

KOMITET WYDAWNICZY PODRĘCZNIKÓW AKADEMICKICH  
PRZY MINISTERSTWIE WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

---

Prof. K. WEIGEL

# GEODEZJA (MIERNICTWO)



1938

NAKŁADEM KOMITETU WYDAWNICZEGO PODRĘCZNIKÓW AKADEMICKICH  
SKŁAD GŁÓWNY W KASIE IM. MIANOWSKIEGO  
WARSZAWA — PALAC STASZICA

GEODEZJA  
(MIERNICTWO)





07  
1. 70  
S. 73  
96

S.06

526



15879

233/58



## PRZEDMOWA AUTORA

Oddając do użytku publicznego książkę pt. *Geodezja (Miernictwo)*, uważam za potrzebne podzielenie się z czytelnikami kilku uwagami, dotyczącymi jej tytułu i treści.

Jak wiadomo, geodezję dzielimy na wyższą i niższą, zwaną także przez niektórych niezbyt szczęśliwie, miernictwem.

Zadanie geodezji wyższej polega na wyznaczeniu całokształtu ziemi oraz na rozmierzaniu krajów (państw). Geodezja niższa natomiast zajmuje się pomiarami i obliczeniami, na podstawie których sporządzamy plany znacznie mniejszych obszarów, tak niewielkich, że dla przedstawienia ich sytuacji poziomej wystarcza z reguły przyjęcie ziemi jako płaszczyzny.

W książce swej omawiam nie tylko zagadnienia geodezji niższej, lecz poruszam także w krótkości pewne zagadnienia, odnoszące się do rozmierzania kraju, a zatem z dziedziny geodezji wyższej. Czynię to dla wypełnienia luki, jaka istnieje między dziełami, traktującymi zagadnienia teoretyczne geodezji wyższej a podręcznikami geodezji niższej. Wypełnienie owej luki ma szczególne znaczenie dla czytelników, którzy nie mieli sposobności studiować geodezji wyższej i mogliby wobec tego przeprowadzać w sposób niewłaściwy pewne pomiary, znajdujące się na pograniczu obu umiejętności.

Z tych względów dałem książce tytuł »Geodezja«, umieszczając w nawiasie, dla uniknięcia nieporozumień »Miernictwo«; dodatek ten objaśnia czytelnika wyraźnie, że treść książki nie odnosi się wyłącznie do geodezji wyższej.

Rozdział II książki zawiera krótki zarys rachunku wyrównawczego, którego wzory są wyprowadzone z założeń Gaussa, podanych w jego dziele »*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*«, zatem inaczej, niż w ogłoszonym przeze mnie w r. 1923 »Rachunku wyrównawczym wedle metody najmniejszych kwadratów«.

Rozdział III jest poświęcony optyce geometrycznej i niektórym szczegółom optyki fizycznej. Jest on potrzebny dla zrozumienia działania nowszych przyrządów geodezyjnych (teodolitów, odległownic i przyrządów niwelacyjnych). Ponieważ zauważyłem, że dowody odnoszące się do teorii lunety z soczewką ogniskującą są w podręcznikach nowszych bardzo długie i nieprzejrzyste, przeto podałem dowód własny, stosunkowo krótki a zarazem ścisły.



W dalszych rozdziałach zachowałem co do treści kolejność, w jakiej geodezja jest wykładana w Politechnice Lwowskiej.

Uważny czytelnik spostrzeże zapewne, że niektóre rozdziały książki są traktowane obszerniej. Odnosi się to szczególnie do triangulacji, poligonometrii i tyczenia tras. Bardziej szczegółowe opracowanie tych działów tłumaczy się ich ważnością dla praktyki.

W poligonometrii omówiłem ściśle wyrównanie poligonów, podając specjalne kryterium, odnoszące się do obioru a priori średnich błędów (wag) spostrzeżeń niejednorodnych.

Ze względu na rozpowszechnienie maszyn do rachowania (arytmometrów) podaję wzory, odnoszące się do triangulacji i poligonometrii nie tylko — jak dawniej — w formie, przydatnej do rachunku logarytmami, lecz także i do rachunku maszynowego. Z tych samych powodów znajdzie czytelnik w mej książce zastosowanie wzorów krakowianowych. Ponieważ autor ich, prof. T. Banachiewicz, podał je w ostatecznej formie (przydatnej do rachunku wyrównawczego) podczas druku książki, omówiłem metodę tę krótko w specjalnym dodatku.

Uważałem również za pożądane omówienie szczegółowe metody tyczenia tras, traktowane zazwyczaj w podręcznikach zbyt ogólnikowo. W paragrafie końcowym tego rozdziału (XVI) podałem metodę Nalenz-Höfera (badanie istniejących i projektowanie w ich miejsce, właściwych luków kolejowych), która obecnie ma szerokie zastosowanie w praktyce (szczególnie w Niemczech).

Rozdział XV, fotogrametrię, opracował inż. dr. E. Wilczkiewicz, profesor Politechniki Lw., wybitny specjalista w tej dziedzinie, przez co ułatwił mi w wysokim stopniu spełnienie postawionego sobie zadania.

Tekst i dowody starałem się podać w formie przystępnej, o ile na to ścisłość dowodu pozwalała.

Mam nadzieję, że opracowana przeze mnie książka spełni swe zadanie wobec trzech kategorii czytelników. Uzupełni ona wiadomości starszych inżynierów w dziedzinie nowych przyrządów i metod, da studentom politechnik należyłą podstawę do rozwiązywania teoretycznych i praktycznych zagadnień geodezyjnych, a wreszcie może być pomocną uczniom technicznych szkół zawodowych.

Rysunki w tekście opracowali Pp. Władysław Biały, Engelbert Żydek i Roman Gürtler, korektę zaś przeprowadzili inż. Leopold Grzyb i inż. Józef Kozuchowski; za przeprowadzenie tych niewdzięcznych prac dziękuję im serdecznie.

Za podjęcie się wydania mej książki w czasach dla wydawnictw niezbyt korzystnych składam Komitetowi Wydawniczemu Podręczników Akademickich przy Min. W. R. i O. P. gorące podziękowanie.

Osobne podziękowanie składam Kasie im. Mianowskiego za staranne wydanie książki.

*K. Weigel*

Lwów, w lipcu 1938.



# SPIS RZECZY

## ROZDZIAŁ I

### UWAGI WSTĘPNE

Par.	Str.
1. Krótki rys historyczny prac geodezyjnych . . . . .	1
2. Miary długości, powierzchni i kąta . . . . .	3
3. Dwa zasadnicze rodzaje pomiarów . . . . .	6

## ROZDZIAŁ II

### ZARYS RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO

1. Rodzaje błędów spostrzeżeń . . . . .	7
2. Prawo przenoszenia się błędów. Błędy średnie i wagi spostrzeżeń . . . . .	8
3. Rodzaje rachunku wyrównawczego. Równania błędów . . . . .	10
4. Ogólna zasada wyrównania: błędy średnie niewiadomych mają być najmniejsze . . . . .	11
5. Jednostkowy błąd średni $\mu_0$ , utworzony z błędów pozornych $\lambda$ . Równania normalne, wynikające z warunku $\mu_0^2 = \min$ . . . . .	17
6. Błędy średnie funkcji wielkości wyrównanych . . . . .	19
7. Rozwiązanie równań normalnych i równań wag (Hansena) sposobem Gaussa . . . . .	20
8. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich (jako szczególnego przypadku spostrzeżeń pośrednich). Pary spostrzeżeń . . . . .	21
9. Przykład wyrównania spostrzeżeń pośrednich. — Badanie klina mierniczego . . . . .	23
10. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych . . . . .	28

## ROZDZIAŁ III

### O P T Y K A

1. Prawa odbicia i załamania się promieni świetlnych . . . . .	31
2. Przejście promieni świetlnych przez pryzmaty, używane w geodezji . . . . .	32
3. Dalsze rozważania nad biegiem promieni w pryzmatach . . . . .	34
4. Przesunięcie promieni przy przejściu przez równoległe płytki szklane . . . . .	36
5. Przejście promieni świetlnych przez soczewki (dioptryka) . . . . .	38
6. Składanie soczewek. Soczewki wypadkowe (równoważne) . . . . .	40
7. Aplanatyczność i achromatyczność . . . . .	41
8. Oko ludzkie . . . . .	43
9. Akomodacja oka. Szklą oczne (binokle) . . . . .	45
10. Lupa . . . . .	46
11. Luneta geodezyjna . . . . .	48
12. Lunety nowszego typu (Wilda, względnie Zeisa) . . . . .	56
13. Oś celowa lunety . . . . .	59
14. Mikroskopy . . . . .	66



## ROZDZIAŁ IV

NAJPROSTSZE PRZYRZĄDY I CZYNNOŚCI MIERNICZE.  
ZDJĘCIA MAŁYCH OBSZARÓW

Par.		Str.
1.	Libela . . . . .	69
2.	Noniusz . . . . .	74
3.	Zaznaczenie punktów w terenie . . . . .	75
4.	Tyczenie linii prostej (bez użycia lunety) . . . . .	76
5.	Pomiar długości . . . . .	78
6.	Pomiar małych obszarów . . . . .	85
7.	Zdjęcia stolikowe . . . . .	88

## ROZDZIAŁ V

## OBLICZANIE POWIERZCHNI. PLANIMETRY. PODZIAŁ I ZAMIANA GRUNTÓW

1.	Obliczanie powierzchni z wymiarów na gruncie . . . . .	95
2.	Obliczenie powierzchni z wymiarów na planie . . . . .	99
3.	Teoria planimetrów wodzikowych . . . . .	99
4.	Planimetry biegunowe w pierwotnej i ulepszonej postaci . . . . .	101
5.	Wyznaczenie stałych planimetru biegunowego . . . . .	105
6.	Inne typy planimetrów wodzikowych . . . . .	107
7.	Planimetr harfowy . . . . .	114
8.	Dokładność planimetrów . . . . .	114
9.	Uwzględnienie skurczu papieru . . . . .	115
10.	Podział i zamiana gruntów . . . . .	116

## ROZDZIAŁ VI

## NIWELACJA GEOMETRYCZNA

1.	Pojęcia wstępne. Geoida. Rodzaje wzniesień i sposoby ich wyznaczania . . . . .	123
2.	Niwelacja geometryczna dla celów technicznych, czyli zwyczajna . . . . .	124
3.	Instrument niwelacyjny . . . . .	125
4.	Łaty niwelacyjne . . . . .	128
5.	Sprawdzenie i rektyfikacja instrumentu niwelacyjnego . . . . .	129
6.	Ciąg niwelacyjny . . . . .	135
7.	Znaki wysokości, repery . . . . .	138
8.	Profil podłużny . . . . .	139
9.	Niwelacja powierzchniowa . . . . .	141
10.	Rozwiązywanie niektórych zagadnień inżynierskich za pomocą niwelacji . . . . .	144
11.	Błędy występujące podczas niwelacji . . . . .	145
12.	Zastosowanie rachunku wyrównawczego do niwelacji . . . . .	150
13.	Niwelacja ścisła, czyli precyzyjna . . . . .	157

## ROZDZIAŁ VII

## TEODOLIT. INSTRUMENT UNIWERSALNY

1.	Uwagi wstępne. Opis przyrządu . . . . .	161
2.	Błędy instrumentalne teodolitu i ich wpływ na pomiar kątów poziomych . . . . .	163
3.	Metody pomiaru kątów poziomych . . . . .	176



Par.	Str.
4. Użycie teodolitu w polu . . . . .	182
5. Mikroskopy teodolitowe . . . . .	184

## ROZDZIAŁ VIII

## TRIANGULACJA

## CZĘŚĆ PIERWSZA

## NIECO O ROZMIERZANIU KRAJU

1. Uwagi wstępne . . . . .	189
2. Sieci państwowe . . . . .	190

## CZĘŚĆ DRUGA

## ZAGĘSZCZENIE PAŃSTWOWEJ SIECI TRIANGULACYJNEJ

3. Układy współrzędnych . . . . .	192
4. Zasady rachunku współrzędnych . . . . .	192
5. Wcinanie w przód . . . . .	196
6. Dokładność wcinania w przód . . . . .	200
7. Wcinanie wstecz . . . . .	201
8. Dokładność wcinania wstecz . . . . .	207
9. Zagadnienie Hansena . . . . .	209
10. Odszukiwanie punktów triangulacyjnych . . . . .	210
11. Zagęszczenie sieci triangulacyjnej państwowej w celu oparcia na niej sieci poligonowej . . . . .	211
12. Utrwalenie (stabilizacja) i oznaczenie (sygnalizacja) punktów triangulacyjnych . . . . .	215
13. Redukcja pomiarów mimośrodkowych (ekscentrycznych) . . . . .	219

## CZĘŚĆ TRZECIA

## TRIANGULACJA LOKALNA NIEZALEŻNA (TJ. NIE NAWIĄZANA DO SIECI PAŃSTWOWEJ)

14. Uwagi wstępne. Najczęściej spotykane typy sieci lokalnych . . . . .	224
15. Obiór podstawy i siatki podstawowej . . . . .	227
16. Pomiar długości podstawy . . . . .	229
17. Obserwacje kątowe w siatkach lokalnych i ich wyrównanie . . . . .	231
18. Zorientowanie niezależnej sieci lokalnej. Wyznaczenie azymutu . . . . .	233
19. Sieci lokalne oparte na punktach triangulacji państwowej . . . . .	235

## ROZDZIAŁ IX

## POLIGONOMETRIA

1. Zadanie i rodzaje ciągów poligonowych . . . . .	240
2. Założenie i utrwalanie punktów poligonowych . . . . .	241
3. Pomiar i wyrównanie ciągu poligonowego . . . . .	242
Punkty węzłowe . . . . .	252
4. Sposoby nawiązania ciągów poligonowych . . . . .	254
5. Sieci poligonowe . . . . .	255
6. Wykrywanie grubych błędów w poligonach . . . . .	256



Par.		Str.
7.	Linie pomiarowe. Punkty posiłkowe (łączne). Zdjęcia szczegółów. Szkic polowy	257
8.	Obliczenie współrzędnych punktów posiłkowych . . . . .	258
9.	Poligony miejskie . . . . .	262
10.	Kolejność czynności przy wykonywaniu zdjęć metodą poligonową . . . . .	264
11.	Dokładność ciągów poligonowych . . . . .	265
12.	Ciągi busolowe . . . . .	269
13.	Dokładność ciągu busolowego . . . . .	271
14.	Ścisłe wyrównanie poligonu . . . . .	273

## ROZDZIAŁ X

## TACHIMETRIA

1.	Ogólna zasada odległownic optycznych (dalmierzy) . . . . .	279
2.	Odległownice geodezyjne . . . . .	281
3.	Teoria optyki tachimetrów zwyczajnych . . . . .	282
4.	Wyznaczenie stałych odległownic . . . . .	288
5.	Uogólnienie wzorów na odległość . . . . .	293
6.	Obliczenie $D$ i $h$ . . . . .	295
7.	Dokładność zdjęć tachimetrycznych . . . . .	299
8.	Tachimetry redukcyjne . . . . .	303
9.	Tachimetria precyzyjna Tichy'ego . . . . .	307
10.	Wykonanie zdjęć tachimetrycznych . . . . .	309
11.	Optyczny pomiar odległości przy zmiennym kącie paralaktycznym . . . . .	314

## ROZDZIAŁ XI

ZDJĘCIA METODĄ BIEGUNOWĄ Z ZASTOSOWANIEM ODLEGŁOWNIC  
(DALMIERZY) PRECYZYJNYCH

1.	Porównanie metody biegunowej z metodą rzędnych i odciętych . . . . .	321
2.	Odległownice precyzyjne . . . . .	322
3.	Dokładność odległownic precyzyjnych . . . . .	327
4.	Uwagi, dotyczące wykonania zdjęć metodą biegunową . . . . .	328

## ROZDZIAŁ XII

## NANOSZENIE ZDJĘĆ (KARTOWANIE)

1.	Nanoszenie zdjęć małych obszarów . . . . .	329
2.	Nanoszenie zdjęć większych obszarów . . . . .	330
3.	Pantograf. Cyrkiel redukcyjny . . . . .	332

## ROZDZIAŁ XIII

## TRYGONOMETRYCZNY POMIAR WYSOKOŚCI

1.	Uwagi wstępne . . . . .	334
2.	Pomiar kątów zenitalnych, wzgl. wysokościowych . . . . .	334
3.	Obliczenie kątów wysokościowych i zenitalnych . . . . .	336
4.	Pomiar i obliczenie kątów pionowych z uwzględnieniem korekcji libeli . . . . .	340
5.	Przybliżona teoria trygonometrycznego pomiaru wysokości . . . . .	340



Par.	Str.
6. Uwagi, dotyczące wykonania pomiaru w praktyce . . . . .	344
7. Dokładność trygonometrycznego pomiaru wysokości . . . . .	345
8. Sieci wysokościowe i ich wyrównanie . . . . .	347
9. Zastosowanie do nautyki. Głębokość i odległość horyzontu . . . . .	350

ROZDZIAŁ XIV

BAROMETRYCZNY POMIAR WYSOKOŚCI

1. Wyprowadzenie ścisłej formuły barometrycznej . . . . .	352
2. Sposoby obliczenia formułą ścisłą . . . . .	356
3. Uproszczone formuły barometryczne . . . . .	357
4. Przyrządy do barometrycznego pomiaru wysokości . . . . .	361
5. Wykonanie pomiaru barometrycznego . . . . .	369
6. Dokładność pomiarów barometrycznych . . . . .	372

ROZDZIAŁ XV

FOTOGRAMETRIA

1. Krótki rys historyczny . . . . .	375
2. Wyposażenie fotogrametryczne polowe . . . . .	375
3. Orientacja wewnętrzna i zewnętrzna . . . . .	379
4. Wyznaczenie współrzędnych punktów . . . . .	380
5. Przyrządy do opracowania zdjęć fotogrametrycznych . . . . .	384
6. Przetworniki . . . . .	391
7. Prace polowe i biurowe . . . . .	392
8. Triangulacja fotogrametryczna . . . . .	397

ROZDZIAŁ XVI

TYCZENIE TRAS

1. Usytuowanie trasy w terenie . . . . .	399
2. Tyczenie prostych . . . . .	400
3. Tyczenie łuków kołowych. Uwagi wstępne . . . . .	407
4. Tyczenie głównych punktów łuku . . . . .	407
5. Tyczenie punktów pośrednich łuku . . . . .	411
6. Tyczenie łuków w tunelach . . . . .	420
7. Niektóre sposoby tyczenia łuków używane w budownictwie wodnym . . . . .	421
8. Łuki kosztowe . . . . .	423
9. Tyczenie krzywizny przejściowych (kolejowych) . . . . .	426
10. Badanie krzywizny toru istniejącego. Nowe sposoby tyczenia łuków z krzywiznami przejściowymi . . . . .	431

D O D A T E K

Przykład szczegółowy równoczesnego wyznaczenia współrzędnych dwu punktów . . . . .	445
Literatura . . . . .	463



## ERRATA

- Str. 14, wiersz 2 od góry, zamiast:  $\mu_x$  ma być:  $\mu_x^2$   
„ 43, na rys. 18, zamiast:  $\Theta$  ma być:  $\Theta_{1,2}$   
„ 252, wiersz 1 od góry, skreślić § 3.  
„ 305, na rys. 239 b,  $h$  ma sięgać do dołu  
„ 403, wiersz 2 od góry, zamiast: odpowiedno ma być: odpowiednio
-



## ROZDZIAŁ I

### UWAGI WSTĘPNE

#### § 1. Krótki rys historyczny prac geodezyjnych

Pierwszy znany nam pomiar całokształtu ziemi (przyjętej jako kula) przeprowadził około r. 220 przed Chr. uczony aleksandryjski Eratosthenes na przestrzeni Aleksandria-Assuan (dziś Syene), otrzymując na kwadrant wielkiego koła (równika) około 11 560 km. Następny pomiar Posidoniusa dokonany między Aleksandrią a wyspą Rodos (135-51 przed Chr.) dał wynik nieco dokładniejszy (11 100 km). Znacznie później, bo około r. 827 po Chr., przeprowadzili podobny pomiar Arabowie koło Bagdadu, uzyskując około 11 000 km na wspomnianą wielkość.

Dopiero w XVII stuleciu wylania się myśl przyjęcia dla kształtu ziemi spłaszczonej elipsoidy obrotowej, a to pod wpływem teoretycznych rozważań takich umysłów, jak Kopernik, Galileusz, Kepler, Huygens i Newton. Z pomiarów astronomiczno-geodezyjnych, przeprowadzonych w latach 1662-1720 przez francuskiego astronoma Picarda, podczas których zastosowano poraz pierwszy na wielką skalę metodę triangulacji, wynikało jednak (z powodu zbyt mało dokładnych obserwacji), że kształt ziemi jest wydłużony ku biegunom.

