=d^2+4h^2+4dh\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Po zesumowaniu otrzyma się:

$$t^2+t^2_1=2d^2+8h^2,$$

skąd:
$$h^2=\frac{1}{8}(t^2+t^2_1-2d^2). \quad (2)$$

Wstawmy w ten wzór za d wartość z wz. (1), to:

$$h^2=\frac{1}{16}[t^2+t^2_1+2tt_1\cos\beta], \text{ lub } h=\frac{1}{4}\sqrt{t^2+t^2_1+2t_1t_1\cos\beta} \quad (2a)$$

Dla $t=t_1$ jest $d=t\sin\frac{\beta}{2}$, $h=\frac{t}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

Jeżeli równania (a) odejmiemy, to otrzymamy:

$$t^2_1-t^2=8dh\cos\varphi,$$

skąd:
$$\cos\varphi=\frac{t^2_1-t^2}{8dh}, \quad (3a)$$

a z tego wzoru, z uwzględnieniem wz. (1) i $(2a)$:

$$\sin\varphi=\frac{tt_1\sin\beta}{4dh} \quad (3b)$$

Przez podzielenie wzoru $(3b)$ przez $(3a)$:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{2tt_1\sin\beta}{t^2_1-t^2}=\frac{2tt_1\sin\beta}{(t_1+t)(t_1-t)} \quad (3c)$$

Z trójkąta PWC znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi&=\sin\varphi\frac{d}{t}=\frac{t_1\sin\beta}{4h},\\ \text{a analogicznie: }\quad \sin(\beta-\psi)&=\frac{t\sin\beta}{4h} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dla spółrzędnych w kierunkach SC i ST i dla początku układu S, jest równanie paraboli:

$$y^2 = 2p'x$$

Jeżeli p jest parametrem paraboli, to $p' = \frac{p}{\sin^2\varphi}$, zatem:

$$y^2 = \frac{2px}{\sin^2\varphi}$$

Dla punktu P_1 jest $x = h$, $y = d$, zatem:

$$d^2 = \frac{2ph}{\sin^2\varphi},$$

a stąd wartość parametru paraboli:

$$p = \frac{d^2 \sin^2\varphi}{2h} \tag{5}$$

Parametrowi równa się promień krzywizny ϱ_0 w wierzchołku O, zatem podług wz. (5), po wstawieniu wartości za $\sin^2\varphi$:

$$\varrho_0 = \frac{d^2 \sin^2\varphi}{2h} = \frac{t^2 t_1^2 \sin^2\beta}{32h^3} \tag{6}$$

Jestto zarazem najmniejszy promień krzywizny paraboli.

W dowolnym innym punkcie paraboli równa się promień krzywizny:

$$\frac{\varrho_0}{\sin^3\alpha}$$

jeżeli α jest kątem, który styczna w tym punkcie poprowadzona zawiera z osią paraboli; zatem promień krzywizny:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{dla punktu } S: & \varrho_s = \dfrac{\varrho_0}{\sin^3\varphi} = \dfrac{d^2}{2h\sin\varphi} = \dfrac{2d^3}{tt_1\sin\beta} & \\ \text{„ „ } P: & \varrho = \dfrac{\varrho_0}{\sin^3\psi} = \dfrac{2t^2}{t_1\sin\beta} & \\ \text{„ „ } P_1: & \varrho_1 = \dfrac{\varrho_0}{\sin^3(\beta-\psi)} = \dfrac{2t_1^2}{t\sin\beta} & \end{array}\right\} \tag{7}$$

i stosunki: $\quad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{t^3}{t_1^3}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_s} = \frac{t^3}{d^3}, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_s} = \frac{t_1^3}{d^3}$

Obliczenie promienia ϱ_0 będzie nieraz potrzebne, w celu przekonania się czy nie przekracza się najmniejszej dla danej trasy dozwolonej wartości.

Wyznaczenie ilości h, d, φ rachunkiem, czy też wprost pomiarem, będzie ewentualnie potrzebne, stosownie do metody użytej do tyczenia paraboli*).

§ 37. Tyczenie paraboli.

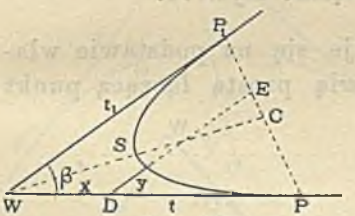
Skoro ilości β, t i t_1 są ustalone, można wyznaczyć położenie punktu S, leżącego na prostej WC równoległej do głównej osi paraboli, z następujących własności paraboli:

Końce stycznej UT (rys. 69) połowią styczne WP i WP_1, zaś punkt S połowi prostą UT, przyczem: $US=ST=\frac{d}{2}$. Następnie punkt S połowi prostą łączącą W z punktem C połowiącym prostą PP_1, przyczem $WS=SC=h$.

Do tyczenia punktów pośrednich służą różne metody.

a) Tyczenie rzędnemi od stycznych. Rys. 70.

Jeżeli obierzemy W jako początek układu spółrzędnych, których kierunki spadają ze stycznemi WP i WP_1, to równanie paraboli:



Rys. 70.

$$\sqrt{\frac{x}{t}}+\sqrt{\frac{y}{t_1}}=1 \qquad (8)$$

Z tego równania wyznaczy się wzór:

$$\frac{y}{t_1}=\left(1-\sqrt{\frac{x}{t}}\right)^2$$

podług którego obliczono następującą tabliczkę:

$\frac{x}{t}$	$\frac{y}{t_1}$**)
0·1 . .	0·46754
0·2 . .	0·30558
0·25 . .	0·25000
0·3 . .	0·20456
0·4 . .	0·13509
0·5 . .	0·08578
0·6 . .	0·05081

*) Ob. nr. 20. zbioru przykładów.

**) Ta tabliczka jest powtórzona na tab. V*a*.

0·7 . .	0·02668
0·8 . .	0·01115
0·9 . .	0·00263
1·0 . .	0·00000

Stosując tę tabelę, wytyczy się parabolę z dwóch stron od punktu S, dla którego $\frac{x}{t} = \frac{y}{t_1} = 0{\cdot}25$. Rzędne trzeba tyczyć pod kątem β, za pomocą przyrządu, który umożliwia nastawienie na dowolny kąt. Jeżeli takiego przyrządu niema pod ręką, to można na podstawie proporcyi:

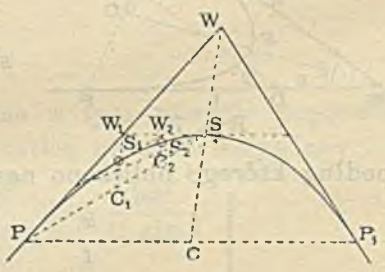
$$WD : WP = P_1E : P_1P$$

podzielić P_1P na tyle części, na ile WP zostało podzielone, a przynależne punkty podziału wyznaczą kierunki rzędnych. Ten sposób tyczenia paraboli należy do najdokładniejszych. Zwykle wytyczy się jedną połowę od stycznej WP, drugą połowę od stycznej WP_1.

b) Tyczenie przy użyciu cięciw. Rys. 71.

Prosty sposób tyczenia uzyskuje się na podstawie własności paraboli, że jej punkty połowią prostą łączącą punkt wierzchołkowy z punktem połowiącym cięciwę.

Jeżeli C połowi PP_1, to S połowi WC; jeżeli W_1 połowi WP, zaś C_1 połowi PS, to S_1 połowi W_1C_1; W_2 połowi W_1S, C_2 połowi S_1S, to S_2 połowi W_2C_2 i t. d. Proste W_1C_1, W_2C_2 są równoległe do WC.

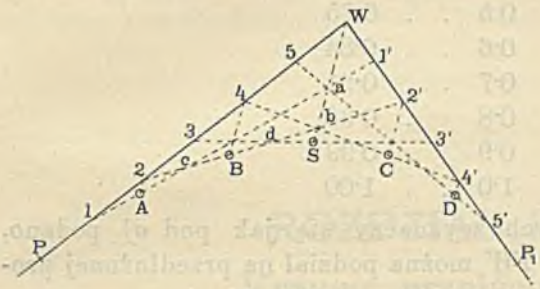


Rys. 71.

c) Tyczenie za pomocą stycznych otaczających parabolę. Rys. 72.

Polega na znanej konstrukcyi podziału stycznych na jednakową liczbę równych części i połączenia należytego punktów podziału. Jeżeli tę liczbę obierze się wielką, to punkty przecięcia się stycznych jak 1, *c*, *d*... można uważać za punkty paraboli.

Można jednakże rzeczywiste punkty paraboli A, B... na stycznych wyznaczyć, jeżeli się odmierzy:



Rys. 72.

$$1A=1'a, \quad 2B=2'b,$$

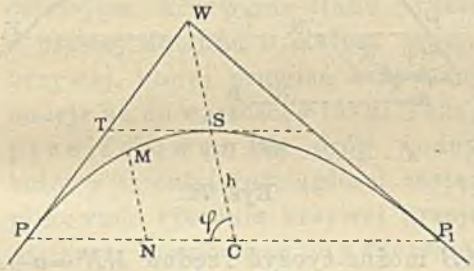
$$4'C=4b, \quad 5'D=5a.$$

Przy parzystej liczbie podziału otrzyma się punkt S na przecięciu prostej Wab ze styczną $33'$.

Sposoby pod a i c podane dadzą się zastosować do tyczenia wklęsłych brzegów rzek.

d) Tyczenie od cięciwy. Rys. 73 i 74.

Ten sposób tyczenia poznaliśmy już w § 10 pod *b)*, gdyśmy płaski łuk kołowy zastąpili parabolą.



Rys. 73.

Jeżeli jak tam oznaczymy (rys. 73):

$$PC=CP_1=d, \quad SC=h,$$

$$MN=z, \quad PN=a,$$

$$NP_1=b=2d-a,$$

to możemy zużytkować wzór (8) tego paragrafu dla wyznaczania rzędnych z:

$$z=\frac{ab}{2r}, \quad h=\frac{d^2}{2r},$$

a po wyłączeniu ilości r:

$$z=\frac{ab}{d^2}h, \text{ albo: } \frac{z}{h}=\frac{a}{d}\left(\frac{2d-a}{d}\right)=\frac{a}{d}\left(2-\frac{a}{d}\right) \qquad (9)$$

Podług tego wzoru obliczono następującą tabliczkę, przyjąwszy podział prostej PC lub CP_1 na 10 części:

$\frac{a}{d}$	$\frac{z}{h}$ *)
0·1 . .	0·19
0·2 . .	0·36

*) Ta tabliczka jest powtórzona na tab. V*b*.

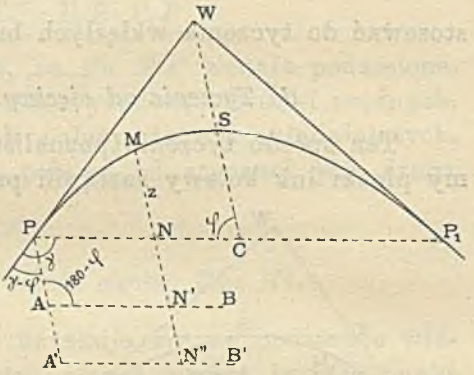
0·3	. .	0·51
0·4	. .	0·64
0·5	. .	0·75
0·6	. .	0·84
0·7	. .	0·91
0·8	. .	0·96
0·9	. .	0·99
1·0	. .	1·00

Kierunek rzędnych wyznaczy się jak pod *a)* podano, przyczem zamiast na TW można podział na przedłużonej prostej TS uskutecznić.

Ten sposób tyczenia można zastosować do tyczenia wypukłego brzegu rzeki, podobnie jak w § 22. z pewną modyfikacyą.

Po ustaleniu ilości β, t i t_1, obliczmy d, h i kąt φ, a zmierzymy kąt γ.

Z P tyczymy kierunek $PA(PA')$ pod kątem $\gamma-\varphi$ do stycznej i odmierzymy dowolną długość $PA=a$. Następnie z A tyczymy kąt $PAB=180^0-\varphi$. Od AB można tyczyć rzędne $MN'=a+z$ dla p o ł o w y paraboli. Tyczenie rzędnych pod kątem φ można przezto ominąć, że się wytyczy $A'B' \parallel AB$ i podzieli tak samo jak AB, a wtedy przynależne punkty podziału, jak N' i N'', wyznaczą kierunek rzędnej.



Rys. 74.

ROZDZIAŁ II.

Krzywe przejściowe.

Wstęp. Przejście trasy bezpośrednie z prostego kierunku do krzywizny łuku powoduje przerwę ciągłości ruchu wody na drogach wodnych, lub ruchu wozów na torze kolejowym, co ujemnie oddziaływa tak na budowle trasy jak na środki przewozowe. Te ujemne objawy występują tem silniej, im ostrzejsza krzywizna łuku. Dlatego staramy się przejście z prostej do łuku o małym promieniu złagodzić za pomocą krzywej, której promień krzywizny od nieskończoności stale maleje aż do wartości r łuku. Taką krzywę zowiemy krzywą przejściową. Dla dróg wodnych byłoby korzystne łuk kołowy w całej rozciągłości zastąpić taką krzywą, lecz skomplikowane tyczenie krzywej przejściowej musi w wielu wypadkach, mianowicie gdy tyczenie odbywa się w wodzie, ustąpić prostszemu tyczeniu łuku kołowego. Jeszcze bardziej byłoby wskazanem na trasie kolejowej zastąpić cały łuk krzywą przejściową, jednakże ze względów, które później poznamy, jest to niedopuszczalne; zadowalamy się zatem łukiem kołowym, a tylko krótszą partyę takiej krzywej wkładamy na przejściu z prostej do łuku. To samo moglibyśmy uczynić także na trasie drogi wodnej, na co w należytem miejscu będzie zwrócona uwaga czytelnika.

Równie ważnem jak łagodne przejście z prostej w krzywiznę łuku jest na torze kolejowym racyonalne sprowadzenie przechyłki toru do zera; ono też daje podstawę do wyprowadzenia matematycznego kształtu krzywej przejściowej. Obecnie stosuje się bezwarunkowo na wszystkich ważniejszych kolejach żelaznych krzywe przejściowe, normowane odpowiednimi przepisami.

§ 38. Przechyłka toru kolejowego.

Masa m poruszająca się po drodze krzywolinijnej zostaje pod wpływem działania siły odśrodkowej, określonej wzorem:

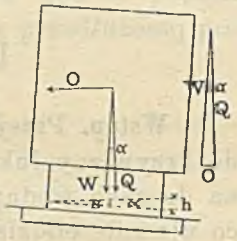
$$O=\frac{mv^2}{\varrho},$$

w którym ϱ oznacza w uważanym punkcie promień krzywizny, zaś v chyżość ruchu. W zastosowaniu do wozu poruszającego się po torze kolejowym, otrzyma ten wzór formę:

$$O=\frac{Qv^2}{g\varrho}$$

Q oznacza ciężar wozu, g przyśpieszenie siły ciężkości.

Siła O wywiera szkodliwy nacisk na tok zewnętrzny toru, dlatego staramy się ją zrównoważyć przez pochylenie toru o taki kąt α, aby wypadkowa W z ciężaru Q i siły odśrodkowej O wpadła w środek toru (rys. 75).



Rys. 75.

Z trójkąta sił wynika, że $\operatorname{tang}\alpha=\frac{O}{Q}$, a z uwzględnieniem górnego wzoru: $\operatorname{tang}\alpha=\frac{v^2}{g\varrho}$

Przechyłkę toru urabiamy przez podniesienie zewnętrznego toku ponad wewnętrzny o wymiar h, który, jak z rysunku widać równa się $s.\sin\alpha$, gdy s jest szerokością toru. Ponieważ kąt α jest mały (dochodzi ledwie do 6°) można za $\sin\alpha$ postawić $\operatorname{tang}\alpha$, określone powyższym wzorem, więc przechyłka toru:

$$h=s\operatorname{tang}\alpha=\frac{sv^2}{g\varrho}\text{ *)} \qquad (1)$$

Dla danej linii kolejowej jest v ilością stałą, s i g są również stałemi ilościami, zatem:

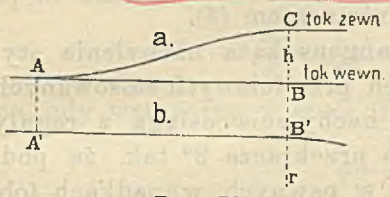
$$h=\frac{k}{\varrho},\text{ gdy }k=\frac{sv^2}{g}, \qquad (2)$$

a dla łuku o promieniu r:

$$h=\frac{k}{r} \qquad (3)$$

*) W praktyce stosuje się trochę odmienny wzór. Przechyłki stosowane na austr. państwowych kolejach żelaznych są zestawione w tabeli XI., do której jest dodana tabela dla rozszerzenia toru w łukach.

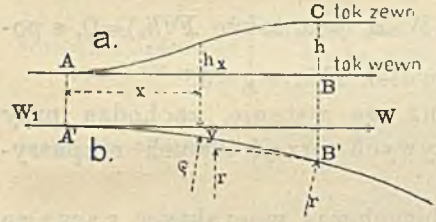
Ten wzór okazuje związek między przechyłką toru a promieniem. Żądamy, aby na początku łuku B' (rys. 76*b*) była pełna przechyłka toru, trzeba ją więc w prostej partyi AB (rys. 76*a*) sprowadzić do zera. Mamy wtedy w prostym torze zmienną przechyłkę toru, gdzie jej wcale nie potrzeba, a nawet jest szkodliwą. Dlatego właśnie, a także w celu łagodnego wprowadzenia wozu w krzywiznę łuku, na partyi $A'B'$ układamy krzywą przejściową.



Rys. 76.

§ 39. Ogólna teorya krzywej przejściowej. Rys. 77*a* i *b*.

Stosownie do rozważań poprzedniego paragrafu przechyłkę h przynależną do promienia łuku r zagubi się na partyi BA (rys. *a*, rzut tłowy) podług dowolnej krzywej AC, dla której ustawimy pewne warunki. Dowolna rzędna h_x tej krzywej jest funkcyą odciętej, zatem $h_x = f(x)$.



Rys. 77.

Zakrzywiony rzut osi toru $A'B'$ ma być styczny w A' do stycznej W_1W a w B' do łuku kołowego.

Ta w dwóch rzutach AC i $A'B'$ przedstawiona krzywa jest krzywą przestrzenną. Jej rzut tłowy AC zowiemy krzywą przechyłki toru, zaś rzut poziomy $A'B'$ osi toru zowiemy krzywą przejściową. Żądamy, aby w każdym punkcie rzędnej h_x odpowiadał w krzywej przejściowej promień krzywizny ϱ podług związku wykazanego wzorem (2), mianowicie:

$$h_x = \frac{k}{\varrho} \qquad (4)$$

Jeżeli literą y oznaczy się rzędną krzywej $A'B'$, to oczywiście jest $y = F(h_x)$, zaś ogólny wzór na promień krzywizny, z uwzględnieniem wz. (4):

$$\varrho = \frac{\{1 + [F'(h_x)]^2\}^{3/2}}{F''(h_x)} = \frac{k}{h_x} \qquad (5)$$

Jestto w najogólniejszym kształcie równanie różniczkowe krzywej przejściowej, czyniącej zadość warunkowi wyrażonemu równaniem (4).

Ilość $F'(h_x)$, oznaczająca tangens kąta nachylenia stycznej do osi x, jest dla krzywych przejściowych stosowanych w praktyce małą, gdyż ten kąt nachylenia osiąga z reguły nie więcej jak 6^0, a w ogóle nie przekracza 9^0 tak, że podniesiona do kwadratu może być w pewnych wypadkach (ob. § 43.) wobec jedności opuszczoną. Wtedy powyższe równanie różniczkowe uprości się na:

$$\frac{1}{\varrho} = F''(h_x) = \frac{h_x}{k} \qquad (6)$$

i w tej formie będzie w dalszym ciągu stosowane.

Na początku krzywej A' jest $h_x = 0$, zatem $F''(h_x) = 0$, czyli A' jest punktem przegięcia krzywej, posiada więc promień krzywizny nieskończenie wielki, który stale malejąc osiąga w B' wartość: $\frac{k}{h} = r$. W A' jest także $F'(h_x) = 0$, z powodu styczności do WW_1, również $F(h_x) = y = 0$.

Te stosunki omówione już we wstępie, zachodzą przy wszystkich rodzajach krzywych przejściowych rozpatrywanych w dalszym ciągu.

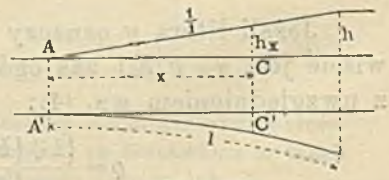
Linię h_x przyjmuje się dotychczas w praktyce zawsze tak, że rzędne h_x są dokładnie lub w przybliżeniu proporcyonalne do długości krzywej przejściowej.

Takie przyjęcie upraszcza wprawdzie zastosowanie tej krzywej, nie jest jednakże najlepsze. Odmienne przyjęcie, z wykazaniem wad powyższego uproszczenia omówimy w § 42.

§ 40. Krzywa przechyłki toru, której rzędne h_x są proporcyonalne do długości krzywej przejściowej. Rys. 78.

Ponieważ zakrzywienie krzywej przejściowej jest małe, to krzywa przechyłki toru przedstawi się jako linia prosta, a z powodu proporcyonalności rzędnych do długości krzywej przejściowej, jest spadek tej krzywej ilością stałą. Oznaczmy go $1:i$.

W praktyce obiera się spadek mały, zatem i wielkie, wynoszące 200 do 500, stosownie



Rys. 78.

do ważności linii kolejowej. Jeżeli łuk $A'C'$ oznaczymy literą S, to warunek proporcyonalności wyrazi się wzorem:

$$\frac{h_x}{S} = \frac{1}{i}, \text{ czyli: } h_x = \frac{S}{i},$$

co, gdy wstawimy w wzór (5), otrzymamy:

$$\varrho = \frac{ki}{S} = \frac{C}{S} \qquad (7)$$

Stałą ilość ki oznaczyliśmy literą C; uwzględniwszy wzór (2) ma ona wartość:

$$C = \frac{sv^2 i}{g} \qquad (8)$$

Zależnie od szerokości toru s, największej chyżości pociągów i od liczby i jest wielkość stałej C różna.

Np. na austryackich państwowych kolejach żelaznych przyjmuje się w okrągłych cyfrach:

Normalna szerokość toru 1·435 *m*	Chyżość pociągu w *km* na godz.	=60,	40,	35,	30
		C=12000,	6000,	4500,	3000
Szerokość toru 1·0 *m*	chyż. pociągu	=35,	25,	20	
		C= 4500,	3000,	1500	
Szer. toru 0·76 *m*	chyż. pociągu	=35,	25,	20	
		C= 3000,	1500,	750	

Te liczby należy jeszcze uzupełnić dla większych chyżości kolei normalnotorowych, przyczem i należy przyjąć około 500:

chyż. w *km* na godz.	=80,	90
	C=36000,	45000

§ 41. Na podstawie warunków ustalonych w § 40. wyprowadzone krzywe przejściowe.

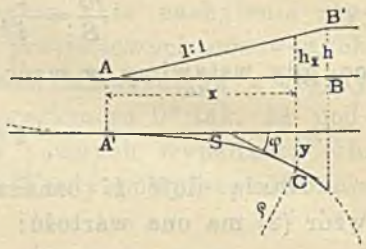
a) Dokładne równanie. Klotoida. Rys. 79.

Warunek proporcyonalności rzędnej h_x do długości krzywej przejściowej, doprowadził do zasadniczego wzoru (7), który z uwzględnieniem wzoru (5) posłuży do ustawienia równania różniczkowego krzywej. Obierzemy jednak inną drogę*). Jeżeli φ oznacza kąt, który w dowolnym punkcie

*) Podług Leber, Raccordements, Paris 1892.

C poprowadzona styczna zawiera z osią x, a S łuk $A'C$ krzywej, to wiemy, że $dS = \varrho\, d\varphi$, zaś po wstawieniu za ϱ wartości z wzoru (7):

$$d\varphi = \frac{S\,dS}{C}, \qquad \varphi = \frac{S^2}{2C}$$



Rys. 79.

Następnie jest:

$$dx = dS\cos\varphi, \qquad dy = dS\sin\varphi,$$

więc:

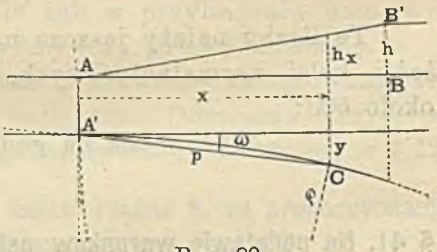
$$x = \int_0^S \cos\left(\frac{S^2}{2C}\right) dS, \qquad y = \int_0^S \sin\left(\frac{S^2}{2C}\right) dS \qquad (9)$$

Jestto równanie krzywej zwanej k l o t o i d ą, — krzywej spiralnej o punkcie przegięcia w A. Dla praktyki użyłoby się tylko małą część tej krzywej, dla której p. d'Ocagne*) obliczył tablice, zawierające wartości x i y dla różnych stałych C. Dotychczas ta krzywa nie została do praktyki wprowadzona.

b) Pierwsze uproszczenie. Lemniskata. Rys. 80.

Zamiast dokładnej krzywej pod *a)* podanej możemy dopuścić uproszczenie, że zamiast do długości krzywej przejściowej są rzędne h_x proporcyonalne do długości cięciwy $A'C = p$. Jeżeli będziemy uważali p za promień wodzący, a kąt, który ten promień zawiera z osią x, nazwiemy ω, to na podstawie wzoru (7), który obecnie zmieni się na:

$$\varrho = \frac{C}{p}$$



Rys. 80.

dojdziemy do równania:

$$p^2 = \pm 3C\sin(2\omega) \qquad (10)$$

Jestto równanie biegunowe l e m n i s k a t y. Ta krzywa przez p. Lebera bardzo zalecona, również nie znalazła dotychczas praktycznego zastosowania.

Klotoidę i lemniskatę przedstawia rys. 81.

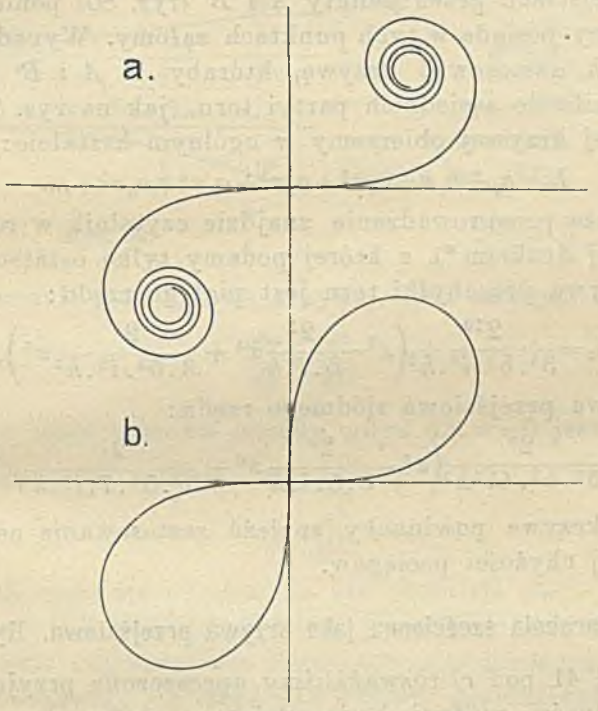
---

*) Leçons sur la Topométrie etc. Paris 1904.

c) Drugie uproszczenie. Parabola sześcienna.

Jeżeli w chęci dalszego uproszczenia wzoru na krzywę przejściową przyjmiemy, że rzędna przechyłki toru h_x jest proporcyonalna do odciętej x zamiast do długości łuku krzywej, to wzór (7) przejdzie w następujący:

$$\varrho = \frac{C}{x}, \tag{11}$$



Rys. 81.

z którego wyprowadzi się (ob. § 43) parabola trzeciego rzędu, jako dziś powszechnie stosowana krzywa przejściowa. Powyższe uproszczenie jest dopuszczalne, ponieważ dla tych krótkich partyi krzywych, które się w praktyce stosuje, różnica między długością krzywej a odciętą x jest bardzo mała.

Z powodu proporcyonalności rzędnych h_x do odciętych x jest AB' (rys. 80) linią prostą, nachyloną pod przyjętym spadkiem $1:i$.

§ 42. Krzywa przejściowa w założeniu, że przechyłkę toru przeprowadzi się podług zmiennego nachylenia.

W poprzednim paragrafie przyjęto przeprowadzenie przechyłki toru stałym spadkiem. To przyjęcie wraz z uproszczeniem $S=x$ doprowadza wprawdzie do prostych wzorów na krzywę przejściową i wystarcza dla małych chyżości pociągów; jednakże przy wielkich chyżościach następuje rzucanie wozu przy przejściach przez punkty A i B' (rys. 80) ponieważ tok zewnętrzny posiada w tych punktach załomy. Wypada zatem dla linii h_x zastosować krzywę, któraby w A i B' stycznie przechodziła do sąsiednich partyi toru (jak na rys. 77). Równanie tej krzywej obierzemy w ogólnym kształcie:

$$h_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

Dalsze przeprowadzenie znajdzie czytelnik w rozprawie ogłoszonej drukiem *), z której podamy tylko ostateczne wyniki. Krzywa przechyłki toru jest piątego rzędu:

$$h_x = \frac{2^{10}}{3^3 . 5^2 . i^3 . h^2}\left(x^3 - \frac{2^2}{5 . i . h} x^4 + \frac{2^6}{3 . 5^3 . i^2 . h^2} x^5\right), \quad (12)$$

zaś krzywa przejściowa siódmego rzędu:

$$y = \frac{2^8}{3^3 . 5^2 . C i^2 h^2}\left(x^5 - \frac{2^3}{3 . 5 . i . h} x^6 + \frac{2^7}{3^2 . 5^2 . 7 . i^2 . h^2} x^7\right) \quad (13)$$

Te krzywe powinneby znaleźć zastosowanie na liniach o wielkiej chyżości pociągów.

§ 43. Parabola sześcienna jako krzywa przejściowa. Rys. 82.

W § 41 pod *c)* rozważaliśmy uproszczone przyjęcie proporcyonalności rzędnej h_x do odciętej x, które doprowadziło do zasadniczego wzoru:

$$\varrho = \frac{C}{x}, \quad (11)$$

z którego wynika, że promień krzywizny w dowolnym punkcie krzywej jest odwrotnie proporcyonalny do odciętej x. Znaczenie stałej C podano w § 40.

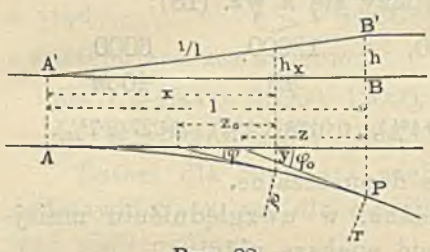
Jeżeli x i y oznaczają spółrzędne krzywej, to promień krzywizny wyraża się ogólnym wzorem (ob. także wz. 5):

---

*) Inż. K. Wątorek, Krzywe przejściowe, Czasopismo techniczne z r. 1906.

$$\varrho' = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}\ *)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (14a)$$

Jak już w § 39 powiedziano, możemy w zastosowaniu do krzywej przejściowej $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ wobec jedności opuścić i napisać:



Rys. 82.

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (14b)$$

a po wstawieniu za ϱ wartości z wz. (11):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{C}, \qquad (15)$$

jako równanie różniczkowe krzywej. Raz całkując będzie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2C} \qquad (16)$$

przyczem stała całkowa odpada, gdyż dla $x=0$ jest: $\frac{dy}{dx}=0$.

Jeszcze raz całkując, otrzymamy:

$$y = \frac{x^3}{6C} \qquad (17)$$

Stała całkowa odpada, bo dla $x=0$ jest $y=0$.

Wzór (17) okazuje równanie paraboli sześciennej, powszechnie używanej dla krzywych przejściowych.

Zastanówmy się teraz nad błędem popełnionym przezto, żeśmy zamiast dokładnego wzoru (14*a*), zastosowali przybliżony (14*b*). Z tych wzorów wynika, że:

$$\varrho' = \varrho\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

W dostatecznem przybliżeniu możemy napisać:

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 1+\left(\frac{3}{2}\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

więc błąd popełniony wynosi:

*) Podług tego dokładnego wzoru wyprowadził równanie krzywej przejściowej p. Leber w dziele jak wyżej.

$$\varrho' - \varrho = \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \varrho,$$

lub, gdy się uwzględni wz. (16) i (11):

$$\varrho' - \varrho = \frac{3}{8}\frac{x^4}{C^2}\varrho = \frac{3}{8}\frac{C^2}{\varrho^3} \qquad (18)$$

Dla kolei główniejszych osiąga x największą wartość 40 do 60 m; dla tych wartości obliczy się z wz. (18):

gdy $C=$	45000,	36000,	12000,	6000
najw. $x=$	45	60	48	40 m

$\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho} = 0{\cdot}00076\,(0{\cdot}08\%),\quad 0{\cdot}00375\,(0{\cdot}4\%),\quad 0{\cdot}0138\,(1{\cdot}4\%),\quad 0{\cdot}027\,(2{\cdot}7\%).$

Są to różnice praktycznie dopuszczalne.

Dla kolei podrzędnych można, w uwzględnieniu mniejszej chyżości pociągów, dopuścić większą różnicę.

Jeżeli przyjmiemy: $\varrho' - \varrho \leqq 0{\cdot}1\varrho$, to z wzoru (18) otrzyma się:

$$\frac{3}{8}\frac{C^2}{\varrho^3} \leqq 0{\cdot}1\varrho, \text{ a stąd: } \varrho \geqq \sqrt[4]{3{\cdot}75\,C^2} \geqq 1{\cdot}391\sqrt{C}$$

Podług tego wzoru obliczno graniczne wartości dla ϱ:

gdy $C=$	4500,	3000,	1500,	750
$\varrho \geqq$	94	76,	54,	39 m

Te wartości zostały uwzględnione w tab. VI. części II.

Drugi błąd popełniamy w pomiarze długości przezto, że zastępujemy zwykle długość krzywej S, odciętą x.

Z wzoru ogólnego dla długości krzywej:

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx$$

rozwiniętego w szereg, po wstawieniu wartości za $\frac{dy}{dx}$ z wz. (16):

$$dS = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2C}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2C}\right)^4\right]dx,$$

otrzyma się przez całkowanie wzór:

$$S = x + \frac{x^5}{40C^2} - \frac{x^9}{1152C^4} \qquad (19)$$

Po wstawieniu za x wartości z wz. (11), otrzyma się:

$$S - x = \frac{C^3}{40\varrho^5} - \frac{C^5}{1152\varrho^9} \qquad (19a)$$

Drugi człon z prawej strony daje dla najmniejszych promieni, wykazanych w tab. VI., różnicę dochodzącą ledwie do 0·001 *m*, może być więc zawsze opuszczony. Co do pierwszego członu, to jeżeli dopuścimy w praktyce różnicę $S-x$ mniejszą niż pół centimetra, natenczas mamy warunek:

$$\frac{C^3}{40\varrho^5} \leqq 0{\cdot}004\ m$$

a stąd: $$\varrho \geqq \sqrt[5]{6{\cdot}25C^3} \geqq 1{\cdot}4426\sqrt[5]{C^3} \qquad (19b)$$

i następujące zestawienie:

dla C=45000, 36000, 12000, 6000, 4500, 3000, 1500, 750

$\varrho \geqq$ 894, 782, 404, 267, 224, 176, 116, 77 *m*

Zatem dla promieni większych, niż powyższe, możemy podstawić $S=x$, zaś dla mniejszych promieni należy zastosować wzór ogólny:

$$S=x\left(1+\frac{x^4}{40C^2}\right) \qquad (20)$$

Tabela VI. zawiera długości krzywej dla $S-x \geqq 0{\cdot}001\ m$.

To poprzedziwszy, powróćmy do wzorów (11) i (14) do (17), które w zupełności określają krzywę przejściową.

W punkcie końcowym P krzywej osiąga ϱ wartość promienia r łuku kołowego, zaś x długość l, więc podług wz. (11):

$$l=\frac{C}{r}$$

a ponieważ wiemy, że linia $A'B'$ przechyłki toru jest prostą nachyloną spadkiem $1:i$, to:

$$x=ih_x, \text{ zaś: } l=ih$$

jako drugi wyraz dla długości krzywej przejściowej.

Z wz. (16) otrzymamy, gdy φ jest kątem nachylenia stycznej, tang $\varphi=\frac{x^2}{2C}$, a dla końca w P: tang $\varphi_0=\frac{l^2}{2C}=\frac{C}{2r^2}$

Jeżeli końcową rzędną w P oznaczymy literą e, to z wz. (17):

$$e=\frac{l^3}{6C}=\frac{C^2}{6r^3}$$

zaś rzędna w połowie krzywej, dla $x=\frac{l}{2}$ równa się:

$$\frac{l^3}{48C}, \text{ czyli równa: } \frac{e}{8}$$

Oznaczmy podstyczne w punktach C i P przez z i z_0, to:

$$z = y \operatorname{cotang} \varphi = \frac{x}{3}, \text{ zaś: } z_0 = e \operatorname{cotang} \varphi_0 = \frac{l}{3}$$

Te wzory są tak proste, że je można wprost na polu do obliczenia zastosować.

Dla lepszego przeglądu zestawiamy powyższe wzory, określające zupełnie krzywę przejściową:

$$\varrho = \frac{C}{x}; \quad l = \frac{C}{r} \text{ (także } l = ih)$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{x^2}{2C}; \quad \operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{l^2}{2C} = \frac{C}{2r^2} = \frac{3e}{l}$$

$$z = \frac{x}{3}; \quad z_0 = \frac{l}{3}$$

$$y = \frac{x^3}{6C}; \quad e = \frac{l^3}{6C} = \frac{C^2}{6r^3} \qquad (21^*)$$

Rzędna w połowie długości $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ równa $\frac{e}{8}$

$S = x\left(1 + \frac{x^4}{40C^2}\right)$ (granice stosowania podaje wz. (19b)

$v = \frac{e}{4}$ (ob. § 44)

$a =$ (podług wz. 24a, b lub c w § 44).

Uwaga. Dla wielkich promieni r wypada l małe; można zatem dla głównych kolei przyjąć jako najmniejszą długość $l = 20\ m$. Wtedy jest C zmienne z r, mianowicie $C = 20r$. Jest to uwzględnione w tabeli VII.

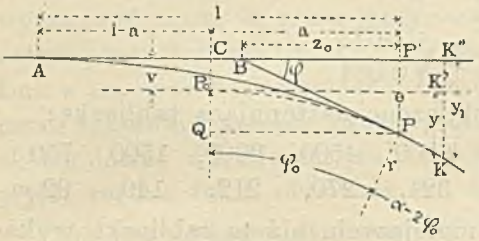
§ 44. Łuk kołowy z krzywą przejściową. Rys. 83.

Jeżeli między łuk kołowy P_0PK, a prostę styczną do łuku włożymy krzywę przejściową AP, to ponieważ ta krzywa jest łagodniej zakrzywiona, niż łuk, jej przebieg wypada po zewnętrznej stronie łuku.

Z tego powodu styczna do łuku P_0K' i styczna do krzywej przejściowej AP' muszą być względem siebie równolegle przesunięte o pewien wymiar v. Styczne przejście krzywej do łuku następuje w tym punkcie P, w którym promień ϱ

*) Ob. tabelę VI. w II. części.

krzywej osiąga wartość r łuku, a kąt styczności wartość φ_0, określoną wz. (21). Należy przedewszystkiem wyznaczyć ów odstęp stycznych v. Z trójkąta OPQ wynika (O środek koła):



Rys. 83.

$$QP = CP' = a = r \sin \varphi_0 \quad (22)$$

P_0Q jako strzałka płaskiego łuku, równa się $\frac{a^2}{2r}$ (ob § 10b), a gdy $v = e - P_0Q$, więc $v = e - \frac{a^2}{2r}$. Wymiar v jest zawsze mały, można zatem za a zamiast $r \sin \varphi_0$ wprowadzić $r \operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{C}{2r}$ (wz 21). Wtedy jest:

$$\frac{a^2}{2r} = \frac{C^2}{8r^3} = \frac{6}{8} \cdot \frac{C^2}{6r^3} = \frac{3}{4} e \text{ (ob. wz. 21),}$$

więc:

$$v = e - \frac{3}{4} e = \frac{e}{4} \quad (23)$$

Zatem wielkość przesunięcia stycznej łuku względem stycznej krzywej równa się jednej czwartej końcowej rzędnej krzywej przejściowej.

Jeżeli w wz. (22) wyrazimy $\sin \varphi_0$ przez znaną wartość $\operatorname{tang} \varphi_0$, to otrzymamy:

$$a = r \sin \varphi_0 = \frac{r \operatorname{tang} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi_0}} = \frac{l}{2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi_0}} \quad (24)$$

Jestto dokładny wzór dla obliczenia a jednakże nie używamy go, gdyż dla promieni stosowanych w praktyce wystarczą wzory przybliżone. Rozwińmy prawą stronę wz. (24) w szereg:

$$a = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi_0 + \frac{3}{8} \operatorname{tang}^4 \varphi_0\right),$$

lub:

$$\frac{l}{2} - a = \frac{l}{4} \operatorname{tang}^2 \varphi_0 - \frac{3l}{16} \operatorname{tang}^4 \varphi_0 \quad (24a)$$

Drugi wyraz po prawej stronie można opuścić, gdyż dla najmniejszych w praktyce stosowanych promieni daje ledwie 0·001 m. Natomiast pierwszy wyraz opuścimy wtedy, jeżeli zajdzie warunek:

$$\frac{l}{4} \operatorname{tang}^2 \varphi_0 \leqq 0{\cdot}004$$

Wstawmy za l i tang φ_0 wartość z wz. (21), natenczas:

$$\frac{C}{4r}\left(\frac{C}{2r^2}\right)^2 = \frac{C^3}{16r^5} \leqq 0{\cdot}004,$$

a stąd:

$$r \geqq \sqrt[5]{\frac{C^3}{0\,064}}$$

Podług tego wzoru obliczono następującą tabliczkę:

C=45000, 36000, 12000, 6000, 4500, 3000, 1500, 750
$r \geqq$ 1074, 939, 486, 321, 270, 212, 140, 92 m

Zatem dla promieni mniejszych, niż ta tabliczka wykazuje, zastosujemy wzór:

$$\frac{l}{2} - a = \frac{l}{4}\operatorname{tang}^2\varphi_0, \text{ lub: } a = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi_0\right) \quad (24b)$$

zaś dla większych promieni wzór:

$$a = \frac{l}{2} \quad (24c)$$

W tabeli VI. uwzględniono różnicę: $\frac{l}{2} - a \geqq 0{\cdot}001$ m.

Z powyższego rozpatrywania wynika:

1. *Włożenie krzywej przejściowej między prostą i łuk kołowy jest tylko wtedy możliwe, jeżeli styczna $A P_0$ w początku łuku i do niej równoległa styczna do krzywej przejściowej posiadają odstęp v, określony wz. (23), względnie (21).*

2. Odstępy początku i końca krzywej przejściowej od punktu C, który jest rzutem początku łuku P_0 na styczną do tej krzywej, wynoszą $l-a$, względnie a, określone wzorami 24*a*, *b* lub *c*.

Tyczenie krzywej i łuku. Jeżeli względne położenia stycznych, jakoteż punkty A i P zostały na polu wyznaczone (ob. dalsze paragrafy), to się tyczy krzywę przejściową za pomocą rzędnych od stycznej, wyjętych dla odległości co 5 lub 10 m aż do długości $x=l$, przynależnej do danego promienia r.

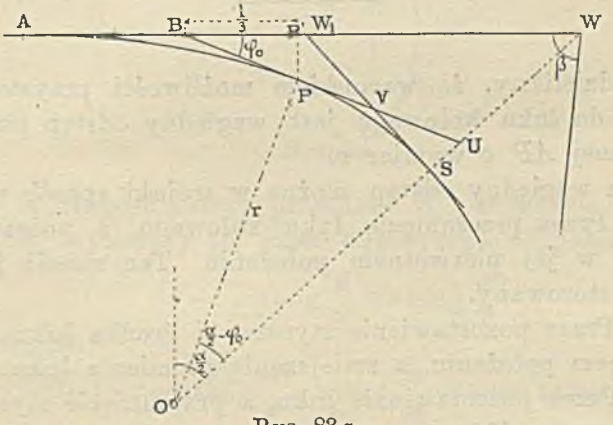
Wszystkie potrzebne dane są zawarte w tab. VI., ewentualnie VII., zaś dla promieni w tabeli nie zawartych, oblicza się je podług wz. (21) na polu.

W dalszym ciągu ma być od punktu P, a stycznie do krzywej przejściowej tyczony łuk o promieniu r.

To tyczenie łuku można różnymi sposobami uskutecznić.

a) Za pomocą rzędnych od stycznej. W tym celu wyznaczy się początek łuku P_0, a wtedy dla dowolnej odciętej P_0K' wytyczy się przynależną rzędną $KK'=y$, wyjętą z tabeli III. Także od stycznej AP' i punktu C, jako początku można wyznaczyć punkt K, przez wytyczenie rzędnej $KK''=y_1=y+v$, zatem przez dodanie ilości v do wartości y wyjętej z tabeli III. Łuk w ten sposób tyczony, aż do najbliższego głównego punktu, musi dokładnie przejść przez punkt P. Tę zgodność można skontrolować warunkiem, że $PP'=e$ ma się równać $y+v$, jeżeli y jest rzędną łuku, obliczoną dla odciętej $CP'=a$.

b) Przy użyciu stycznej BP (rys. 83). Podług wz. (21) jest: $BP'=z_0=\frac{l}{3}$; jeżeli tę długość odmierzymy od punktu P' do B, to prosta łącząca punkt B z punktem P już poprzednio wyznaczonym, jest styczną do łuku kołowego, od której ten łuk za pomocą metod podanych w rozdz. I. może być wytyczony.



Rys. 83*a*.

Jednakże styczna w ten sposób ustalona jest zanadto krótka dla dokładnego tyczenia łuku, trzeba ją zatem jeszcze przez jeden punkt ustalić. Jako taki dobrze się nadaje punkt U (rys. 83*a*), leżący na przecięciu stycznej BP z linią symetryi WS. Mianowicie jest:

$$US=UO-SO=r\left[\sec\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi_0\right)-1\right]$$

Wartość $\sec\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi_0\right)-1$ wyjmie się z tab. II.

Gdy się US odmierzy, otrzyma się styczną BU, która musi przejść dokładnie przez punkt P. Ten sposób ustalenia stycznej nadaje się dobrze dla wielkich kątów β. Dla małych kątów jest wyznaczenie punktu U niepewne, gdyż proste BU i WS przecinają się pod ostrym kątem. Wtedy użyjemy punktu V, leżącego na przecięciu stycznej BP z pomocniczą styczną łuku W_1S.

Mianowicie są PV i VS stycznemi do łuku o kącie środkowym: $\frac{\alpha}{2}-\varphi_0$, zatem:

$$PV=VS=r\,\mathrm{tang}\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Odmierzymy VS i skontrolujemy zgodność $VS=PV$.

Styczna BV powinna przejść przez P. Długość VS obliczymy podług tab. II.

Widzieliśmy, że warunkiem możliwości przystosowania krzywej do łuku kołowego jest względny odstęp punktu P_0 od stycznej AP' o wymiar v.

Ten względny odstęp można w trojaki sposób uzyskać:

a) Przez przesunięcie łuku kołowego, a pozostawienie stycznej w jej pierwotnem położeniu. Ten sposób jest najczęściej stosowany.

b) Przez pozostawienie stycznej i środka łuku S w ich pierwotnem położeniu, a zmiejszenie promienia łuku.

c) Przez pozostawienie łuku, a przesunięcie stycznej.

Te przypadki rozpatrzymy w następujących paragrafach.

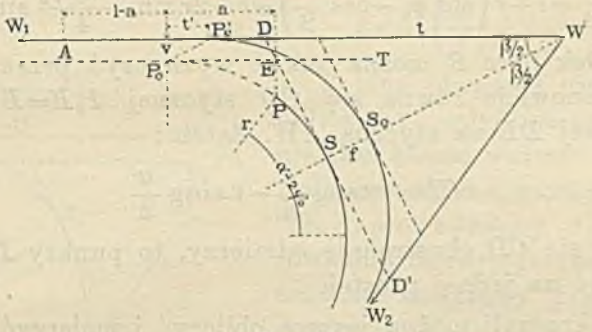
§ 45. Łuk kołowy zostaje przesunięty. Rys. 84.

Jeżeli są w polu wyznaczone kierunki proste W_1W i WW_2, które mają być połączone łukiem kołowym, to wiemy już z I. rozdziału, że w celu wytyczenia łuku należy zmierzyć kąt β, wyznaczyć $\alpha=180-\beta$, obliczyć i odmierzyć:

$$WP'_0=t=r\,\mathrm{cotg}\,\frac{\beta}{2}=r\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},$$

nareszcie wyznaczyć S_0 na linii połowiącej kąt wierzchołkowy, która jest linią symetryi dla całego układu. Przesunięcie łuku potrzebne w celu uzyskania odstępu $P_0C=v$ może nastąpić tylko wzdłuż osi symetryi o pewną długość $S_0S=f$. Ponieważ każdy punkt łuku w tym samym kierunku i o tę samą długość się przesunie, więc też pierwotny początek łuku P'_0 przesunie się w kierunku P'_0P_0 równoległym do S_0S i o długość $P'_0P_0=f$, którą obliczy się z trójkąta $P_0CP'_0$, skoro v już poprzednio wyznaczono. Mianowicie:

$$f=v\ \text{cosec}\ \frac{\beta}{2}=v\ \sec\frac{\alpha}{2} \qquad (26)$$



Rys. 84.

O tę długość należy przesunąć S_0. Położenie punktu C i linii CP_0 wyznaczy się przez odmierzenie długości $t'=P'_0C$:

$$t'=v\ \text{cotang}\ \frac{\beta}{2}=v\ \text{tang}\ \frac{\alpha}{2} \qquad (27)$$

Długość:

$$WC=t+t'=r\ \text{tang}\ \frac{\alpha}{2}+v\ \text{tang}\ \frac{\alpha}{2}=(r+v)\ \text{tang}\ \frac{\alpha}{2},$$

czyli, że długość WC jest styczną dla łuku o promieniu $r+v$.

Możemy zatem punkt C wyznaczyć od razu, bez pomocy pierwotnego początku łuku P'_0. Powyższe ilości obliczy się podług tabeli II. Z tabeli VI. wyjmie się ilości l, a i e i odmierzy się a od C ku P', $l-a$ od C ku A, przezco otrzyma się początek i koniec krzywej przejściowej, zaś e od P' ku P. Tyczenie tej krzywej nastąpi podług § 44.

Podobnie można od razu wyznaczyć punkt S. Mianowicie jest podług § 7. $WS_0=r\sec\frac{\alpha}{2}-r$, zaś:

$$WS = WS_0 + f = r \sec \frac{\alpha}{2} - r + v \sec \frac{\alpha}{2} = (r+v) \sec \frac{\alpha}{2} - r$$

Nadto jeżeli się wytyczy przesuniętą styczną P_0T, to można punkt S, położenie stycznej w S, jakoteż dowolną ilość głównych punktów łuku wyznaczyć sposobem w I. rozdziale podanym.

W celu kontroli powyższych rachunków uzyska się równanie, gdy się wykona rzut linii $P'PSW$ na kierunek $P'P$; mianowicie rzut linii WS na ten kierunek ma się równać rzutowi linii $P'PS$, czyli:

$$WS \cos \frac{\alpha}{2} = e + r\left(\cos \varphi_0 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = e + 2r \sin \frac{\alpha + 2\varphi_0}{4} \sin \frac{\alpha - 2\varphi_0}{4}$$

Środek łuku S można także wyznaczyć przez styczną DD'; mianowicie równa się CD stycznej $P_0E = ES$, mniej rzut prostej DE na styczną AW. Zatem:

$$CD = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} - v \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

Gdy się CD obustronnie odmierzy, to punkty D, S i D' mają leżeć na jednej prostej.

Dla kontroli można jeszcze obliczyć i zmierzyć:

$$DS = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} + v \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$$

Jeżeli kąt β staje się ujemny, to znaczy $\alpha > 180^0$ (jak na rys. 43), wtedy f i t' otrzymują ujemną wartość.

Przesunięcie łuku powoduje zmianę pierwotnie projektowanej trasy, która nie zawsze jest dopuszczalną.

Wzór (26) okazuje, że f jest zależne od v, które jest tem większe, im mniejszy promień r, i od $\operatorname{cosec} \frac{\beta}{2}$, które jest tem większe, im mniejszy kąt wierzchołkowy. Zatem dla małych promieni i małych β (wielkich α) może otrzymać f bardzo znaczną wartość, dochodzącą do nieskończoności dla $\beta = 0$. Jeżeli zatem obliczona długość f wypadnie znaczna, należy w projekcie wrysować przesunięty łuk i przekonać się, czy przesunięcie jest dopuszczalne; w przeciwnym razie należy postąpić podług § 46 lub § 47 (Ob. także § 49)*).

*) Do §§ 43, 44, 45 ob. zbiór przykładów, jakoteż przykład przy tabeli VI.

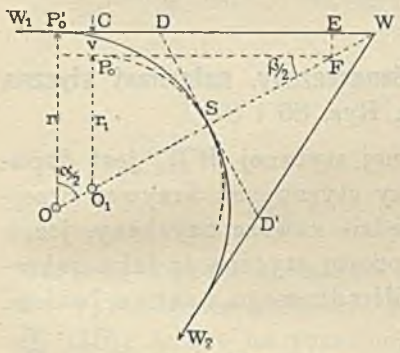
§ 46. Położenie stycznych i środka łuku pozostaje nie naruszone. Rys. 85.

W tym przypadku należy zmniejszyć promień r na taką wartość r_1, ażeby odstęp P_0C otrzymał wymiar v_1, obliczony dla promienia r_1. Z rzutu linii OO_1P_0C na kierunek OP'_0 otrzyma się, zważywszy, że $OO_1 = r - r_1$, równanie:

$$r = (r - r_1)\cos\frac{\alpha}{2} + r_1 + v_1,$$

z którego wyznaczy się:

$$r_1 = r - \frac{v_1}{1 - \cos\frac{\alpha}{2}} = r - \frac{v_1}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \qquad (28)$$



Rys. 85.

Z tego równania nie można obliczyć r_1, gdyż nie znając r_1, nie jest znana wartość v_1, zaś podstawienie za v_1 wartości z wz. (23) doprowadziłoby dla r_1 do równania czwartego rzędu. Tę trudność ominiemy przez wyznaczenie przybliżonej wartości dla r_1. Wzór (28) okazuje, że dla małych promieni r i małego kąta α może otrzymać wyraz: $v_1 : 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ wielką, a nawet z różnych względów niedopuszczalną wartość. My jednak stosujemy rozważony przypadek tylko dla wielkich kątów α, t. j. dla takich, dla których przesunięcie łuku podług § 45 jest niedopuszczalne. Otóż dla wielkich kątów α zbliża się wyraz: $2\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ do jedności, którą osiąga dla $\alpha = 180^0$, wtedy różnica między promieniami r i r_1 jest niewielka, a różnica między v_1 a v obliczonem podług r wprost praktycznie znikoma.

Możemy zatem w przybliżeniu podstawić v za v_1 i obliczyć r_1 z wzoru:

$$r_1 = r - \frac{v}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \qquad (28a)$$

Podług tego promienia obliczymy v_1 i nie troszcząc się o dane położenie punktu S wyznaczymy P_0. Mianowicie jeżeli styczną w P_0 przedłużymy do punktu F, z F spuścimy prostopadłą do stycznej w E, to P_0F jest styczną do łuku o promieniu r_1, zaś: $EW = v_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, więc:

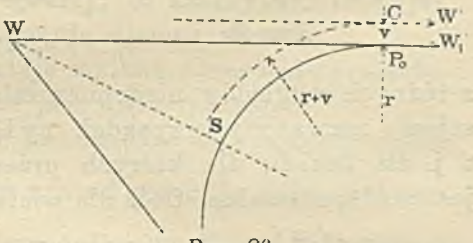
$$CW = (r_1 + v_1) \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \text{ (zgodnie z § 45)} \qquad (29)$$

Po odmierzeniu tej długości otrzyma się C i P_0, od którego wytyczy się łuk. Ten łuk nie przejdzie całkiem dokładnie przez punkt S, gdyż promień r_1 nie był zupełnie dokładnie wyznaczony*).

Krzywę przejściową wytyczy się podług wskazówek § 44. Styczną DD' wyznaczy się jak w § 45. (Ob. przykład rachowany przy tabeli VI).

§ 47. Łuk pierwotny pozostaje nienaruszony, natomiast styczna zostaje przesunięta. Rys. 86 i 87.

Jeżeli przesunięcie pierwotnej stycznej WW_1 jest dopuszczalne, to warunek, aby między styczną do krzywej przejściowej a łukiem był odstęp v będzie zawsze uzyskany, jeżeli tę styczną poprowadzimy jako prostą styczną do łuku zakreślonego promieniem $r+v$, a współśrodkowego z danym łukiem. Jeżeli P_0S na rys. 86 jest łukiem pierwotnym o promieniu r, a zakreślimy łuk (kreskowany) promieniem $r+v$, to w dowolnym punkcie tego łuku poprowadzona styczna, powyższemu warunkowi zadosyć uczyni.



Rys. 86.

Rozróżnimy różne przypadki.

a) Styczna zostaje przesunięta równolegle do pierwotnego kierunku. Rys. 86.

Jeżeli dalsza trasa nie jest jeszcze tyczona, a zmiana położenia następującego wierzchołka W_1 jest dopuszczalna,

*) Helmert w swojem dziełku: „Die Uebergangscurven", podaje inny bardziej skomplikowany sposób rozwiązania tego zagadnienia.

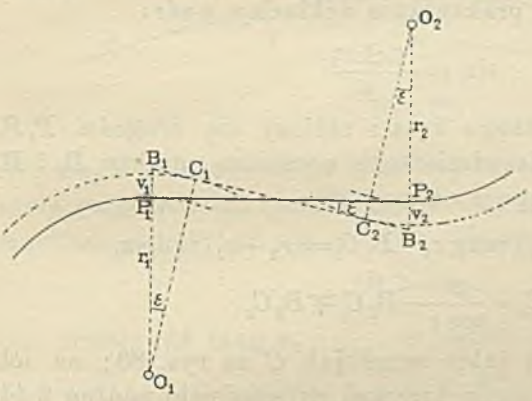
wtedy otrzyma się najprostsze rozwiązanie, gdy prostę $P_0 W_1$ przesunie się równolegle o wymiar v. Wprost otrzyma się punkt C, który posłuży do wytyczenia krzywej przejściowej podług § 44.

b) Przesunięta styczna ma być wspólną do dwóch łuków. Rys. 87.