Pomiar stopni południka w Peru i w Laponii (1735-1743) rozstrzygnął jednak sprawę na korzyść teoretyków wykazując, że ziemia jest zbliżona do spłaszczonej elipsoidy obrotowej. Do podobnych wyników doszedł także i Laplace, posługując się nie tylko pomiarami astronomiczno-geodezyjnymi, lecz także i obserwacjami przyspieszenia ziemskiego, przy pomocy których to ostatnich można — jak wykazał Clairaut (1743) — wyznaczyć wielkość  $p$  spłaszczenia ziemi na biegunach, przy czym związek  $p$  z półosiami elipsoidy obrotowej jest następujący:

$$p = \frac{a - b}{a}$$

gdzie  $a$  jest wielką, zaś  $b$  małą półosią elipsoidy.

W r. 1841 wyznaczył Bessel z różnych pomiarów stopni południków wymiary elipsoidy; niektóre państwa przyjęły ją jako elipsoidę odniesienia przy rozmierzaniu kraju. W późniejszych czasach powstały na podstawie podobnych pomiarów elipsoidy Clarke'a, Walbecka i inne.



Międzynarodowa Unia Geodezyjno-geofizyczna na kongresie w Madrycie (1927 roku) uchwaliła, że przy rozmierzaniu kraju należy przyjąć jako powierzchnię odniesienia elipsoidę Hayforda ( $a = 6\,378\,288$  m,  $p = \frac{1}{297}$ ).

Jako właściwą powierzchnię ziemi należy uważać powierzchnię mórz w spoczynku (z pominięciem przyptywów, odpływów, działania prądów itp. zakłóceń). Powierzchnia ta, zwana *geoidą*, posiada tę własność, że przecina prostopadle kierunki pionów we wszystkich jej punktach.

Jak się jednak okazało, powierzchni tej nie można wyznaczyć opierając się wyłącznie na pomiarach astronomiczno-geodezyjnych, gdyż między położeniem środka ciężkości ziemi a kierunkami pionów istnieje tylko związek dynamiczny, a nie geometryczny. Trzeba było zatem posłużyć się pomiarami przyspieszenia ziemskiego (grawimetrycznymi) w punktach rozmieszczonych gęsto na powierzchni ziemi.

Dzięki skonstruowanemu w ostatnich czasach aparatowi wahadłowemu inż. Vening-Meinesza można dziś mierzyć przyspieszenie ziemskie także i na morzu w odpowiednio zanurzonych łodziach podwodnych. Pomiaru te pozwolą nam (w oparciu o twierdzenie Stokesa) w niedalekiej przyszłości wyznaczyć, w połączeniu z pomiarami astronomiczno-geodezyjnymi, właściwy kształt geoidy (ziemi).

Przechodząc do omawiania prac pomiarowych, wykonywanych dla celów praktycznych należy zaznaczyć, że tak wzorowe — jak na owe czasy — budowle wodne prastarej Mezopotamii, jak i odtwarzanie często przez Nil niszczonej granic własności w starym Egipcie, wymagało przeprowadzania dokładnych pomiarów geometrycznych. W Rzymie wykonywali pomiary agrimensori czyli gromatici. Niektórzy z nich pozostawili po sobie pisma dotyczące pomiarów. Najstarszym był Sextus Julius Frontinus w pierwszym wieku po Chr. (praetor, konsul i wódz w Brytanii).

Zdarzeniem o wielkim znaczeniu było wynalezienie na początku XVII stulecia przez Praetoriusa stolika mierniczego, oraz nieco później przez Nuneza noniusza, urządzenia, przy pomocy którego dokonujemy jeszcze po dzień dzisiejszy odczyty na przyrządach pomiarowych.

W XIX stuleciu rozwinęły się metody pomiarowe bardzo znacznie, dzięki przeprowadzanym podówczas pomiarom dla celów podatkowych. Z wzrostem cen gruntów stół mierniczy ustąpił ostatecznie miejsca dokładniejszej metodzie poligonowej, a zwiększające się z dniem każdym potrzeby techniczne wpłynęły dodatnio na rozwój różnych działów miernictwa jak niwelacji, tachimetrii, a następnie i fotogrametrii. Silnemu rozwojowi optyki w czasach ostatnich zawdzięczamy powstanie odległownic precyzyjnych i związanej z nimi nowej biegunowej metody pomiarowej.

Najdawniejsze znane nam dzieło o miernictwie autora polskiego jest »Vocitanti Geometriae Practicae seu Artis mensurationum Tractatus« napisane około roku 1450 przez Marcina z Żórawicy (zwanego także Martinus Polonus). O dawnych pomiarach geometrycznych w Polsce pisał Czapski w sposób następujący:



»Za Zygmunta Augusta nietylko doskonaly stosunek ekonomiki politycznej i gospodarczej z pomiarem ziemnym czyniono, ale w liście Przerębskiego podkanclerzego z 19 lipca 1554 r. czytamy wyznanie, że uczyć się trzeba tej nauki mierniczej nie od naszych przodków, ale z ksiąg Rzymian: że król posłał Piotrowi Gallandowi i Adrianowi Turnekowi za wydanie dzieł granicznych pisarzy, że przysłanie tych ksiąg królowi obiecuje pożytki i światło w naszych sprawach granicznych; na koniec, że zaczęta nauka o granicach przez Ocieckiego kanclerza będzie wydrukowaną«. Niestety dzieło to, którego autorem miał być kanclerz Jan Ociecki z Ocieszyna—o ile można sprawdzić—nie ukazało się wcale. Natomiast w r. 1566 ukazała się książka Stanisława Grzepskiego pt. Geometria tj. Miernicka Nauka po Polsku krótko napisana z Graeckich y Łacińskich ksiąg (wybijał Łazarz Andrychowic, Kraków). W dedykacji narzeka autor na nieznamość u nas miernictwa pisząc: »że w Polsce był tylko miernik na Podgórzu, ale już był umarł. Przeto, kiedy na Litwie chciano mierzać imienia slano do Mazowsza po miernika«.

Z późniejszych autorów należy wymienić prof. Daniela Schwentera (1664), Cieciszowskiego Jana Colonnę (1786), Ignacego Zaborowskiego (1820), A. Szachina (1829), Wrześniowskiego (1841), H. Muklanowicza (1852) i St. Jarmuda.

W nowszych czasach ukazały się następujące dzieła (polskie) traktujące o miernictwie:

1. GUSTAWICZ BR., Rachunek wyrównania błędów spostrzeżeń na podstawie metody najmniejszych kwadratów. Kraków 1896.
2. LASKA W. i WIDT S., Miernictwo, cz. I i II. Lwów 1903.
3. EHRENFUCHT W., Miernictwo. Warszawa 1922.
4. WEIGEL K., Rachunek wyrównawczy wedle metody najmniejszych kwadratów, oraz jego zastosowanie przy rozmiarowaniu kraju. Lwów-Warszawa 1923.
5. WARCHAŁOWSKI E., Rachunek wyrównania według metody najmniejszych kwadratów. Warszawa 1923.
6. WARCHAŁOWSKI E., Niwelacja geometryczna. Warszawa 1926.
7. DZIAKIEWICZ WL., Miernictwo. Warszawa-Kraków 1927.
8. KLUŻNIAK ST., Geodezja niższa. Warszawa 1928.
9. WILCZKIEWICZ E., Zasady zdjęć fotogrametrycznych. Lwów 1930.
10. BRYLA, Podręcznik Inżynierski, 4 tomy. Lwów-Warszawa 1927 - 1936:
  - a) WOJTAN WL., Miernictwo, cz. I (tom I),
  - b) WEIGEL K., Miernictwo, cz. II i Rachunek wyrównawczy (tom I),
  - c) WEIGEL K., Fotogrametria lotnicza czyli aerofotogrametria (tom IV),
  - d) WOJTAN WL., Zdjęcia miast (tom IV).

## § 2. Miary długości, powierzchni i kąta

Przez pomiar pewnej długości rozumiemy wyznaczenie jej stosunku do wielkości tego samego rodzaju, uważanej za jednostkę. Jednostkę tę nazywamy *miarą*.

W miernictwie posługujemy się miarą długości, powierzchni i kąta.



Miarą długości, przyjętą przez prawie wszystkie państwa, jest *metr*. Istnienie tej miary zawdzięczamy Francji, której Zgromadzenie Narodowe uchwaliło w r. 1791 uważać za miarę długości 1 metr, równy  $\frac{1}{10\,000\,000}$  ćwiartki południka (w przekonaniu, że ziemia jest ściśle elipsoidą obrotową). W ten sposób chciano uzyskać absolutną miarę długości. Obowiązującą dziś długość 1 metra wyznaczono na podstawie pomiaru części południka paryskiego, wykonanego przez Méchaina i Delambre'a w latach 1792 - 1798; długość jego wynosi 443,296 linii paryskich (dawna miara używana we Francji). Jako wzorzec przyjętej miary sporządzono tzw. metr archiwalny. Jest to prostokątna sztaba platynowa o przekroju  $4 \times 25$  mm; długość jednego metra określa odstęp między obu końcami metra archiwalnego przy temperaturze  $0^{\circ}$  C. Na podstawie uchwały generalnej konferencji Międzynarodowego Komitetu Miar i Wag w r. 1889 sporządzono specjalny prototyp metra, który uznano jako międzynarodową miarę długości. Prototyp ten, przechowywany w Bureau des Poids et Mesures



Rys. 1.

w Sèvres koło Paryża, jest sporządzony ze stopu platyny (90%) i irydium (10%). Przekrój jego ma kształt specjalny, zbliżony do litery H (rys. 1), a długość 1 metra jest zawarta między dwiema kreskami umieszczonymi w osi obojętnej przekroju<sup>1)</sup>. Zarazem sporządzono

z tego samego stopu 30 kopij, które porównano jak najdokładniej z prototypem sewrskim. Kopie te rozdzielono między poszczególne państwa. Służą one do sporządzania metrów normalnych o przekroju  $10 \times 10$  mm, którymi znowu kontrolujemy komparatory.

Późniejsze pomiary południka ziemskiego wykazały różnicę w długości ustalonej ćwiartki południka dochodzącą do 2000 metrów. Metr jednak pozostał w dalszym ciągu miarą długości.

W miernictwie używane są następujące części, względnie wielokrotności metra:

- 1 dm (decymetr) = 0,1 m,
- 1 cm (centymetr) = 0,01 m,
- 1 mm (milimetr) = 0,001 m,
- 1  $\mu$  (mikron) = 0,001 mm,
- 1 km (kilometr) = 1000 m.

Stosunek dawnych miar, używanych w Polsce, do przyjętego metra jest następujący:

<sup>1)</sup> Ponieważ prototyp ten nawet o tak korzystnym przekroju i stopie może z biegiem lat ulec drobnej zmianie, przeto w r. 1892 Michelson pomierzył jego długość metodą interferencyjną, przy czym skonstatował, że 1 metr równa się  $1553\,163,5 \lambda$  długości fali czerwonego światła kadmowego przy  $15^{\circ}$  C i 760 mm ciśnienia powietrza. Późniejsze pomiary (rok 1907) wykazały drobną różnicę, dając w tych samych warunkach wynik:  $1 \text{ m} = 1553\,164,13 \lambda$ . W ten sposób ustalono definitywną długość metra.



1 sążen = 3 łokciom = 6 stopom = 12 ćwierciom = 72 calom = 864 liniom = 1,728 m.

1 m = 0,5787 sążni = 1,7361 łokci = 3,4722 stóp = 6,94445 ćwierci = 41,6667 cali = 500,0003 linii.

Z innych miar (obcych) należy wymienić:

1 sążen wiedeński = 1,896484 m,

1 stopa pruska = 0,3138535 m,

1 stopa rosyjska = 1 stopie angielskiej = 0,3048 m.

#### MIARY POWIERZCHNI

Zasadniczą miarą powierzchni jest 1 metr kwadratowy = 1 m<sup>2</sup>.

1 m<sup>2</sup> = 100 dm<sup>2</sup> = 10 000 cm<sup>2</sup> = 1 000 000 mm<sup>2</sup>,

1 a (ar) = 100 m<sup>2</sup>,

1 ha (hektar) = 100 a = 10 000 m<sup>2</sup>,

1 km<sup>2</sup> = 100 ha = 1 000 000 m<sup>2</sup>.

Miary powierzchni nowo-polskie:

pręt kw. = 18,6624 m<sup>2</sup>,

mórg = 300 prętom kw. = 55 a 98,72 m<sup>2</sup>,

włoka = 30 morgom = 16 ha 79 a 61,6 m<sup>2</sup>.

Dawne miary austriackie:

sążen kw. = 3,596652 m<sup>2</sup>,

(1 m<sup>2</sup> = 0,278036 sążni kw.).

Miary powierzchni pruskie:

1 mórg = 25 a 53,224 m<sup>2</sup>,

Miary powierzchni rosyjskie:

1 sążen kw. = 4,552249 m<sup>2</sup>,

1 dziesięcina = 2400 sążni kw. = 1 ha 9 a 25,40 m<sup>2</sup>.

#### MIARY KĄTOWE

Matematyka określa kąt jako stosunek łuku  $l$  do promienia  $r$ :

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Miarę przy tych założeniach stanowi kąt zwany radianem, którego łuk równa się promieniowi (zatem  $\alpha = 1$ ).

W miernictwie pomiar kątów skuteczniamy w innych jednostkach, tzw. miarach stopniowych, których rozróżniamy dwa rodzaje:

a) System sześćdziesiątkowy (seksagesimalny). Miarą jest tu stopień (<sup>o</sup>) odpowiadający  $\frac{1}{360}$  części kąta pełnego. Stopień dzielimy na 60' (minut), a minutę na 60'' (sekund). Kąt w stopniach oznaczamy  $\alpha^o$ .

b) System setkowy (centigradowy). Miarą jest tu stopień (<sup>d</sup>) odpowiadający  $\frac{1}{400}$  części kąta pełnego. Stopień dzielimy na 100' (minut setk.), a minutę setk. na 100'' (sekund setk.). Kąt w stopniach setk. oznaczamy  $\alpha^d$ .

Między kątem  $\alpha^o$  w mierze stopniowej a kątem  $\alpha$  w mierze radianowej zachodzi następujący związek:  $\alpha^o : \alpha = 360^o : 2\pi$ ,

zatem 
$$\alpha^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \alpha = \rho^{\circ} \alpha,$$

analogicznie 
$$\alpha' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} \alpha = \rho' \alpha$$

i 
$$\alpha'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} \alpha = \rho'' \alpha.$$

Wartości kąta  $\rho$  w stopniach, minutach i sekundach są:

a) $\rho^{\circ} = 57^{\circ}, 295\ 779\ 51$	b) $\rho^d = 63^d, 661\ 977\ 24$
$\rho' = 3\ 437', 746\ 770\ 78$	$\rho' = 6\ 366', 197\ 723\ 68$
$\rho'' = 206\ 264'', 806\ 247\ 10$	$\rho'' = 636\ 619'', 772\ 367\ 58.$

### § 3. Dwa zasadnicze rodzaje pomiarów

Pomiary geodezyjne przeprowadzamy na powierzchni ziemi, przy czym wykonujemy albo zdjęcie rzutu prostokątnego pewnego obszaru na obraną powierzchnię odniesienia, albo wyznaczamy różnicę wysokości jego punktów lub też ich wysokości nad poziom morza. Rozróżniamy zatem pomiary w sensie poziomym, krótko *poziome* i pomiary w sensie pionowym czyli *pionowe* lub *wysokościowe*.

Omówimy naprzód sprawę zdjęć poziomych.

Dla wykonania rozmierzenia pewnego państwa należy przyjąć dla pomiarów poziomych spłaszczoną elipsoidę obrotową (p. § 1 str. 1 i 2) jako powierzchnię odniesienia. Gdy obszar zdjęcia wynosi około 15000 km<sup>2</sup>— wystarczy przyjęcie kuli o krzywiznie odpowiadającej średniej krzywiznie zdejmowanego obszaru. Jeżeli zaś obszar zdjęcia nie przekracza 50 km<sup>2</sup>, można pomiary poziome przeprowadzać tak, jakgdyby stanowił on płaszczyznę. Osobną grupę tworzą zdjęcia nawet bardzo długich, lecz stosunkowo bardzo wąskich pasów (zdjęcia dla celów inżynierskich), które mogą być również przeprowadzane i obliczane jak na płaszczyźnie.

Inaczej natomiast przedstawia się sprawa pomiarów wysokościowych. I tak, jeżeli poprowadzimy w pewnym punkcie  $A$  na powierzchni ziemi płaszczyznę styczną, to w odległości zaledwie 1 km odległość między powierzchnią ziemi (przyjętą jako kula) a wspomnianą płaszczyzną styczną wyniesie już 8 cm.

Pomiary wysokościowe należy zatem przeprowadzać wedle innych kryteriów, mając głównie na uwadze ich dokładność.

Ponieważ spostrzeżenia wszelkie są obarczone zawsze nieuniknionymi błędami, przeto w następnym rozdziale omówimy zasady rachunku wyrównawczego.



## ROZDZIAŁ II

# ZARYS RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO

### § 1. Rodzaje błędów spostrzeżeń

Choćbyśmy jak najstaranniej obserwowali wielkości fizyczne, nie potrafimy uzyskać ich wartości prawdziwych, czyli bezbłędnych, musimy się zatem pogodzić z faktem, że nasze spostrzeżenia są obarczone pewnymi *błędami*.

W praktyce geodezyjnej wykonujemy z reguły spostrzeżenia z odpowiednią kontrolą, tj. w większej ilości, niż to jest koniecznie potrzebne. Aby je z sobą odpowiednio uzgodnić, stosujemy do nich rachunek wyrównawczy.

Spostrzeżenia, które mają być wyrównywane, muszą być jednak wolne od błędów *grubych*, czyli przeoczeń i błędów *systematycznych*, tj. błędów, związanych ściśle z okolicznościami, towarzyszącymi pomiarom; natomiast jedyne błędy, jakimi spostrzeżenia te mogą być obarczone, to błędy, których przyczyny zależą od okoliczności zmieniających się w czasie między spostrzeżeniami, tak zwane błędy *przypadkowe*.

Rozróżniamy błędy przypadkowe prawdziwe  $\varepsilon$  i pozorne  $\lambda$  czyli poprawki spostrzeżeń  $L$ .

Zazwyczaj przyjmuje się, że błędy prawdziwe  $\varepsilon$  spostrzeżeń  $L$  podlegają prawu Gaussa, tzn. że  $P_\varepsilon$ , prawdopodobieństwo pojawienia się ich w szeregu spostrzeżeń, jest określone związkiem:

$$P_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (1)$$

przy czym parametr  $h$  jest *miarą dokładności* spostrzeżeń, zaś  $\varphi(\varepsilon)$  nazywamy funkcją prawdopodobieństwa pojawienia się błędów, która — jak widać — jest parzystą, tj.  $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ .

Parametr  $h$ , względnie  $h^2$ , charakteryzujący nam dany szereg błędów, można wyznaczyć ze związku

$$h^2 = \frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]} \quad (\text{ściśle dla } n = \infty), \quad (2)$$

przy czym  $n$  oznacza ilość spostrzeżeń, zaś  $[\varepsilon\varepsilon]$  sumę kwadratów ich błędów (którą w ten sposób piszemy za Gaussem w miejsce  $\Sigma\varepsilon^2$ ).

Zamiast określać dokładność szeregu spostrzeżeń parametrem  $h$ , można to uczynić w bardziej przejrzysty sposób przy pomocy pewnych błędów, odwrotnie proporcjonalnych do  $h$ , a mianowicie *błędu średniego*  $\mu$ , *przeciętnego*  $\vartheta$  i *prawdopodobnego*  $\rho$ , z których w praktyce używamy tylko błędu średniego  $\mu$ , określonego wzorem

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad (\text{ściśle dla } n = \infty). \quad (3)$$

Błąd ten wybrano z pomiędzy innych dlatego, że wyznaczenie go ze skończonej ilości  $n$  jest stosunkowo najdokładniejsze. W praktyce wyznacza się zatem bezpośrednio tylko błąd  $\mu$ , obliczając w razie potrzeby  $\vartheta$  i  $\rho$  przy pomocy związków:

$$\vartheta = 0,7978846 \mu, \quad \rho = 0,6744898 \mu. \quad (4)$$

## § 2. Prawo przenoszenia się błędów. Błędy średnie i wagi spostrzeżeń

Niech  $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$  będą prawdziwymi wartościami pewnych wielkości, zaś  $L_1, L_2, \dots, L_n$  wartościami ich uzyskanymi ze spostrzeżeń. Jeżeli do pewnej funkcji wielkości  $L'$ , rozwijalnej w szereg Taylora, wstawimy w ich miejsce wartości obserwowane  $L$ , nie uzyskamy prawdziwej wartości owej funkcji, lecz wartość jej obciążoną pewnym błędem  $\varepsilon_f$ .