Łuki mogą być odwrotnie skierowane, jak na rys. 87, albotež jednakowo skierowane. Wspólna styczna łuków jest $P_1 P_2 = p$. Jeżeli zamierzamy między łuki a prostę włożyć krzywe przejściowe, to podług powyższych wskazówek pomyślimy sobie ze środków O_1 i O_2 zakreślone łuki o promieniach:

$$r_1 + v_1 \text{ i } r_2 + v_2,$$

a styczna wspólna do tych łuków odpowie warunkowi potrzebnemu dla włożenia krzywych przejściowych. Do wyznaczenia położenia tej nowej stycznej posłużą punkty B_1 i B_2, leżące na przecięciu tej stycznej z przedłużonymi promieniami $O_1 P_1$ i $O_2 P_2$. Jeżeli ze środków łuków spuścimy na nową styczną prostopadłe do punktów C_1 i C_2, to kąt $B_1 O_1 C_1 = B_2 O_2 C_2$ równy kątowi ε zawartemu między pierwotną a nową styczną.



Rys. 87.

Otóż z rysunku wynika, że:

$$P_1 B_1 \pm P_2 B_2 = P_1 P_2 \operatorname{tang} \varepsilon = p \operatorname{tang} \varepsilon$$

Znak dolny odnosi się do przypadku, gdy łuki są jednakowo skierowane.

Następnie wynika z trójkątów: $B_1 O_1 C_1$ i $B_2 O_2 C_2$, że:

$$P_1 B_1 = \frac{r_1 + v_1}{\cos \varepsilon} - r_1, \quad P_2 B_2 = \frac{r_2 + v_2}{\cos \varepsilon} - r_2$$

Jeżeli te wartości wstawi się w poprzedni wzór, to będzie:

$$\frac{(r_1 + v_1) \pm (r_2 + v_2)}{\cos \varepsilon} - (r_1 \pm r_2) = p \operatorname{tang} \varepsilon,$$

lub: $$(r_1 \pm r_2)\cos\varepsilon + p\sin\varepsilon = (r_1 \pm r_2) + (v_1 \pm v_2) \qquad (a)$$

Gdy się podstawi: $\operatorname{tang}\varphi = \frac{r_1 \pm r_2}{p}$, to się otrzyma:

$$\sin(\varphi+\varepsilon) = \frac{(r_1 \pm r_2) + (v_1 \pm v_2)}{p}\cos\varphi$$

Z tego równania wyznaczy się dokładną wartość kąta ε. Gdy jednak kąt ε jest nie wielki, to dla znaczniejszych długości p można w równaniu (a) podstawić $\cos\varepsilon = 1$, a wtedy otrzyma się prostszy, praktycznie dokładny wzór:

$$\sin\varepsilon = \frac{v_1 \pm v_2}{p}$$

Podług wyznaczonego kąta ε obliczy się długości P_1B_1 i P_2B_2, które należycie odmierzone wyznaczą punkty B_1 i B_2 nowej stycznej. Następnie obliczy się:

$$B_1C_1 = (r_1 + v_1)\operatorname{tang}\varepsilon, \quad B_2C_2 = (r_2 + v_2)\operatorname{tang}\varepsilon,$$

$$C_1C_2 = \frac{p}{\cos\varepsilon} - B_1C_1 \mp B_2C_2$$

Punkty C_1, C_2 są takie same jak C na rys. 83; na ich podstawie nastąpi tyczenie krzywej przejściowej podług § 44. Kontrolę rachunków da równanie, uzyskane z rzutu łuków i prostej C_1C_2 na kierunek P_1P_2:

$$p = (r_1 \pm r_2)\operatorname{tang}\varepsilon + C_1C_2\sec\varepsilon$$

Na prostej C_1C_2 ma się pomieścić, oprócz długości t' (§ 45) po połowie długości (a raczej $l-a$) krzywej przejściowej jednego i drugiego łuku, a nadto, jeżeli łuki są odwrotnie skierowane, żąda się pewnej długości l_0*) między początkami krzywych przejściowych. Zatem powyższe rozwiązanie będzie możliwe, jeżeli:

$$C_1C_2 \geqq l_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} + t'_1 + t'_2,$$

dla łuków odwrotnie skierowanych;

$$C_1C_2 \geqq \frac{l_1 + l_2}{2} + t'_1 + t'_2,$$

dla łuków jednakowo skierowanych**). (Ob. także § 54).

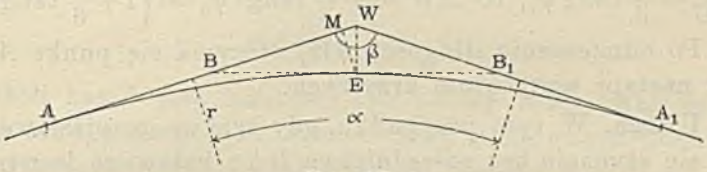
---

*) l_0 wynosi conajmniej 10 m dla kolei głównych, a 7 m dla kolei podrzędnych.

**) Ob. nr. 22 zbioru przykładów.

§ 48. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy zbliża się do 180°. Rys. 88.

W miarę zwiększania się kąta β, zmniejsza się długość łuku kołowego. Kąt środkowy tego łuku wynosi $\alpha - 2\varphi_0$ (ob. rys. 83 i 84), zatem łuk zniknie, skoro $\alpha - 2\varphi_0 = 0$. Wtedy obustronne krzywe przejściowe AE i A_1E (rys. 88) zetkną się



Rys. 88.

w jednym punkcie E na wspólnej stycznej BB_1. Dla kąta α mniejszego niż $2\varphi_0$ jest włożenie krzywych przejściowych niemożliwe, gdyż one się przetną. Zatem musi zajść warunek:

$$\alpha \geqq 2\varphi_0$$

Ponieważ $\operatorname{tang} \varphi_0 = \frac{C}{2r^2}$, to zatem ma być:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \geqq \frac{C}{2r^2}$$

Ten wzór okazuje, że czem mniejszy promień, tem większy powinien być kąt α. Np. dla głównych kolei, gdy $C = 12000$, ma być:

dla $r =$ 300, 400, 500, 1000 m

$\alpha \geqq 7^0 38'$, $4^0 18'$, $2^0 45'$, $0^0 42'$

Z tego przykładu widzimy, że ze zmniejszającym się promieniem kąt α jeszcze dopuszczalny bardzo szybko rośnie.

Jeżeliby kąt α był tylko nieco mniejszy, niż powyższymi wzorami określony, to przyjmiemy: $\varphi_0 = \frac{\alpha}{2}$, a w celu umożliwienia włożenia dwóch stykających się krzywych przejściowych, należy do tego warunku C lub r zastosować. Zatem z powyższego wzoru obliczy się, albo zmniejszoną wartość:

$$C = 2r^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$$

albo zwiększoną wartość:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} C \operatorname{cotang} \frac{\alpha}{2}}$$

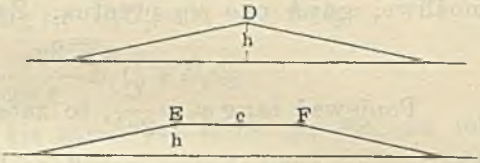
Podług tych zmienionych wartości obliczymy długość krzywej $AM=l$ i rzędne krzywej przejściowej. Ustalenie początku A krzywej nastąpi albo zwykłym sposobem, albo wprost przez wyznaczenie długości AW. Ponieważ kąt MEW równy φ_0, to:

$$AW=l+c\,\mathrm{tang}\,\varphi_0,$$ a gdy z wz. (21) jest:

$$c=\frac{l^3}{6C}=\frac{l}{3}\mathrm{tang}\,\varphi_0,\ \text{to}\ AW=l+\frac{l}{3}\mathrm{tang}^2\,\varphi_0=l\left(1+\frac{1}{3}\mathrm{tang}^2\,\varphi_0\right)$$

Po odmierzeniu długości AW, otrzyma się punkt A, poczem nastąpi wytyczenie krzywych.

Uwaga. W tym przypadku, gdy krzywe przejściowe stykają się stycznie bez pośrednictwa łuku kołowego jest ta niewłaściwość, że przechyłka toru wzrastając z jednej i z drugiej strony tworzy w punkcie zetknięcia D (rys. 89) załom, który, mianowicie na liniach o wielkiej chyżości pociągów jest niedopuszczalny. Należy zatem obrać większy promień r, tak, aby między krzywemi przejściowemi pośredniczył łuk kołowy o długości c, zależnej od największej chyżości pociągów. Dla obranej długości c (np. od 10 do 50 m) można wyznaczyć związek między promieniem r a potrzebnym kątem środkowym α. Mianowicie jest w tym przypadku:



Rys. 89.

$$c=r\,\mathrm{arc}\,(\alpha-2\varphi_0)$$

Ponieważ obrana wartość c nie musi być dokładnie dochowana, to możemy arcus zastąpić przez tangens i napisać powyższy wzór w tej formie:

$$c=2r\left(\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tang}\,\varphi_0\right)$$

Zważywszy, że $\mathrm{tang}\,\varphi_0=l^2:2C=l:2r$, to otrzyma się:

$$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{c+l}{2r}$$

Dla różnych wartości C i im odpowiednich c obrachowano tabelę, umieszczoną na końcu tabeli VI. części II*).

Wobec powyższej uwagi lepiej już przy projektowaniu unikać wielkich kątów wierzchołkowych z łukami o małych promieniach.

*) Ob. wz. 23 zbioru przykładów.

§ 49. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy jest bardzo mały.

Wzór (26) okazuje, że dla małych kątów β wypada długość przesunięcia łuku f wielka i może być ze względu na zmianę położenia trasy niedopuszczalna. Jeżeli w danych warunkach może wielkość przesunięcia osiągnąć co najwyżej wartość q, to z wz. (26) wynika, że ma być:

$$\sin\frac{\beta}{2} \leqq \frac{v}{q}$$

Jeżeli kąt β jest mniejszy, to należy albo zmniejszyć promień łuku podług § 45, albotež przy zachowaniu promienia uskutecznić przesunięcie stycznych, podług § 47 *).

§ 50. Zastosowanie krzywej przejściowej do budowli wodnych.

Dla kolei żelaznych doprowadził warunek przeprowadzenia przechyłki toru do paraboli sześciennej jako krzywej przejściowej. Dla łuków budowli wodnych tego warunku niema, mogłyby więc różne krzywe posiadające punkt przegięcia ($\varrho = \infty$) być obrane jako krzywe przejściowe, umożliwiające ciągłe przeprowadzenie krzywizny od prostej aż do danego promienia łuku. Gdy jednakże parabola sześcienna jest dla obliczenia i wytyczenia bardzo prosta, nadaje się więc doskonale także do budowli wodnych.

O ile tyczenie łuków uskutecznia się na stałym lądzie, mogą wszystkie metody opisane w poprzednich paragrafach znaleźć tu zastosowanie.

Rozchodzi się tylko o to, jak wielką stałą C przyjąć należy. Ponieważ do budowli wodnych obok małych także wielkie promienie się stosuje, dla których, przy przyjęciu jednej tylko wartości C wypadłyby zanadto krótkie krzywe przejściowe, powinno się przyjąć C zmienne z wielkością promienia.

W jakim stosunku najkorzystniejszym mają stać te dwie ilości, wykaże dopiero doświadczenie **).

Dla wytyczenia tam w wodzie rozróżnimy znów brzeg wypukły i wklęsły. Najlepiej zastosować przesunięcie łuku

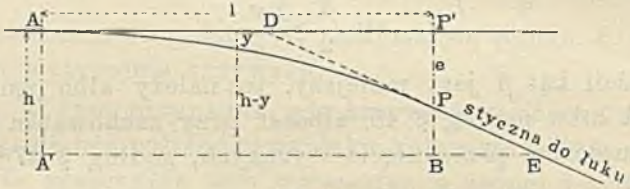
---

*) Ob. nr. 24 zbioru przykładów.

**) Ob. także Handb. d. Ing. Wiss. Flussbau, vierte Aufl. 1907, str. 100.

podług § 45, ale to przesunięcie już w projekcie wrysować i podług projektu początek A krzywej przejściowej na polu wyznaczyć.

Na wypukłym brzegu (rys. 90) poprowadzimy równoległą $A'BE$ do stycznej AP' w dowolnym odstępie h, a od $A'B$ wytyczymy krzywę przejściową rzędnemi $h—y$. Na tej pod-



Rys. 90.

stawie, że podstyczna równa jednej trzeciej długości odciętej, jest $DP' = {}^1/_3 l$. Otóż z trójkątów DPP' i PBE wynika, że:

$$BE : h—e = {}^1/_3 l : e,$$

zatem:

$$BE = \frac{l(h—e)}{3e}$$

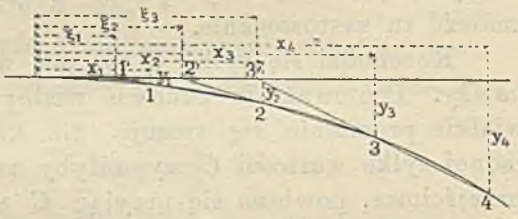
Tę długość odmierzymy, wtedy PE jest kierunkiem stycznej, od której możemy wytyczyć łuk kołowy podług § 22.

Na wklęsłym brzegu (rys. 91) postąpimy inaczej; mianowicie wytyczymy wielobok krzywej przejściowej. Boki tego wieloboku odcinają na stycznej odcinki ξ, które nie trudno obliczyć. Mianowicie np. dla cięciwy 34 jest:

$x_3 — \xi_3 : x_4 — \xi_3 = y_3 : y_4$,

a stąd:

$$\xi_3 = \frac{x_3 y_4 — x_4 y_3}{y_4 — y_3}$$



Rys. 91.

lub ogólnie:

$$\xi_n = \frac{x_n y_{n+1} — x_{n+1} y_n}{y_{n+1} — y_n}$$

Jeżeli w tym wzorze wstawimy: $y = \frac{x^3}{6C}$, to otrzymamy:

$$\xi_n = \frac{x_n x_{n+1} (x_n + x_{n+1})}{x^2{}_n + x_n x_{n+1} + x^2{}_{n+1}} \qquad (a)$$

jako wzór ogólny.

Odstępy rzędnych obierzemy zawsze równe; oznaczmy je literą a, to: $x_n = na$, $x_{n+1} = (n+1)a$,

zatem: $$\xi_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 + n(2n+1)} \cdot a \qquad (b)$$

Tylko dla końcowej rzędnej, która od poprzedzającej może mieć odstęp od a odmienny, zastosujemy ogólny wzór (a). Jeżeli w wzór (b) wstawimy za n kolejno wartości od 1 do 9, otrzymamy następującą tabliczkę:

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9
$\frac{6}{7}a$	$\frac{30}{19}a$	$\frac{84}{37}a$	$\frac{180}{61}a$	$\frac{330}{91}a$	$\frac{546}{127}a$	$\frac{840}{169}a$	$\frac{1224}{217}a$	$\frac{1710}{271}a$

Podług tej tabliczki obliczono tabelę VIII dla $a = 5$ i $10\,m$.

Wytyczymy naprzód punkt 1, odmierzywszy a i $y_1 = \frac{a^3}{2C}$ (wartość y_1 wyjęta z tabeli VI).

Następnie odmierzymy ξ_1 i w kierunku 1'1 wybudujemy element 12 tamy o długości a Po odmierzeniu ξ_2 zbudujemy w kierunku 2'2 drugi element tamy i t. d. Dojdziemy w ten sposób aż do końcowego punktu krzywej przejściowej, który za pomocą obliczonej rzędnej skontrolujemy, ewentualnie drobny błąd poprawimy.

W tym końcowym punkcie wyznaczymy dokładnie styczną, podług wskazówek § 44, a od tej stycznej wytyczymy łuk sposobami podanymi w § 23.

§ 51. Krzywa przejściowa styczna do dwóch łuków kołowych.

Rys. 92.

Zbadamy naprzód warunki, kiedy krzywa przejściowa może być styczną do dwóch łuków kołowych. Niech ADE jest tą krzywą. W dowolnym punkcie D, o współrzędnych x_1 i y_1, jest promień krzywizny r_1 zarazem promieniem koła styczności C'_1DF. Jeżeli to koło przedłużymy do punktu C'_1, w którym promień jest prostopadły do stycznej AW, to jak nam z § 45 wiadomo jest odstęp $C_1C'_1 = v_1$, zaś długość $\xi_1 = AC_1$ równa $^1/_2x_1$, z dostateczną dokładnością. Spółrzędne środka O_1 są ξ_1 i $O_1C_1 = \eta_1$.

Podobnie dla drugiego dowolnego punktu E jest C'_2GE kołem styczności o promieniu r_2, o dstępie $C'_2C_2 = v_2$ i o spółrzędnych środka $\xi_2 = {}^1/_2x_2$ i η_2.

Te dwa koła przedłużone aż do wspólnego promienia O_1O_2GF otrzymają na tym promieniu odstęp $GF=c$, który należy wyznaczyć. Nie trudno zauważyć, że:

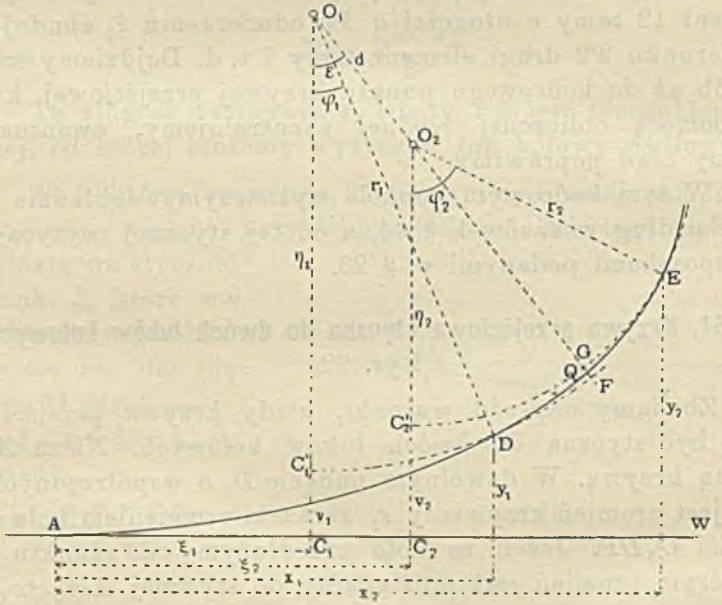
$$O_1O_2=d=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_1-\eta_2)^2},$$

a ponieważ:

$$\xi_1=\frac{x_1}{2},\quad \xi_2=\frac{x_2}{2},\quad \eta_1=r_1+v_1,\quad \eta_2=r_2+v_2,$$

więc:

$$\left.\begin{aligned} d&=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+[r_1-r_2-(v_2-v_1)]^2}= \\ &=(r_1-r_2)\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2}{4(r_1-r_2)^2}+\left(1-\frac{v_2-v_1}{r_1-r_2}\right)^2} \\ d&=(r_1-r_2)\sqrt{1-\frac{2(v_2-v_1)}{r_1-r_2}+\frac{(v_2-v_1)^2}{(r_1-r_2)^2}+\frac{(x_2-x_1)^2}{4(r_1-r_2)^2}} \end{aligned}\right\} \quad (30a)$$



Rys. 92.

Ilość $\frac{(v_2-v_1)^2}{(r_1-r_2)^2}$ jest tak małą wobec jedności, że ją można opuścić. Pozostałe dwie ilości są wobec jedności także bardzo małe, możemy więc napisać:

$$d=\left(r_1-r_2\right)\left(1-\frac{v_2-v_1}{r_1-r_2}+\frac{(x_2-x_1)^2}{8(r_1-r_2)^2}\right) \qquad (30b)$$

Z rysunku widać, że: $O_1F=O_1O_2+O_2G+GF$, więc:

$$GF=c=r_1-r_2-d, \qquad (31a)$$

a gdy za d podstawimy wartość z wz. (30*b*), to:

$$c=v_2-v_1-\frac{(x_2-x_1)^2}{8(r_1-r_2)}$$

zatem ilość bardzo mała. Jeżeli jeszcze podstawimy:

$$x_1=\frac{C}{r_1}, \quad x_2=\frac{C}{r_2}\ (\S\ 41)\ \text{i}\ v_1=\frac{C^2}{24r^3_1}, \quad v_2=\frac{C^2}{24r^3_2}\ (\text{wz. } 23),$$

to:

$$c=\frac{C^2(r^3_1-r^3_2)}{24r^3_1r^3_2}-\frac{C^2(r_1-r_2)}{8r^2_1r^2_2},$$

lub:

$$c=\frac{C^2(r_1-r_2)^3}{24r^3_1r^3_2} \qquad (31b)$$

Następnie wyznaczymy kąt ε, który zawiera wspólny promień z prostopadłą do stycznej AW. Z rysunku widać, że:

$$\operatorname{tang}\varepsilon=\frac{\xi_2-\xi_1}{\eta_1-\eta_2}=\frac{x_2-x_1}{2[r_1-r_2-(v_2-v_1)]}=\frac{C(r_1-r_2)}{2r_1r_2[r_1-r_2-(v_2-v_1)]}$$

Jestto dokładny wzór dla tang ε. Dla dalszych celów wprowadzimy wzór dostatecznie przybliżony, jeżeli małą ilość v_2-v_1 wobec r_1-r_2 opuścimy. Wtedy jest:

$$\operatorname{tang}\varepsilon=\frac{C}{2r_1r_2} \qquad (32)$$

Jeżeli uwzględnimy, że podług wz. (21) jest:

$$\operatorname{tang}\varphi_1=\frac{C}{2r^2_1}, \quad \operatorname{tang}\varphi_2=\frac{C}{2r^2_2},$$

to:

$$\operatorname{tang}\varepsilon=\sqrt{\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2}$$

Zatem $\operatorname{tang}\varphi_1<\operatorname{tang}\varepsilon<\operatorname{tang}\varphi_2$, zaś $\varphi_1<\varepsilon<\varphi_2$.

Przypatrzmy się ilości: $\operatorname{tang}(\varepsilon-\varphi_1)=\dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tang}\varepsilon\operatorname{tang}\varphi_1}$

i wstawmy w ten wzór powyższe wartości, to otrzymamy:

$$\operatorname{tang}(\varepsilon-\varphi_1)=\frac{\dfrac{C}{2r_1r_2}-\dfrac{C}{2r^2_1}}{1+\dfrac{C}{2r_1r_2}\cdot\dfrac{C}{2r^2_1}}=\frac{2C(r^2_1-r_1r_2)}{4r^3_1r_2+C^2}=\frac{2Cr_1(r_1-r_2)}{4r^3_1r_2+C^2}$$

W mianowniku jest C^2 wobec $4r^3_1r_2$ zwykle ilością małą, tak, że gdy ją opuścimy, otrzymamy:

$$\operatorname{tang}(\varepsilon-\varphi_1)=\frac{C(r_1-r_2)}{2r_1^2r_2},\ \text{podobnie:}\ \operatorname{tang}(\varphi_2-\varepsilon)=\frac{C(r_1-r_2)}{2r_1r_2^2}$$

W praktyce są różnice kątów $\varepsilon-\varphi_1$ lub $\varphi_2-\varepsilon$ bardzo małe, tak, że zamiast tangens, możemy podstawić arcus, a wtedy otrzymamy:

$$r_1\operatorname{arc}(\varepsilon-\varphi_1)=r_2\operatorname{arc}(\varphi_2-\varepsilon)=\frac{C(r_1-r_2)}{2r_1r_2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{C}{r_2}-\frac{C}{r_1}\right)=\frac{x_2-x_1}{2} \qquad (34)$$

to znaczy, że długości łuków DF i EG są sobie równe.

Doszliśmy więc do następujących, dla dalszego zastosowania ważnych wyników:

1. Do dwóch łuków o różnych promieniach można tylko wtedy przystosować stycznie krzywę przejściową, jeżeli te łuki są na wspólnym promieniu przesunięte o wymiar c, wyznaczony wzorem (31*b*); o ten wymiar jest łuk o mniejszym promieniu przesunięty ku środkowi koła.

2. Punkta styczności krzywej przejściowej z łukami są równo oddalone od wspólnego promienia o długość wyznaczoną wzorem (34).

Ponieważ prostsze w zastosowaniu wzory (30*b*), (31*b*), (32) i (34) są tylko przybliżone, należy przekonać się o ile wyniki obliczeń różnią się podług dokładnych i podług przybliżonych wzorów. Różnice będą tem większe, im mniejsze są promienie łuków i czem większa różnica między tymi promieniami. Obierzemy więc dla przykładu, przy $C=12000$, najmniejszy promień $r_2=300\ m$ i dwa razy tak wielki promień $r_1=600\ m$. Dla tych wartości obliczyliśmy następującą tabliczkę:

	podług dokładnych wzorów:	podług przybliżonych wzorów:	różnica:
	$d=299{\cdot}9723$	299·9722	0·0001
	$c=$ 0·0277	0·0278	0·0001
	$\varepsilon=1^0\,55'\,6{\cdot}9''$	$1^0\,54'\,32{\cdot}9''$	34″
$r_1\operatorname{arc}(\varepsilon-\varphi_1)$	10·0924	9·9935	+0·0989
$r_2\operatorname{arc}(\varphi_2-\varepsilon)$	= 9·9248	9·9742	−0·0494
suma tych łuków	= 20·0172	19·9677	+0·0495
różnica tych łuków	= 0·1676	0·0193	

Podług wz. (34) są obydwa łuki równe, o długości 10·000 *m*.

Ta tabliczka okazuje, że różnice są praktycznie za małe, aby miały wpływ na przebieg krzywej przejściowej. Następnie wykazuje nawet dla tak niekorzystnego przykładu bardzo małe przesunięcie łuków *c*.

§ 52. Tyczenie krzywej przejściowej od łuku kołowego. Rys. 93*).

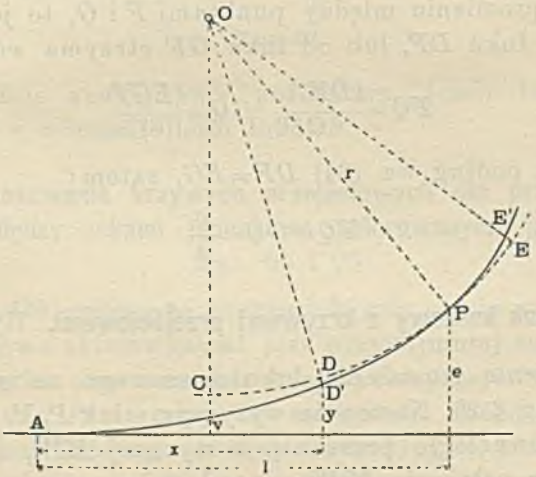
W punkcie *P* krzywej przejściowej poprowadźmy koło krzywizny *CDPE* o promieniu *r*. W dowolnym punkcie *D* poprowadźmy promień *ODD'*, to rzędną $DD' = \zeta$ potrafimy w przybliżeniu wyznaczyć.

Mianowicie jest:

$$v + r = y + (r + \zeta)\cos(DOC),$$

stąd (porównać wz. 21):

$$\zeta \cos(DOC) = \frac{l^3}{24C} - \frac{x^3}{6C} + 2r \sin^2\left(\frac{DOC}{2}\right)$$



Rys. 93.

Podstawmy w tem równaniu $\cos(DOC) = 1$, a za sinus podstawmy arcus (tośmy obie strony nieco powiększyli), to otrzymamy:

$$\zeta = \frac{l^3 - 4x^3}{24C} + 2r\left(\frac{\text{arc } CD}{2}\right)^2 = \frac{l^3 - 4x^3}{24C} + \frac{(CD)^2}{2r}$$

*) Podług dzielka: Helmert, Uebergangscurven.

Za łuk CD możemy podstawić $x-\frac{l}{2}$, zaś $r=\frac{C}{l}$, zatem:

$$\zeta=\frac{l^3-4x^3}{24C}+\frac{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2\cdot l}{2C}=\frac{1}{24C}[4l^3-12l^2x+12lx^2-4x^3],$$

czyli:

$$\zeta=\frac{(l-x)^3}{6C}$$

A gdy za $l-x$ wstawimy łuk PD, to otrzymamy ostatecznie:

$$\zeta=\frac{(PD)^3}{6C} \qquad (35)$$

to znaczy, że rzędna krzywej mierzona na prostopadłej do łuku kołowego równa się długości łuku, mierzonej od punktu styczności koła z krzywą, a podniesionej do trzeciej potęgi, zaś dzielonej przez $6C$. Ten sam wynik otrzymalibyśmy dla rzędnej EE' po drugiej stronie punktu styczności. Zastosujemy powyższy wzór do punktu Q (rys. 92), położonego na wspólnym promieniu między punktami F i G, to jego rzędna tyczona od łuku DF, lub od łuku GF' otrzyma wartości:

$$FQ=\frac{(DF)^3}{6C}, \quad GQ=\frac{(EG)^3}{6C}$$

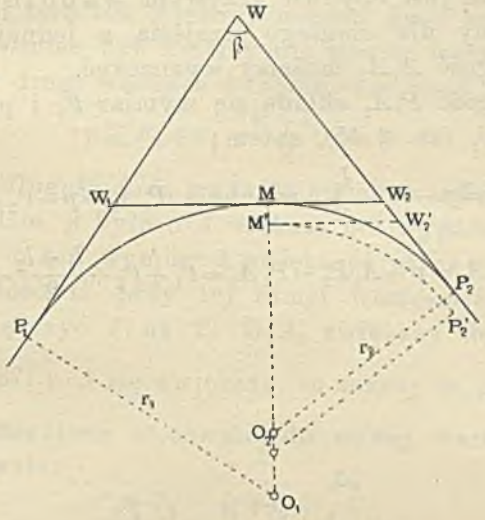
a ponieważ podług wz. (34) $DF=EG$, zatem:

$$FQ=GQ=\frac{c}{2} \qquad (36)$$

§ 53. Łuk koszowy z krzywemi przejściowemi. Rys. 94.

Obliczenie i ustalenie łuku koszowego na gruncie nastąpi podług § 25. Następnie wytyczymy łuk P_1M, w M uskutecznimy równoległe przesunięcie stycznej MW_2 o wymiar c (wz. 31*b*) do położenia $M'W'_2$, a od tej stycznej wytyczymy łuk $M'P'_2$. W celu wytyczenia krzywych przejściowych na początku i końcu łuku, to znaczy około punktów P_1 i P'_2 nie wolno zmieniać położenia łuków, zastosujemy zatem przesunięcie stycznych podług § 47. Krzywę przejściową wspólną do obydwu łuków około M wytyczymy za pomocą rzędnych od tych łuków, podług § 52, po wyznaczeniu kątów ε, φ_1 i φ_2 (§ 51) i długości łuków DF i EG (rys. 92).

Możnaby wprawdzie i w tym wypadku zastosować przesunięcie łuków podług § 45, jednakże tylko kosztem zawiłych obliczeń, których nie przeprowadzamy.



Rys. 94.

Zupełnie analogicznie postąpimy, jeżeli łuk koszowy składa się z większej ilości łuków.

§ 54. Zastosowanie krzywych przejściowych dla przypadku, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest krótka.

Rys. 95 i 96

W § 47*b* omówiono przypadek, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest przynajmniej tak długa, że dwie połówki obustronnych krzywych przejściowych, wraz z długościami t' na niej się zmieszczą. Jeżeli jednakże ta prosta P jest krótszą, to obustronne krzywe przejściowe się przetną, a wtedy należy je ciągle ze sobą połączyć*).

Niech przedstawia linia MP_1P_2N te dwa łuki z prostą $P_1P_2=p$. Pomyślmy sobie obydwa łuki podług § 45 należycie przesunięte i do nich wykreślone krzywe przejściowe A_1B_1, A_2B_2, które się przecinają. Obierzmy na krzywych takie punkty D_1 i D_2, w których promienie krzywizny przechodzą przez A_2 i A_1, to te promienie ϱ są równe, gdyż równają się

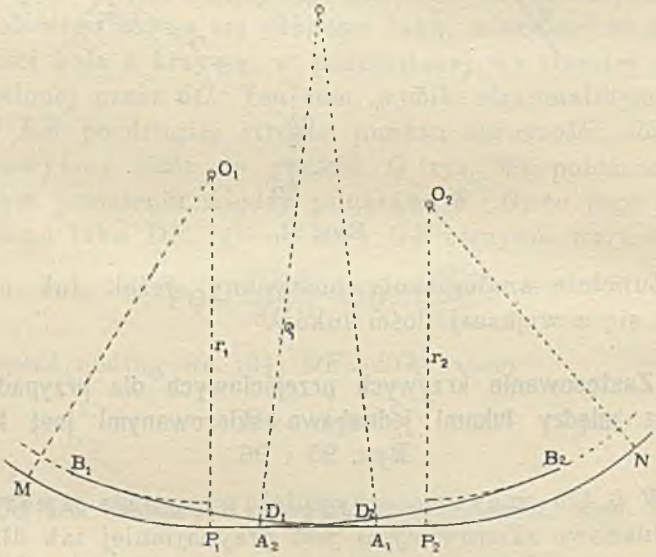
*) Ob. Helmert: Uebergangscurven.

$\frac{C}{A_1A_2}$. Łuk o promieniu ϱ styczny w D_1 do krzywej ma w środku długości A_1A_2 styczną poziomą, to samo łuk w D_1, zatem ten łuk jest obydwu krzywym wspólny, może być zatem włożony dla ciągłego przejścia z jednej krzywej do drugiej. Długość A_1A_2 możemy wyznaczyć.

Na długość P_1A_1 składa się wymiar t'_1 i połowa długości krzywej l_1 (ob. § 45), zatem:

$$A_1P_2=p-t'_1-\frac{l_1}{2},\quad \text{podobnie}\quad P_1A_2=p-t'_2-\frac{l_2}{2},$$

więc: $$A_1A_2=p-A_1P_2-P_1A_2=t'_1+t'_2+\frac{l_1+l_2}{2}-p \qquad (37)$$



Rys. 95.

Znając A_1A_2 obliczymy $\varrho=\frac{C}{A_1A_2}$, a odstęp łuku o promieniu ϱ od stycznej P_1P_2 wynosi $\frac{(A_1A_2)^3}{24C}$ (jako v dla $l=A_1A_2$).

Jeżeli promień $r_1>r_2$, to krzywa A_1B_1 jest krótsza niż A_2B_2. Otóż rozwiązanie będzie niemożliwe, skoro punkt D_1 wypadnie po za punkt B_1, coby wtedy nastąpiło, gdyby było $A_1A_2>l_1$. Zatąm musi nastąpić:

$$A_1A_2\leqq l_1,\ \text{czyli:}\ t'_1+t'_2+\frac{l_1+l_2}{2}-\leqq l_1,$$

a stąd: $$p \geqq t'_1 + t'_2 + \frac{l_2 - l_1}{2} \qquad (38)$$

Widzieliśmy w § 48, że dla należytego przeprowadzenia przechyłki toru łuk włożony między dwie krzywe przejściowe nie powinien być krótszy niż pewien wymiar c, zatem mamy jeszcze drugi warunek do spełnienia, że $A_1 A_2 \geqq c$, skąd:

$$p \leqq t'_1 + t'_2 + \frac{l_1 + l_2}{2} - c \qquad (39)$$

Jeżeliby długość $A_1 A_2$ wypadła mniejsza o Δ niż c (lub, co na jedno wyjdzie, p było o Δ większe niż wypada z wz. 39), to możemy ją o ten wymiar Δ zwiększyć przez zastosowanie większej wartości C' przy tej samej wartości k (ob. § 40), to znaczy zwiększyć i na i'. $A_1 A_2$ zwiększy się o Δ, jeżeli $\frac{l_1 + l_2}{2}$ w wz. (37) o Δ się zwiększy, to znaczy że, jeżeli l'_1 i l'_2 są długości zmienione stosownie do nowej wartości C, ma nastąpić równanie:

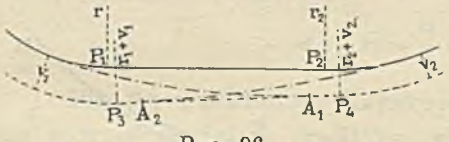
$$\frac{l'_1 + l'_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2} + \Delta.$$

Gdy $l_1 = ih_1$, $l_2 = ih_2$, to: $l'_1 = i'h_1$, $l'_2 = i'h_2$, zatem:

$$\frac{i'(h_1 + h_2)}{2} = \frac{i(h_1 + h_2)}{2} + \Delta, \text{ a stąd: } i' = i + \frac{2\Delta}{h_1 + h_2}, \text{ a } C' = C \cdot \frac{i'}{i}$$

Podług tej nowej wartości C', zaokrąglonej na najbliższą całkowitą w i ę k s z ą liczbę, rozwiąże się powyższe zadanie. (Ob. nr. 25 zbioru przykładów).

To zadanie można także rozwiązać pod warunkiem, że łuki mają pozostać na swojem miejscu. W tym celu pomyślmy sobie na rys. 96 z tych samych środków zakreślone łuki promieniami $r_1 + v_1$ i $r_2 + v_2$, następnie poprowadźmy do nich wspólną styczną (podług § 47) i wyznaczmy punkty styczności P_3 i P_4. Otrzymamy teraz nową prostę $P_3 P_4 = p$, a zadanie przeprowadzimy zupełnie tak jak dla rys. 95.



Rys. 96.

Z powyższego wynika, że należy przy projektowaniu u n i k a ć k r ó t k i c h p r o s t y c h między łukami jednakowo skierowanymi (Ob. także § 30).

§ 55. Zastosowanie krzywej przejściowej na istniejących torach.

Rys. 97.

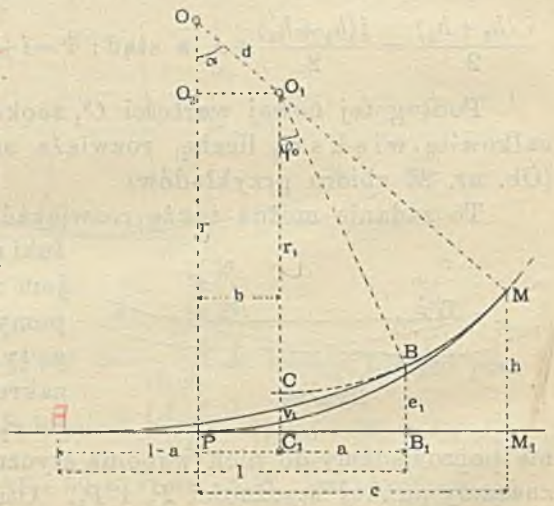
Włożenie krzywej przejściowej w istniejący tor powinno być tak uskutecznione, aby nie wymagało przekształcenia toru na znaczne długości. Przedewszystkiem więc pozostawimy łuk przeważnie na swojem miejscu.

Włożenie krzywej przejściowej można w dwojaki sposób uskutecznić.

a) Sposobem podanym w § 47 przez przesunięcie stycznej wspólnej dwom po sobie następującym łukom. Wtedy największe przesunięcie wpoprzek toru wynosi v, to znaczy na głównych kolejach najwyżej 0·22 *m*. Na takie przesunięcie zazwyczaj jeszcze szerokość podtorza wystarczy. W tym przypadku nastąpi jednakże przesunięcie toru na większe długości, zwłaszcza jeżeli prosta między łukami jest długa. Dla małych promieni podrzędnych kolei tego sposobu stosować nie można.

b) Na znacznie mniejszą długość zredukuje się przesunięcie toru, jeżeli się zastosuje następujący powszechniej używany sposób:

W dany łuk PM o promieniu r włożymy łuk MBC o mniejszym promieniu r_1 tak, aby odstęp punktu C od stycznej AM_1 wynosił $v_1 = \frac{C^2}{24 r_1^3}$. Różnicę promieni $r - r_1$ oznaczmy literą d. Oprócz v_1 obliczymy dla promienia r_1 długość $l = \frac{C}{r_1}$. Z warunku $CC_1 = v_1$ wynika położenie punktu styczności M, które znajdziemy, skoro wyznaczymy kąt $POM = \alpha$.



Rys. 97.

Z trójkąta OO_1O_2 wynika $b = \sqrt{OO_1^2 - OO_2^2}$, a gdy $OO_1 = d$, zaś: $OO_2 = r - r_1 - v_1 = d - v_1$, to:

$$b=\sqrt{d^2-(d-v_1)^2}=\sqrt{v_1(2d-v_1)} \qquad (40)$$

Rzędna $h=r(1-\cos\alpha)$, ale równa się także $r_1(1-\cos\alpha)+v_1$, więc:

$$1-\cos\alpha=\frac{v_1}{d}, \quad \cos\alpha=1-\frac{v_1}{d} \qquad (41)$$

Następnie z trójkąta OO_1O_2 wynika:

$$\sin\alpha=\frac{b}{d} \qquad (42)$$

a gdy $PM_1=c=r\sin\alpha$, to:

$$c=\frac{rb}{d} \qquad (43)$$

Nareszcie gdy $h=r(1-\cos\alpha)$, to podług (41):

$$h=\frac{rv_1}{d} \qquad (44)$$

Ilościami c i h jest wyznaczony punkt M, zaś początek krzywej przejściowej dany jest przez $AP=l-a-b$. Przesunięcie toru redukuje się na długość AM, a w bok o długość nie wiele większą niż $\frac{v_1}{2}$.

Czem mniejszy obierzemy promień r_1, tem większa długość AB krzywej przejściowej, tem bardziej zbliżają się punkty B i M, aż dla pewnej wartości r_1 spadną razem. Wtedy jest $e_1=h=\frac{rv_1}{d}$, a gdy $e_1=4v_1$ (ob. wz. 21), to:

$$4v_1=\frac{rv_1}{d},$$

a stąd graniczna wartość:

$$r_1=\frac{3}{4}r \qquad (45)$$

Dla tej wartości r_1 uzyskuje się krótki układ, mimo to nie stosuje się jej w praktyce, gdyż przy tak wielkiej różnicy promieni, wynoszącej $\frac{r}{4}$, następuje w punkcie M zanadto raptowny skok w przechyłce toru. Stosuje się więc znacznie mniejszą różnicę d.

Przyjmijmy ogólnie $d=\frac{r}{n}$, a więc $r_1=\frac{n-1}{n}r$.

Gdy tę wartość wprowadzimy do wzoru: $v_1=\frac{C^2}{24r_1^3}$, to:

$$v_1=\frac{n^3}{24(n-1)^3}\cdot\frac{C^2}{r^3}=\gamma\frac{C^2}{r^3},\quad \text{jeżeli:}\quad \gamma=\frac{n^3}{24(n-1)^3},$$

lub też:
$$\frac{v_1}{r}=\gamma\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 \qquad (46)$$

Wzór (40) przejdzie w następujący:

$$b=\sqrt{v_1(2d-v_1)}=\sqrt{\gamma\frac{C^2}{r^3}\left(\frac{2r}{n}-\gamma\frac{C^2}{r^3}\right)}=\frac{C}{r}\sqrt{\frac{\gamma}{n}}\sqrt{2-n\gamma\left(\frac{C}{r^2}\right)^2}$$

$$\frac{b}{r}=\frac{C}{r^2}\sqrt{\frac{\gamma}{n}}\sqrt{2-n\gamma\left(\frac{C}{r^2}\right)^2} \qquad (47)$$

Dla obranej wartości n jest $\frac{C}{r^2}$ zmienną ilością. Nazwijmy ją z, to wzory (46) i (47) przejdą w następujące:

$$\frac{v_1}{r}=\gamma z^2,\quad \frac{b}{r}=z\sqrt{\frac{\gamma}{n}}\sqrt{2-n\gamma z^2} \qquad (48)$$

Ilość $\frac{b}{r}$ osiągnie swoją graniczną wartość, gdy: $\sqrt{2-n\gamma z^2}=0$, to znaczy dla $z=\sqrt{\frac{2}{n\gamma}}$, a gdy $z=\frac{C}{r^2}$, to tę graniczną wartość osiągnie się dla:

$$r=\sqrt{C\sqrt{\frac{n\gamma}{2}}} \qquad (49)$$

Dla mniejszych wartości r trzeba C lub n stosownie zmniejszyć.

Skoro v_1 i b obliczono, wtedy:

$$\sin\alpha=n\left(\frac{b}{r}\right),\quad c=nb,\quad h=nv_1\text{*}). \qquad (50)$$

§ 56. Zastosowanie wzorów § 55 b) dla $d=\frac{r}{20}$.

W nowszych czasach weszło w użycie stosowanie $n=20$, zatem $d=\frac{r}{20}$, $r_1=\frac{19}{20}r$.

Dla tych wartości jest:

$$\gamma=\frac{20^3}{24\,.\,19^3}=0{\cdot}0485979492,\quad \frac{b}{r}=z\sqrt{\frac{\gamma}{10}}\sqrt{1-10\gamma z^2}, \qquad (48a)$$

*) Ob. nr. 26 zbioru przykładów.

$$\sin\alpha = 20\left(\frac{b}{r}\right), \quad c = 20b, \quad h = 20v_1$$

Graniczną wartość wzoru (49) osiągnie się dla:

$$r = \sqrt{C\sqrt{10\gamma}}$$

Dla różnych wartości C obliczono z tego wzoru następującą tabelę:

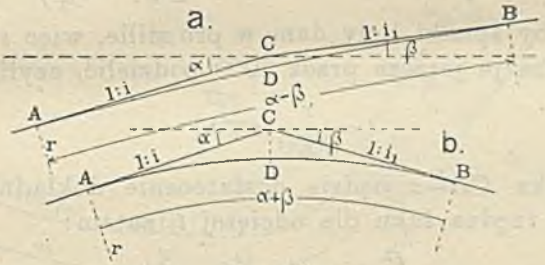
$C=$	45000	36000	12000	6000	4500	3000	1500	750
$r=$	177·1	158·4	91·5	64·7	56·0	45·7	32·4	22·9

Ponieważ w praktyce stosowane promienie są większe, niż te, które wykazuje tabela, zatem wzór (48a) ma nieograniczone zastosowanie dla $n=20$.

Podług powyższych wzorów dla $n=20$ obliczono tabelę IX*).

§ 57. Wyokrąglenie załomów spadków. Rys. 98 a i b.

Przy zmianie spadku niwelety powstaje załom, który podług istniejących przepisów powinien być wyokrąglony



Rys. 98.

łukiem kołowym. Na drogach uskutecznia się to wyokrąglenie podług oka łukiem o niewielkim promieniu, lecz na kolejach żelaznych stosuje się promienie bardzo wielkie**), a w celu dokładnego ułożenia nawierzchni należy wyznaczyć

*) P. Leber w swojem dziele p. t. „Raccordements" proponuje dla istniejących torów krzywę przejściową złożoną, któraby osiągnąwszy pewien promień krzywizny $r_1 < r$, potem stale ten promień aż do wartości r zwiększała. Wtedy powstaną jednakże w przechyłce toru odwrotne spadki, których wadliwość wykazano w końcowej uwadze § 48.

**) Podług norm związku niemieckich zarządów kolejowych ma ten promień wynosić conajmniej 5000 m na głównych, a 1000 m na podrzędnych kolejach żelaznych.

długość, a więc styczną $AC=CB=t$ i strzałkę $CD=z$ łuku zaokrąglenia.

Jeżeli na rys. *a* lub *b* w C następuje zmiana spadku z $1:i=\text{tang}\,\alpha$ na $1:i_1=\text{tang}\,\beta$, to podług § 7 jest:

$$t=r\,\text{tang}\,\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

W tym wzorze odnosi się znak górny do rys. *a*, t. j. do przypadku, gdy spadki po sobie następujące są jednakowo skierowane, zaś znak dolny do rys. *b*, gdy spadki są odwrotne.

Ponieważ kąty α i β są małe, wprowadzimy w tym wzorze pewne uproszczenia. Naprzód napiszemy:

$$t=\frac{1}{2}\,r\,\text{tang}\,(\alpha\mp\beta)=\frac{r}{2}\cdot\frac{\text{tang}\,\alpha\mp\text{tang}\,\beta}{1\pm\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$$

Następnie opuścimy w mianowniku iloczyn tangensów wobec jedności i otrzymamy prosty wzór:

$$t=\frac{r}{2}\,(\text{tang}\,\alpha\mp\text{tang}\,\beta)=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{i}\mp\frac{1}{i_1}\right)$$

Jeżeliby spadki były dane w pro mille, więc $s\,{}^0/_{00}$ i $s_1\,{}^0/_{00}$, wtedy trzeba je jeszcze przez 1000 podzielić, czyli:

$$t=\frac{r}{2000}\,(s\mp s_1)$$

Strzałka $CD=z$ będzie dostatecznie dokładnie wyznaczona jako rzędna łuku dla odciętej t, zatem:

$$z=\frac{t^2}{2r}\ \text{(ob. wz. 3 w § 10).}$$

Np. niech w zastosowaniu do rys. *a* dla głównej kolei będzie $s=20$, $s_1=12\,{}^0/_{00}$, $r=5000\ m$, to:

$$t=2{\cdot}5\,(20-12)=20\ m,\quad z=\frac{20^2}{10000}=0{\cdot}04\ m$$

A w zastosowaniu do rys. *b* podrzędnej kolei niech będzie $s=15$, $s_1=12\,{}^0/_{00}$, $r=1000\ m$, to:

$$t=0{\cdot}5\,(15+12)=13{\cdot}5\ m,\quad z=\frac{(13{\cdot}5)^2}{2000}=0{\cdot}091\ m$$

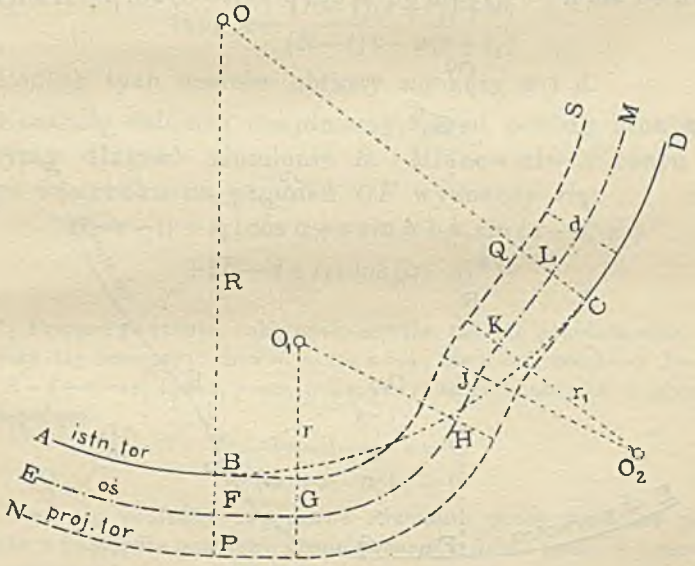
Dla promienia $r=1000$ są ilości t i z zestawione w tabeli X.

§ 58. Zagadnienie.

Zmiana osi przy projektowaniu drugiego toru.

Jeżeli do istniejącego, powiedzmy lewego toru, ma się zaprojektować drugi, prawy tor, to mianowicie w terenie górzystym zachodzi nieraz potrzeba zmiany osi toru w ten sposób, że istniejący tor staje się prawym, a zaprojektować należy lewy tor. Następuje więc przesunięcie osi kolei dwutorowej o odstęp torów *d*, a połączenie pierwotnej osi z przesuniętą nastąpi za pomocą prostych i łuków.

I. Przypadek. Rys. 99 i 100. Rozpatrzymy naprzód najogólniejszy przypadek, gdy tor istniejący jest w łuku, a po-



Rys. 99.

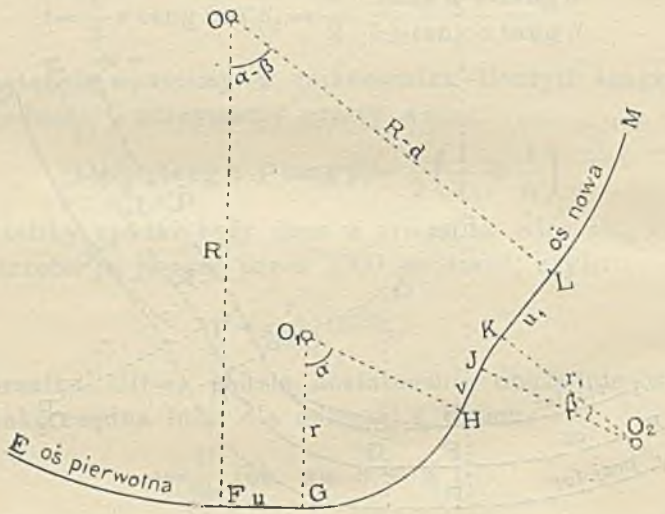
łączenie osi pierwotnej z przesuniętą nastąpi za pomocą odwrotnych łuków, w celu osiągnięcia najkrótszego układu. Niech na rys. 99 łuk *ABCD* przedstawia istniejący lewy tor, a *NP* tor projektowany, tak że łuk *EF* jest osią kolei dwutorowej, to w dalszym ciągu staje się istniejący tor *CD* prawym, zaś *QS* jest projektowanym lewym torem, gdy *LM* jest przesuniętą osią. Pierwotna oś *EF* i przesunięta *LM* są połączone za pomocą prostej *FG*, łuku *GH*, prostej *HI*, łuku *IK* i prostej *KL*. Znaczenie prostych *FG*, *HI*, *KL*, jakoteż ich długości są rozpatrywane w §§ 47 i 54.

Rys. 100 przedstawia linię osi, wyjętą z rys. 99.

W celu możliwego skrócenia układu, należy przyjąć długości u, v, u_1 prostych i promienia r dopuszczalnie najmniejsze. Dla promienia r_1 nie można przyjąć małej wartości, gdyż wypadnie kąt β mniejszy, niż podług § 48 jest dopuszczalny, dla pomieszczenia krzywych przejściowych.

Do wyznaczenia pozostają kąty α i β. Potrzebne dwa równania uzyskamy z rzutu zamkniętego wieloboku *OFGHIKLO* na dwa kierunki. Najkorzystniej wypadną równania, jeżeli jako osie rzutów obierze się kierunek *HI* i do niego prostopadły. Rzut na kierunek *HI*:

$$u\cos\alpha+r\sin\alpha+v+r_1\sin\beta+u_1\cos\beta+(R-d)\sin\beta-R\sin\alpha=0.$$



Rys. 100.

Rzut na prostopadłą do *HI*:

$$u\sin\alpha+r(1-\cos\alpha)+u_1\sin\beta+r_1(1-\cos\beta)+$$
$$+R\cos\alpha-(R-d)\cos\beta=0.$$

Po należytem uporządkowaniu otrzymuje się równania:

$$(R-r)\sin\alpha-u\cos\alpha-(R-d+r_1)\sin\beta-u_1\cos\beta-v=0, \quad (1)$$

$$u\sin\alpha+(R-r)\cos\alpha+u_1\sin\beta-(R-d+r_1)\cos\beta+(r+r_1)=0. \quad (2)$$

Po wyrugowaniu z tych wzorów raz α, drugi raz β, otrzyma się dla wyznaczenia tych kątów następujące równania *):

$$\sin(\varphi-\beta)=\frac{(R-d+r_1)^2-(R-r)^2-u^2+u_1^2+(r+r_1)^2+v^2}{2[v(R-d+r_1)+u_1(r+r_1)]}\cos\varphi \quad (3)$$

Kąt φ jest określony wzorem:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{(R-d+r_1)(r+r_1)-u_1v}{v(R-d+r_1)+u_1(r+r_1)} \quad (4)$$

$$\sin(\psi-\alpha)=\frac{(R-d+r_1)^2-(R-r)^2-u^2+u_1^2-(r+r_1)^2-v^2}{2[(R-r)v-u(r+r_1)]}\cos\psi \quad (5)$$

gdy kąt ψ jest określony wzorem:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{(R-r)(r+r_1)+uv}{(R-r)v-u(r+r_1)} \quad (6)$$

Podług tych wzorów obliczy się kąty α i β.

Kontrolę obliczeń znajdziemy, jeżeli podług tych kątów obliczymy długość promienia R. Mianowicie z rzutu tego samego wieloboku na promień OF wyznaczy się:

$$R=r-(r+r_1)\cos\alpha+v\sin\alpha+u_1\sin(\alpha-\beta)+$$
$$+(R-d+r_1)\cos(\alpha-\beta) \quad **) \quad (7)$$

---

*) Przeprowadzenie, cokolwiek zawiłe, tak się przedstawia:

Gdy się oznaczy: $\sin\alpha=x$, $\cos\alpha=y$, $\sin\beta=\xi$, $\cos\beta=\eta$ $R-r=a$, $u=b$, $R-d+r_1=c$, $u_1=e$, $v=v$, $(r+r_1)=f$, to równania (1) i (2) przejdą w następujące:

$$ax-by-c\xi-e\eta-v=0,$$
$$bx+ay+e\xi-c\eta+f=0.$$

Jeżeli się pomnoży raz górne równanie przez b, dolne przez a i odejmie, a następnie pomnoży górne przez a, a dolne przez b i zesumuje, to się otrzyma dwa nowe równania:

$$x(a^2+b^2)=\xi(ac-be)+\eta(ae+bc)-bf+av,$$
$$y(a^2+b^2)=-\xi(ae+bc)+\eta(ac-be)-af-bv.$$

Po obustronnem kwadrowaniu i zesumowaniu, zważywszy, że $x^2+y^2=1$, otrzyma się ostatecznie równanie:

$$\eta(cf-ev)-\xi(ef+vc)=\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2+e^2+f^2+v^2).$$

Jeżeli w tem równaniu podstawi się $\operatorname{tang}\varphi=\frac{cf-ev}{ef+vc}$, to się otrzyma:

$$\sin(\varphi-\beta)=\frac{c^2-a^2-b^2+e^2+f^2+v^2}{2(ef+vc)}\cos\varphi,$$

z którego kąt β się wyznaczy. Po wstawieniu napowrót wartości otrzyma się wzory 3 i 4. W podobny sposób doszło się do wzorów 5 i 6.