Aby zdać sobie sprawę z wpływu błędów  $\varepsilon$  poszczególnych spostrzeżeń  $L$  na błąd funkcji  $\varepsilon_f$ , postąpimy następująco. Ponieważ  $L'_i = L + \varepsilon_i$ , przeto ową funkcję możemy przedstawić w formie:

$$f(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \dots, L_r + \varepsilon_r), \quad (5)$$

podczas gdy funkcja ta, po wstawieniu w miejsce  $L'$  spostrzeżeń  $L$ , będzie:

$$f(L_1, L_2, \dots, L_r). \quad (6)$$

Rozwijając związek (5) w szereg Taylora, z opuszczeniem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy, otrzymamy:

$$f(L_1, L_2, \dots, L_r) + f'_1 \varepsilon_1 + \dots + f'_r \varepsilon_r, \quad (7)$$

przy czym  $f'_1, f'_2, \dots$  oznaczają pochodne cząstkowe funkcji względem poszczególnych  $L$ , a więc ogólnie

$$f'_i = \frac{\partial f}{\partial L_i}. \quad (8)$$

Odejmując związek (6) od (7) uzyskujemy błąd funkcji:

$$\varepsilon_f = f'_1 \varepsilon_1 + f'_2 \varepsilon_2 + \dots + f'_r \varepsilon_r. \quad (9)$$

Ponieważ prawdziwe wartości spostrzeżeń, a tym samym i ich błędy prawdziwe nie są znane, przeto związek (9) zastąpimy innym związkiem, w którym nie będzie błędów  $\varepsilon$ , lecz błędy średnie  $\mu$ .



W tym celu wyobraźmy sobie, że wielkości  $L$  nie były raz ale  $n$  razy spostrzegane, przy czym ilość  $n$  dąży do  $\infty$ .

Podnosząc związek (9) do kwadratu otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^2 = & f_1^2 \varepsilon_1^2 + f_2^2 \varepsilon_2^2 + f_3^2 \varepsilon_3^2 + \dots + f_r^2 \varepsilon_r^2 + \\ & + 2f_1 f_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2f_1 f_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \dots + 2f_1 f_r \varepsilon_1 \varepsilon_r + \\ & + 2f_2 f_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \dots + 2f_2 f_r \varepsilon_2 \varepsilon_r + \\ & \dots \dots \dots \\ & + 2f_{r-1} f_r \varepsilon_{r-1} \varepsilon_r. \end{aligned} \quad (10)$$

Prawdopodobieństwo pojawienia się błędów przypadkowych jest jednak określone funkcją parzystą (tzn. że w szeregu spostrzeżeń pojawia się pewien błąd z tym samym prawdopodobieństwem jako dodatni i ujemny), oraz maleje dla rosnącego błędu  $\varepsilon$ .

Jeżeli tedy utworzymy dla  $n = \infty$  sumę wszystkich możliwych  $\varepsilon_r^2$  i podzielimy ją przez ich ilość, która wynosi  $n$ , otrzymamy, ze względu na poprzednią uwagę, po prawej stronie równania tylko same wyrazy kwadratowe, zaś wszystkie podwójne iloczyny będą dążyły do zera:

$$\frac{[\varepsilon_r \varepsilon_r]}{n} = f_1^2 \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{n} + f_2^2 \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n} + \dots + f_r^2 \frac{[\varepsilon_r \varepsilon_r]}{n}. \quad (11)$$

Ponieważ kwadrat błędu średniego równa się sumie kwadratów błędów  $\varepsilon$  podzielonej przez ich ilość, przeto:

$$\mu_r^2 = f_1^2 \mu_1^2 + f_2^2 \mu_2^2 + \dots + f_r^2 \mu_r^2 = [ff\mu\mu]. \quad (12)$$

Związek (12), o bardzo wielkim znaczeniu, może jednak być zastosowany tylko do spostrzeżeń  $L$  od siebie *niezależnych*.

W ścisłym związku z błędami średnimi spostrzeżeń są *wagi p* spostrzeżeń. Są to liczby dodatnie, odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich, zatem

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2}, \quad (13)$$

przyczym jednak mogą być brane w rachubę tylko błędy średnie *jednorodnych* wielkości.

Przyjmując wagę spostrzeżenia, dokonanego w pewnych szczególnych okolicznościach, równą jedności, oznaczamy błąd średni takiego spostrzeżenia przez  $\mu_0$  (przy czym jest zupełnie obojętne, czy rzeczywiście ono znajduje się w omawianym szeregu spostrzeżeń, czy też nie). Błąd średni  $\mu_0$  nazywamy *jednostkowym* błędem średnim.

Biorąc to pod uwagę, możemy związek (13) zmienić na

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{\mu_i^2}. \quad (14)$$

Zatem waga dowolnego spostrzeżenia równa się stosunkowi kwadratu jednostkowego błędu średniego do kwadratu błędu średniego tego spostrzeżenia.



Ponieważ wagi są nam potrzebne *przed* wyrównaniem, a błędy średnie znane nam są dopiero *po* wyrównaniu, przeto w praktyce pomagamy sobie w ten sposób, że przyjmujemy a priori (przed wyrównaniem) błędy średnie z wzorów empirycznych (urobionych na podstawie licznych doświadczeń).

I tak przyjmujemy np., że średni błąd ciągu niwelacyjnego o długości  $d$  km, jest proporcjonalny do pierwiastka z ilości  $d$  kilometrów:

$$\mu_d = \mu_0 \sqrt{d}, \quad (15)$$

przy czym błąd jednostkowy  $\mu_0$  jest zależny od jakości przyrządu i metody pomiaru;  $\mu_0$  jest zatem średnim błędem niwelacji na 1 km, a waga jego  $p = 1$ .

Wobec tego waga ciągu niwelacyjnego o długości 2 km będzie  $p_2 = \frac{1}{2}$ , zaś o długości 4 km  $p_4 = \frac{1}{4}$ , ogólnie  $p = \frac{1}{d}$ .

### § 3. Rodzaje rachunku wyrównawczego. Równania błędów.

a) Najprostszy problem wyrównania ma miejsce, gdy pewną wielkość, której wartość chcemy wyznaczyć, możemy obserwować bezpośrednio. Wyrównanie tego rodzaju spostrzeżeń nazywamy wyrównaniem *spostrzeżeń bezpośrednich*.

Niech  $x$  oznacza wartość (na razie nieznaną) uzyskaną wyrównaniem, zaś  $L$  poszczególne bezpośrednie spostrzeżenia, wówczas dla  $n$  spostrzeżeń istnieje  $n$  związków:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x - L_1 \\ \lambda_2 &= x - L_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_n &= x - L_n, \end{aligned} \quad (16)$$

przy czym poszczególne  $\lambda$  są *poprawkami* spostrzeżeń; nazywamy je także *błędami pozornymi* tych spostrzeżeń. Błędy pozorne  $\lambda$  są w tym przypadku wyrównania różnicami między wielkością wyrównaną  $x$  a spostrzeżeniami  $L$ .

b) Nie zawsze istnieje możliwość bezpośredniego obserwowania pewnej wielkości, poza tym w większej ilości przypadków wyznacza się równocześnie kilka niezależnych od siebie wielkości  $x, y, z, \dots$  (w ogólnej ilości  $k$ ). W tym przypadku mamy do czynienia z wyrównaniem *spostrzeżeń pośrednich*, a związki między spostrzeżeniami i niewiadomymi przybierają ogólną postać:

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= f_1(x, y, z, \dots), \\ L_2 + \lambda_2 &= f_2(x, y, z, \dots), \\ &\dots\dots\dots \\ L_n + \lambda_n &= f_n(x, y, z, \dots), \end{aligned} \quad (17)$$

przy czym ilość  $n$  musi być *większa* od ilości niewiadomych  $k$ , o ile ma zaistnieć problem wyrównania.



Równaniom tym odpowiadają *równania błędów* w formie ogólnej:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= f_1(x, y, z, \dots) - L_1 \\ \lambda_2 &= f_2(x, y, z, \dots) - L_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lambda_n &= f_n(x, y, z, \dots) - L_n.\end{aligned}\tag{18}$$

c) Istnieje wreszcie jeszcze inny problem wyrównawczy, mianowicie gdy poszczególne spostrzeżenia  $L$ , odnoszące się do różnych wielkości, mają spełniać pewne *warunki*. Zadanie wyrównania polega na uzupełnieniu spostrzeżeń takimi poprawkami  $\lambda$ , aby owe warunki zostały spełnione.

Ogólny kształt warunków przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}f_1(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n) &= 0, \\ f_2(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_r(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n) &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

przy czym ilość warunków  $r$  musi być *mniej* od ilości spostrzeżeń  $n$ , o ile ma powstać problem wyrównania. Wstawienie do powyższych warunków spostrzeżeń niepoprawionych sprawi niesprawdzenie się ich do zera, wobec czego powstanie  $r$  równań odchyłek kształtu:

$$\begin{aligned}f_1(L_1, L_2, \dots, L_n) &= \omega_1, \\ f_2(L_1, L_2, \dots, L_n) &= \omega_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_r(L_1, L_2, \dots, L_n) &= \omega_r,\end{aligned}\tag{20}$$

które po wyrównaniu, to jest uzupełnieniu poszczególnych  $L$  poprawkami  $\lambda$ , przemienią się na związki (19).

Istnieją wprawdzie jeszcze dwa problemy wyrównania spostrzeżeń: pośrednich z warunkami i zawarunkowanych z niewiadomymi, których jednak omówienie pomijamy, odsyłając czytelnika do dzieł specjalnych. Zaznaczyć przy tym należy, że wyrównanie dowolnego rodzaju spostrzeżeń da się sprowadzić do wyrównania spostrzeżeń pośrednich.

We wszystkich przypadkach wyrównania spostrzeżenia mogą być równo- lub różnodokładne; w tym ostatnim przypadku należy każdemu spostrzeżeniu nadać odpowiednią wagę, i to albo wedle końcowych uwag § 2, albo, jeśli spostrzeżenie  $L$  przedstawia średnią arytmetyczną z  $m$  spostrzeżeń — wagę równą liczbie  $m$ .

#### § 4. Ogólna zasada wyrównania: błędy średnie niewiadomych mają być najmniejsze

Równania błędów, względnie odchyłek, użyte do wyrównania muszą mieć formę liniową, aby wyniki były jednoznaczne. Nadajemy im tę formę, rozwijając je w szereg Taylora, z pominięciem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy.

Jeżeli  $x_0, y_0, z_0, \dots$  są wartościami przybliżonymi niewiadomych, zaś  $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0, \zeta = z - z_0, \dots$ , otrzymamy biorąc pod uwagę równanie błędów (18) § 3-go:

$$\lambda_i = f_i(x, y, z, \dots) - L_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dots) + \frac{\partial f_i}{\partial x_0} \xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0} \eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0} \zeta + \dots - L_i \quad (21)$$

lub  $\lambda_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \dots + l_i, \quad (22)$

przy czym  $l_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dots) - L_i. \quad (23)$

Analogicznie otrzymamy, biorąc pod uwagę prawdziwe wartości niewiadomych  $X, Y, Z, \dots$ .

$$\varepsilon_i = f_i(X, Y, Z, \dots) - L_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dots) + \frac{\partial f_i}{\partial x_0} \xi' + \frac{\partial f_i}{\partial y_0} \eta' + \frac{\partial f_i}{\partial z_0} \zeta' + \dots - L_i \quad (24)$$

lub  $\varepsilon_i = a_i \xi' + b_i \eta' + c_i \zeta' + \dots + l_i, \quad (25)$

przy czym  $\xi' = X - x_0, \eta' = Y - y_0, \zeta' = Z - z_0. \quad (26)$

Przedstawmy związki (21), (24) i (23) w zmienionych nieco formach:

$$f_i(x, y, z, \dots) = L_i + \lambda_i, \quad (27)$$

$$f_i(X, Y, Z, \dots) = (L_i + \varepsilon_i) = L_i' \text{ (wartość prawdziwa spostrzeżenia),} \quad (28)$$

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \dots) = (L_i + l_i) \text{ (związek bezbłędny).} \quad (29)$$

Wartości  $x, y, z, \dots$  uzyskane rachunkiem wyrównawczym ze spostrzeżeń  $L$ , obarczonych błędami  $\lambda$ , mogą być tylko funkcjami poszczególnych  $L$ , zatem:

$$x_0 + \xi = x = \varphi_x(L_1, L_2, L_3, \dots, L_n), \quad (30)$$

$$y_0 + \eta = y = \varphi_y(L_1, L_2, L_3, \dots, L_n),$$

$$z_0 + \zeta = z = \varphi_z(L_1, L_2, L_3, \dots, L_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

Ponieważ związki te są ważne dla dowolnych błędów  $\lambda$ , przeto i dla  $\lambda = 0$ , co ma miejsce w związkach (28) i (29); wobec tego będzie

$$x_0 + \xi' = X = \varphi_x(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \dots, L_n + \varepsilon_n) = \quad (31)$$

$$= \varphi_x(L_1, L_2, \dots, L_n) + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n,$$

$$y_0 + \eta' = Y = \varphi_y(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \dots, L_n + \varepsilon_n) =$$

$$= \varphi_y(L_1, L_2, \dots, L_n) + \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \dots + \beta_n \varepsilon_n,$$

$$z_0 + \zeta' = Z = \varphi_z(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \dots, L_n + \varepsilon_n) =$$

$$= \varphi_z(L_1, L_2, \dots, L_n) + \gamma_1 \varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2 + \dots + \gamma_n \varepsilon_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_0 = \varphi_x(L_1 + l_1, L_2 + l_2, \dots, L_n + l_n) = \quad (32)$$

$$= \varphi_x(L_1, L_2, \dots, L_n) + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n,$$

$$y_0 = \varphi_y(L_1 + l_1, L_2 + l_2, \dots, L_n + l_n) =$$

$$= \varphi_y(L_1, L_2, \dots, L_n) + \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n,$$

$$z_0 = \varphi_z(L_1 + l_1, L_2 + l_2, \dots, L_n + l_n) =$$

$$= \varphi_z(L_1, L_2, \dots, L_n) + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots + \gamma_n l_n,$$

$$\dots \dots \dots$$



przy czym  $\alpha_i = \frac{\partial \varphi_x}{\partial L_i}$ ,  $\beta_i = \frac{\partial \varphi_y}{\partial L_i}$ ,  $\gamma_i = \frac{\partial \varphi_z}{\partial L_i}$ .

Odejmując związki (30) od (32) otrzymamy:

$$\begin{aligned} -\xi &= x_0 - x = [\alpha l], \\ -\eta &= y_0 - y = [\beta l], \\ -\zeta &= z_0 - z = [\gamma l], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (33)$$

a związki (31) od (32):

$$\begin{aligned} -\xi' &= x_0 - X = [\alpha l] - [\alpha \varepsilon], \\ -\eta' &= y_0 - Y = [\beta l] - [\beta \varepsilon], \\ -\zeta' &= z_0 - Z = [\gamma l] - [\gamma \varepsilon], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (34)$$

zaś związki (30) od (31):

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= [\alpha \varepsilon], \\ \eta' - \eta &= [\beta \varepsilon], \\ \zeta' - \zeta &= [\gamma \varepsilon], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (35)$$

Rugując w związkach (34) poszczególne  $\varepsilon$  przy pomocy związku (25), otrzymamy po uporządkowaniu i obustronnej zmianie znaków:

$$\begin{aligned} \xi' &= [a \alpha] \xi' + [b \alpha] \eta' + [c \alpha] \zeta' + \dots\dots \\ \eta' &= [a \beta] \xi' + [b \beta] \eta' + [c \beta] \zeta' + \dots\dots \\ \zeta' &= [a \gamma] \xi' + [b \gamma] \eta' + [c \gamma] \zeta' + \dots\dots \end{aligned} \quad (36)$$

Ponieważ — jak poprzednio zaznaczono — niewiadome, a zatem i ich poprawki są od siebie niezależne, przeto równania (36) mogą istnieć tylko w przypadku, gdy:

$$\begin{aligned} [a \alpha] &= 1, & [b \alpha] &= 0, & [c \alpha] &= 0, \dots\dots \\ [a \beta] &= 0, & [b \beta] &= 1, & [c \beta] &= 0, \dots\dots \\ [a \gamma] &= 0, & [b \gamma] &= 0, & [c \gamma] &= 1, \dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (37)$$

Są to bardzo ważne warunki odnoszące się do pochodnych (współczynników)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dots\dots$

Natomiast prawo przenoszenia się błędów zastosowane do związków (33), dostarcza nam kwadratów średnich błędów niewiadomych:

$$\begin{aligned} \mu_x^2 &= \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \dots\dots + \alpha_n^2 \mu_n^2, \\ \mu_y^2 &= \beta_1^2 \mu_1^2 + \beta_2^2 \mu_2^2 + \dots\dots + \beta_n^2 \mu_n^2, \\ \mu_z^2 &= \gamma_1^2 \mu_1^2 + \gamma_2^2 \mu_2^2 + \dots\dots + \gamma_n^2 \mu_n^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (38)$$

(przy czym założono, że spostrzeżenia  $L$  są o różnej dokładności, czyli o różnych błędach średnich, a tym samym o różnych wagach  $p$ ).

Na podstawie wzoru (14) § 2-go można położyć

$$\mu_i^2 = \frac{\mu_0^2}{p_i}, \quad (39)$$

a tym samym wzory (38) przybiorą formę następującą:

$$\mu_x^2 = \mu_0^2 \left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right], \quad \mu_y^2 = \mu_0^2 \left[ \frac{\beta\beta}{p} \right], \quad \mu_z^2 = \mu_0^2 \left[ \frac{\gamma\gamma}{p} \right], \dots \quad (40)$$

W dziele swym »Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxia« przyjął K. F. Gauss takie wartości  $x, y, z, \dots$  jako wyrównane, których błędy średnie są najmniejsze.

Aby błędy średnie  $\mu_x, \mu_y, \mu_z, \dots$  były najmniejsze, należy znaleźć najmniejsze wartości sum  $\left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right], \left[ \frac{\beta\beta}{p} \right], \left[ \frac{\gamma\gamma}{p} \right], \dots$  z uwzględnieniem warunków (37).

W tym celu, wedle zasad analizy, dodajemy do wyrażień, które mają być najmniejsze, mające się uwzględnić warunki (sprowadzone do zera), pomnożone przez współczynniki nieoznaczone  $K$  i szukamy min. w ten sposób utworzonych funkcj  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \dots$

$$\Omega_x = \left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right] + K_{1.1} ([a\alpha] - 1) + K_{1.2} [b\alpha] + K_{1.3} [c\alpha] + \dots = \min. \quad (41)$$

$$\Omega_y = \left[ \frac{\beta\beta}{p} \right] + K_{2.1} [a\beta] + K_{2.2} ([b\beta] - 1) + K_{2.3} [c\beta] + \dots = \min.$$

$$\Omega_z = \left[ \frac{\gamma\gamma}{z} \right] + K_{3.1} [a\gamma] + K_{3.2} [b\gamma] + K_{3.3} ([c\gamma] - 1) + \dots = \min.$$

.....

Ze względu na pierwszy z powyższych warunków musi istnieć  $n$  warunków kształtu:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial \alpha_i} = 0 = 2 \frac{\alpha_i}{p_i} + K_{1.1} \alpha_i + K_{1.2} b_i + K_{1.3} c_i + \dots, \quad (42)$$

analogicznie musi, ze względu na warunek drugi, trzeci i następne, istnieć po  $n$  równań typu:

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial \beta_i} = 0 = 2 \frac{\beta_i}{p_i} + K_{2.1} \alpha_i + K_{2.2} b_i + K_{2.3} c_i + \dots, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial \gamma_i} = 0 = 2 \frac{\gamma_i}{p_i} + K_{3.1} \alpha_i + K_{3.2} b_i + K_{3.3} c_i + \dots,$$

.....