**) Ob. nr. 27 zbioru przykładów.

To zagadnienie z zastosowaniem odwrotnych łuków jest możebne pod warunkiem, że $\beta \gtreqless 0$, to znaczy, gdy $\sin\varphi$ jest większe niż prawa strona wzoru (3). Jeżeli wtedy obie strony podzielimy przez $\cos\varphi$, otrzymamy $\operatorname{tang}\varphi$, więc powyższy warunek wyrazi się także wzorem:

$$\frac{(R-d+r_1)(r+r_1)-u_1 v}{v(R-d+r_1)+u_1(r+r_1)} \gtreqless \frac{(R-d+r_1)^2-(R-r)^2-u^2+u^2{}_1+(r+r_1)^2+v^2}{2[(R-d+r_1)v+u_1(r+r_1)]},$$

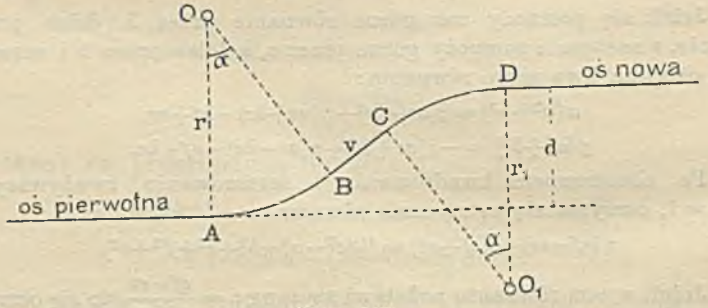
który po uproszczeniu wyznaczy warunek, że:

$$2d(R-r)-d^2+u^2-(u_1+v)^2 \gtreqless 0 \qquad (8)$$

Ten warunek zajdzie zawsze, jeżeli różnica $R-r$ jest wielka i wtedy zastosowanie łuków odwrotnych powoduje skrócenie układu tem większe, im większa jest ta różnica. Jednakże trasa o łukach odwrotnych jest niełądna i dla ruchu niekorzystna. Dlatego jeżeli skrócenie układu nie jest znaczne, albo też na takiem skróceniu nie zależy, uskuteczni się przesunięcie osi za pomocą jednego łuku podług rys. 103. To rozwiązanie nie ma zastosowania do przypadku, jeżeliby istniejący tor na rys. 99 był prawnym, a trzebaby zaprojektować lewy tor. (Ob. przyp. IV*b*).

II. przypadek. Tory są proste. Rys. 101.

Jestto szczególny przypadek poprzedniego zagadnienia, gdy $R=\infty$. Kąt α jest wtedy równy kątowi β, a wyznaczy się albo podług wzorów (5) i (6), jeżeli się w nie wstawi



Rys. 101.

$R=\infty$ i $u=u_1=0$, albo z rzutu linii $ABCD$ na kierunek d:

$$d=r(1-\cos\alpha)+v\sin\alpha+r_1(1-\cos\alpha),$$

a stąd: $$(r+r_1)\cos\alpha-v\sin\alpha=r+r_1-d$$

Podstawmy: $\operatorname{tang}\varphi=\frac{r+r_1}{v}$, a otrzymamy:

$$\sin(\varphi-\alpha)=\frac{r+r_1-d}{v}\cos\varphi \qquad (9)$$

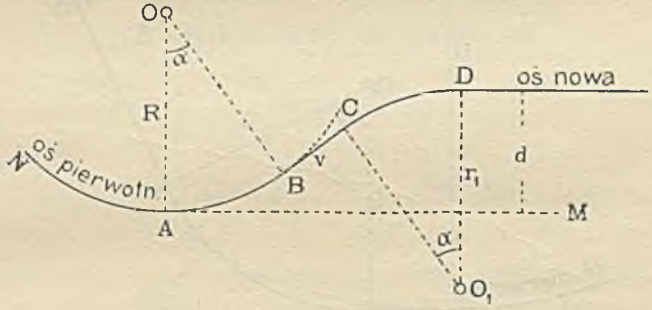
wzór do obliczenia kąta α.

W celu otrzymania krótkiego układu, obierze się v dopuszczalnie najmniejsze, natomiast r i r_1 nie zbyt małe, aby zadosyć uczynić warunkowi § 48.

Jako kontrolę obliczymy d z pierwszego równania, które w tym celu tak napiszemy:

$$d=2(r+r_1)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+v\sin\alpha \qquad (10^*)$$

III. przypadek. *a)* Tor istniejący lewy przechodzi z łuku w prostę. Rys. 102.



Rys. 102.

Łuk NA, prosta AM. Wtedy dany łuk o promieniu R przedłuży się (AB), zresztą rozwiąże się zagadnienie podług poprzedniego, gdy za r wstawi się R.

b) Jeżeli istniejący tor jest prawym torem, to jest to przypadek identyczny z przypadkiem V *a)*.

IV. przypadek. *a)* Tor istniejący lewy jest w łuku. Rys. 103 *a*.

Przypadek ten sam, co pod I., lecz rozwiązanie ma być uskutecznione za pomocą tylko jednego łuku. Obierze się małe długości dla u i r, a wyznaczy się kąt α i długość v stycznej do łuku przesuniętej osi. To rozwiązanie jest zawsze możliwe, tylko dla małej długości r może wypaść kąt α mniejszy, niż podług § 48 jest dopuszczalny.

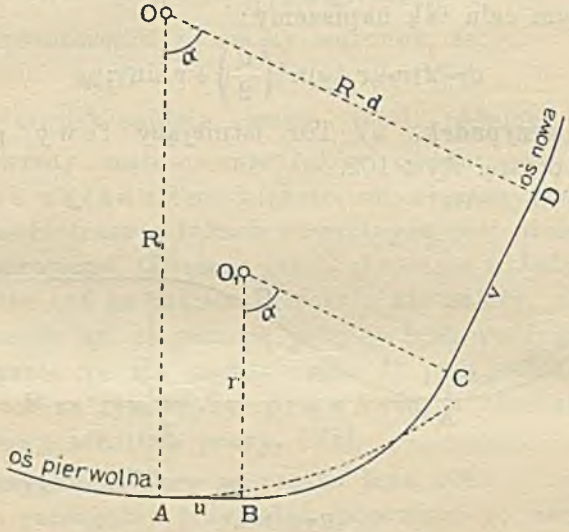
*) Ob. nr. 28 w zbiorze przykładów.

Równania pod I. podane możemy wprost zastosować, gdy podstawimy $r_1=0$, $\beta=0$ i $u_1=0$. Równania (1) i (2) przejdą w następujące:

$$(R-r)\sin\alpha-u\cos\alpha-v=0 \qquad (11)$$

$$(R-r)\cos\alpha+u\sin\alpha=R-r-d \qquad (12)$$

Gdy się podstawi w wzorze (12) kąt pomocniczy φ, którego $\operatorname{tang}\varphi=\frac{R-r}{u}$, to się otrzyma wzór:



Rys. 103 *a*.

$$\sin(\varphi+\alpha)=\frac{R-r-d}{u}\cos\varphi, \qquad (13)$$

z którego wyznaczy się kąt α. Długość v obliczy się z wzoru (11). Jeżeli równanie (8) zrównamy ze zerem, co nastąpi właśnie dla $\beta=0$, to możemy z tego wzoru wyznaczyć:

$$v=\pm\sqrt{2d(R-r)+u^2-d^2}, \qquad (14)$$

które obliczy się dla kontroli rachunku.

Jeżeli się wykona rzut wieloboku *OABCDO* na kierunek *OA*, to się otrzyma równanie:

$$R=r+(R-d-r)\cos\alpha+v\sin\alpha$$

Jeżeli od tego równania odejmie się równanie (12), otrzyma się:

$$(v-u)\sin\alpha-d(1+\cos\alpha)=0,$$

lub: $$(v-u)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-d\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

a stąd: $$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{d}{v-u} \qquad (15)$$

Po wyznaczeniu ilości v z poprzednich wzorów, można z wzoru (15) dla kontroli obliczyć kąt α*).

b) Istniejący prawy tor jest w łuku. Rys. 103 *b*.

Z rzutów wieloboku *ABCDO* na kierunki promieni *OA* i *OD* uzyska się dwa równania:

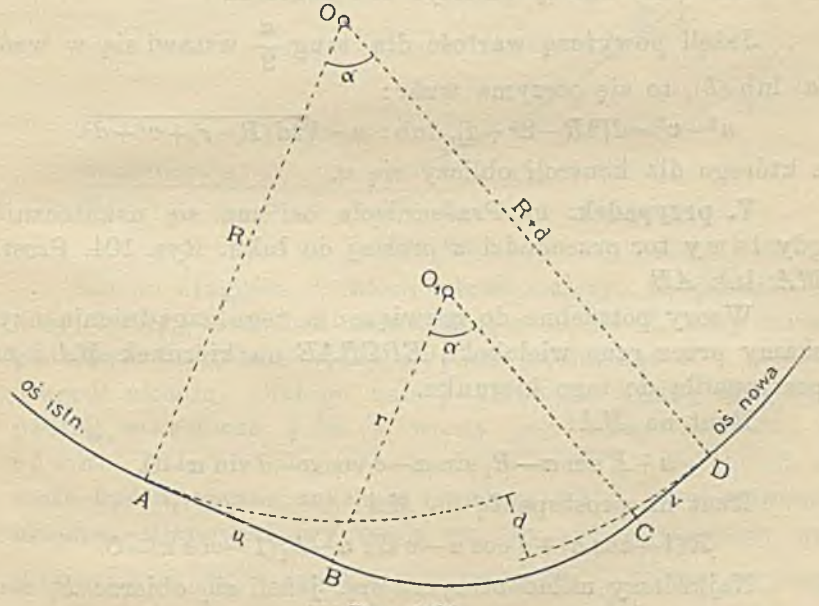
$$R=r(1-\cos\alpha)+v\sin\alpha+(R+d)\cos\alpha,$$

$$R+d=r(1-\cos\alpha)+u\sin\alpha+R\cos\alpha$$

Napiszmy je w tej formie:

$$(R-r)(1-\cos\alpha)-d\cos\alpha-v\sin\alpha=0, \qquad (a)$$

$$(R-r)(1-\cos\alpha)+d-u\sin\alpha=0 \qquad (b)$$



Rys. 103 *b*.

Z tych równań wynika, że u będzie zawsze większe niż v. Dlatego obierzemy v i r w wartości dopuszczalnie najmniejszej, a z powyższych równań wyznaczymy u i α.

*) Ob. nr. 29 w zbiorze przykładów.

Jeżeli się napisze równanie (*a*) w tej formie:

$$(R+d-r)\cos\alpha+v\sin\alpha-(R-r)=0$$

i podstawi: $\operatorname{tang}\varphi=\frac{R+d-r}{v}$, to się otrzyma:

$$\sin(\varphi+\alpha)=\frac{R-r}{v}\cos\varphi$$

wzór dla wyznaczenia kąta α. Z równania (*b*) wyznaczy się u.

Jeżeli się odejmie równanie (*a*) od (*b*), to się otrzyma równanie:

$$d(1+\cos\alpha)-(u-v)\sin\alpha=0,$$

a gdy: $1+\cos\alpha=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, to się wyznaczy:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{d}{u-v}$$

Ten wzór należy obliczyć dla kontroli.

Jeżeli powyższą wartość dla $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ wstawi się w wzór (*a*) lub (*b*), to się otrzyma wzór:

$$u^2-v^2=d[2R-2r+d],\text{ lub: }u=\sqrt{2d(R-r)+v^2+d^2},$$

z którego dla kontroli obliczy się u.

V. przypadek. *a)* Przesunięcie osi ma się uskutecznić, gdy lewy tor przechodzi z prostej do łuku. Rys. 104. Prosta *MA*, łuk *AB*.

Wzory potrzebne do rozwiązania tego zagadnienia uzyskamy przez rzut wieloboku *EDCBAE* na kierunek *MA* i na prostopadłą do tego kierunku.

Rzut na *MA*:

$$u+R\sin\alpha-R_1\sin\alpha-v\cos\alpha-d\sin\alpha=0.$$

Rzut na prostopadłą do *MA*:

$$R(1-\cos\alpha)+d\cos\alpha-v\sin\alpha-R_1(1-\cos\alpha)=0.$$

Najkrótszy układ otrzyma się, jeżeli się obierze R_1 i v, a wyznaczy z pierwszego równania:

$$u=(R_1-R+d)\sin\alpha+v\cos\alpha, \qquad (16)$$

a z drugiego równania kąt α. To równanie w tej formie:

$$(R_1-R+d)\cos\alpha-v\sin\alpha=R_1-R,$$

wyznaczy, gdy $\operatorname{tang}\varphi=\frac{R_1-R+d}{v}$, wzór:

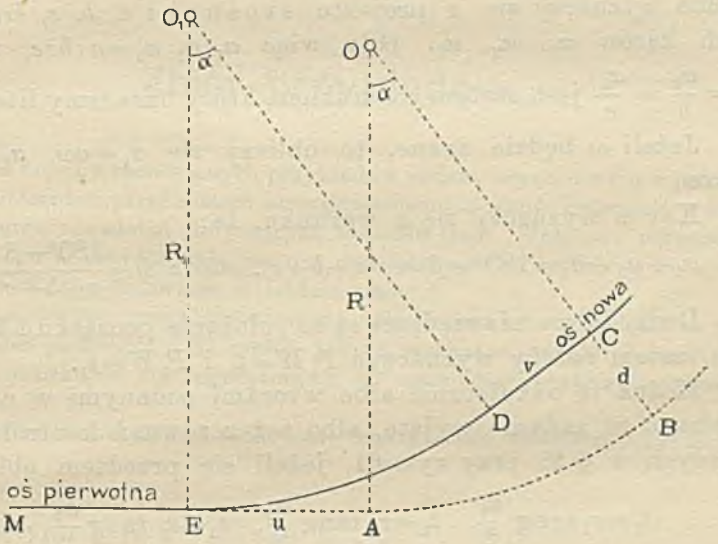
$$\sin(\varphi-\alpha)=\frac{R_1-R}{v}\cos\varphi \qquad (17)$$

dla obliczenia kąta α.

Wzór (14) ma i w tym przypadku zastosowanie. Jeżeli z tego wzoru wyznaczymy:

$$u=\pm\sqrt{2d(R_1-R)+v^2+d^2} \qquad (18)$$

to się obliczy u dla kontroli rachunku.



Rys. 104.

Co do długości v, którą obrać należy, to jeżeliby się przyjęło R_1 równe, lub mało różniące się od R, toby można podstawić $v=0$, lecz wtedy wypada wielki kąt α i znaczna długość układu. Dlatego należy obrać nie wielką długość v, podług wskazówek § 54, a wtedy jest korzystne obrać R_1 równe, lub trochę większe niż R*). Natomiast nie może być R_1 obrane znacznie mniejsze niż R, bo u wypadnie urojone. Mianowicie wynika z wz. (18), że u otrzyma wartość rzeczywistą, jeżeli będzie: $R-R_1 \leqq \frac{v^2+d^2}{2d}$. Np. dla $v=30$, $d=4$, ma być $R-R_1 \leqq \frac{916}{8} \leqq 114{,}5\,m$.

b) Istniejący prawy tor przechodzi z prostej w łuk.

Jestto przypadek przedstawiony na rys. 103 *b*, jeżeli łuk przed punktem A przejdzie w prostą. Rozwiązanie zagadnienia podług IV *b*.

*) Ob. nr. 30 zbioru przykładów.

§ 59. Zadanie o łukach koszowych z §§ 25 i 29 można inaczej postawić i uzyskać prostsze rozwiązanie*).

Do § 29. Rys. 60 Między kierunkami głównych stycznych, przeniesionych z projektu na grunt, zmierzy się kąt β. Dla tego kąta, który od kąta β projektu będzie się cośkolwiek różnić, wrysuje się promieniami r_1, r_2 i r_3 wyjętymi z projektu, łuk koszowy, możliwie zgodny z projektem, następnie wyznaczy się z projektu s t o s u n k i a, b, c, środkowych kątów α_1, α_2, α_3. Gdy więc $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = a : b : c$, to: $\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{b} = \frac{\alpha_3}{c}$ jest stałym stosunkiem, który oznaczmy literą ω.

Jeżeli ω będzie znane, to obliczy się $\alpha_1 = a\omega$, $\alpha_2 = b\omega$, $\alpha_3 = c\omega$.

Kąt ω wyznaczy się z warunku, że:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0 - \beta = \omega(a+b+c)$, stąd: $\omega = \frac{180^0 - \beta}{a+b+c}$

Dwie dalsze niewiadome są to położenia początku i końca łuku, zatem należy wyznaczyć $P_1 W = t_1$ i $P_2 W = t_2$.

Można to uskutecznić albo wzorami podanymi w dziele, z którego to zadanie wyjęto, albo też z równań kontrolnych, podanych w § 29 przy rys. 61, jeżeli się przedtem obliczy:

$$t_3 = r_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2}, \quad t_4 = r_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2}, \quad t_5 = r_3 \operatorname{tang} \frac{\alpha_3}{2}$$

Można też wykonać rzut wieloboku na kierunki skrajnych promieni $P_1 O_2$ i $P_2 O_3$:

$$r_3 + d_2 \cos \alpha_3 - d_1 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - r_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ - t_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

$$r_1 + d_1 \cos \alpha_1 - d_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - r_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ - t_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0.$$

Z tych równań można t_1 i t_2 dla kontroli obliczyć.

Do § 25. Rys. 56. Podobne rozwiązanie. Tu jest: $\omega = \frac{180^0 - \beta}{a+b}$, $\alpha_1 = a\omega$, $\alpha_2 = b\omega$, zaś z równań (3) i (4) obliczy się t_1 i t_2.

Dla kontroli można zużytkować np. wzór na $\operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2}$, pod *b)* podany.

*) Z Handb. d. Jng. Wiss. Der Flussbau, 1907, str. 99.

Zbiór przykładów.

Na szeregu rachowanych przykładów podano uczącemu się, a jeszcze niedostatecznie z przedmiotem obznajomionemu, możność ćwiczenia w rozwiązywaniu zagadnień dotyczących tyczenia tras. Wątpliwe przypadki przerobione w przykładach, posłużą do głębszego wniknięcia w niektóre zagadnienia, przedstawione w tekście części I.

Rachowanie przykładów można uskutecznić albo w całości za pomocą tabel podanych w II części, jak to wskazano na str. 7 części II, albotež posiłkując się logarytmami, co zazwyczaj szybciej prowadzi do celu.

Następne przykłady rachowano logarytmami siedmiocyfrowymi.

Przykład 1. Do § 2 punkt 3. Rys. 3.

Zmierzono: $a = 180\ m$, $b = 230\ m$, $c = 80\ m$, $\alpha = 76^0\,24'\,10''$, $\beta = 94^0\,17'\,40''$. Zatem: $\alpha - \beta = -17^0\,53'\,30''$, $\sin(\alpha-\beta)$ jest ujemne.

$$\lg a = 2{\cdot}2552725 \qquad \lg \sin \alpha = 9{\cdot}9876539$$
$$\lg b = 2{\cdot}3617278 \qquad \lg \sin \beta = 9{\cdot}9987790$$
$$\lg c = 1{\cdot}9030900 \qquad \lg \sin(\alpha-\beta) = 9{\cdot}4874469$$

$$\begin{array}{rr} \lg c = & 1{\cdot}9030900 \\ \lg \sin \alpha = & 9{\cdot}9876539-10 \\ \hline & 1{\cdot}8907439 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \lg c = & 1{\cdot}9030900 \\ \lg \sin \beta = & 9{\cdot}9987790-10 \\ \hline & 1{\cdot}9018690 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \lg a = & 2{\cdot}2552725 \\ \lg \sin \alpha = & 9{\cdot}9876539-10 \\ \hline & 2{\cdot}2429264 \end{array}$$

$$c \,.\, \sin\alpha = 77{\cdot}7578 \qquad c \,.\, \sin\beta = 79{\cdot}7754 \qquad a \,.\, \sin\alpha = 174{\cdot}9549$$

$$\begin{array}{rr} \lg a = & 2{\cdot}2552725 \\ \lg \sin(\alpha-\beta) = & 9{\cdot}4874469-10 \\ \hline & 1{\cdot}7427194 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \lg b = & 2{\cdot}3617278 \\ \lg \sin \beta = & 9\ 9987790-10 \\ \hline & 2{\cdot}3605068 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \lg b = & 2{\cdot}3617278 \\ \lg \sin(\alpha-\beta) = & 9{\cdot}4874469-10 \\ \hline & 1{\cdot}8491747 \end{array}$$

$$a \,.\, \sin(\alpha-\beta) = 55{\cdot}2993 \qquad b \,.\, \sin\beta = 229{\cdot}3543 \qquad b \,.\, \sin(\alpha-\beta) = 70{\cdot}6602$$

$$\left.\begin{array}{rr} c \,.\, \sin\alpha = & 77{\cdot}7578 \\ -b \,.\, \sin(\alpha-\beta) = & +70{\cdot}6602 \end{array}\right\} 148{\cdot}4180, \text{ licznik dla } x;\ \log \text{liczn.} = 2{\cdot}1714866$$

$$\left.\begin{array}{r} c\,.\,\sin\beta = \quad 79{\cdot}7754 \\ a\,.\,\sin(\alpha-\beta) = -55{\cdot}2993 \end{array}\right\} 24{\cdot}4761, \text{ licznik dla } y;\ \log \text{liczn.} = 1{\cdot}3887422$$

$$\left.\begin{array}{r} a\,.\,\sin\alpha = 174{\cdot}9549 \\ b\,.\,\sin\beta = 229{\cdot}3543 \end{array}\right\} 404{\cdot}3092, \text{ mianownik; } \log \text{mian.} = 2\ 6067136$$

$\lg a = 2{\cdot}2552725$	$\lg b = 2{\cdot}3617278$	Kontrola: $x+y=c.$
$\lg \text{liczn.} = 2{\cdot}1714866$	$\lg \text{liczn.} = 1{\cdot}3887422$	$x = 66{\cdot}076$
$4{\cdot}4267591$	$3{\cdot}7504700$	$y = 13{\cdot}9238$
$\lg \text{mian.} = 2{\cdot}6067136$	$\lg \text{mian.} = 2{\cdot}6067136$	$x+y = 80{\cdot}0001$
$\lg x = 1{\cdot}8200455$	$\lg y = 1{\cdot}1437564$	zgodnie ze zmierzoną
$x = 66{\cdot}0763$	$y = 13{\cdot}9238$	długością c.

Przykład 2. Do § 2 punkt 3. Rys. 4.

Zmierzono: $\Delta = 120\ m$, $\alpha = 83^0\,43'\,30''$, $\beta = 47^0\,14'\,10''$, $\gamma = 56^0\,27'\,20''$, $\delta = 64^0\,31'\,20''$. Zatem $\alpha+\beta = 130^0\,57'\,40''$, $\gamma+\delta = 120^0\,58'\,40''$.
$\sin(\alpha+\beta) = \sin 49^0\,2'\,20''$, $\sin(\gamma+\delta) = \sin 59^0\,1'\,20''$.

$\lg \sin\delta = 9{\cdot}9555686-10$	$\lg \sin\alpha = 9{\cdot}9973902$
$\lg \sin\gamma = 9{\cdot}9208834-10$	$\lg \sin\beta = 9{\cdot}8657895$
$\lg \sin(\alpha+\beta) = 9{\cdot}8780359-10$	$\lg \sin(\gamma+\delta) = 9{\cdot}9331668$
$\lg \text{liczn.} = 0{\cdot}7544879-1$	$\lg \text{mian.} = 0{\cdot}7963465-1$

$\lg \text{liczn.} = 0{\cdot}7544879-1$	$\text{tang}^2\mu = 0{\cdot}908116$
$\lg \text{mian.} = 0{\cdot}7963465-1$	$1+\text{tang}^2\mu = 1{\cdot}908116$
$\lg \text{tang}^2\mu = 0{\cdot}9581414-1$	$\lg(1+\text{tang}^2\mu) = 0{\cdot}2806048$

Ponieważ $\sin^2\mu = \dfrac{\text{tang}^2\mu}{1+\text{tang}^2\mu}$, $\cos^2\mu = \dfrac{1}{1+\text{tang}^2\mu}$, więc:

$\lg \text{tang}^2\mu = 0{\cdot}9581414-1$	$\lg 1 = 0{\cdot}0000000$
$\lg(1+\text{tang}^2\mu) = 0{\cdot}2806048$	$\lg(1+\text{tang}^2\mu) = 0{\cdot}2806048$
$\lg \sin^2\mu = 0{\cdot}6775366-1$	$\lg \cos^2\mu = 0{\cdot}7193952-1$
$\lg \Delta = 2\,0791812$	$\lg \Delta = 2{\cdot}0791812$
$\lg d_1 = 1{\cdot}7567178$	$\lg d_2 = 1{\cdot}7985764$
$d_1 = 57{\cdot}1107$	$d_2 = 62{\cdot}8893$

Kontrola: $d_1+d_2 = \Delta$

$$\begin{array}{r} 57{\cdot}1107 \\ 62{\cdot}8893 \\ \hline 120{\cdot}0000 = \Delta \end{array}$$

Przykład 3. Do § 2 punkt 4. Rys. 5.

Zmierzono kąty:

$1 = 38^0\,12'\,00''$
$2 = 77^0\,43'\,10''$
$3 = 110^0\ 6'\,10''$
$4 = \ 8^0\,53'\,40''$
$5 = 11^0\,26'\,20''$
$6 = 96^0\ 4'\,00''$
$7 = 81^0\,12'\,30''$
$8 = 27^0\ 5'\,10''$

Ponieważ żąda się także wyznaczenia długości AB, więc zmierzono $c = 360\ m$.

Sumy kątów:

$(1+2) = 115^0\,55'\,10''$, $180^0-(1+2) = 64^0\,4'\,50''$
$(3+4+5) = 130^0\,26'\,10''$, $180^0-(3+4+5) = 49^0\,33'\,50''$
$(7+8) = 108^0\,17'\,40''$, $180^0-(7+8) = 71^0\,42'\,20''$
$(4+5+6) = 116^0\,24'\ 0''$, $180^0-(4+5+6) = 63^0\,36'\ 0''$
$(2+3+4-180^0) = 196^0\,43'\,0''-180^0 = 16^0\,43'\,0''$
$(2+3+4+5+6+7-360^0) = 25^0\,25'\,50''$
$(5+6+7-180^0) = 188^0\,42'\,50''-180^0 = 8^0\,42'\,50''$

Naprzód obliczy się długości a i b. Z wzoru dla c:

$$b = c\,\frac{\sin(4+5+6)\sin 8}{\sin 4\,\sin(7+8)}$$

$\lg c = 2{\cdot}5563025$ | $\lg \sin 4 = 9{\cdot}1892505-10$

$\lg \sin(4+5+6) = 9{\cdot}9521683-10$ | $\lg \sin(7+8) = 9{\cdot}9774748-10$

$\lg \sin 8 = 9{\cdot}6583254-10$ | $9{\cdot}1667253-10$

$2{\cdot}1667962$

$9{\cdot}1667253-10$

$\lg b = 3{\cdot}0000709$, zatem $b = 1000{\cdot}164$. Teraz obliczy się a:

$\lg b = 3{\cdot}0000709$ | $\lg \sin(3+4+5) = 9{\cdot}8814588-10$

$\lg \sin 5 = 9{\cdot}2973722-10$ | $\lg \sin 1 = 9{\cdot}7912754-10$

$\lg \sin(1+2) = 9{\cdot}9539575-10$ | $9{\cdot}6737341-10$

$2{\cdot}2514006$

$9{\cdot}6727341-10$

$\lg a = 2{\cdot}5786665$ więc $a = 379{\cdot}024$.

Teraz przystąpi się do obliczenia x_B i y_B:

$\lg b = 3{\cdot}0000709$ | $\lg b = 3{\cdot}0000709$

$\lg \cos(2\text{ do }4-180^0) = 9{\cdot}9812471-10$ | $\lg \sin(2\text{ do }4-180^0) = 9{\cdot}4588480-10$

$2{\cdot}9813180$ | $2{\cdot}4589189$

$b\,.\cos(2\text{ do }4-180^0) = 957{\cdot}895$ | $b \sin(2\text{ do }4-180^0) = 287{\cdot}686$

$\lg c = 2{\cdot}5563025$ | $\lg c = 2{\cdot}5563025$

$\lg \cos(2\text{ do }7-360^0) = 9{\cdot}9557389-10$ | $\lg \sin(2\text{ do }7-360^0) = 9{\cdot}6328791-10$

$2{\cdot}5120414$ | $2{\cdot}1891816$

$c\,.\cos(2\text{ do }7-360^0) = 325{\cdot}118$ | $c \sin(2\text{ do }7-360^0) = 154{\cdot}590$

Zatem x_B: | y_B:

$379{\cdot}024$ | $287{\cdot}686$

$957{\cdot}895$ | $154{\cdot}590$

$325{\cdot}118$ | $y_B = 442{\cdot}276$

$x_B = 1\,662{\cdot}037$

$\lg y_B = 2{\cdot}6456934$

$\lg x_B = 3{\cdot}2206406$

$\lg \operatorname{tang} x = 9{\cdot}4250528-10$

Kąt $x = 14^0\,54'\,4{\cdot}9''$

Jeżeli teraz postąpimy symetrycznie odwrotnie i obrawszy w B początek układu współrzędnych, a w $B6$ oś odciętych, to dla punktu A znajdzie się:

$x_B = 0$ $\quad x_I = c$, $\quad x_{II} = x_I + b\,.\cos(5+6+7-180^0)$

$y_B = 0$ $\quad y_I = 0$ $\quad y_{II} = b\,.\sin(5+6+7-180^0)$

$$x_A = x_{II} + a\cos(2+3+4+5+6+7-360^0)$$

$$y_A = y_{II} + a\sin(2+3+4+5+6+7-360^0)$$

$\lg b = 3{\cdot}0000709$ | $\lg b = 3{\cdot}0000709$

$\lg \cos(5\text{ do }7-180^0) = 9{\cdot}9949579-10$ | $\lg \sin(5\text{ do }7-180^0) = 9{\cdot}1804139-10$

$2{\cdot}9950288$ | $2{\cdot}1804848$

$b\,.\cos(5\text{ do }7-180^0) = 988{\cdot}619$ | $b\,.\sin(5\text{ do }7-180^0) = 151{\cdot}525$

$\lg a = 2{\cdot}5786665$ | $\lg a = 2{\cdot}5786665$

$\lg \cos(2\text{ do }7-360^0) = 9{\cdot}9557389-10$ | $\lg \sin(2\text{ do }7-360^0) = 9{\cdot}6328791-10$

$2{\cdot}5344054$ | $2{\cdot}2115456$

$a \cdot \cos(2 \text{ do } 7 - 360^0) = 342{\cdot}299$ $\quad$ $a \cdot \sin(2 \text{ do } 7 - 360^0) = 162{\cdot}759$

Zatem: x_A:	y_A:	
360·000	151·525	$\lg y_A = 2{\cdot}4973223$
988·619	162·759	$\lg x_A = 3{\cdot}2281226$
342·299	$y_A = 314{\cdot}284$	$\lg \operatorname{tang} y = 9{\cdot}2691997 - 10$
$x_A = 1690{\cdot}918$		Kąt $y = 10^0\ 31'\ 45{\cdot}1''$

Suma $x + y = 25^0\ 25'\ 50''$ zupełnie zgodnie ze sumą $(2 \text{ do } 7 - 360^0)$ podaną powyżej.