Kładąc, dla otrzymania bardziej przejrzystych wzorów,

$$K_{1.1} = -2 Q_{1.1}, \quad K_{1.2} = -2 Q_{1.2}, \quad K_{1.3} = -2 Q_{1.3}, \dots \\ K_{2.2} = -2 Q_{2.2}, \quad K_{2.3} = -2 Q_{2.3} \dots \text{ itd.},$$

otrzymujemy po małej redukcji:

$$\alpha_i = p_i \alpha_i Q_{1.1} + p_i b_i Q_{1.2} + p_i c_i Q_{1.3} + \dots \quad (44a)$$

$$\beta_i = p_i \alpha_i Q_{2.1} + p_i b_i Q_{2.2} + p_i c_i Q_{2.3} + \dots \quad (44b)$$

$$\gamma_i = p_i \alpha_i Q_{3.1} + p_i b_i Q_{3.2} + p_i c_i Q_{3.3} + \dots \quad (44c)$$

.....

Weźmy pod uwagę  $n$  równań błędów kształtu

$$\lambda_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \dots + l_i,$$



pomnożmy każde z nich przez odpowiadające mu  $\alpha_i$  i zsumujmy je; jako wynik tych operacyj otrzymamy:

$$[\alpha\lambda] = [a\alpha] \xi + [b\alpha] \eta + [c\alpha] \zeta + \dots + [l\alpha]. \quad (45)$$

Ze względu jednak na związki (37) i (33) okaże się, że

$$[\alpha\lambda] = \xi - \xi = 0. \quad (46)$$

Sumę  $[\alpha\lambda]$  możemy otrzymać także w inny sposób, mianowicie mnożąc każde  $\alpha_i$  (związek (44)) przez odpowiednie  $\lambda_i$  (związek (22)) i sumując wyniki. W ten sposób otrzymamy

$$[\alpha\lambda] = 0 = [pa\lambda] Q_{1,1} + [pb\lambda] Q_{1,2} + [pc\lambda] Q_{1,3} + \dots, \quad (47)$$

który to związek może istnieć dla dowolnych i niezależnych współczynników  $Q$ , jeżeli

$$[pa\lambda] = 0, \quad [pb\lambda] = 0, \quad [pc\lambda] = 0, \dots \quad (48)$$

Równania (48) nazywamy *równaniami normalnymi*; ilość ich jest równa ilości niewiadomych  $k$ .

Rugując z równań normalnych błędy pozorne  $\lambda$  przy pomocy równań (22), otrzymujemy je w formie przydatnej do wyznaczenia wartości niewiadomych. Rugowanie to przeprowadzone w pierwszym równaniu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} & p_1 a_1 (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots + l_1) + \\ & p_2 a_2 (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots + l_2) + \\ & \dots + \\ & p_n a_n (a_n \xi + b_n \eta + c_n \zeta + \dots + l_n) = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & [paa] \xi + [pab] \eta + [pac] \zeta + \dots + [pal] = 0; \\ \text{analogicznie otrzymamy dalsze równania normalne} \\ & [pab] \xi + [pbb] \eta + [pbc] \zeta + \dots + [pbl] = 0, \\ & [pac] \xi + [pbc] \eta + [pcc] \zeta + \dots + [pcl] = 0, \\ & \dots \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

z których to *liniowych* równań, w ilości  $k$ , wyznaczamy jednoznacznie niewiadome  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\dots$ , a w następstwie i  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dots$ .

Tworząc w miejscu  $[\alpha\lambda]$  sumy  $[\beta\lambda]$ ,  $[\gamma\lambda]$ , itd. otrzymujemy analogiczne wyniki:

$$\begin{aligned} [\beta\lambda] = 0 &= [pa\lambda] Q_{2,1} + [pb\lambda] Q_{2,2} + [pc\lambda] Q_{2,3} + \dots, \\ [\gamma\lambda] = 0 &= [pa\lambda] Q_{3,1} + [pb\lambda] Q_{3,2} + [pc\lambda] Q_{3,3} + \dots, \end{aligned} \quad (50)$$

które prowadzą do tych samych równań normalnych (49).

Wartości niewiadomych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dots$  otrzymane na tej zasadzie, że ich błędy średnie mają być najmniejsze, można nazwać ich wartościami *najdokładniejszymi*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Pod innymi założeniami (między innymi, że średnia arytmetyczna jest najbardziej prawdopodobną wartością dla spostrzeżeń bezpośrednich) wyprowadził Gauss wyrażenie na funkcję prawdopodobieństwa spostrzeżeń  $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ , w następstwie warunek

$[p\lambda\lambda] = \min.$ , a dalej równania normalne. Na warunku tym opartą metodę nazwał A. LEGENDRE metodą *najmniejszych kwadratów*. (Por. autora: Rachunek wyrównawczy itd. Lwów-Warszawa 1923).

Dla zbadania jakie związki zachodzą między pochodnymi  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , a współczynnikami nieoznaczonymi  $Q$ , postąpimy następująco.

Mnożąc  $\alpha_i$ , określone związkiem (44 a), kolejno przez ilorazy  $\frac{\alpha_i}{p_i}, \frac{\beta_i}{p_i}, \frac{\gamma_i}{p_i}, \dots$  otrzymujemy:

$$\frac{\alpha_i \alpha_i}{p_i} = a_i \alpha_i Q_{1.1} + b_i \alpha_i Q_{1.2} + c_i \alpha_i Q_{1.3} + \dots \quad (51)$$

$$\frac{\alpha_i \beta_i}{p_i} = a_i \beta_i Q_{1.1} + b_i \beta_i Q_{1.2} + c_i \beta_i Q_{1.3} + \dots$$

$$\frac{\alpha_i \gamma_i}{p_i} = a_i \gamma_i Q_{1.1} + b_i \gamma_i Q_{2.2} + c_i \gamma_i Q_{1.3} + \dots$$

.....

Sumując związki typu (51) przy zmianie wskaźnika od 1 do  $n$ , wyznaczmy

$$\left[ \frac{\alpha \alpha}{p} \right] = [a \alpha] Q_{1.1} + [b \alpha] Q_{1.2} + [c \alpha] Q_{1.3} + \dots \quad (52)$$

$$\left[ \frac{\alpha \beta}{p} \right] = [a \beta] Q_{1.1} + [b \beta] Q_{1.2} + [c \beta] Q_{1.3} + \dots$$

$$\left[ \frac{\alpha \gamma}{p} \right] = [a \gamma] Q_{1.1} + [b \gamma] Q_{1.2} + [c \gamma] Q_{1.3} + \dots$$

.....

zaś uwzględniając związki (37), ostatecznie:

$$\left[ \frac{\alpha \alpha}{p} \right] = Q_{1.1}, \left[ \frac{\alpha \beta}{p} \right] = Q_{1.2}, \left[ \frac{\alpha \gamma}{p} \right] = Q_{1.3}, \dots \quad (53)$$

W analogiczny sposób otrzymamy, wychodząc ze związków na  $\beta_i, \gamma_i$ , itd. mnożonych kolejno przez  $\frac{\alpha_i}{p_i}, \frac{\beta_i}{p_i}, \frac{\gamma_i}{p_i}, \dots$ , po zsumowaniu i uwzględnieniu związków (37):

$$\left[ \frac{\alpha \beta}{p} \right] = Q_{2.1}, \left[ \frac{\beta \beta}{p} \right] = Q_{2.2}, \left[ \frac{\beta \gamma}{p} \right] = Q_{2.3}, \dots \quad (54)$$

$$\left[ \frac{\alpha \gamma}{p} \right] = Q_{3.1}, \left[ \frac{\beta \gamma}{p} \right] = Q_{3.2}, \left[ \frac{\gamma \gamma}{p} \right] = Q_{3.3}, \dots \quad (55)$$

.....

Z powyższych równań widać, że  $Q_{1.2} = Q_{2.1}$ , ogólnie

$$Q_{i.k} = Q_{k.i}. \quad (56)$$

Wstawiając w związkach (40) wartości za  $\left[ \frac{\alpha \alpha}{p} \right], \left[ \frac{\beta \beta}{p} \right], \left[ \frac{\gamma \gamma}{p} \right], \dots$ , otrzymamy:

$$\mu_x^2 = \mu_0^2 Q_{1.1}, \mu_y^2 = \mu_0^2 Q_{2.2}, \mu_z^2 = \mu_0^2 Q_{3.3}, \dots \quad (57)$$

Ze związku (39) wynika zarazem, że  $Q_{1.1}, Q_{2.2}$  itd. są odwrotnościami wag niewiadomych.

Celem uzyskania związków określających nam wartości poszczególnych  $Q$ , postąpimy w sposób następujący. Mnożąc  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$  (związki (44)) każde kolejno przez  $a_i, b_i, c_i, \dots$  i sumując wyniki (z uwzględnieniem związku (56)) otrzymamy



$$\left. \begin{aligned} [a \alpha] &= [p a a] Q_{1.1} + [p a b] Q_{1.2} + [p a c] Q_{1.3} + \dots = 1 \\ [b \alpha] &= [p a b] Q_{1.1} + [p b b] Q_{1.2} + [p b c] Q_{1.3} + \dots = 0 \\ [c \alpha] &= [p a c] Q_{1.1} + [p b c] Q_{1.2} + [p c c] Q_{1.3} + \dots = 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

$$\left. \begin{aligned} [a \beta] &= [p a a] Q_{1.2} + [p a b] Q_{2.2} + [p a c] Q_{2.3} + \dots = 0 \\ [b \beta] &= [p a b] Q_{1.2} + [p b b] Q_{2.2} + [p b c] Q_{2.3} + \dots = 1 \\ [c \beta] &= [p a c] Q_{1.2} + [p b c] Q_{2.2} + [p c c] Q_{2.3} + \dots = 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (58b)$$

$$\left. \begin{aligned} [a \gamma] &= [p a a] Q_{1.3} + [p a b] Q_{2.3} + [p a c] Q_{3.3} + \dots = 0 \\ [b \gamma] &= [p a b] Q_{1.3} + [p b b] Q_{2.3} + [p b c] Q_{3.3} + \dots = 0 \\ [c \gamma] &= [p a c] Q_{1.3} + [p b c] Q_{2.3} + [p c c] Q_{3.3} + \dots = 1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (58c)$$

Związki te nazywamy *równaniami wag* Hansena. Ilość ich jest zatem  $k^2$ ; ponieważ jednak — jak wspomniano  $Q_{i.k} = Q_{k.i}$ , przeto faktycznych niewiadomych jest tylko  $\frac{k(k+1)}{2}$ . Dla wyznaczenia ich wybieramy z pierwszej grupy równań (58a) tylko równanie pierwsze, z drugiej grupy (58b) dwa pierwsze, z trzeciej (58c) trzy itd.; równania grupy ostatniej należy użyć wszystkie. (Równania te zakresłono odpowiednio we wzorach (58)).

### § 5. Jednostkowy błąd średni $\mu_o$ utworzony z błędów pozornych $\lambda$ .

Równania normalne wynikające z warunku  $\mu_o^2 = \min$ .

Dotychczas postępowaliśmy tak, jakby błąd  $\mu_o$  był niezależny od otrzymanych z wyrównania wielkości  $x, y, z, \dots$ ; tymczasem w rzeczywistości tak nie jest, gdyż błąd  $\mu_o$  możemy obliczyć tylko przy pomocy błędów pozornych  $\lambda$ , a nie prawdziwych  $\varepsilon$  (których nie znamy), czyli że  $\mu_o$  jest zależny od wyrównanych  $x, y, z, \dots$ .

Odejmując od związków (25) § 4-go:

$$\varepsilon_i = a_i \xi' + b_i \eta' + c_i \zeta' \dots + l_i$$

związki (22) § 4-go:

$\lambda_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta \dots + l_i$ , otrzymamy nowe związki kształtu

$$\varepsilon_i - \lambda_i = a_i (\xi' - \xi) + b_i (\eta' - \eta) + c_i (\zeta' - \zeta) + \dots, \quad (59)$$

przy czym ilość wyrazów po stronie prawej równa się ilości niewiadomych  $k$ . Związek ten mnożymy raz przez  $p_i \varepsilon_i$ , a drugi raz przez  $p_i \lambda_i$ , otrzymując następujące dwa związki:

$$p_i \varepsilon_i \varepsilon_i - p_i \varepsilon_i \lambda_i = p_i a_i \varepsilon_i (\xi' - \xi) + p_i b_i \varepsilon_i (\eta' - \eta) + p_i c_i \varepsilon_i (\zeta' - \zeta) + \dots, \quad (60)$$

oraz

$$p_i \varepsilon_i \lambda_i - p_i \lambda_i \lambda_i = p_i a_i \lambda_i (\xi' - \xi) + p_i b_i \lambda_i (\eta' - \eta) + p_i c_i \lambda_i (\zeta' - \zeta) + \dots \quad (61)$$



Suma  $n$  związków typu (60) dostarcza nam :

$$[p \varepsilon \varepsilon] - [p \varepsilon \lambda] = [p a \varepsilon] (\xi' - \xi) + [p b \varepsilon] (\eta' - \eta) + [p c \varepsilon] (\zeta' - \zeta) + \dots, \quad (62)$$

zaś analogicznie utworzona suma związków typu (61):

$$[p \varepsilon \lambda] - [p \lambda \lambda] = [p a \lambda] (\xi' - \xi) + [p b \lambda] (\eta' - \eta) + [p c \lambda] (\zeta' - \zeta) + \dots \quad (63)$$

Dodając do siebie związki (62) i (63) otrzymamy ze względu na to, że

$$[p a \lambda] = [p b \lambda] = [p c \lambda] = \dots = 0 : \\ [p \varepsilon \varepsilon] - [p \lambda \lambda] = [p a \varepsilon] (\xi' - \xi) + [p b \varepsilon] (\eta' - \eta) + [p c \varepsilon] (\zeta' - \zeta) + \dots, \quad (64)$$

a ponieważ wedle wzoru (35) § 4-go:  $\xi' - \xi = [a \varepsilon]$ ,  $\eta' - \eta = [\beta \varepsilon]$ ,  $\zeta' - \zeta = [\gamma \varepsilon]$ ,  $\dots$  będzie ostatecznie :

$$[p \varepsilon \varepsilon] = [p \lambda \lambda] + [p a \varepsilon] [a \varepsilon] + [p b \varepsilon] [\beta \varepsilon] + [p c \varepsilon] [\gamma \varepsilon] + \dots \quad (65)$$

Iloczyny sum kształtu  $[p a \varepsilon] [a \varepsilon]$  dostarczają nam po wymnożeniu dwójki-kiego rodzaju wyrazów :

$$p_i a_i \alpha_i \varepsilon_i^2, \text{ oraz } (p_i a_i \alpha_k + p_k a_k \alpha_i) \varepsilon_i \varepsilon_k ;$$

o ile jednak funkcja prawdopodobieństwa spostrzeżeń jest funkcją parzystą, lub przynajmniej spełnia warunek GAUSSA, suma wyrazów typu drugiego będzie malała z rosnącą ilością spostrzeżeń  $n$ , osiągając dla  $n = \infty$  wartość zera. Przy tych założeniach będzie zatem wartość iloczynu  $[p a \varepsilon] [a \varepsilon]$  wynosiła :

$$[p a \alpha \varepsilon \varepsilon] = a_1 \alpha_1 p_1 \varepsilon_1^2 + a_2 \alpha_2 p_2 \varepsilon_2^2 + \dots + a_n \alpha_n p_n \varepsilon_n^2. \quad (66)$$

Podstawiając po stronie prawej zamiast kwadratów błędów prawdziwych kwadraty błędów średnich otrzymamy :

$$[p a \alpha \varepsilon \varepsilon] = a_1 \alpha_1 p_1 \mu_1^2 + a_2 \alpha_2 p_2 \mu_2^2 + \dots + a_n \alpha_n p_n \mu_n^2, \quad (67)$$

a uwzględniając, że  $p_i = \frac{\mu_o^2}{\mu_i^2}$ , zaś  $[a \alpha] = 1$ , ostatecznie

$$[p a \varepsilon] [a \varepsilon] = [p a \alpha \varepsilon \varepsilon] = [a \alpha] \mu_o^2 = \mu_o^2.$$

Analogicznie wartość każdego podobnie utworzonego iloczynu  $[p b \varepsilon] [\beta \varepsilon]$ ,  $[p c \varepsilon] [\gamma \varepsilon]$  itp. jest również  $\mu_o^2$ .

Zatem  $[p \varepsilon \varepsilon] = [p \lambda \lambda] + k \mu_o^2$ , względnie  
 $n \mu_o^2 = [p \lambda \lambda] + k \mu_o^2$ , a ostatecznie

$$\mu_o^2 = \frac{[p \lambda \lambda]}{n - k}. \quad (68)$$

Zarazem widać, że  $[p \varepsilon \varepsilon] : [p \lambda \lambda] = n : (n - k)$ ; suma  $[p \varepsilon \varepsilon]$  jest zatem zawsze większa od sumy  $[p \lambda \lambda]$ .

Ponieważ błąd średni  $\mu_o$  jest — jak przekonaliśmy się — zależny od nie-wiadomych, należy sprawdzić, czy jednostkowy błąd średni  $\mu_o$  osiąga swą wartość najniższą dla wartości  $x, y, z, \dots$ , otrzymanych z równań normalnych.



Sprawdzenie to jest niezwykle łatwe, gdyż dla  $\mu_o^2 = \min.$  otrzymujemy  $k$  warunków:

$$\frac{\partial [p\lambda\lambda]}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial [p\lambda\lambda]}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial [p\lambda\lambda]}{\partial \zeta} = 0, \dots \quad (69)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \xi} &= \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \xi} = 2 p_i \lambda_i a_i, & \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \eta} &= \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta} = 2 p_i \lambda_i b_i, \\ \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \zeta} &= \frac{\partial p_i \lambda_i^2}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} = 2 p_i \lambda_i c_i, \dots, \end{aligned}$$

przeto związki (69) przechodzą na:

$$[p a \lambda] = 0, \quad [p b \lambda] = 0, \quad [p c \lambda] = 0 \dots: \text{itd.}, \quad (70)$$

które są znanymi nam poprzednio równaniami normalnymi. Jak tedy widać, otrzymujemy najdokładniejsze wartości niewiadomych z warunku  $\mu_o^2 = \min.$  lub, co na jedno wyjdzie,

$$[p\lambda\lambda] = \min. \quad (\text{por. uwagę § 4-go}). \quad (71)$$

### § 6. Błędy średnie funkcji wielkości wyrównanych

Weźmy pod uwagę  $\mu_F$ , średni błąd funkcji wielkości wyrównanych  $F(x, y, z, \dots)$ .

Posługując się, jak poprzednio, wartościami przybliżonymi niewiadomych  $x_o, y_o, z_o, \dots$ , otrzymamy, rozwijając funkcję  $F$  w szereg TAYLORA z pominięciem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy:

$$F(x, y, z, \dots) = F(x_o, y_o, z_o, \dots) + F_1 \xi + F_2 \eta + F_3 \zeta + \dots, \quad (72)$$

przy czym  $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $F_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$ , ..., a uwzględniając związki (33)

§ 4-go:

$$F(x, y, z, \dots) = F(x_o, y_o, z_o, \dots) - F_1 [\alpha l] - F_2 [\beta l] - F_3 [\gamma l] \dots \quad (73)$$

Ponieważ spostrzeżenia  $L$ , a tym samym i wielkości  $l$ , są od siebie niezależne, możemy do związku (73) zastosować wzór (12) § 2-go otrzymując:

$$\mu_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 \mu_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_r}\right)^2 \mu_r^2, \quad (74)$$

Na podstawie związku (73) pochodne  $\frac{\partial F}{\partial l}$  mają następujący kształt:

$$\frac{\partial F}{\partial l_i} = -F_1 \alpha_i - F_2 \beta_i - F_3 \gamma_i - \dots, \quad (75)$$

gdym zaś jeszcze uwzględnimy, że  $\mu_i^2 = \frac{\mu_o^2}{p_i}$ , otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial l_i}\right)^2 \mu_i^2 = \left\{ \begin{array}{l} F_1^2 \alpha_i^2 + 2 F_1 F_2 \alpha_i \beta_i + 2 F_1 F_3 \alpha_i \gamma_i + \dots \\ + F_2^2 \beta_i^2 + 2 F_2 F_3 \beta_i \gamma_i + \dots \\ + F_3^2 \gamma_i^2 + \dots \end{array} \right\} \frac{\mu_0^2}{p_i} \quad (76)$$

Tworząc sumę wyrażen tego typu otrzymamy:

$$\mu_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \begin{array}{l} F_1^2 \left[ \frac{\alpha \alpha}{p} \right] + 2 F_1 F_2 \left[ \frac{\alpha \beta}{p} \right] + 2 F_1 F_3 \left[ \frac{\alpha \gamma}{p} \right] + \dots \\ + F_2^2 \left[ \frac{\beta \beta}{p} \right] + 2 F_2 F_3 \left[ \frac{\beta \gamma}{p} \right] + \dots \\ + F_3^2 \left[ \frac{\gamma \gamma}{p} \right] + \dots \end{array} \right\}, \quad (77)$$

lub zastępując sumy współczynnikami  $Q$ :

$$\mu_F^2 = \mu_0^2 \left\{ \begin{array}{l} F_1^2 Q_{1.1} + 2 F_1 F_2 Q_{1.2} + 2 F_1 F_3 Q_{1.3} + \dots \\ + F_2^2 Q_{2.2} + 2 F_2 F_3 Q_{2.3} + \dots \\ + F_3^2 Q_{3.3} + \dots \end{array} \right\}. \quad (78)$$

Wyrażenie ujęte w klamrę jest odwrotnością wagi funkcji  $F$ .

### § 7. Rozwiązanie równań normalnych i równań wag (Hansena) sposobem Gaussa

Najczęściej używamy do tego celu metody eliminacyjnej Gaussa, która pozwala na wyznaczenie dokładne nawet wielkiej liczby niewiadomych. W tym celu przemieniamy równania normalne na tak zwane zredukowane równania normalne. Równania te odznaczają się tym, że każde następne posiada o jedną niewiadomą mniej, tak że ostatnie ma tylko jedną niewiadomą.

Jak wiadomo równania normalne mają kształt:

$$[p a a] x + [p a b] y + [p a c] z + \dots + [p a l] = 0 \quad (79)$$

$$[p a b] x + [p b b] y + [p b c] z + \dots + [p b l] = 0$$

$$[p a c] x + [p b c] y + [p c c] z + \dots + [p c l] = 0$$

.....

(przy czym zamiast  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  położono  $x, y, z, \dots$ ), natomiast system zredukowanych równań normalnych tworzymy z nich następująco<sup>1)</sup>:

$$[p a a] x + [p a b] y + [p a c] z + \dots + [p a l] = 0 \quad (80)$$

$$[p b b . 1] y + [p b c . 1] z + \dots + [p b l . 1] = 0$$

$$[p c c . 2] z + \dots + [p c l . 2] = 0$$

.....

<sup>1)</sup> Jak z kształtu wyrazów redukcyjnych wynika, otrzymujemy drugie równanie systemu (80), odejmując od drugiego równania normalnego (79) pierwsze równanie normalne, pomnożone przez iloraz  $\frac{[p a b]}{[p a a]}$ , w podobny sposób uzyskujemy przy pomocy podwójnej redukcji trzecie zredukowane równanie normalne itd.



Znaczenie wyrazów zredukowanych jest następujące:

dla redukcji pierwszej:

$$[p b b . 1] = [p b b] - \frac{[p a b]}{[p a a]} \cdot [p a b], \quad (81)$$

$$[p b c . 1] = [p b c] - \frac{[p a b]}{[p a a]} \cdot [p a c],$$

.....

$$[p b l . 1] = [p b l] - \frac{[p a b]}{[p a a]} \cdot [p a l];$$

dla redukcji drugiej:

$$[p c c . 2] = [p c c . 1] - \frac{[p b c . 1]}{[p b b . 1]} \cdot [p b c . 1],$$

.....

$$[p c l . 2] = [p c l . 1] - \frac{[p b c . 1]}{[p b b . 1]} \cdot [p b l . 1];$$

itd.

W analogiczny sposób postępujemy przy rozwiązywaniu równań wag Hansena ((58) § 4-go). System zredukowanych równań wag przedstawia się następująco:

$$[p a a] Q_{1.1} + [p a b] Q_{1.2} + [p a c] Q_{1.3} + \dots = 1 \quad (82)$$

$$[p a a] Q_{1.2} + [p a b] Q_{2.2} + [p a c] Q_{2.3} + \dots = 0$$

$$[p b b . 1] Q_{2.2} + [p b c . 1] Q_{2.3} + \dots = 1$$

$$[p a a] Q_{1.3} + [p a b] Q_{2.3} + [p a c] Q_{3.3} + \dots = 0$$

$$[p b b . 1] Q_{2.3} + [p b c . 1] Q_{3.3} + \dots = 0$$

$$[p c c . 2] Q_{3.3} + \dots = 1$$

.....

### § 8. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich (jako szczególnego przypadku spostrzeżeń pośrednich). Pary spostrzeżeń

W przypadku wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich przybierają równania normalne (ze względu na to, że wszystkie  $a = 1$ , a reszta współczynników odpada) następującą postać:

$$[p] x + [p l] = 0, \quad (83)$$

a ponieważ w tym przypadku, wedle (23) § 4-go,  $l_i = -L_i^*$ , przeto

$$[p] x = [p L], \text{ więc}$$

$$x = \frac{[p L]}{[p]} \text{ (średnia arytmetyczna ogólna)}. \quad (84)$$

\* ) gdyż  $x_a = 0$ .

Jednostkowy średni błąd jest w tym przypadku (wedle wzoru (68) § 5-go)

$$\mu_o = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}, \quad (85)$$

zaś średni błąd niewiadomej (wedle wzoru (57) § 4-go)

$$\mu_x = \mu_o \sqrt{Q_{1.1}} = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{[p](n-1)}}, \quad (86)$$

gdyż jedyne równanie wag (wzór (58a) § 4-go) ma kształt:

$$[p] Q_{1.1} = 1.$$

Najprostszy przypadek wyrównania stanowią *równodokładne* spostrzeżenia bezpośrednie (tj. o wagach  $p = 1$ ); wzory poprzednie zmieniają się wówczas następująco:

$$x = \frac{[L]}{n}, \quad (87)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \quad (88)$$

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}. \quad (89)$$

Szczególny przypadek spostrzeżeń bezpośrednich zachodzi, gdy ich ilość  $n$  wynosi tylko 2; mówimy wówczas o wyrównaniu *par spostrzeżeń*, a błędy średnie obliczamy przy pomocy różnic spostrzeżeń  $d$ .

Wzory dotyczące wyrównania pary spostrzeżeń równodokładnych są nadzwyczaj proste:

$$x = \frac{L + L'}{2}, \quad (90)$$

$$d = L' - L, \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda = x - L = \frac{d}{2}, \\ \lambda' = x - L' = -\frac{d}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

zatem 
$$\mu = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad \mu_x = \pm \frac{d}{2}. \quad (93)$$

W praktyce obserwujemy często  $r$  par spostrzeżeń, odnoszących się wprawdzie do różnych, ale jednorodnych wielkości o wagach *różnych* (np. różnicy wysokości na pewnych odcinkach trasy).

W tym przypadku należy każdą parę wyrównać osobno, wedle wzoru (90), zaś dla utworzenia średniego błędu  $\mu_o$  dla wszystkich  $r$  par, posługujemy się wzorem (93) otrzymując:



$$\mu_o = \sqrt{\frac{[pdd]}{2r}} \quad (\text{średni błąd przed wyrównaniem}). \quad (94)$$

Natomiast średni błąd po wyrównaniu będzie

$$(\mu_o) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{r}}. \quad (95)$$

Wprowadzając średnią różnicę

$$d_o = \sqrt{\frac{[pdd]}{r}}, \quad (96)$$

możemy napisać wzory (94) i (95) następująco:

$$\mu_o = \frac{d_o}{\sqrt{2}}, \quad (\mu_o) = \pm \frac{d_o}{2}. \quad (97)$$

### § 9. Przykład wyrównania spostrzeżeń pośrednich. — Badanie klina mierniczego.

Klin mierniczy służy do dokładanego pomiaru małych odstępów (zwykle 5-15 mm) między ostrzami łąt przy pomiarze długości lub przy komparacji łąt.

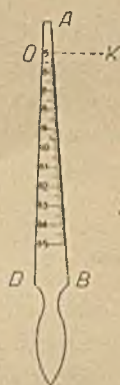
Dwie płaszczyzny, nachylone do siebie pod pewnym kątem, stanowią właściwy klin, zaś dwie płaszczyzny do tamtych prostopadłe (a więc do siebie równoległe), ograniczają korpus klina od dołu i góry, przy czym na górnej wryta jest podziałka, podająca grubość klina w danym miejscu.

Badany klin pochodzi z fabryki Neuhöfer u. Sohn (Wiedeń) i jest własnością I Katedry Miernictwa Politechniki Lwowskiej. Nachylenie ścian jest 1:10, to znaczy, że podziałka milimetrowa umieszczona na ścianie górnej przy krawędzi ukośnej ( $AB$ ) daje wprost dziesiątne milimetra grubości klina. Jak widać na rysunku 2 całkowite milimetry oznaczono liczbami, zaś dziesiątne milimetrów kreskami; podziałka zaczyna się przy pięciu milimetrach i kończy się przy piętnastu milimetrach.

Badanie klina polegało na bezpośrednim i dokładnym zmierzeniu jego grubości przy pomocy odpowiedniej śruby mikrometrycznej w kilku wybranych miejscach. Pomiaru dokonano w 11 miejscach, oznaczonych liczbami.

W dalszych rachunkach traktować będziemy klin jako utwór płaski (trapez prostokątny), odnosząc wszystkie pomiary do prostokątnego układu osi:  $OD$  (odległości od początku  $O$ , przyjętego przy kresce 5 mm) i  $OK$  (grubość klina). Odległości otrzymamy z prostego przeliczenia, gdyż 100 mm na krawędzi ukośnej  $AB$  odpowiada 99,5 mm na osi  $OD$ .

Wyniki pomiarów zestawione są niżej.



Rys. 2.

	$D$ odległość:	$K$ grubość pomierzona:	grubość klina nominalna:	
1.	0,00 mm	4,99 mm	5,00 mm	(1)
2.	9,95 „	6,00 „	6,00 „	

	$D$ odległość:	$K$ grubość pomierzona:	grubość klina nominalna:
3.	19,90 mm	7,01 mm	7,00 mm
4.	29,85 „	8,01 „	8,00 „
5.	39,80 „	9,02 „	9,00 „
6.	49,75 „	10,02 „	10,00 „
7.	59,70 „	11,02 „	11,00 „
8.	69,75 „	12,02 „	12,00 „
9.	79,60 „	13,03 „	13,00 „
10.	89,55 „	14,04 „	14,00 „
11.	99,50 „	15,04 „	15,00 „

Podane grubości  $K$  klina są wynikami pomiarów równodokładnych ( $p=1$ ), a więc spostrzeżeniami błędnymi, których wartości poprawione (wyrównane) będą  $K' = K + \lambda$ , gdzie  $\lambda$  są poprawkami (błędami pozornymi) tych spostrzeżeń. Natomiast odległości  $D$  uważamy za wielkości bezbłędne.

Równaniem klina mierniczego nazywamy prostą, która najlepiej dostosowuje się do danego szeregu spostrzeżeń, a której kształt w odniesieniu do przyjętego układu osi, jest

$$K' = K + \lambda = x + yD, \quad (a)$$

gdzie  $x$  i  $y$  są niewiadomymi współczynnikami, których najlepsze wartości ma dać właśnie rachunek wyrównawczy. Mamy więc w zadaniu  $k=2$  niewiadome. Związek (a), który odpowiada ogólnym związkom (17), dostarcza  $n=11$  równań błędów kształtu:

$$\lambda_i = x + D_i y - K_i. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 11) \quad (b)$$

Równania te poddajemy jeszcze drobnym przeróbkom, a to dla uzyskania formy najwygodniejszej do rachunku szczegółowego. Mianowicie przyjmujemy dla niewiadomych  $x$  i  $y$  następujące wartości przybliżone (rozwiązując dwa równania kształtu (a) dla dwóch wybranych par wartości  $K$  i  $D$ ):

$$\begin{aligned} x_o &= 5,0 \text{ mm} \\ y_o &= 0,1 \end{aligned}$$

a więc ostateczne (wyrównane) wartości niewiadomych będą

$$\begin{aligned} x &= x_o + \xi \\ y &= y_o + \eta, \end{aligned} \quad (c)$$

które wstawiamy do (b):

$$\lambda_i = (x_o + \xi) + D_i (y_o + \eta) - K_i,$$

czyli

$$\lambda_i = \xi + D_i \eta + (x_o + D_i y_o - K_i). \quad (d)$$

W szczególności otrzymujemy:



$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \xi && + 0,010 \\
 \lambda_2 &= \xi + 9,95 \eta && - 0,005 \\
 \lambda_3 &= \xi + 19,90 \eta && - 0,020 \\
 \lambda_4 &= \xi + 29,85 \eta && - 0,025 \\
 \lambda_5 &= \xi + 39,80 \eta && - 0,040 \\
 \lambda_6 &= \xi + 49,75 \eta && - 0,045 \\
 \lambda_7 &= \xi + 59,70 \eta && - 0,050 \\
 \lambda_8 &= \xi + 69,65 \eta && - 0,055 \\
 \lambda_9 &= \xi + 79,60 \eta && - 0,070 \\
 \lambda_{10} &= \xi + 89,55 \eta && - 0,085 \\
 \lambda_{11} &= \xi + 99,60 \eta && - 0,090
 \end{aligned} \tag{2}$$

Wyrazy wolne wyrażone są w milimetrach. Wygodniej będzie przyjąć jako jednostkę 0,01 mm. Jeżeli prócz tego podstawimy

$$\eta = \frac{1}{10} \eta', \tag{e}$$

to wówczas równania błędów (2) przejdą w następujące

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \xi && + 1,0 \\
 \lambda_2 &= \xi + 0,995 \eta' && - 0,5 \\
 \lambda_3 &= \xi + 1,990 \eta' && - 2,0 \\
 \lambda_4 &= \xi + 2,985 \eta' && - 2,5 \\
 \lambda_5 &= \xi + 3,980 \eta' && - 4,0 \\
 \lambda_6 &= \xi + 4,975 \eta' && - 4,5 \\
 \lambda_7 &= \xi + 5,970 \eta' && - 5,0 \\
 \lambda_8 &= \xi + 6,965 \eta' && - 5,5 \\
 \lambda_9 &= \xi + 7,960 \eta' && - 7,0 \\
 \lambda_{10} &= \xi + 8,955 \eta' && - 8,5 \\
 \lambda_{11} &= \xi + 9,950 \eta' && - 9,0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Równania błędów (3) odpowiadają równaniu (22). Teraz obliczamy (najlepiej maszyną do rachowania) współczynniki równań normalnych:

$$[aa] = 11, [ab] = 54,725, [al] = -47,5, [bb] = 381,160 \text{ i } [bl] = -339,792$$

i ustawiamy dwa równania normalne:

$$\begin{aligned}
 11,000 \xi + 54,725 \eta' - 47,500 &= 0 \\
 54,725 \xi + 381,160 \eta' - 339,792 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

których rozwiązanie nie przedstawia większych trudności (ze względu na małą ich ilość) i nie wymaga konieczności stosowania metody eliminacyjnej (kolejnych redukcji) Gaussa.

Jeżeli jednak tę metodę zastosujemy, wówczas rachunek, który obejmuje równocześnie i rozwiązanie równań wag, przeprowadzamy w następującym schemacie:

	$\xi$	$\eta'$	Wyraz wolny (znak przeciwny)	$(Q_{1.1})$	
1	11,000	+ 54,725	+ 47,500	+ 1,000	(5)
	1,0	+ 4,97500	+ 4,31818	+ 0,09091	
2	54,725	+ 381,160	+ 339,792	.	
		- 272,257	- 236,312	- 4,97500	
Suma (kontrolna)	65,725	+ 435,885	+ 387,292	+ 1,000	
	5,9750	- 326,982	- 283,812	- 5,97500	

	$\eta'$	W. w.	$(Q_{1.2})$	$(Q_{2.2})$	
2	108,903	+ 103,480	- 4,97500	+ 1,000	(6)
	1,0	+ 0,95020	- 0,04568	+ 0,00918	
		= $\eta'$	= $Q_{1.2}$	= $Q_{2.2}$	

Z równania 1 zestawienia (5) obliczamy  $\xi$  oraz  $Q_{1.1}$ , podstawiając wartości obliczone w (6):

	$\xi$	$Q_{1.1}$	
	+ 4,31818	+ 0,09091	(z 1 równania zestawienia (5))
(- 4,97500 $\eta'$ =)	- 4,72725	+ 0,22726	(= - 4,97500 $Q_{1.2}$ )
	- 0,40907	+ 0,41817	(7)

W przypadku dwóch niewiadomych zbyteczne jest rozwiązywanie równań wag, gdyż zredukowany współczynnik  $[bb . 1] = 108,9$  (skrócony do jednego miejsca dziesiętnego) jest wagą niewiadomej  $\eta'$ . Aby obliczyć jeszcze wagę niewiadomej  $\xi$ , czyli wyrażenie  $[aa . 1]$ , należy w schemacie (5) zmienić porządek równań i niewiadomych i przeprowadzić ponownie redukcję. Rachunek jest następujący:

	$\eta'$	$\xi$	W. w.	
1	381,160	+ 54,725	+ 339,792	(8)
	1,0	+ 0,14357 <sub>5</sub>		
2	54,725	+ 11,000	+ 47,500	
		- 7,857 <sub>1</sub>	- 48,785 <sub>6</sub>	
Równanie 2 zredukowane		3,142 <sub>9</sub>	- 1,285 <sub>6</sub>	

$$P_{\xi} = [aa . 1] = 3,143; \quad \xi = \frac{-1,285_6}{3,142_1} = -0,40905.$$

Przy tej sposobności obliczyliśmy niezależnie niewiadomą  $\xi$ , której wartość zgadza się dostatecznie z wynikiem poprzednim.



Otrzymane z rozwiązania równań normalnych wartości kontrolujemy przez wstawienie ich do sumy równań norm. w zestawieniu (5):

$$\begin{aligned} 65,725 \xi + 435,885 \eta' &= 387,292 \quad (\text{ma być } 387,292); & (9) \\ 65,725 Q_{11} + 435,885 Q_{12} &= 1,0005 \quad (\text{ma być } 1,0000); \\ 65,725 Q_{12} + 435,885 Q_{22} &= 0,9991 \quad (\text{ma być } 1,0000). \end{aligned}$$

Ze względu na to, że wyrazy wolne w równaniach błędów (3) wyraziliśmy w setnych mm, wartości niewiadomych będą

$$\begin{aligned} \xi &= -0,409 \cdot 0,01 = -0,00409, \\ \eta' &= 0,950 \cdot 0,01 = 0,00950, \end{aligned}$$

czyli według (e)

$$\eta = \frac{1}{10} \eta' = 0,000950,$$

zatem według (c):

$$\begin{aligned} x &= 4,995 \ 91 \text{ mm}, \\ y &= 0,100 \ 95 \end{aligned}$$

Szukane równanie klina jest następujące

$$K = 4,995 \ 91 + 0,100 \ 95 D. \quad (f)$$

Na podstawie (f) możemy podać dokładną wartość każdej kreski (szerokość) skali klina. Np. w miejscach, oznaczonych pełnymi mm, szerokość klina wynosi:

L. p.	Szerokość nominalna	Szer. obliczona z (f)	L. p.	Szerokość nominalna	Szer. obliczona z (f)
1.	5 mm	4,9959 mm	7.	11 mm	11,0226 mm
2.	6 „	6,0004 „	8.	12 „	12,0271 „
3.	7 „	7,0048 „	9.	13 „	13,0315 „
4.	8 „	8,0093 „	10.	14 „	14,0360 „
5.	9 „	9,0137 „	11.	15 „	14,0405 „
6.	10 „	10,0182 „			

Dla zorientowania się w dokładności wykonanych pomiarów i uzyskanych przez wyrównanie wyników, należy wyliczyć średnie błędy  $\mu_n$ ,  $\mu_x$  i  $\mu_y$ .