Długość AB obliczy się z wzorów:

$$AB = \frac{y_B}{\sin x} = \frac{x_B}{\cos x}$$

albo:

$$AB = \frac{y_A}{\sin y} = \frac{x_A}{\cos y}$$

W celu kontroli obliczymy AB podług y_B i y_A:

$\lg y_B = 2{\cdot}6456934$	$\lg y_A = 2{\cdot}4973223$
$\lg \sin x = 9{\cdot}4101962 - 10$	$\lg \sin y = 9{\cdot}2618253 - 10$
$\lg AB = 3{\cdot}2354972$	$\lg AB = 3{\cdot}2354970$
$AB = 1719{\cdot}876$	$AB = 1719{\cdot}876$

Zatem zgodność zupełna.

Przykład 4. Do § 2 punkt 7. Rys. 8.

Zmierzono $\varphi = 179^0\ 2'\ 0''$. Długość $a = 230$ i $b = 350\ m$ zmierzono z dokładnością $\pm 1\ m$. W celu przekonania się jak wielki wpływ ma ten błąd na ostateczny wynik, obliczymy CC' raz podług $a = 229$ i $b = 349$, drugi raz podług $a = 231$ i $b = 351$.

$\lg 229 = 2{\cdot}3598355$	$\lg 231 = 2{\cdot}3636120$
$\lg 349 = 2{\cdot}5428254$	$\lg 351 = 2{\cdot}5453071$
$\lg \sin \varphi = 8{\cdot}2271335 - 10$	$\lg \sin \varphi = 8{\cdot}2271335 - 10$
$3{\cdot}1297944$	$3{\cdot}1360526$
$\lg 578 = 2{\cdot}7619278$	$\lg 582 = 2{\cdot}7641761$
$0{\cdot}3678666$	$0{\cdot}3718765$
$CC' = 2\,333\ m$	$CC' = 2\,354$

Różnica wynosi zatem $21\ mm$; jest ona dla zagadnień tyczenia tras przeważnie dopuszczalna. Dla subtelniejszych zagadnień należałoby a i b dokładniej zmierzyć.

Przykład 5. Do § 6 Rys. 14 i do § 9.

Zmierzono: $d = 468{\cdot}12\ m$, $\gamma = 132^0\ 42'\ 30''$, $\delta = 157^0\ 33'\ 10''$, zatem: $\beta = \gamma + \delta - 180^0 = 110^0\ 15'\ 40''$.

$\lg d = 2{\cdot}6703572$	$\lg d = 2{\cdot}6703572$
$\lg \sin \delta = 9{\cdot}5818726 - 10$	$\lg \sin \gamma = 9{\cdot}8661786 - 10$
$2{\cdot}2522298$	$2{\cdot}5365358$
$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9722603 - 10$	$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9722603 - 10$
$\lg b = 2{\cdot}2799695$	$\lg c = 2{\cdot}5642755$
$b = 190{\cdot}533$	$c = 366{\cdot}670$

W celu kontroli obliczymy d z trójkąta AWA_1:

$$d = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\beta}$$

$\lg b^2 = 4{\cdot}5599390$	$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$	$36302{\cdot}71$
$b^2 = 36302{\cdot}71$	$\lg b = 2{\cdot}2799695$	$134447{\cdot}00$
$\lg c^2 = 5{\cdot}1285510$	$\lg c = 2{\cdot}5642755$	$+48386{\cdot}72$
$c^2 = 134447{\cdot}00$	$\lg\cos\beta = 9{\cdot}5394512-10$	$219136{\cdot}43 = d^2$
	$4{\cdot}6847262$	
	$2bc\,.\cos\beta = -48386{\cdot}72$	$\lg d^2 = 5{\cdot}3407146$
		$\lg d = 2{\cdot}6703573$
		$d = 468{\cdot}12\ m$

Wynik zupełnie zgodny z pomiarem.

Inną kontrolę można przeprowadzić podług § 9. Mianowicie jest

$$\frac{\beta}{2} = 55^0\,7'\,50'', \quad \frac{\gamma-\delta}{2} = -(12^0\,25'\,20''), \quad b-c = -176{\cdot}137.$$

$$\lg(b-c) = 2{\cdot}2458506 \qquad \lg d = 2{\cdot}6703572$$

$$\lg\cos\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}7571746-10 \qquad \lg\sin\frac{\gamma-\delta}{2} = 9{\cdot}3326691-10$$

$$2{\cdot}0030252 \qquad 2{\cdot}0030263$$

$$(b-c)\cos\frac{\beta}{2} = 100\,699 \qquad d\sin\frac{\gamma-\delta}{2} = 100{\cdot}699$$

Zatem i tu zgodność zupełna.

Przykład 6. Do § 6. Rys. 15.

Zmierzono: $\varphi = 42^0\,6'\,20''$, $\psi = 28^0\,13'\,0''$, $\varphi_1 = 20^0\,16'\,40''$, $\psi_1 = 18^0\,24'\,50''$, zatem: $\beta = 180-70^0\,19'\,20'' = 109^0\,40'\,40''$.

W celu wyznaczenia długości d zmierzeno $a = 76{\cdot}03\ m$.

Znajomość długości a_1 jest tylko dla kontroli pożądana.

Z powyższych danych wyznaczymy:

$$\varphi+\psi_1 = 60^0\,31'\,10'' \qquad \varphi_1+\psi = 48^0\,29'\,40''$$

$$\lg a = 1{\cdot}8809850$$

$$\lg\sin(\varphi+\psi_1) = 9{\cdot}9397801-10$$

$$1{\cdot}8207651$$

$$\lg\sin\psi_1 = 9{\cdot}4995207-10$$

$$\lg d = 2{\cdot}3212444, \qquad d = 209{\cdot}529$$

Obliczenie b i c i kontrolę, przeprowadzi się jak w 5 przykładzie.

Przykład 7. Do § 6. Rys. 16. To zagadnienie jest identyczne z zagadnieniem w § 2 punkt 4, tylko przeprowadzenie jest odmienne. Na podstawie danych, lub wyznaczonych ilości w 3 przykładzie, urobimy następujące ilości:

$\gamma = 180-(1+x) = 126^0\,53'\,55''$	$A1 = a = 379{\cdot}024$
$\delta = 180-(8+y) = 142^0\,23'\,5''$	$12 = b = 1000{\cdot}164$
$\varepsilon = (2+3+4)-180 = 16^0\,43'\,0''$	$2A_1 = c = 360{\cdot}000$
$\varphi = (5+6+7)-180 = 8^0\,42'\,50''$	

x_{A_1} (równe x_B z prz. 3) $= 1662\,037$, y_{A_1} (równe y_B) $= 442.276$

μ (równe x z prz. 3) $= 14^0\,54'\,5''$, ν (równe y) $= 10^0\,31'\,45''$

$\lg(A1) = 2{\cdot}5786665$	$\lg(12) = 3{\cdot}0000709$	$\lg(2A_1) = 2{\cdot}5563025$	
$\lg\cos\mu = 9\ 9851434-10$	$\lg\cos(\mu-\varepsilon) = 9{\cdot}9997820-10$	$\lg\cos\nu = 9{\cdot}9926212-10$	
$2\ 5638099$	$2{\cdot}9998529$	$2{\cdot}5489237$	

$(A1)\ \cos\mu = 366{\cdot}277$ $(12)\ \cos(\mu-\varepsilon) = 999\,661$ $(2A_1)\ \cos\nu = 353{\cdot}935$

Nareszcie $d = 366{\cdot}277+999{\cdot}661+353{\cdot}935 = 1719{\cdot}873$ zgodnie z długością AB z przykł. 3.

$$\beta = \gamma+\delta-180^0 = 89^0\,17'\,0''$$

Przykład 8. Do § 7. Rys. 17.

Przykład przeprowadzony na str. 5 i 6 części II, wyłącznie za pomocą tabeli II.

Przykład 9. Do § 7. Rys. 18.

Dane: $r = 400\ m$, $\alpha = 54^0\,12'\,40''$, punkty P i P_1. Zmierzono: $2a = 476{\cdot}26$, $\mu = 15^0\,17'\,20''$, $\nu = 8^0\,12'\,20''$, zatem: $\mu+\nu = 23^0\,29'\,40''$, $\frac{\alpha}{2}-\mu = 11^0\,49'\,0''$.

$\lg 2r = 2{\cdot}9030900$ $\lg 2a = 2{\cdot}6778441$

$\lg \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\mu\right) = 9{\cdot}3112892-10$ $\lg \sin\nu = 9{\cdot}1544998-10$

$2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\mu\right) = 163{\cdot}825$ $\lg \sin(\mu+\nu) = 9{\cdot}6006028-10$

$$\frac{2a\sin\nu}{\sin(\mu+\nu)} = 170{\cdot}506$$

Zatem $x = 163{\cdot}825-170{\cdot}506 = -6{\cdot}681$.

Ponieważ x wypadło ujemne, więc punkt C leży na zewnątrz łuku.

Kontrola na miejscu przez zmierzenie np. kąta PMP_1, który podług § 10 *e* ma się równać $180^0-\frac{\alpha}{2}$.

Przykład 10. Do § 10 *a*. Rys. 21.

Dla promienia 520 *m*, dla którego w tabeli III niema podanych wartości na y, chcemy obliczyć rzędne. Podług tabeli na str. 15 możemy rachować rzędne podług przybliżonego wzoru $y = x^2:2r$, jeżeli ich długość nie przekroczy około 3·2 *m*; zatem dla $x = 10$ do 50 *m* obliczy się y podług przybliżonego wzoru, zaś od $x = 60$ począwszy zastosuje się wzór dokładny: $y = r-\sqrt{r^2-x^2}$.

Wzór przybliżony:		Wzór dokładny:	
x	y	x	y
10	0·096	60	3·473
20	0·385	70	4·733
30	0·865	80	6·191
40	1·538	90	7·848
50	2·404	100	9·706

Przykład 11. Do § 10 *b*. Rys. 23 i § 11 *c*.

Między głównymi punktami M i N łuku o promieniu $r = 600\ m$ należy wytyczyć 10 punktów łuku od cięciwy MN.

Zmierzono $2d = 118{\cdot}64\ m$.

Dla 10 punktów jest w zastosowaniu do wz. 8:

$a = 0{\cdot}1$	0·2	0·3	0·4	0·5 razy $(2d)$
$b = 0{\cdot}9$	0·8	0·7	0·6	0·5 razy $(2d)$
$ab = 0{\cdot}09$	0·16	0·21	0·24	0·25 razy $(2d)^2$

Zatem dla $a = 11{\cdot}86$	23·73	35 59	47·46	59·32 m
jest $z = 1{\cdot}056$	1·877	2·547	2·915	2 932 m

Ponieważ rzędne nie przekraczają wartości podanych w tabelce na str. 15, przeto ich obliczenie na podstawie wz. 8 jest dopuszczalne.

Jeżeliby długość łuku MN była żądana, to trzeba wyznaczyć kąt α z wzoru $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{r} = \frac{59{\cdot}32}{600}$.

$\lg d = 1{\cdot}7732011$

$\lg r = 2{\cdot}7781513$

$\lg \sin\frac{\alpha}{2} = 8{\cdot}9950498-10$

zatem: $\frac{\alpha}{2} = 5^0\,40'\,26''$, $\alpha = 11^0\,20'\,52''$

Podług I tabeli jest arc $\alpha = 0{\cdot}1980561$, więc długość łuku r arc $\alpha = 118{\cdot}834$ m.

Można długość łuku także wyznaczyć podług § 11c:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left(\frac{59{\cdot}32}{600}\right)^2 = 0{\cdot}0097746; \quad \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 0{\cdot}0016291, \text{ więc:}$$

$$\text{długość łuku} = 118{\cdot}64\,.\,1{\cdot}0016291 = 118{\cdot}833\ m.$$

Przykład 12. Do § 14. Rys. 38.

Łuk tyczono z A i B o długości $s_1 = 148{\cdot}64$ i $s_2 = 180{\cdot}00$ m, przyczem znaleziono odchyłkę $\Delta = 84$ mm. Więc $\Delta : (s_1 + s_2) = 0{\cdot}2556$ mm, zaś $\Delta_1 = 148{\cdot}64\,.\,0{\cdot}2556 = 38$ mm, $\Delta_2 = 180\,.\,0{\cdot}2556 = 46$ mm. $\Delta_1 + \Delta_2 = 84$ mm.

Poszczególne punkty, mające od A lub B odległość:

	20	40	60	80	100	120	140	160 m
należy przesunąć o	5	10	15	20	26	31	36	41 mm

Przykład 13. Do § 15. Rys. 40. Dane punkty A i B i styczna w A.

Dla stosownie obranego punktu C zmierzono: $b = 478{\cdot}15$, $c = 386{\cdot}84$ m, $\varepsilon = 135^0\,2'\,40''$, zatem $180 - \varepsilon = 44^0\,57'\,20''$; również zmierzono $\gamma = 29^0\,48'\,20''$.

Obliczenie długości $2a$:

$\lg b = 2{\cdot}6795642$

$\lg b^2 = 5{\cdot}3591284$

$b^2 = 228627{\cdot}47$

$\lg c = 2\,5875314$

$\lg c^2 = 5{\cdot}1750628$

$c^2 = 149645{\cdot}21$

$\lg 2 = 0\,3010300$

$\lg b = 2{\cdot}6795642$

$\lg c = 2{\cdot}5875314$

$\lg \cos\varepsilon = 9{\cdot}8498216-10$

$\lg 2bc\cos\varepsilon = 5{\cdot}4179472$

$2bc\cos\varepsilon = -261786{\cdot}42$

Zatem wyraz pod pierwiastkiem:

228627·47
149645·21
261786·42
640059·10

logarytm tego wyrazu $= 5{\cdot}8062201$.

Logarytm pierwiastka: $2{\cdot}9031101 = \lg 2a$, zatem $2a = 800{\cdot}037$.

Obliczenie μ i ν:

$\lg c = 2{\cdot}5875314$

$\lg \sin\varepsilon = 9{\cdot}8491479-10$

$2{\cdot}4366793$

$\lg 2a = 2{\cdot}9031101$

$\lg \sin\mu = 9{\cdot}5335692-10$

$\lg b = 2{\cdot}6795642$

$\lg \sin\varepsilon = 9{\cdot}8491479-10$

$2{\cdot}5287121$

$\lg 2a = 2{\cdot}9031101$

$\lg \sin\nu = 9{\cdot}6256020-10$

$\mu = 19^0\,58'\,37{\cdot}7''$
$\nu = 24^0\,58'\,43{\cdot}3''$
$\gamma+\mu = \frac{\alpha}{2} = 49^0\,46'\,57{\cdot}7''$

$\varepsilon-\varphi = 4^0\,49'\,37{\cdot}7'$
$\mu+\varphi = 150^0\,11'\,40{\cdot}0''$
$\nu+\varphi = 155^0\,11'\,45{\cdot}6''$

$\varphi = 180 - \frac{\alpha}{2} = 130^0\,18'\,2{\cdot}3''$

Obliczenie długości CD i CE:

$\lg b = 2{\cdot}6795642$	$\lg c = 2{\cdot}5875314$
$\lg \sin(\varepsilon-\varphi) = 8{\cdot}9250533-10$	$\lg \sin(\varepsilon-\varphi) = 8{\cdot}9250533-10$
$11{\cdot}6046175-10$	$11{\cdot}5125847-10$
$\lg \sin\varphi = 9{\cdot}8828666-10$	$\lg \sin\varphi = 9{\cdot}8828666-10$
$\lg CD = 1{\cdot}7217509$	$\lg CE = 1{\cdot}6297181$
$CD = 52{\cdot}693$	$CE = 42{\cdot}630$

Obliczenie r:

$\lg a = 2{\cdot}6020801$
$\lg \sin\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}8828666-10$
$\lg r = 2{\cdot}7192135$

Kontrola:

$\lg r = 2{\cdot}7192135$
$\lg \sin(\mu+\varphi) = 9{\cdot}6964071-10$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$2{\cdot}7166506$

$2r \sin(\mu+\varphi) = 520{\cdot}776$

$\lg r = 2{\cdot}7192135$
$\lg \sin(\nu+\varphi) = 9\,6227480-10$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$2{\cdot}6429915$

$2r \sin(\nu+\varphi) = 439{\cdot}533$

$r = 523{\cdot}858\ m$, zaś $b+CE = 520{\cdot}780$, zaś $c+CD = 439{\cdot}533$

Co do tyczenia tym promieniem ob. tekst do tabeli IV.

Przykład 14. Do § 17*a*. Rys. 44.

Zmierzono: $AM = 126{\cdot}42$, $MA_1 = 837{\cdot}53$, $\gamma = 96^0\,42'\,10''$, $\delta = 85^0\,53'\,20''$.
Więc $\beta = +2^0\,35'\,30''$, $AM+MA_1 = d = 963{\cdot}95$, $180-\gamma = 83^0\,17'\,50''$.

Obliczenie p i q:

$\lg AM = 2{\cdot}1018158$	$\lg MA_1 = 2{\cdot}9230004$	$p+q = 960{\cdot}931$
$\lg \sin\gamma = 9{\cdot}9970214-10$	$\lg \sin\delta = 9{\cdot}9988811-10$	$\lg pq = 5{\cdot}0207187$
$\lg p = 2{\cdot}0988372$	$\lg q = 2{\cdot}9218815$	$\lg\sqrt{pq} = 2{\cdot}5103594$
$p = 125{\cdot}556$	$q = 835{\cdot}375$	

Obliczenie promienia r_1:

$\lg\sqrt{pq} = 2{\cdot}5103594$
$\lg \sin\frac{\beta}{2} = 8{\cdot}3543892-10$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$1{\cdot}1657786$
$\lg (p+q) = 2{\cdot}9826923$
$0{\cdot}1830863-2$
liczba $= 0{\cdot}0152436$
$1{\cdot}$
nawias $= 1{\cdot}0152436$

$\lg$ nawiasu $= 0{\cdot}0065703$
$\lg (p+q) = 2{\cdot}9826923$
$2{\cdot}9892626$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$\lg \cos^2\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}9997780-10$
$\lg r_1 = 2{\cdot}6884546$
$r_1 = 488{\cdot}039$

Obliczenie x i x_1:

$2r_1 = 976{\cdot}078$ | $2r_1 = 976{\cdot}078$
$p = 125{\cdot}556$ | $q = 835{\cdot}375$
$2r_1 - p = 850{\cdot}522$ | $2r_1 - q = 140{\cdot}703$

$\lg(2r_1 - p) = 2{\cdot}9296855$ | $\lg(2r_1 - q) = 2{\cdot}1483034$
$\lg p = 2{\cdot}0988372$ | $\lg q = 2{\cdot}9218815$
$5\,0285227$ | $5{\cdot}0701849$
$\lg x = 2{\cdot}5142614$ | $\lg x_1 = 2{\cdot}5350925$

$x = 326{\cdot}784$ | $x_1 = 342{\cdot}841$

Obliczenie AN i A_1N_1:

$\lg AM = 2{\cdot}1018158$
$\lg\cos\gamma = 9{\cdot}0671411 - 10$
$1{\cdot}1689569$

$AN = +14{\cdot}756$

$\lg MA_1 = 2{\cdot}9230004$
$\lg\cos\delta = 8{\cdot}8554639 - 10$
$1{\cdot}7784643$

$A_1N_1 = -60{\cdot}043$

$AP = x - AN = 312{\cdot}028,$ $A_1P_1 = x_1 - A_1N_1 = 402{\cdot}884.$

Kontrola, jak w tekście podano. Tu przyprowadzi się jednakże inną prostszą kontrolę, równaniem uzyskanem z rzutu wieloboku PAA_1P_1O na kierunek promienia PO:

$$r_1(1+\cos\beta) = d\cos(\gamma - 90^0) + A_1P_1\sin\beta.$$

$r_1(1+\cos\beta) = 2r_1\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$:

$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$\lg r_1 = 2{\cdot}6884546$
$\lg\cos^2\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}9997780 - 10$
$2{\cdot}9892626$

$d\cos(\gamma - 90^0)$:

$\lg d = 2{\cdot}9840545$
$\lg\cos(\gamma - 90^0) = 9{\cdot}9970214 - 10$
$2{\cdot}9810759$
liczba $= 957{\cdot}361$

$A_1P_1\sin\beta$:

$\lg A_1P_1 = 2{\cdot}6051800$
$\lg\sin\beta = 8{\cdot}6553084 - 10$
$1{\cdot}2604884$
liczba $= 18{\cdot}218$

$r_1(1+\cos\beta) = 975{\cdot}580$ $957{\cdot}361 + 18{\cdot}218 = 975{\cdot}579$

Przykład 15. Do § 19*a*. Rys. 48*a*.

Dane: $r = 600$, $r_1 = 450$ *m*. Obrano stosowne punkty M i M_1 i zmierzono: $l = 1436{\cdot}27$ *m*, $\alpha = 41^0 36' 20''$, $\alpha_1 = 33^0 24' 10''$.

Obliczenie c i c_1:

$\lg r = 2\,7781513$ | $\lg r_1 = 2{\cdot}6532125$
$\lg\sin\alpha = 9{\cdot}8221672 - 10$ | $\lg\sin\alpha_1 = 9{\cdot}7407740 - 10$
$2{\cdot}6003185$ | $2{\cdot}3939865$

$c = 398{\cdot}399$ | $c_1 = 247{\cdot}734$

Obliczenie p i p_1:

$\lg r = 2{\cdot}7781513$ | $\lg r_1 = 2{\cdot}6532125$
$\lg 2 = 0\,3010300$ | $\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$\lg\sin\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}5504146 - 10$ | $\lg\sin\frac{\alpha_1}{2} = 9{\cdot}4584622 - 10$
$\lg\sin\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}5504146 - 10$ | $\lg\sin\frac{\alpha_1}{2} = 9{\cdot}4584622 - 10$
$2{\cdot}1800105$ | $1{\cdot}8711669$

$l-c-c_1 = 790{\cdot}147$, $r+r_1-p-p_1 = 824{\cdot}310$,

$\lg (r+r_1-p-p_1) = 2{\cdot}9160906$

$\lg (l-c-c_1) = 2{\cdot}8977079$

$\lg \operatorname{tang} \psi = 10{\cdot}0183827-10$

$\lg (r+r_1) = 3{\cdot}0211893$

$\lg \cos \psi = 9{\cdot}8400991-10$

$2{\cdot}8612884$

$\lg (l-c-c_1) = 2{\cdot}8977079$

$\lg \sin (\psi+\varphi) = 9{\cdot}9635805-10$

l_0 z pierwszego wzoru:

$\lg (r+r_1) = 3{\cdot}0211893$

$\lg \sin \varphi = 9{\cdot}5473486-10$

$2{\cdot}5685379$

liczba $= 370{\cdot}287$

$l-c-c_1 = 790{\cdot}147$

$419{\cdot}860$

$\log = 2{\cdot}6231045$

$\lg \cos \varphi = 9{\cdot}9711616-10$

$\lg l_0 = 2{\cdot}6519429$

$l_0 = 448{\cdot}686$

$p = 151{\cdot}360$ $\quad p_1 = 74{\cdot}330$

$\psi = 46^0 12' 44{\cdot}1''$

$\lg \cos \psi = 9{\cdot}8400991-10$

$\psi+\varphi = 66^0 51' 43{\cdot}1''$

$\psi = 46\ 12\ 44{\cdot}1$

$\varphi = 20^0 38' 59{\cdot}0''$

l_0 z drugiego wzoru:

$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$

$\lg (r+r_1) = 3{\cdot}0211893$

$\lg \sin \frac{\varphi}{2} = 9{\cdot}2534085-10$

$\lg \sin \frac{\varphi}{2} = 9{\cdot}2534085-10$

$1{\cdot}8290363$

liczba $= 67{\cdot}458$

$p+p_1 = 225{\cdot}690$

$158{\cdot}232$

$\lg = 2{\cdot}1992943$

$\lg \sin \varphi = 9{\cdot}5473486-10$

$\lg l_0 = 2{\cdot}6519457$

$l_0 = 448{\cdot}689$

Przykład 16. Do § 26. Rys. 57.

Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni.

Dane: punkty P_1 i P_2. Zmierzono: $t_1 = 686\,24$, $t_2 = 507{\cdot}16$, kąt $\beta = 82^0 16' 30''$. Zatem $\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406$, $\lg \cos \beta = 9{\cdot}1284593$, $\cos \beta = 0{\cdot}134419$.

Wyznaczenie kątów α_1 i α_2:

$\lg t_1 = 2{\cdot}8364760$

$\lg t_2 = 2{\cdot}7051450$

$0{\cdot}1313310$

$t_1 : t_2 = 1{\cdot}353103$

$\cos \beta = 0\,134419$

$1{\cdot}218684$

$\log = 0{\cdot}0858911$

$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406-10$

$\lg \operatorname{cotg} \alpha_1 = 10\,0898505-10$

$\alpha_1 = 39^0\ 6' 53{\cdot}7''$

$\alpha_2 = 58\ 36\ 36{\cdot}4$

$\alpha_1+\alpha_2 = 97\ 43\ 30{\cdot}1$

równe $180^0-\beta$

$\lg t_2 = 2{\cdot}7051450$

$\lg t_1 = 2{\cdot}8364760$

$0{\cdot}8686690-1$

$t_2 : t_1 = 0{\cdot}739042$

$\cos \beta = 0{\cdot}134419$

$0{\cdot}604623$

$\lg = 0{\cdot}7814847-1$

$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406-10$

$\lg \operatorname{cotg} \alpha_2 = 9{\cdot}7854441-10$

$\frac{\alpha_1}{2} = 19^0 33' 26{\cdot}8''$

$\frac{\alpha_2}{2} = 29\ 18\ 18{\cdot}2$

$\frac{\beta}{2} = 41\ \ 8\ 15\ 0$

Obliczenie ilości d, r_1 i r_2:

$$\lg t_2 = 2{\cdot}7051450$$
$$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406-10$$
$$\lg \sin \alpha_1 = 9{\cdot}7999453-10$$
$$\lg 2d = 2{\cdot}9012403$$
$$2d = 796{\cdot}60$$
$$d = 398{\cdot}30$$

$$\lg d = 2{\cdot}6002103$$
$$\lg \sin \frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}6897166-10$$
$$\lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = 9\ 5247227-10$$
$$\lg \cos \frac{\beta}{2} = 9{\cdot}8768717-10$$
$$\lg r_1 = 2{\cdot}8883325$$
$$r_1 = 773{\cdot}2724$$

$$\lg d = 2\ 6002103$$
$$\lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = 9{\cdot}5247227-10$$
$$\lg \sin \frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}6897166-10$$
$$\lg \cos \frac{\beta}{2} = 9{\cdot}8768717-10$$
$$\lg r_2 = 2{\cdot}5583447$$
$$r_2 = 361{\cdot}6968$$

Są to promienie o najmniejszej różnicy.

Kontrolę rachunku przeprowadzi się np. podług 2 równania w § 25

$$\lg t_1 = 2{\cdot}8364760$$
$$\lg \cos \beta = 9{\cdot}1284593-10$$
$$t_1 \cos \beta = 92{\cdot}243$$

$$\lg r_1 = 2{\cdot}8883325$$
$$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406-10$$
$$r_1 \sin \beta = 766{\cdot}254$$

$$\lg (r_1 - r_2) = 2{\cdot}6144496$$
$$\lg \sin \alpha_2 = 9{\cdot}9312762-10$$
$$(r_1 - r_2) \sin \alpha_2 = 351{\cdot}334$$

Zatem $766{\cdot}254 + 92{\cdot}243 - 351{\cdot}339 = 507{\cdot}158$, zgodnie z wartością t_2:

Przykład 17. Do § 29*a*. Rys. 60 i 61.

Dla ćwiczenia obierzemy przypadek o tyle odmienny od tego, który przedstawia rys. 60, że przyjmiemy r_2 mniejsze niż r_1 i r_3, a kąt $\beta > 90^0$. Wtedy wypada kąt $P_1 O_1 O_3 > 180^0$, zaś ilości ψ i $O_1 Q$ wypadają ujemnie.

Uczący się powinien, dla lepszego zoryentowania, zrobić szkic rysunku, podług ilości poniżej obliczonych.

Dane: punkty P_1 i P_2, promienie $r_1 = 600$, $r_2 = 450$ i $r_3 = 800$ *m*.

Zmierzono: $t_1 = 507{\cdot}36$, $t_2 = 561{\cdot}47$, $\beta = 97^0 58' 20''$.

Obliczenie $O_1 Q$:

$$\lg t_2 = 2{\cdot}7493266$$
$$\lg \cos \beta = 9{\cdot}1420545-10$$
$$t_2 \cos \beta = -77{\cdot}8720$$

$$\lg r_3 = 2{\cdot}9030900$$
$$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9957823-10$$
$$r_3 \sin \beta = +792{\cdot}2684$$

$$t_1 = 507{\cdot}36$$
$$t_2 \cos\beta = +77{\cdot}8720$$
$$585{\cdot}2320$$
$$r_3 \sin\beta = -792{\cdot}2684$$
$$O_1Q = -207{\cdot}0364$$

Obliczenie O_2Q:

$$\lg t_2 = 2{\cdot}7493266 \qquad \lg r_3 = 2{\cdot}9030900$$
$$\lg \sin\beta = 9{\cdot}9957823-10 \qquad \lg \cos\beta = 9{\cdot}1420545-10$$
$$2{\cdot}7451089 \qquad 2{\cdot}0451445$$
$$t_2 \sin\beta = 556{\cdot}0438 \qquad r_3 \cos\beta = -110{\cdot}9544$$

$$t_2 \sin\beta = 556{\cdot}0438$$
$$r_3 \cos\beta = +110{\cdot}9544$$
$$666{\cdot}9982$$
$$r_1 = 600{\cdot}$$
$$O_2Q = +66{\cdot}9982$$

$$\lg O_1Q = 2{\cdot}3160467 \qquad \lg O_1Q = 2{\cdot}3160467 \qquad s = 358{\cdot}8035$$
$$\lg O_2Q = 1{\cdot}8260631 \qquad \lg \sin\psi = 9\,9783737-10 \qquad s-d_1 = 208{\cdot}8035$$
$$\lg \operatorname{tang}\psi = 10{\cdot}4899836-10 \qquad \lg c = 2{\cdot}3376730 \qquad s-d_2 = 8{\cdot}8035$$
$$\psi = -72^\circ 4' 5\,2'' \qquad c = +217{\cdot}6071 \qquad s-c = 141{\cdot}1965$$

Ponieważ O_1Q jest ujemne, więc tang ψ i kąt ψ są ujemne; jednakże ujemnej wartości tang ψ odpowiada jeszcze druga wartość: $\psi = +107^\circ 55' 54{\cdot}8''$ i tylko ta wartość jest dla naszego przykładu przydatna.

Obliczenie kąta α_2:

$$\lg (s-d_1) = 2{\cdot}3197377$$
$$\lg (s-d_2) = 0{\cdot}9446554$$
$$3{\cdot}2643931$$
$$\lg s = 2{\cdot}5548566$$
$$\lg (s-c) = 2{\cdot}1498239$$
$$0{\cdot}5597126-2$$
$$\text{połowa} = 0{\cdot}2798563-1$$

$$\lg \operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}2798563-10$$

Obliczenie kąta α_1:

$$\lg (s-d_1) = 2{\cdot}3197377$$
$$\lg (s-c) = 2{\cdot}1498239$$
$$4{\cdot}4695616$$
$$\lg s = 2{\cdot}5548566$$
$$\lg (s-d_2) = 0{\cdot}9446554$$
$$0{\cdot}9700496$$
$$\text{połowa} = 0{\cdot}4850248$$

$$\lg \operatorname{tang}\frac{\alpha_1+\psi}{2} = 10{\cdot}4850248-10$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 10^\circ\,47'\ 4{\cdot}9''$$
$$\alpha_2 = 21\ \ 34\ \ 9{\cdot}8$$
$$\frac{\alpha_1+\psi}{2} = 71\ \ 52\ 32{\cdot}1$$

$$\alpha_1+\psi = 143\ \ 45\ \ 4{\cdot}2$$
$$\psi = 107\ \ 55\ 54{\cdot}8$$
$$\alpha_1 = 35\ \ 49\ \ 9{\cdot}4$$

$$\alpha_2 = 24\ \ 38\ 20{\cdot}8$$

Obliczenie stycznych:

$$\lg r_1 = 2{\cdot}7781513 \qquad \lg r_2 = 2{\cdot}6532125$$

$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} = 9{\cdot}5094404-10 \qquad \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}2798563-10$$

$$2{\cdot}2875917 \qquad 1{\cdot}9330688$$

$$t_3 = 193{\cdot}9062 \qquad t_4 = 85{\cdot}7174$$

$$\lg r_3 = 2\,9030900$$

$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_3}{2} = 9{\cdot}3392383-10$$

$$2{\cdot}2423283$$

$$t_5 = 174{\cdot}7142$$

$t_1-t_3 = 313{\cdot}4538$, $t_2-t_5 = 386\,7558$, $t_3+t_4 = 279{\cdot}6236$, $t_4+t_5 = 260{\cdot}4316$, $\alpha_1+\alpha_2 = 57^0 23' 19{\cdot}2''$, $\alpha_2+\alpha_3 = 46^0 12' 30{\cdot}6''$.

Kontrola:

$$\lg (t_1-t_3) = 2{\cdot}4961735 \qquad \lg (t_3+t_4) = 2{\cdot}4465738$$

$$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9957823-10 \qquad \lg \sin (\alpha_2+\alpha_3) = 9{\cdot}8584547-10$$

$$2{\cdot}4919558 \qquad 2{\cdot}3050285$$

$$\lg (t_4+t_5) = 2{\cdot}4156937$$

$$\lg \sin \alpha_3 = 9{\cdot}6200332-10$$

$$2{\cdot}0357269$$

$$(t_1-t_3) \sin \beta = 310\,424 = [(t_3+t_4) \sin (\alpha_2+\alpha_3) =$$

$$= 201{\cdot}850]+[(t_4+t_5) \sin \alpha_3 = 108{\cdot}574]$$

$$\lg (t_2-t_5) = 2{\cdot}5874369 \qquad \lg (t_3+t_4) = 2{\cdot}4465738$$

$$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9957823-10 \qquad \lg \sin \alpha_1 = 9{\cdot}7673260-10$$

$$2{\cdot}5832192 \qquad 2{\cdot}2138998$$

$$\lg (t_4+t_5) = 2{\cdot}4156937$$

$$\lg \sin (\alpha_1+\alpha_2) = 9{\cdot}9254905-10$$

$$2{\cdot}3411842$$

$$(t_2-t_5) \sin \beta = 383{\cdot}018 = [(t_3+t_4) \sin \alpha_1 =$$

$$= 163{\cdot}644]+[(t_4+t_5) \sin (\alpha_1+\alpha_2) = 219{\cdot}374]$$

$$163{\cdot}644+219{\cdot}374 = 383{\cdot}018$$

Przykład 18. Do § 30. Rys. 62

Dane łuki o promieniach $r_1 = 550$ i $r_2 = 500\ m$, między nimi prosta $l = 42{\cdot}0\ m$, zaś $\alpha_1 = 24^0 16' 10''$, $\alpha_2 = 15^0 42' 20''$. Więc $c = r_1-r_2 = 50\ m$. Chcemy się naprzód przekonać jak wielką wartość należy obrać dla r, aby kąty φ nie były większe niż kąty α. W tym celu obliczymy naprzód $\min d_1$ i $\min d_2$, podług wzorów podanych w odnośniku.

Przed tem wyznaczy się $m = \sqrt{l^2+c^2} = 65{\cdot}2993$; następnie ψ:

$$\lg l = 1{\cdot}6232493 \qquad \psi = 40^0\ 1' 49{\cdot}0''$$

$$\lg c = 1{\cdot}6989700 \qquad \psi+\alpha_1 = 64\ 17\ 59{\cdot}0$$

$$\lg \operatorname{tang} \psi = 9\,9242793-10 \qquad \psi-\alpha_2 = 22\ 19\ 29{\cdot}0$$

Obliczenie $\min d_1$:

$$\lg m = 1{\cdot}8149086$$

$$\lg \cos (\psi+\alpha_1) = 9{\cdot}6371528$$

$$1{\cdot}4520614$$

Obliczenie $\min d_2$:

$$\lg m = 1{\cdot}8149086$$

$$\lg \cos (\psi-\alpha_2) = 9{\cdot}9596259$$

$$1{\cdot}7745345$$

$m \cos(\psi+\alpha_1) = 28\,3179$
$c = 50\cdot$
$21\cdot6821$
mianown. $= 43\cdot3642$

$\lg l^2 = 3\cdot2464986$
$\lg$ mian. $= 1\cdot6371313$
$\lg \min d_1 = 1\cdot6093673$
$\min d_1 = 40\cdot679$
$\min r = r_1 + d_1 = 590\cdot68$

$m \cos(\psi-\alpha_2) = 59\cdot5024$
$c = 50\cdot$
$9\cdot5024$
mianown. $= 19\cdot0048$

$\lg l^2 = 3\cdot2464986$
$\lg$ mian. $= 1\cdot2788633$
$\lg \min d_2 = 1\cdot9676353$
$\min d_2 = 92\cdot819$
$\min r = r_2 + d_2 = 592\cdot82$

Obierze się więc za r najbliższą wyższą okrągłą cyfrę $r = 600$. Zatem $d_1 = 50$, $d_2 = 100$, $s = 107\cdot6497$, $s-d_1 = 57\cdot6497$, $s-d_2 = 7\cdot6497$, $s-m = 42\,3504$.

Obliczenie kąta γ:

$\lg(s-d_2) = 0\cdot8836444$
$\lg(s-m) = 1\cdot6268575$
$2\cdot5105019$
$\lg m = 1\cdot8149086$
$\lg d_2 = 2\cdot$
$0\cdot6955933-2$

$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9\cdot8477967-10$

$\lg(s-d_1) = 1\cdot7607971$
$\lg(s-m) = 1\cdot6268575$
$3\cdot3876546$
$\lg m = 1\cdot8149086$
$\lg d_1 = 1\cdot6989700$
$1\cdot8737760-2$

$\lg \sin \frac{\delta}{2} = 9\cdot9368880-10$

$\frac{\gamma}{2} = 12^0\,52'\,11\cdot9''$

$\frac{\delta}{2} = 59\ 51\ 13\cdot0$

$\gamma = 25\ 44\ 23\cdot8$
$\delta = 119\ 42\ 26\cdot0$
$\varphi_1 = 20\ 15\ 45\cdot0$
$\varphi_2 = 14\ 17\ 26\cdot2$

Dla kontroli obliczy się kąt ε:

$\lg(s-d_1) = 1\cdot7607971$
$\lg(s-d_2) = 0\cdot8836444$
$2\cdot6444415$
$\lg d_1 d_2 = 3\cdot6989700$
$0\cdot9454715-2$

$\lg \sin \frac{\varepsilon}{2} = 9\cdot4727358-10$

$\frac{\varepsilon}{2} = 17^0\,16'\,35\cdot7''$
$\varepsilon = 34\ 33\ 11\cdot4$
$\varphi_1+\varphi_2 = 34\ 33\ 11\cdot2$
} zgodnie.

Punkty P i P' wyznaczy się na polu, jeżeli się wytyczy od P'_1 łuk o promieniu r_1, a kącie środkowym $\alpha_1-\varphi_1 = 4^0\,0'\,25''$, a od P'_2 łuk o promieniu r_2, a kącie środkowym $\alpha_2-\varphi_2 = 1^0\,24'\,54''$.

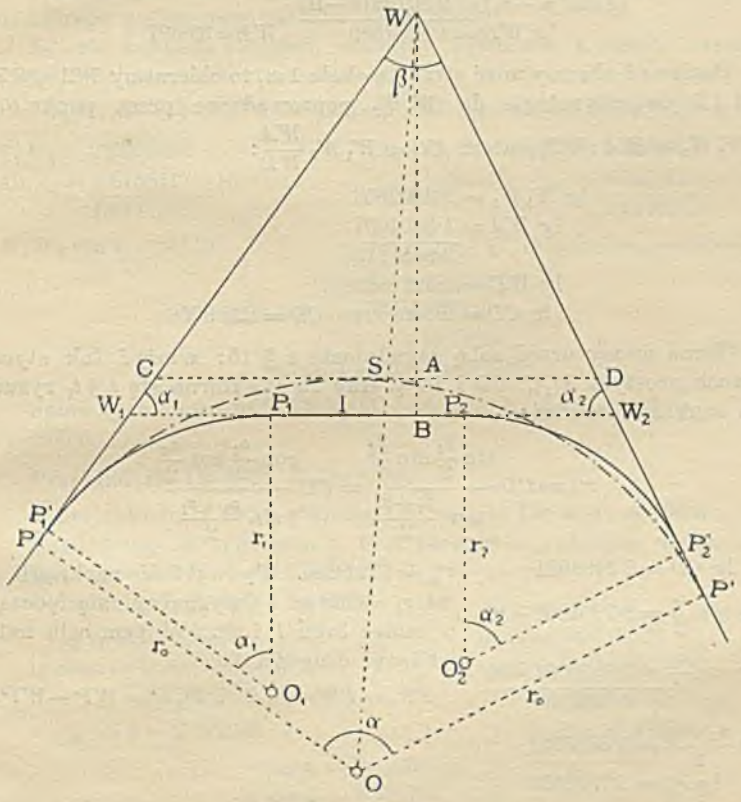
Łuk $P'P'_2$ wypadł tak krótki, że dla niego nie można zastosować krzywej przejściowej (ob. § 48); wypada zatem przyjąć **większy promień** r. Jednakże przezto zwiększy się różnica promieni, co powoduje inną trudność w przeprowadzeniu krzywej przejściowej w punktach P i P'.

Wszelkie trudności ominie się, a zarazem uzyska się ładniejszą trasę, jeżeli linię między P'_1 i P'_2 zastąpi się jednym łukiem, włożonym

w kąt utworzony przez styczne w punktach P'_1 i P'_2, jak to na rysunku obok uwidoczniono. Kąt wierzchołkowy utworzony przez te dwie styczne jest $\beta = 180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 140^0\,1'\,30''$ *). Przytem chcemy rozwiązać inne zagadnienie, mianowicie dobrać promień tego łuku tak, aby odstęp AB łuku od prostej P_1P_2 nie przekroczył pewnej z góry ustalonej granicy, np. około 1 m.

W tym celu wyznaczy się naprzód długość:

$$W_1W_2 = r_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} + l + r_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2}:$$



Rys. 105.

$$\lg r_1 = 2{\cdot}7403627 \qquad \lg r_2 = 2{\cdot}6989700$$

$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} = 9{\cdot}3324695 \qquad \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}1396020$$

$$2{\cdot}0728322 \qquad 1{\cdot}8386020$$

$$r_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} = 118{\cdot}258 \qquad r_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = 68{\cdot}961$$

$$W_1W_2 = 118{\cdot}258 + 42{\cdot}0 + 68{\cdot}961 = 229{\cdot}219$$

*) Na rysunku ten kąt z umysłu przyjęto mniejszy.

Następnie gdy $W_1B = WB \operatorname{cotg} \alpha_1$, $BW_2 = WB \operatorname{cotg} \alpha_2$, to:

$$W_1B + BW_2 = W_1W_2 = WB(\operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{cotg}\alpha_2),$$ a stąd:

$$WB = \frac{W_1W_2}{\operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{cotg}\alpha_2} = W_1W_2 \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$ zatem:

$$\begin{aligned} \lg W_1W_2 &= 2{\cdot}3602506 \\ \lg \sin\alpha_1 &= 9{\cdot}6138717-10 \\ \lg \sin\alpha_2 &= 9{\cdot}4324782-10 \\ \hline & 1{\cdot}4066005 \\ \lg \sin(\alpha_1+\alpha_2) &= 9{\cdot}8078416-10 \\ \hline \lg WB &= 1{\cdot}5987589 \end{aligned} \qquad WB = 39{\cdot}697$$

Ponieważ chcemy mieć strzałkę około 1 m, to obierzemy $WA = 38{\cdot}5$ m. Jeżeli CD jest równolegle do W_1W_2 poprowadzone przez punkt S, to $CD : W_1W_2 = WA : WB$, zatem $CD = W_1W_2 \frac{WA}{WB}$:

$$\begin{aligned} \lg W_1W_2 &= 2{\cdot}3602506 \\ \lg WA &= 1{\cdot}5854607 \\ \hline & 3{\cdot}9457113 \\ \lg WB &= 1{\cdot}5987589 \\ \hline \lg CD &= 2{\cdot}3469524 \end{aligned} \qquad CD = 222{\cdot}3066$$

Teraz mamy przed sobą zagadnienie z § 15: włożyć łuk styczny do trzech prostych P'_1C, CD i DP'_2. Gdy tu CD równa się t_1+t_2 rysunku 39, to szukany promień:

$$r'_0 = CD \frac{\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}}{\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}} = CD \frac{\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lg CD &= 2{\cdot}3469524 \\ \lg \cos\frac{\alpha_1}{2} &= 9{\cdot}9901860-10 \\ \lg \cos\frac{\alpha_2}{2} &= 9{\cdot}9959081-10 \\ \hline & 2{\cdot}3330465 \\ \lg \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} &= 9{\cdot}5337912 \\ \hline \lg r'_0 &= 2\,7992553 \end{aligned}$$

$r'_0 = 629{\cdot}88$ m. Tę wartość zaokrągli się na $r_0 = 630$ m i wyznaczy się początek i koniec luku P i P'. W tym celu należy obliczyć długości:

$$PP'_1 = PW - P'_1W \text{ i } P'_2P' = WP' - WP'_2.$$

WP'_1 równa się $WW_1 + W_1P'_1 = W_1W_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} + r_1 \operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2}$, zaś:

$WP'_2 = W_1W_2 \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} + r_2 \operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2}$:

$$\begin{aligned} \lg W_1W_2 &= 2{\cdot}3602506 \\ \lg \sin\alpha_2 &= 9{\cdot}4324782-10 \\ \hline & 1{\cdot}7927288 \\ \lg \sin(\alpha_1+\alpha_2) &= 9{\cdot}8078416-10 \\ \hline & 1{\cdot}9848872 \end{aligned} \qquad WW_1 = 96{\cdot}580$$

$$\begin{aligned} \lg W_1W_2 &= 2{\cdot}3602506 \\ \lg \sin\alpha_1 &= 9{\cdot}6138717-10 \\ \hline & 1{\cdot}9741223 \\ \lg \sin(\alpha_1+\alpha_2) &= 9{\cdot}8078416-10 \\ \hline & 2{\cdot}1662807 \end{aligned} \qquad WW_2 = 146{\cdot}650$$

Styczne $W_1P'_1$ i $W_2P'_2$ są już powyżej obliczone; zatem:

$WP_1 = 96{\cdot}580 + 118{\cdot}258 = 214{\cdot}838$, $WP'_2 = 146{\cdot}650 + 68{\cdot}961 = 215{\cdot}611$

$PW = WP' = r_0 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, gdyż kąt α przy O równa się $\alpha_1+\alpha_2$:

$\lg r_0 = 2{\cdot}7993405$

$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 9\ 5607710$

$\lg PW = 2{\cdot}3601115$

$PW = 229{\cdot}146$, zatem:

$PP'_1 = 229{\cdot}146 - 214{\cdot}838 = 14{\cdot}308$,

$P'_2P' = 229{\cdot}146 - 215{\cdot}611 = 13{\cdot}535$

Przez odmierzenie tych długości otrzyma się początek i koniec łuku, którego wytyczenie nastąpi jak wiadomo.

W celu kontroli obliczeń, urobimy równanie z rzutu wieloboku $PW_1W_2P'O$ na kierunek promienia PO:

$$PO = W_1W_2 \sin\alpha_1 + (W_2P'_2 + P'_2P') \sin(180-\alpha_1-\alpha_2) - P'O \cos(180-\alpha_1-\alpha_2)$$

$\lg W_1W_2 = 2{\cdot}3602506$

$\lg \sin\alpha_1 = 9{\cdot}6138717-10$

$1{\cdot}9741223$

$W_1W_2 \sin\alpha_1 = 94\ 216$

$\lg (W_2P'_2 + P'_2P') = 1{\cdot}9164329$

$\lg \sin(\alpha_1+\alpha_2) = 9{\cdot}8078416-10$

$1{\cdot}7242745$

$(W_2P'_2 + P'_2P') \sin(\alpha_1+\alpha_2) = 53{\cdot}000$

$\lg r_0 = 2{\cdot}7993405$

$\lg \cos(\alpha_1+\alpha_2) = 9{\cdot}8844129-10$

$2{\cdot}6837534$

$r_0 \cos(\alpha_1+\alpha_2) = -482{\cdot}785$

Suma tych ilości $94{\cdot}216 + 53{\cdot}000 + 482{\cdot}785 = 630{\cdot}001$ zgodnie z $r_0 = 630\,0$.

Przykład 19. Do § 35, 3. Rys. 68.

Z projektu były dane promienie $r_1 = r_3 = 120\ m$, $r_2 = 300\ m$.

Powiedzmy, że sposobem w tym paragrafie podanym wyznaczono: $t_1 = 283{\cdot}7$, $t_2 = 282{\cdot}2$, $\beta = 14^0\,26'\,15''$.

Obliczenie O_1Q, O_3Q i kąta ψ:

$\lg t_2 = 2{\cdot}4505570$

$\lg \cos\beta = 9{\cdot}9860639-10$

$2{\cdot}4366209$

$t_2 \cos\beta = 273{\cdot}2883$

$\lg r_3 = 2{\cdot}0791812$

$\lg \sin\beta = 9{\cdot}3967637-10$

$1{\cdot}4759449$

$r_3 \sin\beta = 29{\cdot}9188$

$\lg t_2 = 2{\cdot}4505570$

$\lg \sin\beta = 9\ 3967637-10$

$1{\cdot}8473207$

$t_2 \sin\beta = 70{\cdot}3592$

$\lg r_3 = 2{\cdot}0791812$

$\lg \cos\beta = 9\ 9860639-10$

$2{\cdot}0652451$

$r_3 \cos\beta = 116{\cdot}2104$

$t_1 = 283{\cdot}7$

$r_3 \sin\beta = 29{\cdot}9188$

$313{\cdot}6188$

$t_2 \cos\beta = 273{\cdot}2883$

$O_1Q = 40{\cdot}3305$

$t_2 \sin\beta = 70{\cdot}3592$

$r_3 \cos\beta = 116{\cdot}2104$

$186{\cdot}5696$

$r_1 = 120{\cdot}$

$O_3Q = 66{\cdot}5696$

$\lg O_1Q = 1{\cdot}6056336$

$\lg O_3Q = 1{\cdot}8232760$

$\lg \operatorname{tang}\psi = 9{\cdot}7823576-10$

$\psi = 31^0\,12'\,32\,9''$

$\lg \sin\psi = 9{\cdot}7144668-10$

$$\lg O_1 Q = 1{\cdot}6056336$$
$$\lg \sin \psi = 9{\cdot}7144668-10$$
$$1{\cdot}8911668$$
$$c = 77{\cdot}8335$$

$$d_1 = 300-120 = 180 = d_2$$

$$s = \frac{180+180+77{\cdot}8335}{2} = 218{\cdot}9168;\quad s-d_1 = s-d_2 = 38{\cdot}9168,\ s-c = 141{\cdot}0833$$

Obliczenie kątów α_1, α_2, α_3:

$$\lg (s-d_1) = 1{\cdot}5901372$$
$$\lg (s-d_2) = 1{\cdot}5901372$$
$$3{\cdot}1802744$$
$$\lg s = 2{\cdot}3402791$$
$$\lg (s-c) = 2{\cdot}1494756$$
$$8{\cdot}6905197-10$$
$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}3452599-10$$

$$\lg (s-d_1) = 1{\cdot}5901372$$
$$\lg (s-c) = 2{\cdot}1494756$$
$$3{\cdot}7396128$$
$$\lg s = 2{\cdot}3402791$$
$$\lg (s-d_2) = 1{\cdot}5901372$$
$$9{\cdot}8091965-10$$
$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1-\psi}{2} = 9{\cdot}9045983-10$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 12^\circ 29' 10{\cdot}3''$$
$$\alpha_2 = 24\ 58\ 20{\cdot}6$$
$$\frac{\alpha_1-\psi}{2} = 38\ 45\ 24{\cdot}9$$
$$\frac{\psi}{2} = 15\ 36\ 16{\cdot}4$$
$$\frac{\alpha_1}{2} = 54\ 21\ 41{\cdot}3$$
$$\alpha_1 = 108\ 43\ 22{\cdot}6$$

$$\alpha_3 = 360+\beta-\alpha_1-\alpha_2 = 240^\circ 44' 31{\cdot}8'',\quad \frac{\alpha_3}{2} = 120^\circ 22' 15{\cdot}9''$$

W celu kontroli rachunku obliczymy np. drugie równanie kontrolne z § 29: $(t_2-t_5)\sin\beta = (t_3+t_4)\sin\alpha_1+(t_4+t_5)\sin(\alpha_1+\alpha_2)$.

Naprzód wyznaczymy: $t_3 = r_1 \operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2}$, $t_4 = r_2 \operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2}$, $t_5 = r_3 \operatorname{tang}\frac{\alpha_3}{2}$:

$$\lg r_1 = 2{\cdot}0791812$$
$$\lg \operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2} = 0{\cdot}1445127$$
$$2{\cdot}2236939$$
$$t_3 = +167{\cdot}3763$$

$$\lg r_2 = 2{\cdot}4771213$$
$$\lg \operatorname{tang}\frac{\alpha_2}{2} = 9{\cdot}3452599-10$$
$$1{\cdot}8223812$$
$$t_4 = +66{\cdot}4326$$

$$\lg r_3 = 2\,0791812$$
$$\lg \operatorname{tang}\frac{\alpha_3}{2} = 0{\cdot}2320889$$
$$2{\cdot}3112701$$
$$t_5 = -204{\cdot}7718$$

$t_2 = 282{\cdot}2$	$t_3 = 167{\cdot}3763$	$t_4 = 66{\cdot}4326$	$\alpha_1 = 108^\circ 43' 22{\cdot}6''$
$t_5 = -204{\cdot}7718$	$t_4 = 66{\cdot}4326$	$t_5 = -204{\cdot}7718$	$\alpha_2 = 24\ 58\ 20\,6$
$+486{\cdot}9718$	$+233{\cdot}8089$	$-138{\cdot}3392$	$\alpha_1+\alpha_2 = 133\ 41\ 43{\cdot}2$

$\lg (t_2-t_5) = 2{\cdot}6875038$ $\qquad$ $\lg (t_3+t_4) = 2{\cdot}3688611$

$\lg \sin \beta = 9{\cdot}3967637-10$ $\qquad$ $\lg \sin \alpha_1 = 9{\cdot}9763875-10$

$2\,0842675$ $\qquad$ $2{\cdot}3452486$

$(t_2-t_5)\sin\beta = +121{\cdot}4136$ $\qquad$ $(t_3+t_4)\sin\alpha_1 = +221{\cdot}4362$

$\lg (t_4+t_5) = 2{\cdot}1409453$

$\lg \sin (\alpha_1+\alpha_2) = 9{\cdot}8591524-10$

$2\,0000977$

$(t_4+t_5)\sin(\alpha_1+\alpha_2) = -100{\cdot}0225$

suma $221{\cdot}4362-100\,0225 = 121{\cdot}4137$

zgodnie z lewą stroną równania.

Przykład 20. Do § 36. Rys. 69.

Na podstawie danych z 16 przykładu zastąpimy łuk koszowy parabolą drugiego rzędu. Zatem podług rys. 69 dane są punkty P i P_1, a zmierzono $t = 686{\cdot}24$, $t_1 = 507{\cdot}16$, $\beta = 82^0\,16'\,30''$.

Naprzód wyznaczymy długości d i h.

$t^2 = 470925{\cdot}338$ $\qquad$ $\lg t = 2{\cdot}8364760$ $\qquad$ $t^2+t_1^2 = 728136{\cdot}60$

$t_1^2 = 257211{\cdot}266$ $\qquad$ $\lg t_1 = 2{\cdot}7051450$ $\qquad$ $2tt_1\cos\beta = 93564{\cdot}32$

$t^2+t_1^2 = 728136{\cdot}604$ $\qquad$ $\lg 2 = 0{\cdot}3010300$ $\qquad$ $4d^2 = 634572{\cdot}28$

$\lg\cos\beta = 9{\cdot}1284593-10$ $\qquad$ $t^2+t_1^2 = 728136{\cdot}60$

$4{\cdot}9711103$ $\qquad$ $2tt_1\cos\beta = 93564{\cdot}32$

$2tt_1\cos\beta = 93564{\cdot}32$ $\qquad$ $16h^2 = 821700{\cdot}92$

$\lg 4d^2 = 5{\cdot}8024811$ $\qquad$ $\lg 16h^2 = 5{\cdot}9147138$

$\lg 2d = 2{\cdot}9012405$ $\qquad$ $\lg 4h = 2{\cdot}9573569$

$2d = 796{\cdot}600$ $\qquad$ $4h = 906{\cdot}477$

(zgodnie z prz. 16) $\qquad$ $h = 226{\cdot}619$

Obliczenie kątów φ i ψ:

$\lg t = 2{\cdot}8364760$ $\qquad$ $\lg t_1 = 2{\cdot}7051450$

$\lg t_1 = 2{\cdot}7051450$ $\qquad$ $\lg\sin\beta = 9{\cdot}9960406-10$

$\lg\sin\beta = 9{\cdot}9960406-10$ $\qquad$ $2{\cdot}7011856$

$5{\cdot}5376616$ $\qquad$ $\lg 4h = 2{\cdot}9573569$

$\lg d = 2{\cdot}6002103$ $\qquad$ $\lg\sin\psi = 9{\cdot}7438287-10$

$\lg 4h = 2{\cdot}9573569$ $\qquad$ $\psi = 33^0\,40'\,11{\cdot}6''$

$\lg\sin\varphi = 9{\cdot}9800944$

$\varphi = 72^0\,47'\,5{\cdot}5''$, lub $\varphi = 107^0\,12'\,54{\cdot}5''$. Podług powyższych danych jest $\varphi > 90^0$, zatem ta druga wartość ma tu zastosowanie.