Wstawiając wartości niewiadomych  $\xi$  i  $\eta'$  do równań błędów (3) otrzymujemy (w  $\frac{1}{100}$  mm):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +0,59 & \lambda_5 &= -0,63 & \lambda_9 &= +0,15 & (11) \\ \lambda_2 &= +0,04 & \lambda_6 &= -0,18 & \lambda_{10} &= -0,40 \\ \lambda_3 &= -0,52 & \lambda_7 &= +0,26 & \lambda_{11} &= +0,05 \\ \lambda_4 &= -0,07 & \lambda_8 &= +0,71 & & & \end{aligned}$$

przy czym

$$[\lambda] = 0 \text{ (kontrola!)},$$

oraz

$$[\lambda\lambda] = 1,811.$$

Kontrola:

$$[U \cdot 2] = [U] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = 305,250 - 205,113 - 98,327 = 1,810.$$

Ponieważ  $n - k = 11 - 2 = 9$ , przeto według (68):

$$\mu_o = \sqrt{\frac{1,811}{9}} = \pm 0,45 \text{ w } \frac{1}{100} \text{ mm, czyli } \mu_o = \pm 0,0045 \text{ mm.}$$

Jest to średni błąd pojedynczego pomiaru. Teraz stosujemy wzory (57), które dają

$$\mu_x = \pm 0,45 \sqrt{0,3182} = \pm 0,25, \text{ czyli } \mu_x = \pm 0,0025 \text{ mm}$$

$$\text{i } \mu_{\gamma'} = \pm 0,45 \sqrt{0,0092} = \pm 0,043, \text{ czyli } \mu_{\gamma'} = \pm 0,00043$$

więc ostatecznie

$$\mu_y = \frac{1}{10} \mu_{\gamma'} = \pm 0,00043.$$

Średnie błędy niewiadomych piszemy często bezpośrednio przy ich wartości, a więc

$$\begin{aligned} x &= 4,9959 \pm 0,0025 \text{ mm,} \\ y &= 0,100950 \pm 0,000043 \end{aligned}$$

### § 10. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych

Jak to wynika z uwag, podanych w ustępie c, § 3, spostrzeżenia zawarunkowane mają spełniać  $r$  warunków kształtu:

$$f_i(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n) = 0, \quad (98)$$

przy czym, aby istniał problem wyrównania musi być  $n > r$ .

Warunków tych nie mogą jednak spełnić  $L_i$  uzyskane z pomiarów, powodując  $r$  równań odchyłek (por. (20) § 3) kształtu:

$$f_i(L_1, L_2, \dots, L_n) = \omega_i. \quad (99)$$

Wyrównanie spostrzeżeń polega na obliczeniu takich poprawek  $\lambda$  poszczególnych spostrzeżeń  $L$ , aby z zachowaniem ogólnego warunku wyrównawczego ((71) § 5):

$$[p \lambda \lambda] = \min.,$$

żądane warunki (98) były spełnione.

Dla uzyskania jednoznacznych wyników rozwijamy związki typu (98) w szereg Taylora, z opuszczeniem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy:

$$f_i(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n) = f_i(L_1, L_2, \dots, L_n) + \quad (100)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial L_1} \lambda_1 + \frac{\partial f_i}{\partial L_2} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial L_n} \lambda_n.$$





Ze względu na to, że obie metody muszą dostarczyć tych samych wyników, a więc i błędów, odnosi się wzór (107) także do spostrzeżeń zawarunkowanych.

Sumę  $[p \lambda \lambda]$  kontrolujemy związkiem

$$[p \lambda \lambda] = - [\omega Q]. \quad (108)$$

Wreszcie należy podać wzór na błąd średni funkcji wyrównanych spostrzeżeń  $\mu_F$ .

I tak, jeżeli funkcja ta ma ogólny kształt:

$$F(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \dots, L_n + \lambda_n),$$

tworzymy jej pochodne względem poszczególnych  $L$ :

$$\frac{\partial F}{\partial L_1} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial L_2} = F_2, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial L_n} = F_n,$$

po czym obliczamy  $\mu_F$  z wzoru:

$$\mu_F^2 = \mu_o^2 \left( \left[ \frac{FF}{p} \right] - \left( \left[ \frac{aF}{p} \right]^2 + \left[ \frac{bF}{p} \cdot 1 \right]^2 + \left[ \frac{cF}{p} \cdot 2 \right]^2 + \dots \right) \right) \quad (109)$$

Ze względu na oszczędność miejsca ograniczam się tylko do podania wzoru (wywód znajdzie czytelnik w dziełach specjalnych, poświęconych rachunkowi wyrównawczemu).



## ROZDZIAŁ III

### O P T Y K A

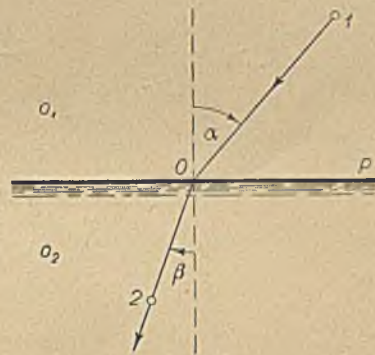
#### § 1. Prawa odbicia i załamania się promieni świetlnych

Zasada odbicia się promieni świetlnych od płaszczyzny, na którą padają, nie wymaga bliższych objaśnień; natomiast należy poświęcić kilka uwag zasadzie załamania się promieni świetlnych. Znany geodeta Snellius wykrył prawo załamania się promieni świetlnych przy przejściu z jednego ośrodka (medium) do drugiego.

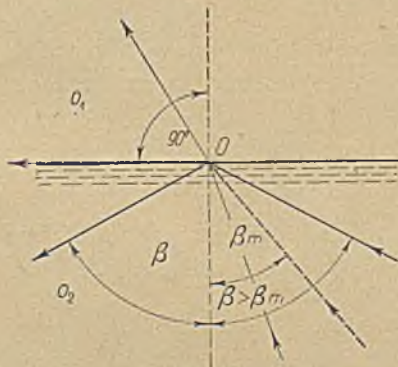
Weźmy pod uwagę dwa ośrodki  $o_1$  i  $o_2$  o różnych gęstościach  $g_1$  i  $g_2$  (np. powietrze i szkło), oddzielone od siebie płaszczyzną  $P$ . Niech promień wychodzący z punktu 1 (w ośrodku  $o_1$ ) trafi płaszczyznę  $P$  w punkcie  $O$ , a zmieniając dalszy kierunek, przejdzie przez punkt 2 ośrodka drugiego. Prostopadła do powierzchni  $P$  w punkcie  $O$  niech zawiera z promieniem 1—0 kąt  $\alpha$ , zaś z promieniem 0—2 kąt  $\beta$ , wówczas według prawa Snelliusa istnieje związek:

$$\sin \alpha : \sin \beta = g_2 : g_1, \quad (1)$$

przy czym promień przed i po załamaniu leży w jednej płaszczyźnie (tj. 1—0—2).



Rys. 3.



Rys. 4.

Zakładając, że gęstość powietrza w normalnych warunkach jest stała, otrzymujemy dla pewnego gatunku szkła zamiast związku poprzedniego następujący:

$$\sin \alpha : \sin \beta = n, \quad (2)$$

( $n$  — współczynnik załamania przy przejściu promienia z powietrza do szkła).

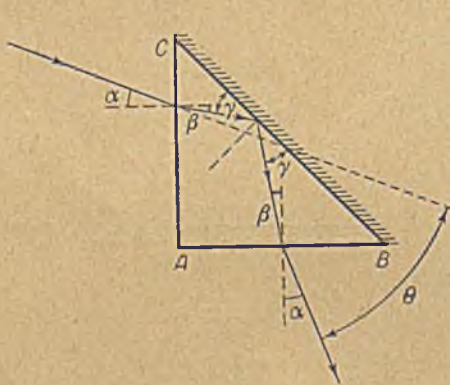
Wartość tego współczynnika waha się dla różnych gatunków szkieł używanych w lunetach (i wynosi np. dla szkła crown 1,5 do 1,6, zaś dla szkła flint od 1,5 do 1,8).

Z równania (2) wynika, że gdy  $\alpha = 90^\circ$ , wówczas  $\sin \beta = \frac{1}{n}$ ; w tych warunkach powstały kąt  $\beta_m$  jest największym kątem, dla którego jest jeszcze możliwe załamanie, tzw. kątem granicznym. Jeżeli zatem promień, przechodzący przez szkło, padnie na ścianę (graniczącą z powietrzem) pod kątem większym niż  $\beta_m$ , wówczas następuje (wewnątrz szkła) całkowite odbicie promienia od ściany (rys. 4). Wartość kąta  $\beta_m$  waha się dla wyżej wymienionych szkieł od  $41,8^\circ$  do  $38,7^\circ$  dla crownu i od  $41,8^\circ$  do  $33,7^\circ$  dla flintu.

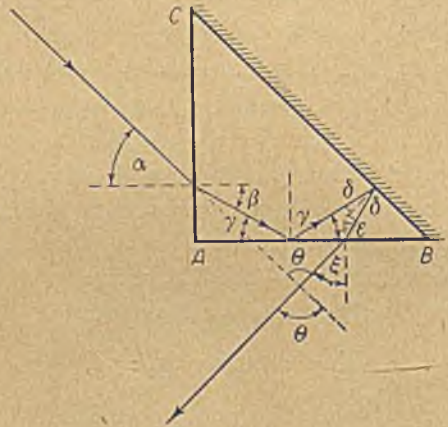
## § 2. Przejście promieni świetlnych przez pryzmaty używane w geodezji

### a) Pryzmat o podstawie prostokątnego trójkąta równoramiennego.

Pryzmat ten, zwany także pryzmatem Bauernfeinda, jest ograniczony pięcioma płaszczyznami, z których dwie tworzą równoległe ściany w kształcie prostokątnych trójkątów równoramiennych, a trzy pozostałe są do poprzednich prostopadłe. Ściana ograniczająca pryzmat od strony przeciwprostokątnych obu trójkątów, jest wyłożona amalgamatem rtęci, działa przeto jak zwierciadło, odbijające promienie wewnątrz pryzmatu.



Rys. 5.



Rys. 6.

Promień równoległy do płaszczyzn ścian trójkątnych, który wszedł do pryzmatu padając na jedną ze ścian przyprostokątnych pod kątem  $\alpha$ , może wyjść drugą ścianą przyprostokątną:

- α) po dwu załamaniach i jednym odbiciu, albo
- β) po dwu załamaniach i dwu odbiciach.

α) W pierwszym przypadku (rys. 5), o ile promień padł na ścianę AC pod kątem  $\alpha$ , następuje załamanie pod kątem  $\beta$  z zachowaniem związku (2):

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Ponieważ promień ten w dalszym ciągu pada na ścianę CB pod kątem  $90^\circ - \gamma = \beta + 45^\circ$ , przeto odbija się pod tym samym kątem i pada na ścianę



$AB (\perp AC)$  znów pod kątem  $\beta$ ; wychodzi więc po załamaniu odchylony od prostopadłej do  $AB$  pod kątem  $\alpha$ . Zatem kąt  $\Theta$  zawarty między promieniem wchodzącym a wychodzącym wynosi:

$$\Theta = 90^\circ \pm 2\alpha.$$

$\beta$ ) Przypadek drugi ma miejsce, gdy promień zgrubsza równoległy do ściany przeciwprostokątnej, pada na jedną ze ścian przyprostokątnych niezbyt daleko od wierzchołka  $A$ , lub promień w przybliżeniu prostopadły do ściany przeciwprostokątnej pada niezbyt daleko od jednego z wierzchołków przy kątach  $45^\circ$  (rys. 6). Z rysunku widać wprost, że

$$\gamma = \beta, \quad 90^\circ + \varepsilon = 180^\circ - \gamma - 2\delta,$$

czyli  $\varepsilon = 90^\circ - \beta - 2\delta, \quad 180^\circ = 45^\circ + 90^\circ - \varepsilon + 90^\circ - \delta,$

czyli  $\delta + \varepsilon = 45^\circ$ , lub  $2\delta = 90^\circ - 2\varepsilon$ , zatem  $\varepsilon = 90^\circ - \beta - 90^\circ + 2\varepsilon, \quad (3)$

czyli ostatecznie  $\varepsilon = \beta$ , a w konsekwencji  $\xi = \alpha$ .

Kąt zawarty między promieniem wchodzącym a wychodzącym z pryzmatu jest w tym przypadku:

$$\Theta = 90^\circ. \quad (4)$$

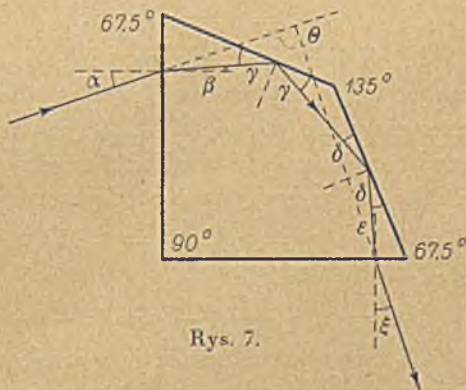
Chcąc się przekonać, czy obraz widziany w pryzmacie powstał po dwukrotnym odbiciu i załamaniu, obracamy lekko pryzmat dookoła osi pionowej; jeżeli obraz pozostaje na miejscu, dowodzi to, że kąt  $\Theta$  nie jest zależny od kąta padania, a zatem  $\Theta = 90^\circ$ , w przeciwnym razie mamy do czynienia z przypadkiem nieprzydatnym do tyczenia kąta prostego. Należy zauważyć, że obraz nieruchomy będzie mniej wyraźny od ruchomego.

#### b) *Pryzmat Wollastona.*

Pryzmat ten jest zbudowany analogicznie do pryzmatu Bauernfeinda z tą różnicą, że podstawę jego stanowi czworobok, przy czym dwa naprzeciw siebie leżące kąty wynoszą po  $67,5^\circ$ , zaś z dwu pozostałych jeden jest prosty, a drugi równy  $135^\circ$ , jak to uwidoczono na rys. 7.

Kąty  $\gamma, \delta$  i  $\varepsilon$  wyznaczone z odpowiednich trójkątów są:  $\gamma = \beta + 22,5^\circ$ ,  $\delta = 45^\circ - \gamma$ ,  $\varepsilon = 22,5^\circ - \delta = \beta$ , zatem w konsekwencji jest:

$$\xi = \alpha.$$



Rys. 7.

Promień wychodzący z pryzmatu odchyła się zatem od wchodzącego o  $90^\circ$ . Ścian tego pryzmatu nachylonych do siebie pod kątem  $135^\circ$  nie potrzeba wykladać amalgamatem, gdyż następuje na nich i tak zupełne odbicie.

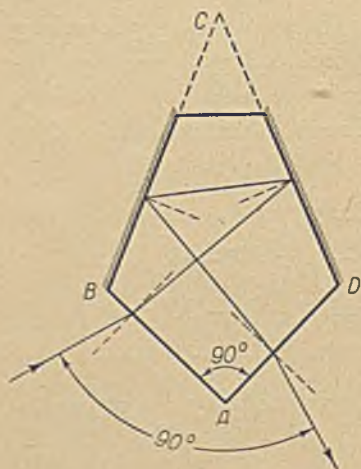
#### c) *Pryzmat pentagonalny.*

Podstawą tego pryzmatu jest właściwie czworobok, którego dwa kąty prze-



ciwgle są  $90^\circ$  i  $45^\circ$ , zaś dwa pozostałe są sobie równe (ostatni warunek bez znaczenia dla teorii).

Pryzmat ten, uwidoczony na rys. 8, zamieniamy dla zmniejszenia jego objętości na pięciokąt, ścinając róg przy kącie  $45^\circ$ . Aby pryzmatem tym móc tyczyć kąty proste, należy wyłożyć jego ściany nachylone do siebie pod kątem  $45^\circ$  amalgamatem, zamieniając je na zwierciadła. Łatwo zauważyć, że i w tym przypadku promień opuszczający pryzmat odchyła się od wchodzącego o  $90^\circ$ .



Rys. 8.

W porównaniu z pryzmatem Bauernfeinda wykazuje pryzmat pentagonalny tę wyższość, że obrazy widzianych w nim przedmiotów są znacznie jaśniejsze oraz, że punkt przecięcia się promieni wchodzącego i wychodzącego leży zawsze w obrębie pryzmatu.

### § 3. Dalsze rozważania nad biegiem promieni w pryzmatach

a) *Pryzmaty o bardzo małych kątach wierzchołkowych czyli kliny optyczne.*

W przypadku, gdy  $\gamma$  — jeden z kątów wierzchołkowych pryzmatu, jest bardzo mały, mamy do czynienia z tzw. klinem optycznym, służącym do odchylenia promieni o pewien stały kąt  $\theta$ . Z rys. 9 widać, że

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2, \text{ a ponieważ} \\ 180^\circ &= \gamma + 90^\circ - \beta_1 + 90^\circ - \beta_2, \text{ czyli} \\ \gamma &= \beta_1 + \beta_2, \text{ przeto} \\ \theta &= \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Jeżeli promień pada na klin pod bardzo małym kątem  $\alpha_1$ , tj. prawie prostopadle, wówczas nie tylko  $\beta_1$ , ale  $\alpha_2$  i  $\beta_2$  są również kątami bardzo małymi, a związki między kątami  $\alpha$  i  $\beta$  zmieniają się na następujące:

$$\alpha_1 = n \beta_1, \quad \alpha_2 = n \beta_2, \quad (6)$$

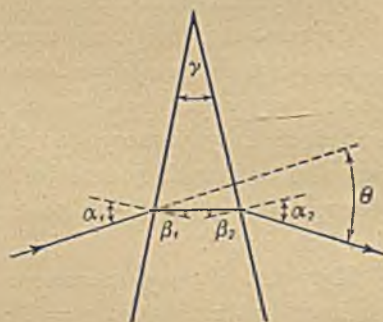
z czego wynika, że

$$\theta = n(\beta_1 + \beta_2) - \gamma = (n - 1)\gamma. \quad (7)$$

Kąt, pod jakim zbaczają promienie ze swej poprzedniej drogi, po przejściu przez klin optyczny, jest proporcjonalny do kąta wierzchołkowego.

b) *Badanie błędów pryzmatów Bauernfeinda, wynikających z powodu niepełnego zachowania kątów  $90^\circ$  i  $45^\circ$ .*

Jeżeli w pryzmacie Bauernfeinda zmienimy nieznacznie kąty, i tak kąt  $90^\circ$  na  $\varphi$ , a kąty  $45^\circ$  na  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , wówczas otrzymamy następujące trzy związki (I, II i III) ze względu na kąty, zawarte w odpowiednich trójkątach (rys. 10):



Rys. 9.



- I.  $180^\circ = 90^\circ - \beta + \varphi + \gamma$   
 II.  $180^\circ = \gamma + 90^\circ + \delta + \psi_1$   
 III.  $180^\circ = 90^\circ - \varepsilon + 90^\circ - \delta + \psi_1$ ,

z których wynika, że

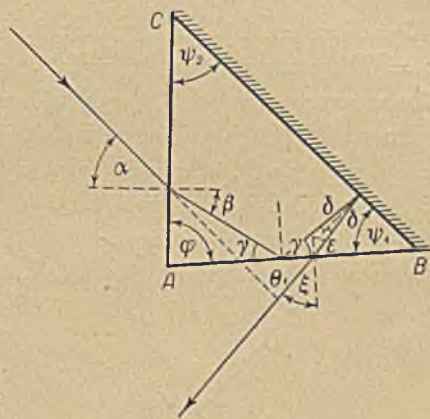
$$\gamma = 90^\circ + \beta - \varphi, \quad \delta = 90^\circ - \gamma - \psi_1$$

$$\varepsilon = \psi_1 - \delta = 2\psi_1 - 90^\circ + \gamma = 2\psi_1 - \varphi + \beta.$$

Zaś kąt  $\theta_1$  określony będzie związkiem:

$$180^\circ - \theta_1 = 90^\circ - \xi + 180^\circ - \varphi - 90^\circ + \alpha,$$

czyli:  $\theta_1 = \varphi + \xi - \alpha. \quad (8)$



Rys. 10.

Dla wyznaczenia różnicy kątów  $\xi - \alpha$  posłużymy się następującą relacją

$$2 \sin \frac{\xi - \alpha}{2} = \frac{\sin \xi - \sin \alpha}{\cos \frac{\xi + \alpha}{2}},$$

która dla kątów  $\varphi$  i  $\psi_1$  różniących się nieznacznie od  $90^\circ$  względnie  $45^\circ$  przekształca się na:

$$\xi - \alpha = \frac{\sin \xi - \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (9)$$

Zastępując w liczniku powyższego równania kąty  $\xi$  i  $\alpha$  przez  $\beta$  i  $\varepsilon$ , otrzymamy ze względu na to, że  $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ , a  $\sin \xi = n \cdot \sin \varepsilon$ :

$$\xi - \alpha = n \frac{\sin \varepsilon - \sin \beta}{\cos \alpha} = n \frac{\sin (2\psi_1 - \varphi + \beta) - \sin \beta}{\cos \alpha}.$$

Ponieważ  $\sin (2\psi_1 - \varphi + \beta) = \sin (2\psi_1 - \varphi) \cos \beta + \cos (2\psi_1 - \varphi) \sin \beta$ , przeto uwzględniając, że  $2\psi_1$  równa się w przybliżeniu  $\varphi$ , będzie

$$\sin (2\psi_1 - \varphi + \beta) = (2\psi_1 - \varphi) \cos \beta + \sin \beta, \quad \text{a ostatecznie}$$

$$\xi - \alpha = n (2\psi_1 - \varphi) \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (10)$$

Dla wyrugowania kąta  $\beta$  posłużymy się związkiem:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \text{a przeto}$$

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{n} \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1},$$

wobec czego  $\xi - \alpha = (2\psi_1 - \varphi) \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1},$

zaś  $\theta_1 = \varphi + (2\psi_1 - \varphi) \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1}. \quad (11)$

Jeżeli zatem  $2\psi_1 = \varphi$ , to kąt  $\Theta_1$  jest równy kątowi  $\varphi$ , a gdy równocześnie i  $\varphi = 90^\circ$ , otrzymujemy  $\Theta_1 = 90^\circ$ . Ale odwrotnie, mimo że  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\Theta_1$  jest tylko wówczas równy  $90^\circ$ , gdy równocześnie  $\psi_1 = 45^\circ$ .

Ze wzoru (11) wynika, że należy tak używać pryzmatu, aby kąt padania  $\alpha$  nie był zbyt duży, niewiele większy niż  $45^\circ$ , a wówczas będzie można przyjąć (uwzględniając i inne błędy), że wytyczony kąt  $\Theta_1$  będzie się różnił o  $1' - 2'$  od kąta prostego.

Omówmy następnie przypadek, gdy promień pada na pryzmat w przybliżeniu prostopadle do przeciwprostokątnej.

Biorąc pod uwagę kąty w odpowiednich trójkątach otrzymamy:

$$180^\circ = 90^\circ - \beta + \psi_2 + 90^\circ - \gamma,$$

$$180^\circ = \delta + \psi_2 + 90^\circ + \gamma,$$

$$180^\circ = \varphi + \delta + 90^\circ - \varepsilon,$$

zatem:

$$\varepsilon = \varphi - 90^\circ + 90^\circ - \psi_2 + \beta - \psi_2 = \varphi + \beta - 2\psi_2.$$

Kąt  $\Theta_2$  otrzymujemy ze związku (rys. 11):

$$180^\circ - \Theta_2 = 90^\circ + \alpha - 180^\circ + \varphi + 90^\circ - \xi,$$

$$\Theta_2 = 180^\circ - \varphi + \xi - \alpha, \quad (12)$$

a ponieważ (analogicznie jak poprzednio):

$$\xi - \alpha = n \frac{\sin(\varphi - 2\psi_2 + \beta) - \sin \beta}{\cos \alpha} = (\varphi - 2\psi_2) \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1},$$

$$\text{przeto:} \quad \Theta_2 = 180^\circ - \varphi + (\varphi - 2\psi_2) \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1}. \quad (13)$$

Jeżeli tedy użyjemy tego samego pryzmatu w obu wymienionych położeniach, otrzymamy przy tym samym kącie padania promienia  $\alpha$  jako średnią arytmetyczną:

$$\Theta = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} = 90^\circ + 2(\psi_1 - \psi_2) \sqrt{(n^2 - 1) \sec^2 \alpha + 1}; \quad (14)$$

o ile zatem kąt  $\psi_1$  jest równy kątowi  $\psi_2$ , czyli w przypadku pryzmatu równoramiennego, otrzymujemy dla jednakowego kąta  $\alpha$ , bez względu na wielkość kąta  $\varphi$ , jako średnią arytmetyczną z  $\Theta_1$  i  $\Theta_2$  kąt  $90^\circ$ .

Jeżeli natomiast  $\psi_1 - \psi_2$  wynosi  $15''$ , wówczas dla kąta  $\alpha = 45^\circ$  i  $n = 1,5$  otrzymujemy  $n^2 - 1 = 1,25$ ,  $\sec^2 \alpha = 2$ , a różnica kąta  $\Theta$  od  $90^\circ$  wynosi około  $1'$ .

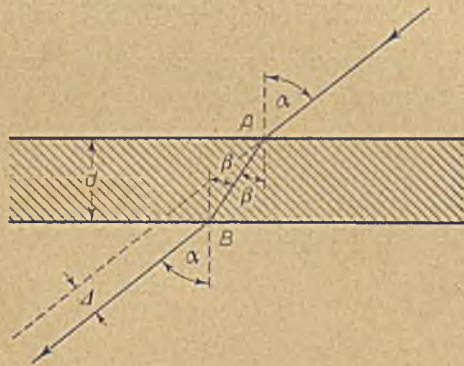
#### § 4. Przesunięcie promieni przy przejściu przez równoległe płytki szklane

Promienie przechodzący przez płytkę szklaną o ścianach ściśle równoległych doznaje, wchodząc do płytki i opuszczając ją, załamania w dwu prze-



ciwnych kierunkach, czego wynikiem jest tylko *równoległe* ich przesunięcie względem poprzedniego położenia. W najnowszych czasach zastosowano przy niektórych przyrządach urządzenia, w których mierzy się równoległe przesunięcia promieni  $\Delta$  przy pomocy kąta skrzywienia płytki szklanej.

Niech na płytkę o grubości  $d$  pada promień pod kątem  $\alpha$ . Promień ten, załamany w punkcie  $A$  pod kątem  $\beta$ , wyjdzie w punkcie  $B$  na zewnątrz również pod kątem  $\alpha$ .



Rys. 12.

$$\begin{aligned} \text{Odstęp } AB &= \frac{d}{\cos \beta}, \text{ zaś} \\ \Delta &= AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = \\ &= \frac{d}{\cos \beta} \sin(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

W miejsce ścisłej formuły (15) wprowadzimy inną, przybliżoną, zależną tylko od kąta  $\alpha$  i współczynnika  $n$ .

Wzór (15) rozwijamy:

$$\Delta = \frac{d}{\cos \beta} (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = d (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta),$$

$$\text{a ponieważ } \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha \text{ i } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}},$$

przeto

$$\Delta = d \operatorname{tg} \alpha \left( \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \right).$$

Teraz stosujemy następujące rozwinięcia w szereg:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} \sin^6 \alpha - \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{n^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin^4 \alpha}{n^4} + \frac{5}{16} \frac{\sin^6 \alpha}{n^6} + \dots$$

Po wykonaniu odpowiednich działań i wyjęciu czynnika  $\frac{n-1}{n}$  przed nawias, otrzymamy ostatecznie (zaniedbując wyrazy powyżej 6-go rzędu):

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{n-1}{n} d \operatorname{tg} \alpha \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n^2} - 1 \right) \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{n+1}{n^2} \left[ \frac{3}{n^2} - 1 \right] \right) \right. \right. \\ \left. \left. \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{n+1}{n^2} \left[ n + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^4} \right] \right) \sin^6 \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dla współczynnika  $n = 1,58$  (używanego przez Wilda) wzór ten będzie opiewał

$$\Delta = 0,3671 d \operatorname{tg} \alpha \{1 + [0,01674 \sin^2 \alpha - 0,09894 \sin^4 \alpha - 0,10114 \sin^6 \alpha]\}. \quad (16')$$

Opuszczając we wzorze (16) wyrażenie zawarte w klamrze [ ], otrzymujemy wzór przybliżony

$$\Delta = \frac{n-1}{n} d \operatorname{tg} \alpha. \quad (17)$$

Dokładność tego wzoru charakteryzuje wartość opuszczonego wyrażenia w klamrze, która wynosi

dla $\alpha = 0^\circ$	0,0000
10°	+ 0,0004
20°	+ 0,0004
25°	- 0,0008
30°	- 0,0036

Wzór przybliżony (17) może być zatem używany dla kąta  $\alpha$  zawartego w granicach od  $-25^\circ$  do  $+25^\circ$ .

### § 5. Przejście promieni świetlnych przez soczewki (dioptryka)

Szko sporządzone z jednorodnego materiału, ograniczone obustronnie powierzchniami kulistymi, nazywamy *soczewką*. Rozróżniamy: soczewki wypukłe (obustronnie), płasko-wypukłe, wklęsłe i płasko-wklęsłe (rys. 13). So-



Rys. 13.

czewka wypukła ma oba promienie krzywizny  $\rho$  dodatnie, płasko-wypukła ma jeden z nich równy  $\infty$ , wklęsła ma oba promienie ujemne, a wreszcie płasko-wklęsła ma także oba ujemne, a jeden z nich nieskończenie wielki.

Grubość soczewek jest z reguły tak nieznaczna, że przy rozważaniach teoretycznych możemy je uważać jako nieskończenie cienkie. Linie łączącą środki  $O_1$  i  $O_2$  kul ograniczających soczewkę nazywamy *osią optyczną* soczewki. Na niej leży punkt  $O$ , środek optyczny soczewki, którego położenie względem ścian soczewki określa związek (p. rys. 14):

$$o_1 : o_2 = \rho_1 : \rho_2, \quad (18)$$

przy czym  $o_1$  i  $o_2$  są odległościami środka optycznego od ścian soczewki, mierzonymi na osi optycznej. Środek optyczny leży zatem bliżej ściany o większej krzywiznie, a w płasko-wypukłych i płasko-wklęsłych soczewkach w punkcie przebicia osi ze ścianą zakrzywioną.

Wszelkie promienie przechodzące przez środek optyczny, wychodzą zeń bez zmiany kierunku z bardzo nieznacznym przesunięciem równoległym. Przy



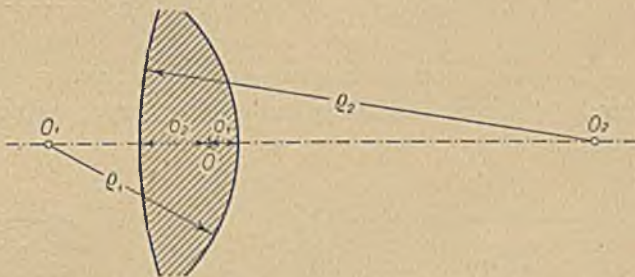
rozpatrywaniu prawideł dla biegu promieni przez pojedyncze, dostatecznie cienkie soczewki możemy jednak z reguły owe przesunięcia pominąć, przyjmując, że promienie przechodzące przez środek, biegną dalej w tym samym kierunku bez żadnego przesunięcia.

W teorii soczewek odgrywa ważną rolę wyrażenie:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (19)$$

którego odwrotność nazywamy *ogniskową* soczewki. Jak widać z tego związku, wartość jej jest dla danej soczewki, stałą (dla soczewek wypukłych dodatnią zaś dla wklęsłych ujemną).

Odcinając obustronnie odległość  $f$  od środka optycznego na osi, otrzymujemy położenia *punktów ogniskowych*  $F$  i  $F'$ . Płaszczyzny przeprowadzone przez te punkty, prostopadłe do osi optycznej, nazywamy *płaszczyznami ogniskowymi*.



Rys. 14.

Jednym z najbardziej ważnych prawideł dioptryki jest równanie Halleya:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}, \quad (20)$$

przy czym  $p$  oznacza odległość przedmiotu, zaś  $o$  odległość obrazu od płaszczyzny środka optycznego soczewki (prostopadłej do osi optycznej). Znając dwie wielkości z powyższych trzech, zawartych w równaniu Halleya, można zawsze trzecią wyznaczyć drogą rachunkową lub graficzną.

Podany wyżej związek pomiędzy promieniami krzywizny soczewki, współczynnikiem załamania szkła i ogniskową soczewki (wzór 19) jest, jak już wspomniano, ważny jedynie wówczas, gdy soczewkę możemy uważać za nieskończenie cienką. W przypadku tym możemy posługiwać się dla skonstruowania obrazu środkiem optycznym soczewki.

Jeżeli jednak grubość soczewki nie jest zaniedbywalna, rozważania teoretyczne będą nieco odmienne.

Każdą soczewkę można zastąpić tzw. *płaszczyznami głównymi*  $g$  i  $g'$ , prostopadłymi do osi optycznej. Punkty, w których oś optyczna przebija płaszczyzny główne, nazywamy *punktami głównymi*  $G$  i  $G'$ , a odmierając od nich w odpowiednim kierunku na osi odległości ogniskowe, otrzymamy punkty ogniskowe  $F$  i  $F'$ . W tym przypadku związek określający wartość ogniskową  $f$  (wzór 19) zmieni się na następujący:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left\{ \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{n-1}{n \rho_1 \rho_2} e \right\}, \quad (21)$$



przy czym  $e$  oznacza grubość soczewki. W miejsce środka optycznego otrzymujemy oba punkty główne  $G$  i  $G'$ , których położenie w stosunku do ścian soczewki określają wzory:

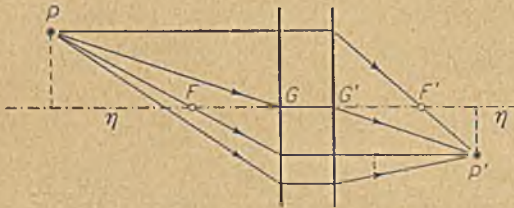
$$o_1 = \frac{e \rho_1}{n \rho_1 + n \rho_2 - (n-1)e}, \quad o_2 = \frac{e \rho_2}{n \rho_1 + n \rho_2 - (n-1)e}, \quad (22)$$

$$GG' = e - o_1 - o_2 = e \left\{ 1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{n \rho_1 + n \rho_2 - (n-1)e} \right\},$$

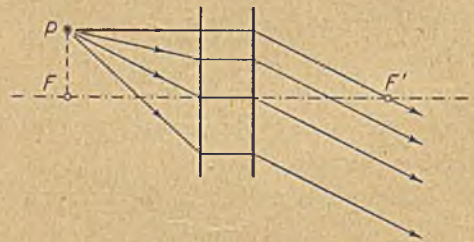
a ze względu na to, że  $(n-1)e$  można w mianowniku pominąć:

$$GG' = e \frac{n-1}{n} + \dots \quad (23)$$

Tworzenie obrazów przy pomocy punktów i płaszczyzn głównych oraz punktów i płaszczyzn ogniskowych przeprowadzamy łatwo wedle następujących reguł.



Rys. 15.



Rys. 16.

Promień dowolny, trafiający pierwszą płaszczyznę główną w pewnym oddaleniu od osi  $\eta$ , przechodzi przez drugą płaszczyznę główną w tym samym oddaleniu od osi, załamując się następnie — zależnie od położenia swego przed załamaniem — wedle prawa Halleya (rys. 15). Promień, przechodzący przez punkt  $G$ , przechodzi równoległe przez punkt  $G'$  (i odwrotnie).

Promienie równoległe do osi skupiają się po przejściu przez drugą płaszczyznę główną w jej ognisku, zaś promienie wychodzące z dowolnego punktu płaszczyzny ogniskowej, biegną, po przejściu przez drugą płaszczyznę główną, równoległe (rys. 16).

### § 6. Składanie soczewek. Soczewki wypadkowe (równoważne)

Przy składaniu soczewek i tworzeniu z nich jednej równoważnej mają zastosowanie wzory następujące.

Dwie soczewki  $S_1$  i  $S_2$  o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$ , oddalone od siebie o odstęp  $e$ , zamieniamy na soczewkę równoważną o ogniskowej  $f_{1,2}$  przy pomocy związku:

$$f_{1,2} = \pm \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}. \quad (24)$$



Znak + oznacza soczewkę zbiegającą, znak zaś — soczewkę rozpraszającą, co należy ustalić osobno w każdym poszczególnym przypadku.

Odległości płaszczyzn głównych od środków optycznych soczewek są w przypadku soczewki *zbiegającej* ( $+f_{1,2}$ ):

$$S_1 G_1 = e_1 = \frac{f_1 e}{f_1 + f_2 - e}, \quad (25)$$

$$S_2 G_2 = e_2 = \frac{f_2 e}{f_1 + f_2 - e},$$

zaś w przypadku soczewki *rozpraszającej* ( $-f_{1,2}$ ):

$$S_1 G_1 = e_1 = \frac{-2f_1 f_2 + f_1 e}{f_1 + f_2 - e}, \quad (26)$$

$$S_2 G_2 = e_2 = \frac{-2f_1 f_2 + f_2 e}{f_1 + f_2 - e}.$$

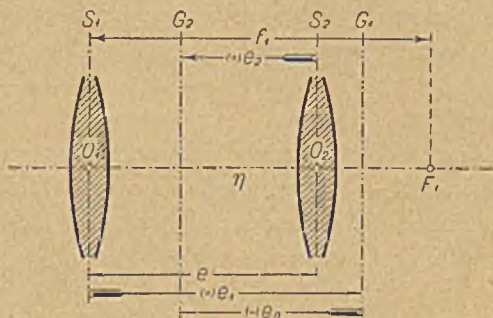
Kierunek dodatni liczy się dla  $e_1$  od  $S_1$  do  $S_2$ , dla  $e_2$  od  $S_2$  ku  $S_1$ . Odległość  $G_1 G_2 = e_g = e - e_1 - e_2$  (dodatnia, gdy kierunek  $G_1 G_2$  zgadza się z  $O_1 O_2$ ).

Przykład:

$$f_1 = 30 \text{ cm}, f_2 = 15 \text{ cm}, e = 20 \text{ cm},$$

$$f_{1,2} = \frac{30 \cdot 15}{45 - 20} = +18 \text{ cm}, e_1 = \frac{30 \cdot 20}{25} = 24 \text{ cm}, e_2 = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm},$$

$$e_g = e - e_1 - e_2 = 20 - 24 - 12 = -16 \text{ cm (płaszczyzna } G_1 \text{ za płaszczyzną } G_2).$$



Rys. 17.

### § 7. Aplanatyczność i achromatyczność

Formuła dioptryczna Halleya odnosi się właściwie tylko do promieni, których kąt padania  $\alpha$  jest tak mały, że  $\sin \alpha$  można zastąpić przez  $\tan \alpha$  (promienie centralne). Gdyby jednak ograniczyć się do użycia tylko tego rodzaju promieni, musielibyśmy używać soczewek o bardzo małej średnicy (lub stosować przysłony o bardzo małych otworach), co znów powodowałoby powstawanie obrazów bardzo słabych. Dlatego w praktyce nie ograniczamy się tylko do samych promieni centralnych, a w konsekwencji tego promienie równoległe do osi nie przecinają się w jednym punkcie, lecz na pewnej powierzchni. Zjawisko to nazywamy *aplanatycznością* soczewki. Wielkość wspomnianej powierzchni jest minimalną gdy zachodzi następujący warunek:

$$\rho : \rho' = (4 + n - 2n^2) : (2n^2 + n) \quad (27)$$

( $\rho$  i  $\rho'$  promienie soczewki,  $n$  — współczynnik załamania); soczewka spełniająca powyższy warunek nazywa się soczewką »najlepszego kształtu«.

Ponieważ dla  $n = 1,69$  jest  $4 + n - 2n^2 = 0$ , przeto dla  $n = 1,69$  będzie  $\rho' = \infty$ , czyli że przy użyciu szkła o współczynniku 1,69 soczewką najlepszego kształtu będzie soczewka ograniczona z jednej strony płaszczyzną.

Promienie świetlne o różnych barwach załamują się niejednakowo, powo-



dując przy przejściu przez soczewki rozczepienie światła, a tym samym zabarwienie tęczowe obrazów. Dobre soczewki powinny być *achromatyczne*, tzn. dawać obrazy czyste bez zabarwienia tęczowego. Niech będą dla pewnego gatunku szkła oraz kolorów czerwonego i niebieskiego współczynniki załamania  $n_c$  i  $n_n$ , zaś  $n$  współczynnik załamania dla średniego koloru (żółtego); wówczas wyrażenie:

$$v = \frac{n-1}{\Delta n} \quad (28)$$

oznacza liczbę (cechę) dyspersyjną czyli rozczepienia Abbego, przy czym:  $\Delta n = n_c - n_n$  jest średnim rozczepieniem (średnią dyspersją) dla danego gatunku szkła. Opierając się na tym, ustalimy warunki achromatyczności soczewek i pryzmatów.

a) *Soczewka achromatyczna.*

Jeżeli mamy dwie soczewki  $S_1$  i  $S_2$  o liczbach dyspersyjnych  $v_1$  i  $v_2$  i ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$ , wówczas otrzymamy najlepszą achromatyczność wedle Czap-  
 skięgo, jeżeli je umieścimy w odległości

$$e = \frac{v_1 f_1 + v_2 f_2}{v_1 + v_2} \quad (29)$$

Oczywiście, gdy szkła soczewek są jednakowe, tj. gdy  $v_1 = v_2$ , wówczas

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (30)$$

Do obiektywu lunet używa się dwu soczewek, jednej zbierającej ze szkła crown i jednej rozpraszającej ze szkła flint; do okularów lunet używa się zazwyczaj dwu soczewek zbierających, o czym w następujących paragrafach (najnowsze okulary są również dla uzyskania achromatyczności składane ze szkła crown i flint).

b) *Pryzmat achromatyczny.*

Przy pryzmatach o małych kątach wierzchołkowych  $\gamma$  (klinach) wynosi kąt  $\Theta$ , o jaki odchyła się promień, padający w przybliżeniu prostopadle na ścianę pryzmatu przy przejściu przez pryzmat, jak to wykazaliśmy poprzednio (wzór 7):

$$\Theta = (n - 1) \gamma \quad (31)$$

Przechodząc przez pryzmat doznają promienie, z których składa się światło białe, rozczepienia (dyspersji)  $\Delta n$  powodującej, że promienie czerwone i niebieskie zawierają po przejściu przez pryzmat ze sobą kąt:

$$\Delta \Theta = (n_c - 1) \gamma - (n_n - 1) \gamma = (n_c - n_n) \gamma = \gamma \Delta n \quad (32)$$

Ponieważ dyspersja działa w przyrządach optycznych bardzo ujemnie, przeto eliminujemy ją przez użycie dwu odpowiednio ze sobą zestawionych pryzmatów o kątach wierzchołkowych  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , oraz o różnych współczynnikach załamania  $n_1$  i  $n_2$  (dla koloru żółtego).