Kąt WPC równa się kątowi α_1 w przykł. 16; otóż jest kąt $WPC = 180-\varphi-\psi = 39^0\,6'\,53{\cdot}9''$, zgodnie z α_1 z przykładu 16.

Obliczenie promieni krzywizny:

$\lg tt_1\sin\beta = 5{\cdot}5376616$ $\qquad$ $\lg d = 2{\cdot}6002103$

$\lg t^2t_1^2\sin^2\beta = 11{\cdot}0753232$ $\qquad$ $\lg d^3 = 7{\cdot}8006309$

$\lg 16h^2 = 5{\cdot}9147137$ $\qquad$ $\lg 2 = 0{\cdot}3010300$

$\lg 2h = 2{\cdot}6563269$ $\qquad$ $8{\cdot}1016609$

$\lg \rho_0 = 2{\cdot}5042826$ $\qquad$ $\lg tt_1\sin\beta = 5{\cdot}5376616$

$\rho_0 = 319{\cdot}362$ $\qquad$ $\lg \rho_s = 2{\cdot}5639993$

$\rho_s = 366{\cdot}437$

$\lg t^2 = 5{\cdot}6729520$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$5{\cdot}9739820$
$\lg t_1 = 2{\cdot}7051450$
$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406 - 10$
$\lg \rho = 3{\cdot}2727964$
$\rho = 1874{\cdot}116$

$\lg t^2_1 = 5{\cdot}4102900$
$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$5{\cdot}7113200$
$\lg t = 2{\cdot}8364760$
$\lg \sin \beta = 9{\cdot}9960406 - 10$
$\lg \rho_1 = 2{\cdot}8788034$
$\rho_1 = 756{\cdot}490$

Przykład 21. Do §§ 43, 44 i 45. Rys. 83 i 84.

Do tych paragrafów rachowano przykład podany przy tabeli VI, za pomocą tabel. Tu podamy inny przykład rachowany logarytmami.

Dany promień łuku $r = 500\ m$ dla głównej kolei żelaznej, dla której $C = 12000$. Zmierzono $\beta = 137^0\,48'\,40''$, zatem $\alpha = 42^0\,11'\,20''$, $\frac{\alpha}{2} = 21^0\,5'\,40''$.

Z tabeli VI wyjmiemy dla $r = 500$: $l = 24{\cdot}0$, $e = 0{\cdot}192$, zatem $v = \frac{e}{4} = 0{\cdot}048$. Następnie $a = 12{\cdot}0 = {}^1/_2 l$, $\varphi_0 = 1^0\,22'\,29''$, $S = 24{\cdot}0$.

Wyznaczenie położenia punktów C i S:

$\lg (r+v) = 2{\cdot}6990117$
$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}5863132 - 10$
$\lg (t+t') = 2{\cdot}2853249$
$t+t' = 192{\cdot}897$

$\lg (r+v) = 2{\cdot}6990117$
$\lg \cos \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}9698762 - 10$
$2{\cdot}7291355$
$(r+v) \sec \frac{\alpha}{2} = 535{\cdot}964$

$535{\cdot}964$
$r = 500{\cdot}$
$WS = 35\,964$

Kontrola punktu S:

$\lg r = 2{\cdot}6989700$
$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} = 9{\cdot}2699603 - 10$
$1{\cdot}9689303$
$r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} = 93{\cdot}096$

$\lg v = 0{\cdot}6812412 - 2$
$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}5863132 - 10$
$0{\cdot}0949280 - 1$
$v \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}124 = t'$

$93{\cdot}096$
$0{\cdot}124$
$CD = 92{\cdot}972$

$\lg v = 0{\cdot}6812412 - 2$
$\lg \sin \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}5561895 - 10$
$0{\cdot}1250517 - 1$

$r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} = 93{\cdot}096$
$v : \sin \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}133$
$DS = 93{\cdot}229$

Kontrola na miejscu: $ES = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} = 93{\cdot}096$, DSD' jedna prosta.

Dla ustalenia stycznej BU (rys. 83a) obliczy się US:

$\frac{\alpha}{2} - \varphi_0 = 19^0\,43'\,11''$
$\frac{\alpha - 2\varphi_0}{4} = 9^0\,51'\,35{\cdot}5''$
$\lg \sin \frac{\alpha - 2\varphi_0}{4} = 9{\cdot}2336024 - 10$

$\lg 2r = 3{\cdot}$
$\lg \sin^2 \left(\frac{\alpha - 2\varphi_0}{4}\right) = 8{\cdot}4672048 - 10$
$1{\cdot}4672048$
$\lg \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi_0\right) = 9{\cdot}9737531 - 10$
$\lg US = 1{\cdot}4934517$
$US = 31{\cdot}150$

Przykład 22. Do § 47*b*. Rys. 87.

Łuki odwrotne kolei głównej, dla której $C = 12000$. Dane: $r_1 = 600$, $r_2 = 400$. Zatem podług tabeli VI jest $l_1 = 20$, $e_1 = 0{\cdot}111$, $v_1 = 0{\cdot}028$, $l_2 = 30$, $e_2 = 0{\cdot}375$, $v_2 = 0{\cdot}094$. Gdy $l_0 = 10$, to musi być $p \geq 35$. Obierzemy $p = 40\ m$. $r_1 + v_1 = 600{\cdot}028$, $r_2 + v_2 = 400{\cdot}094$.

$$\lg (r_1 + r_2) = 3{\cdot}$$
$$\lg p = 1{\cdot}6020600$$
$$\lg \operatorname{tang} \varphi = 11{\cdot}3979400 - 10$$
$$\varphi = 87^0\,42'\,33{\cdot}8''$$

$$\lg (r_1 + r_2 + v_1 + v_2) = 3{\cdot}0000528$$
$$\lg \cos \varphi = 8{\cdot}6017130 - 10$$
$$1{\cdot}6017658$$
$$\lg p = 1\ 6020600$$
$$\lg \sin (\varphi + \varepsilon) = 9{\cdot}9997058 - 10$$

$$\varphi + \varepsilon = 87^0\,53'\,28{\cdot}8''$$
$$\varphi = 87\ 42\ 33{\cdot}8$$
$$\varepsilon = 0^0\,10'\,55{\cdot}0''$$

$$\lg (r_1 + v_1) = 2{\cdot}7781715$$
$$\lg \cos \varepsilon = 9{\cdot}9999978 - 10$$
$$2{\cdot}7781737$$
$$(r_1 + v_1) \cos \varepsilon = 600{\cdot}031$$
$$r_1 = 600{\cdot}$$
$$P_1 B_1 = 0{\cdot}031$$

$$\lg (r_2 + v_2) = 2{\cdot}6021621$$
$$\lg \cos \varepsilon = 9{\cdot}9999978 - 10$$
$$2{\cdot}6021643$$
$$(r_2 + v_2) \cos \varepsilon = 400{\cdot}096$$
$$r_2 = 400{\cdot}$$
$$P_2 B_2 = 0{\cdot}096$$

$$\lg (r_1 + v_1) = 2{\cdot}7781715$$
$$\lg \operatorname{tang} \varepsilon = 7{\cdot}5018050 - 10$$
$$\lg B_1 C_1 = 0{\cdot}2799765$$
$$B_1 C_1 = 1{\cdot}9054$$

$$\lg (r_2 + v_2) = 2{\cdot}6021621$$
$$\lg \operatorname{tang} \varepsilon = 7{\cdot}5018050 - 10$$
$$\lg B_2 C_2 = 0\ 1039671$$
$$B_2 C_2 = 1{\cdot}2705$$

$$\lg p = 1{\cdot}6020600$$
$$\lg \cos \varepsilon = 9{\cdot}9999978 - 10$$
$$1\ 6020622$$

$$p \cos \varepsilon = 40{\cdot}0002$$
$$B_1 C_1 = 1{\cdot}9054$$
$$B_2 C_2 = 1{\cdot}2705$$
$$C_1 C_2 = 36\ 8243$$

Obliczenie równania kontrolnego:

$$\lg (r_1 + r_2) = 3{\cdot}$$
$$\lg \sin \varepsilon = 7{\cdot}5018028 - 10$$
$$0{\cdot}5018028$$
$$(r_1 + r_2) \sin \varepsilon = 3{\cdot}1754$$

$$\lg C_1 C_2 = 1{\cdot}5661345$$
$$\lg \cos \varepsilon = 9{\cdot}9999978 - 10$$
$$1{\cdot}5661323$$
$$C_1 C_2 \cos \varepsilon = 36{\cdot}8241$$

Suma równa 39·9995, zgodna z $p = 40{\cdot}0$.

Podług przybliżonego wzoru $\sin \varepsilon = \frac{v_1 + v_2}{p}$ obliczone ε wynosi $0^0\,10'\,29{\cdot}7''$, zaś $B_1 C_1 = 1{\cdot}832$, $B_2 C_2 = 1\ 221$, $C_1 C_2 = 36{\cdot}947$. Więc różnice są znaczne, bo prosta p jest krótka.

Przykład 23. Do § 48. Rys. 88 i 89.

Dane: $r = 400\ m$, $C = 12000$. Zmierzono: $\beta = 173^0\,57'\,40''$, zatem $\alpha = 6^0\,2'\,20''$, $\frac{\alpha}{2} = 3^0\,1'\,10''$. Podług tabelki § 48 jest kąt α dostatecznie wielki dla pomieszczenia obustronnych krzywych przejściowych, jednakże stosownie do „uwagi“ i dodatku do tabeli VI jest ten kąt za mały, dla pomieszczenia łuku o długości $20\ m$. Z wzoru podanego w „uwadze“

otrzyma się dla obliczenia c wzór: $c = 2r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - l$, w którym podług tabeli VI wynosi $l = 30\ m$.

$$\lg 2r = 2{\cdot}9030900$$
$$\lg \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \overline{8{\cdot}7222067 - 10}$$
$$\overline{1{\cdot}6252967}$$

$$2r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 42{\cdot}2$$
$$l = 30{\cdot}0$$
$$c = \overline{12{\cdot}2\ m}$$

Zwiększenie tej wartości c na $20\ m$ nastąpi, gdy się stosownie zwiększy promień r, lub zmniejszy C. W celu wyznaczenia zmienionego promienia r_1 zastosuje się wzór podany w „uwadze“: $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{c+l}{2r}$, z którego, gdy za l wstawimy $C : r_1$, otrzyma się równanie:

$$r_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 8C \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}}{4 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}$$

Po wstawieniu wartości znajdzie się $r_1 = 445{\cdot}12\ m$. Tę wartość zaokrągli się na 450 i obliczy się podług powyżej przytoczonego wzoru $c = 20{\cdot}769\ m$.

Drugi sposób zaradzenia, przez zmniejszenie ilości C, jest w tym przypadku niedopuszczalny, gdyż zmniejszone $C = 4880$, zatem zmniejszenie za wielkie.

Przykład 24. Do § 49.

Do tego paragrafu nie rachujemy przykładu. Chcemy tylko zauważyć, że dla kątów β bliskich zera, jest $2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ bliskie jedności, zatem w wzorze 28 można podstawić $r_1 = r - v_1$, a nawet $r_1 = r - v$. Wtedy można tyczyć łuk współśrodkowy z łukiem o promieniu r; przytem przesunie się S o v, a punkt C spadnie z punktem P'_0 (rys. 85).

Przykład 25. Do § 54. Rys. 95.

Rozpatrzmy jak wielką długość powinna mieć prosta p między jednakowo skierowanymi łukami o promieniach $r_1 = 500$ i $r_2 = 300\ m$ dla $C = 12000$. Podług tabeli VI jest $l_1 = 24{\cdot}0$, $l_2 = 40{\cdot}0$, zaś obliczono (podł. § 45) np. $t'_1 = 0{\cdot}5$, $t'_2 = 0{\cdot}4\ m$.

a) Żądamy, aby na prostej p obie krzywe przejściowe się zmieściły, wtedy $A_1 A_2 \geqq 0$, a podług wz. 37 ma być $p \geqq \frac{24+40}{2} + 0{\cdot}9 \geqq 32{\cdot}9\ m$.

b) Jeżeli długość p jest mniejszą niż $32{\cdot}9\ m$, natenczas krzywe przejściowe się przetną, a ich zastosowanie będzie możebne, jeżeli podług wz. 38 będzie $p \geqq \frac{40-24}{2} + 0{\cdot}9 \geqq 8{\cdot}9\ m$.

Jeżeli w tym przypadku chcemy mieć między krzywemi przejściowemi łuk $c = 20\ m$, to ma być podług wz. 39 $p \leqq 32{\cdot}9 - 20{\cdot}0 = 12{\cdot}9\ m$. Zatem p może się mieścić w granicach od $8{\cdot}9$ do $12{\cdot}9\ m$.

Dla $p < 8{\cdot}9$ jest zastosowanie krzywych przejściowych niemożliwe, chyba że przez zmniejszenie jednego promienia lub obydwu promieni

łuków długość p stosownie się powiększy. Dla p cokolwiek większego niż 12·9, można uzyskać żądaną długość c przez stosowne powiększenie ilości C na C'.

Przyjmijmy, że p wynosi 15 m, czyli $\Delta = 15 - 12{\cdot}9 = 2{\cdot}1$ m. Jeżeli na danej przestrzeni wynosi $i = 300$, to $h_1 = \frac{24}{300} = 0{\cdot}080$, $h_2 = \frac{40}{300} = 0{\cdot}133$, więc $i' = 300 + \frac{4{\cdot}2}{0{\cdot}213} = 300 + 19{\cdot}7 = 319{\cdot}7$. Zatem $C'' = 12000 \frac{319{\cdot}7}{300} = 12788$. Tę liczbę zaokrągli się na 12800 i dla niej obliczy się podług wz. 21 w § 48 dane potrzebne dla tyczenia krzywych przejściowych. Z powodu tego zaokrąglenia jest c cokolwiek większe niż 20 m; mianowicie jest $l'_1 = 12800 : 500 = 25{\cdot}60$, $l'_2 = 12800 : 300 = 42{\cdot}67$, więc podług wz. 39:

$$c = \frac{25{\cdot}60 + 42{\cdot}67}{2} + 0{\cdot}9 - 15{\cdot}0 = 20{\cdot}03.$$

Przykład 26. Do § 55*b* Rys. 97.

Kolej fabryczna ma być przekształcona na publiczną kolej lokalną o $C = 6000$. Należy na istniejących torach wprowadzić krzywe przejściowe.

Jeżeli w § 56 stosowano dla głównych kolei $d = r : 20$, to dla kolei lokalnej o małej chyżości pociągów można zadowolić się większą różnicą promieni, np. $d = r : 10$. Zatem $n = 10$. Dany promień $r = 200$, więc $r_1 = 180$ m, $d = 20$ m.

Dla obliczenia zastosujemy prostsze wzory 40 do 44:

Podług tabeli VI jest dla promienia 180 m i $C = 6000$, $e_1 = 1{\cdot}029$ zatem $v_1 = 0{\cdot}25725$, $2d - v_1 = 39{\cdot}74275$, $\varphi_0 = 5^0\,17'\,24''$, $a = 16{\cdot}596$.

$\lg (2d - v_1) = 1{\cdot}5992579$
$\lg v_1 = 0{\cdot}4103554 - 1$
$1{\cdot}0096133$
$\lg b = 0{\cdot}5048067$
$b = 3{\cdot}19747$

$\lg b = 0{\cdot}5048067$
$\lg d = 1{\cdot}3010300$
$\lg \sin \alpha = 9\,2037767 - 10$
$\alpha = 9^0\,11'\,58{\cdot}4''$

$c = \frac{r}{d} b = 31{\cdot}975$
$h = \frac{r}{d} v_1 = 2{\cdot}573$

$\frac{\alpha + \varphi_0}{2} = 7^0\,14'\,41{\cdot}2''$, $\frac{\alpha - \varphi_0}{2} = 1^0\,57'\,17{\cdot}2''$

W celu kontroli ustawimy równanie rzutu na kierunek AM_1:

$$r \sin \alpha = r_1 (\sin \alpha - \sin \varphi_0) + a + b = 2 r_1 \cos \frac{\alpha + \varphi_0}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi_0}{2} + a + b$$

$\lg r = 2{\cdot}3010300$
$\lg \sin \alpha = 9{\cdot}2037767 - 10$
$1{\cdot}5048067$
$r \sin \alpha = 31{\cdot}975$

$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$
$\lg r_1 = 2{\cdot}2552725$
$\lg \cos \frac{\alpha + \varphi_0}{2} = 9{\cdot}9965195 - 10$
$\lg \sin \frac{\alpha - \varphi_0}{2} = 8{\cdot}5328904 - 10$
$1\,0857124$
liczba $= 12{\cdot}1818$

$12{\cdot}1818$
$a = 16{\cdot}5960$
$b = 3{\cdot}1975$
$31{\cdot}9750$
zgodnie z $r \sin \alpha$

Długość przekształcenia istniejącego toru: $AM = l - a - b + r \arc \alpha$
Gdy $\arc \alpha = 0{\cdot}1605700$, $r \arc \alpha = 32{\cdot}1140$, $l - a = 16{\cdot}737$,

$$AM = 16{\cdot}737 - 3{\cdot}197 + 32{\cdot}1140 = 45{\cdot}654\ m.$$

Przykład 27. Do § 58 I. Rys. 99 i 100.

Istniejący lewy tor głównej kolei ($C = 12000$) jest w łuku o promieniu 2000 m. W odległości 4 m od istniejącego, ma być wybudowany prawy tor, tak, że promień wspólnej osi $R = 2002$ m. W celu uzyskania krótkiego układu zastosujemy odwrotne łuki i obierzemy wielką różnicę $R-r$, przez przyjęcie najmniejszej jeszcze dopuszczalnej wartości $r = 300$ m. Natomiast promień r_1 obierzemy wielki, aby warunek tabeli w § 48 mógł być dopełniony. Zatem $R = 2002$, $r = 300$, $r_1 = 1000$ m. Podług tabeli VI jest dla $r = 300$, $l_1 = 40$, zaś dla promieni 2002 i 1000 jest podług tabeli VII $l = l_2 = 20$ m. Długość u obierzemy w najmniejszej wartości, wyznaczonej wzorem 39 w § 54, t. j. $u = \frac{l+l_1}{2} + t' + t'_1 - 20$, zaś v i u_1, jako proste między odwrotnymi łukami, podług § 47: $v = l_0 + \frac{l_1+l_2}{2} + t'_1 + t'_2$, $u_1 = l_0 + \frac{l_1+l}{2} + t'_1 + t'$.

Jeżeli dla pewności przyjmiemy każde $t' = 2{\cdot}0$ m, zaś $l_0 = 10$ m, to będzie: $u = 14$, $v = 44$, $u_1 = 34$ m. Gdy jeszcze odstęp torów $d = 4$ m, to $R-d+r_1 = 2998$, $R-r = 1702$. Zatem:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2998 \cdot 1300 - 34 \cdot 44}{44 \cdot 2998 + 34 \cdot 1300} = \frac{3895904}{176112}; \quad \lg\operatorname{tang}\varphi = 11{\cdot}3448193 - 10$$

$\varphi = 87^0\,24'\,42{\cdot}3''$, $\lg\cos\varphi = 8{\cdot}6547359 - 10$. Następnie wz. 3:

$(R-d+r_1)^2 =$	8988004	lg licznika	$= 6{\cdot}8912081$
$u^2_1 =$	1156	$\lg\cos\varphi$	$= 8{\cdot}6547359 - 10$
$(r+r_1)^2 =$	1690000		$5{\cdot}5459440$
$v^2 =$	1936	lg 176112	$= 5{\cdot}2457889$
	10681096	lg 2	$= 0{\cdot}3010300$
$(R-r)^2 =$	2896804	$\lg\sin(\varphi-\beta)$	$= 9{\cdot}9991251 - 10$
$u^2 =$	196		
	7784096		

$$\varphi - \beta = 86^0\,21'\,51{\cdot}6''$$
$$\varphi = 87\ 24\ 42{\cdot}3$$
$$\beta = 1^0\ 2'\ 50{\cdot}7''$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1702 \cdot 1300 + 14 \cdot 44}{1702 \cdot 44 - 14 \cdot 1300} = \frac{2213216}{56688}; \quad \lg\operatorname{tang}\psi = 11{\cdot}5915328 - 10$$

$\psi = 88^0\,31'\,53{\cdot}0''$, $\lg\cos\psi = 8{\cdot}4083257 - 10$. Zaś wz. 5:

$(R-d+r_1)^2 =$	8988004	lg licznika	$= 6{\cdot}6434748$	$\psi-\alpha =$	$88^0\,35'\,36{\cdot}5''$
$u^2_1 =$	1156	$\lg\cos\psi$	$= 8{\cdot}4083257 - 10$	$\psi =$	88 31 58·0
	8989160		$5{\cdot}0518005$	$\alpha =$	$4^0\,56'\,21{\cdot}5''$
$(R-r)^2 =$	2896804	lg 56688	$= 4{\cdot}7534911$	$\alpha-\beta =$	3 53 30·8
$u^2 =$	196	lg 2	$= 0{\cdot}3010300$		
$v^2 =$	1936	$\lg\sin(\psi-\alpha)$	$= 9{\cdot}9972794 - 10$		
$(r+r_1)^2 =$	1690000				
	4400224				

W celu kontroli rachunków mamy równanie:

$$R - r = (R-d+r_1)\cos(\alpha-\beta) + v\sin\alpha + u_1\sin(\alpha-\beta) - (r+r_1)\cos\alpha$$

$\lg (R-d+r_1) = 3{\cdot}4768316$
$\lg \cos (\alpha-\beta) = 9{\cdot}9989973-10$
$3{\cdot}4758289$
liczba $= 2991{\cdot}086$

$\lg v = 1{\cdot}6434527$
$\lg \sin \alpha = 8{\cdot}9350052-10$
$0{\cdot}5784579$
liczba $= 3{\cdot}788$

$\lg u_1 = 1{\cdot}5314789$
$\lg \sin (\alpha-\beta) = 8{\cdot}8317037-10$
$0{\cdot}3631826$
liczba $= 2{\cdot}308$

$\lg (r+r_1) = 3{\cdot}1139434$
$\lg \cos \alpha = 9\ 9983842-10$
$3{\cdot}1123276$
liczba $= 1295{\cdot}173$

$2991{\cdot}086$
$3{\cdot}788$
$2{\cdot}308$
$2997{\cdot}182$
$1295{\cdot}173$
$1702{\cdot}009$

zgodnie z $R-r = 1702$

Długość, na którą tor istniejący ma być przekształcony, równa się, podług rysunku 99: $\left(R-\frac{d}{2}\right) \operatorname{arc} (\alpha-\beta) = 2000 \,.\, 0{\cdot}0679263 = 135{\cdot}853\ m.$ (Ob. także przykł. 29).

Przykład 28. Do § 58 II. Rys. 102.

Obierzemy $r = r_1 = 500\ m$, $C = 12000$. Dla tego promienia jest $l = 24$, zatem $v = \frac{l+l_1}{2} + t' + t'_1 + 10$ (ob. przykł. 26) = okrągło $40\ m$, $d = 4\ m$, $r+r_1-d = 996\ m$.

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1000}{40} = 25, \quad \lg \operatorname{tang} \varphi = 11{\cdot}3979400-10, \quad \varphi = 87^0\,42'\,33\,8''$$

$\lg \cos \varphi = 8{\cdot}6017130-10$

$\lg (r+r_1-d) = 2{\cdot}9982593$
$\lg v = 1{\cdot}6020600$
$1{\cdot}3961993$
$\lg \cos \varphi = 8{\cdot}6017130-10$
$\lg \sin (\varphi-\alpha) = 9{\cdot}9979123-10$

$\varphi - \alpha = 84^0\,23'\,11{\cdot}4''$
$\varphi = 87\ \ 42\ \ 33{\cdot}8$
$\alpha = 3^0\,19'\,22{\cdot}4''$
$\frac{\alpha}{2} = 1^0\,39'\,41{\cdot}2''$

Ten kąt α jest większy niż w tabelce § 48 dla $r = 500$ podany, więc rozwiązanie jest możebne; jednakże jest on mniejszy niż kąt $5^0\,3'$ wykazany w tabeli dodanej na końcu tabeli VI, zatem uzyska się $c < 20\ m$. Można c wyznaczyć z wzoru podanego w uwadze do § 48:

$$c = 2r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - l$$

$\lg 2r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = 1{\cdot}4624849$, więc $c = 29{\cdot}006-24{\cdot}000 = 5{\cdot}006$.

Kontrolne równanie:

$\lg 2(r+r_1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}2256344$
liczba $= 2{\cdot}3185$

$\lg v = 1{\cdot}6020600$ $\quad$ $2{\cdot}3185$
$\lg \sin \alpha = 8{\cdot}7631497$ $\quad$ $1{\cdot}6813$
$0{\cdot}3652097$ $\quad$ $3{\cdot}9998$
liczba $= 1{\cdot}6813$ $\quad$ zgodne z $d = 4$

Przykład 29. Do § 58 IV*a*. Rys. 103*a*.

Te same dane, co w przykładzie 26, więc $R = 2002$, $C = 12000$.

Gdy się przyjmie $r = 300$, to kąt α wypadnie mniejszy niż podany w tabelce § 48. Zatem obierzemy $r = 500$, zaś $u = 14$, tak samo jak w przykładzie 26, $d = 4\ m$. $R - r - d = 1498$.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1502}{14}, \quad \lg\operatorname{tang}\varphi = 12{\cdot}0305419 - 10, \quad \varphi = 89^0\,27'\,57{\cdot}5''$$

$$\lg\cos\varphi = 7{\cdot}9694338 - 10$$

$$\lg(R - r - d) = 3{\cdot}1755118$$

$$\lg\cos\varphi = 7{\cdot}9694338 - 10$$

$$1{\cdot}1449456$$

$$\lg u = 1{\cdot}1461280$$

$$\lg\sin(\varphi + \alpha) = 9{\cdot}9988176 - 10$$

$\varphi + \alpha = 85^0\,46'\,56{\cdot}2''$, albo $\varphi + \alpha = 94^0\,13'\,33{\cdot}8''$

W tym przypadku ważna druga wartość:

$$\varphi + \alpha = 94^0\,13'\,33{\cdot}8''$$

$$\varphi = 89\ \ 27\ \ 57{\cdot}5$$

$$\alpha = \ 4^0\,45'\,36\ 3''$$

Ponieważ $\lg\cos\varphi$ dla kąta bliskiego 90^0 nie jest dostatecznie dokładny, zatem i kąt α nie jest dokładny. Obliczymy go z wz. 15. W tym celu z wz. 14 wyznaczy się:

$$v = \sqrt{8 \,.\, 1502 + 14^2 - 4^2} = 110{\cdot}4355$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{96{\cdot}4355}, \quad \lg\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 8{\cdot}6178228 - 10, \quad \frac{\alpha}{2} = 2^0\,22'\,30{\cdot}7'',$$

zatem: $\alpha = 4^0\,45'\,1{\cdot}4''$. Różnice z powyżej obliczonym kątem α jest zatem znaczna.

Długość przekształcenia toru istniejącego $\left(R - \frac{d}{2}\right) \operatorname{arc}\alpha = 165{\cdot}820\ m$.

W porównaniu z długością 135·853 *m*, uzyskaną w przykładzie 26 okazuje się zysk blisko 30 *m* przy zastosowaniu odwrotnych łuków.

Przykład 30. Do § 58 V*a*. Rys. 104.

Łuk *AB* istniejącej trasy posiada promień równy 500, zatem dla $d = 4$ jest $R = 502\ m$. Obierzemy $R_1 = 600$, $v = 20\ m$. $R_1 - R + d = 102$.

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{102}{20}, \quad \lg\operatorname{tang}\varphi = 10\,7075702 - 10, \quad \varphi = 78^0\,54'\,22{\cdot}6''.$$

$$\lg\cos\varphi = 9{\cdot}2842376 - 10$$

$$\lg(R_1 - R) = 1{\cdot}9912261$$

$$\lg\cos\varphi = 9\,2842376 - 10$$

$$1\,2754637$$

$$\lg v = 1{\cdot}3010300$$

$$\lg\sin(\varphi - \alpha) = 9{\cdot}9744337$$

$\varphi - \alpha = 70^0\,31'\,57{\cdot}0''$

$\varphi = 78\ \ 54\ \ 22{\cdot}6$

$\alpha = \ 8^0\,22'\,25{\cdot}6''$

$\lg(R_1 - R + d) = 2{\cdot}0086002$

$\lg\sin\alpha = 9{\cdot}1632516 - 10$

$1{\cdot}1718518$

liczba $= 14{\cdot}8513$

$\lg v = 1{\cdot}3010300$

$\lg\cos\alpha = 9{\cdot}9953452 - 10$

$1{\cdot}2963752$

liczba $= 19{\cdot}7868$

$14{\cdot}8513$

$19{\cdot}7868$

$u = 34{\cdot}6411$

Dla kontroli obliczy się wz. 18:

$u = \sqrt{8 \,.\, 98 + 20^2 + 4^2} = \sqrt{1200} = 34{\cdot}641$ zgodne z powyższem.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA BIBLIOTEKA POLITECHNIKI

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 102 - 136583
Dyr.1 136583