Jeżeli kąty dyspersyjne obu pryzmatów wynoszą  $\Delta \Theta_1 = \gamma_1 \Delta n_1$  oraz



$\Delta\Theta_2 = \gamma_2 \Delta n_2$ , wówczas odchylenie promienia po przejściu przez oba odwrotnie złożone pryzmaty otrzymamy przy pomocy wzoru:

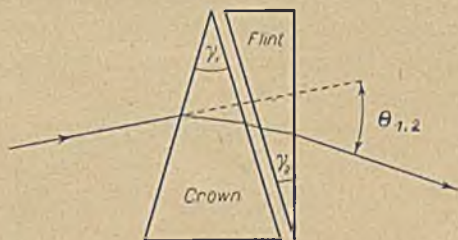
$$\Theta_{1,2} = \gamma_1 (n_1 - 1) - \gamma_2 (n_2 - 1). \quad (33)$$

Warunkiem aby dyspersja wypadkowa była równa zero, tj. by pryzmat był achromatyczny, jest:

$$O = \Delta\Theta_1 - \Delta\Theta_2 = \Delta n_1 \gamma_1 - \Delta n_2 \gamma_2,$$

lub:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}. \quad (34)$$



Rys. 18.

W praktyce zależy nam zazwyczaj na tym, aby pryzmat achromatyczny odchylił promień pod pewnym kątem  $\Theta_{1,2}$ , a obliczenie kątów wierzchołkowych dwu pryzmatów, działających jako pryzmat achromatyczny, następuje wówczas na podstawie obu ostatnio przytoczonych związków.

Zatem ponieważ:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{\gamma_1 (n_1 - 1) - \Theta_{1,2}}{n_2 - 1},$$

$$\text{przeto: } \gamma_1 = \frac{\gamma_1 \frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} \cdot \frac{\Theta_{1,2}}{\Delta n_1}}{\frac{n_2 - 1}{\Delta n_2}} = \frac{\gamma_1 v_1 - \frac{\Theta_{1,2}}{\Delta n_1}}{v_2}, \quad \gamma_1 (v_2 - v_1) = -\frac{\Theta_{1,2}}{\Delta n_1},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Theta_{1,2}}{\Delta n_1} \cdot \frac{1}{v_1 - v_2}, \quad \text{i analogicznie } \gamma_2 = \frac{\Theta_{1,2}}{\Delta n_2} \cdot \frac{1}{v_1 - v_2}. \quad (35)$$

*Przykład.* Chcemy otrzymać taki pryzmat achromatyczny, złożony z crownu i flintu, aby tangens kąta załamania wynosił  $\frac{1}{100}$ , tj. by  $\Theta_{1,2} = 34'22'',65$ .

Dla pryzmatu z crownu  $n_1 = 1,518$ , a  $\Delta n_1 = 0,0086$ , wobec czego  $v_1 = \frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} = 60,23$ ; dla pryzmatu z flintu  $n_2 = 1,620$ , a  $\Delta n_2 = 0,0171$ , wobec czego  $v_2 = \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2} = 36,26$ . Z równań (35) obliczymy kąty wierzchołkowe dla pryzmatów: ze szkła crown  $\gamma_1 = 2^{\circ}46'45'',97$ , ze szkła flint  $\gamma_2 = 1^{\circ}23'52'',24$ .

## § 8. Oko ludzkie

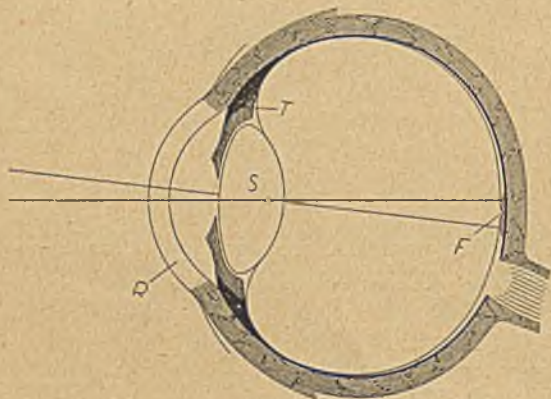
a). *Zarys budowy oka.*

Widzialną część gałki ocznej otacza błona, zwana rogówką  $R$  (rys. 19), za nią napotykamy tęczówkę  $T$  (iris), posiadającą w środku kolisty otwór tzw. źrenicę. Średnica źrenicy waha się od 1 mm do 5 mm, a średnio wynosi około 2 mm; naświetlona zmniejsza się, zaś w ciemnościach zwiększa się. Za



tęczówką jest osadzona soczewka oczna  $S$ , dzieląca oczodół na dwie komory. Ścianę tylną większej komory pokrywa siatkówka oddalona od środka soczewki ocznej o około 15 mm i zawierająca rozgałęzienie nerwu ocznego, a wewnątrz jej wypełnia galaretowata masa, podczas gdy komora mniejsza zawiera przejrzysty płyn.

Widzenie odbywa się w sposób następujący. Po przejściu przez soczewkę oczną i wspomnianą masę galaretowatą, tworzą promienie wychodzące z przedmiotów obrazy na siatkówce, a drażniąc kończyny nerwowe w niej umieszczone,



Rys. 19.

podają przez nerwy owe obrazy do naszej świadomości. Siatkówka nie jest we wszystkich swych miejscach jednakowo czuła, a unerwienie jej składa się z tzw. pniaczków (czopków) i pręcików; średnica pniaczka wynosi około  $4,5 \mu$ , zaś przekroju poprzecznego pręcika  $2 \mu$ . Działanie światła normalnego w dzień udziela się mózgowi przy pomocy pniaczków, pręciki pełnią tę samą funkcję przy słabym oświetleniu (zmrzch, noc). Miejsce wyjścia nerwu jest zupełnie nieczule (plamka Mariotte'a), natomiast

natomiast najbardziej czułym miejscem błony jest tzw. żółta plamka, a szczególnie jej środek tzw.fovea centralis  $F$ , gdzie znajdują się przeważnie pniaczki. Patrząc na pewien przedmiot, kierujemy mimowolnie tak okiem, aby obraz tego przedmiotu znalazł się w żółtej plamce, przez co widzimy go najlepiej.

*b). Jednostka widzenia i możliwość odróżniania przedmiotów. Prawo Fechnera. Tak zwane wrażenie szerokości.*

Promienie łączące środek soczewki ocznej z obwodem pniaczka, tworzą stożek, który nazywamy jednostką widzenia. Kąt przy wierzchołku owego

stożka wynosi  $\frac{4,5}{15000} \rho'$  czyli około  $1'$ .

Dwa do siebie podobne przedmioty można zaobserwować oddzielnie (tj. konstatując dwa ich oddzielne obrazy), gdy obrazy te są utworzone na pniaczkach, przegrodzonych przynajmniej jednym pniaczkiem. To znaczy, że kąt pod jakim je widzimy, powinien wynosić minimum  $120''$ , natomiast przyjmuje się, że gdy kąt zawarty między kierunkami do owych przedmiotów wynosi  $160''$ , można je zobaczyć zupełnie pewnie jako dwa oddzielne przedmioty.

Przyjmijmy, że w zewnętrznej części stożka stanowiącego jednostkę widzenia, znajduje się powierzchnia, wysyłająca pewną ilość światła  $L$ ; jeżeli ilość światła wzrośnie z  $L$  na  $L + \Delta L$ , to przyrost jasności wywołany w oku wyniesie:

$$\Delta H = \Delta \lg L = 2,302 585 \Delta \log L. \quad (36)$$



Jest to prawo Fechnera ( $\lg$  — oznacza logarytm naturalny,  $\log$  — logarytm Briggsowski).

Inną bardzo ważną właściwością fizjologiczną oka jest możność konstataowania nieznacznych przesunięć kresek równoległych (tzw. wrażenie szerokości), która ma wielkie znaczenie przy odczytach czynionych przez zestawienie dwu podziałek o kreskach równoległych (koincydencji dwu równoległych kresek) i przy tzw. bisekcjonowaniu.

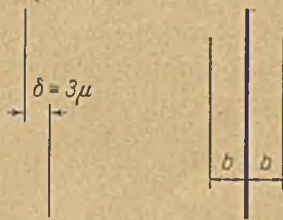
Wedle doświadczeń Eggerta (Z. f. V. 1907) można zauważyć odstęp dwu kresek równoległych wówczas, gdy kąt, pod jakim go widzimy, wynosi zaledwie  $3''$ , tj. gdy szerokość odstępu  $\delta$  (przy odległości widzenia około 206 mm) równa się:

$$\delta \approx \frac{206 \cdot 3}{206265} \text{ mm, lub } \delta \approx 3 \mu.$$

Tym też można sobie wytłumaczyć wielką dokładność odczytów na noniuszach, jak też i wyniki przyrządów, w których zastosowano koincydencję kresek równoległych.

Bisekcjonowanie polega na następującej zasadzie. Wyobraźmy sobie dwie cienkie nici równoległe, napięte w pewnej stałej odległości, które staramy się tak umieścić po obu stronach kreski, aby odstępy  $b$  między kreską a nitkami były sobie równe (rys. 20).

Według doświadczeń Förstera (Z. f. V. 1880) błąd średni ustawienia nitek w powyżej opisany sposób wynosi około  $\pm 3'',4$  (przy pomiarach będzie to błąd nastawienia nitek na kreskę) wówczas, gdy odstępy  $b$  wynoszą około  $2,5 \mu$ . Odpowiada to przesunięciu linii środkowej obu nitek względem kreski przy tej samej odległości widzenia o:



Rys. 20.

$$\pm \frac{206 \cdot 3,4}{206265} \text{ mm} = \pm 3,4 \mu.$$

Natomiast błąd nastawienia nitek wzrasta szybko przy powiększaniu odstępu  $b$ . Z tego powodu należy przy urządzeniach tego rodzaju stosować możliwie najmniejsze odstępy  $b$ .

### § 9. Akomodacja oka. Szkła oczne (binokle)

Patrząc normalnym okiem bez współpracy mięśnia ocznego na punkt nieskończenie odległy, widzimy jego obraz na siatkówce, znajdującej się około 24,4 mm poza rogówką. Aby widzieć wyraźnie przedmiot znajdujący się w bliższej odległości, musimy tak zmienić krzywiznę soczewki ocznej przy pomocy mięśnia ocznego, aby obraz owego przedmiotu padł na siatkówkę. Czynność tę nazywamy *akomodacją* oka. W ten sposób możemy widzieć w wieku młodym przedmioty odległe nawet o 10 cm od oka; w wieku starszym odstęp ten wzrasta do 50 cm.



Przedmioty bliższe można widzieć dokładnie, o ile będziemy na nie patrzyli przez odpowiednio wąskie szpary (na czym polega zastosowanie przezierników w węgielnicach przeziernikowych).

Krótkowidz ma odstęp między siatkówką a rogówką większy, zaś dalekowidz mniejszy niż człowiek widzący normalnie, przeto promienie biegnące z punktu nieskończenie odległego nie przecinają się u nich na siatkówce. Natomiast istnieją dla nich punkty, których obrazy bez użycia akomodacji padają na siatkówkę, dla krótkowidza w odległości skończonej przed okiem, dla dalekowidza poza okiem (jako punkt urojony). Punkty, których obrazy bez akomodacji padają na siatkówkę, będziemy nazywali punktami *dali ocznej*.

Oprócz dali ocznej należy uwzględnić jeszcze inną odległość, tzw. odległość *dobrego widzenia w*, wynoszącą dla oka normalnego około 25 cm. W odległości tej widzimy przedmioty najwyraźniej (np. druk).

Oczy anormalne wymagają użycia szkieł ocznych, tzw. binokli. Dla krótkowidza będą to soczewki rozpraszające, dla dalekowidza skupiające. Zadanie ich polega na sprowadzeniu promieni równoległych (padających na oko) do punktów dali ocznej (przez co w obu przypadkach padają obrazy nieskończenie odległych punktów  $P_\infty$  na siatkówkę).

Ogniskową  $f$  soczewki ocznej obliczamy z wzoru Halleya uwzględniając, że u krótkowidza ma powstać w punkcie dali ocznej obraz urojony (gdyż znajduje się po tej samej stronie co i przedmiot), zaś u dalekowidza obraz rzeczywisty punktu  $P_\infty$ . O ile u krótkowidza wynosi  $d_k = 0,33$  m, zaś u dalekowidza poza okiem  $d_d = 0,33$  m, należy wstawić do wzoru Halleya:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

$d_k$  ze znakiem  $-$ , zaś  $d_d$  ze znakiem  $+$  wobec czego otrzymamy:

$$f_k = -0,33 \text{ m, względnie } f_d = +0,33 \text{ m.}$$

Silę łamliwości szkieł ocznych wyrażamy w tzw. *dioptrach*, odpowiadających odwrotnościom ogniskowych w metrach. W naszym przypadku szkła krótkowidza będą miały  $-3$ , zaś dalekowidza  $+3$  dioptry.

## § 10. Lupa

Soczewkę zbierającą o stosunkowo małej ogniskowej (do kilku cm) służącą do oglądania powiększonych obrazów bliskich przedmiotów, nazywamy *lupą*. Ponieważ przy użyciu lupy obraz powstaje po stronie przedmiotu, przeto związek Halleya przybiera formę:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{o} = \frac{1}{f}, \quad (37)$$

a stąd

$$p = \frac{of}{f+o}, \quad o = \frac{pf}{f-p}. \quad (38)$$



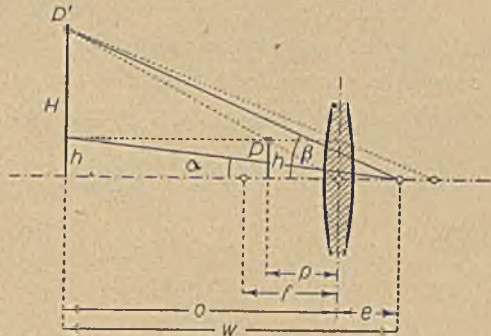
*Powiększenie lupy.*

Patrząc na pewien niewielki przedmiot, widzimy go najlepiej w odległości dobrego widzenia  $w$ . Jeżeli wielkość tego przedmiotu wynosi  $h$  (rys. 21), widzimy go pod kątem (w założeniu małym)

$$\alpha = \frac{h}{w}. \quad (39)$$

Natomiast przez lupę widzimy go powiększonym do  $H$  w odległości  $o$ . Jeżeli odległość oka od soczewki przyjmujemy  $e$ , będziemy widzieli obraz przedmiotu pod kątem:

$$\beta = \frac{H}{o+e}. \quad (40)$$



Rys. 21.

Powiększeniem lupy  $P$  nazywamy stosunek kątów  $\beta : \alpha$ , tj. kąta widzenia obrazu przez lupę do kąta widzenia przedmiotu bez użycia lupy.

$$P = \frac{H}{o+e} : \frac{h}{w}, \quad (41)$$

a ponieważ  $\frac{H}{h} = \frac{o}{p}$ , przeto

$$P = \frac{o w}{p(o+e)}; \quad (42)$$

że jednak

$$\frac{o}{p} = \frac{f}{f-p}, \text{ zaś } o+e = \frac{pf}{f-p} + e = \frac{pf+e(f-p)}{f-p}, \quad (43)$$

przeto ostatecznie:

$$P = \frac{f w}{f p + e(f-p)}. \quad (44)$$

Odstępy  $p$  i  $e$  muszą być tak dobrane, aby obraz powstał w granicach między odległością dobrego widzenia a dala oczną.

a) W praktyce staramy się mimowoli patrzeć bez użycia mięśnia ocznego (bez akomodacji), a wówczas, posiadając oko normalne, musimy trzymać tak lupę, aby obraz przedmiotu znalazł się w dali ocznej.

Dla oka normalnego będzie wówczas

$$p = f, \quad (45)$$

a tym samym

$$P = \frac{w}{f}. \quad (46)$$

Natomiast u krótkowidza będzie odległość  $p$  nieco mniejsza, zaś u dalekowidza nieco większa niż  $f$ , a to ze względu na odmienne odległości punktów dali ocznej niż u oka normalnego.

Wzór (46), miarodajny dla normalnego oka, zmienia się tylko bardzo nieznacznie dla krótkowidzów, dla których  $w$  może wynosić około 10 cm, i dla dalekowidzów, dla których  $w$  wynosi do 50 cm.

b) Jeżeli jednak wywrzemy (muskulem ocznym) nacisk na soczewkę oczną tak, aby obraz przedmiotu znalazł się w odległości dobrego widzenia  $w$ , wówczas należy uwzględnić, że  $o + e = w$ .

Wzór (42) zmieni się wówczas na:

$$P = \frac{o}{p}, \text{ a ponieważ } p = \frac{fo}{f+o}, \quad (47)$$

przeto

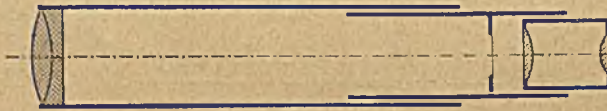
$$P = \frac{f+o}{f} = 1 + \frac{o}{f} = 1 + \frac{w-e}{f}. \quad (48)$$

Jeśli — jak to zazwyczaj ma miejsce w praktyce — przyjmiemy  $e = f$ , wzór (48) przejdzie na (46).

Przyjmując  $f = e = 1$  cm, otrzymamy powiększenie przy użyciu tego rodzaju lupy:  $P = 50$  dla dalekowidza, 25 dla widzącego normalnie, zaś 10 dla krótkowidza.

### § 11. Luneta geodezyjna

Luneta (rys. 22) składa się z dwu systemów optycznych: *obiektywu i okularu*, które muszą być aplanatyczne i achromatyczne; prócz tego znajduje się



Rys. 22.

w partii okularowej *krzyż nitkowy*, składający się dawniej z dwu na krzyż napiętych nici pajęczych, obecnie najczęściejznaczony drogą mikro-

fotograficzną na cienkiej płytce szklanej (o ścianach ściśle równoległych).

#### a) Działanie lunety.

Jak już wspomniano w § 6, używa się jako obiektywów (pomijając specjalne systemy) dwu soczewek: jednej zbierającej ze szkła crown, zaś drugiej wklęsłopłaskiej ze szkła flint, przy czym obowiązują wzory §§ 5 i 6.

Do niedawna najczęściej używane były okulary systemu Ramsdena, w ostatnich czasach Kellnera lub Steinheila. Okular Ramsdena składa się z dwu soczewek płaskowypukłych ze szkła crown o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$ , umieszczonych w odległości  $e = \frac{4}{9} f_1$  (rys. 23), przy czym  $f_2 = \frac{5}{9} f_1$ .

Okular ten nie jest zatem zupełnie achromatyczny, gdyż nie odpowiada warunkowi § 7:

$$e = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) = \frac{7}{9} f_1.$$

Soczewka o ogniskowej  $f_1$  służy jako soczewka oczna. Oba tylne ogniska schodzą się w jednym punkcie  $F_{1,2}$ .



Ze względu na to, że okular działa jako soczewka zbierająca jest:

$$f_{1,2} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e} = \frac{1}{2} f_1,$$

zaś

$$e_1 = \frac{f_1 e}{f_1 + f_2 - e} = \frac{2}{5} f_1, \quad e_2 = \frac{f_2 e}{f_1 + f_2 - e} = \frac{2}{9} f_1.$$

W lunecie geodezyjnej mają się tworzyć (podczas pomiarów) za pośrednictwem obiektywu obrazy przedmiotów w płaszczyźnie krzyża nitkowego. O ile obraz krzyża nitkowego i przedmiotu ma powstać najwyraźniej, tj. w płaszczyźnie dobrego widzenia (rys. 24), to odległość  $p$  — płaszczyzny krzyża nitkowego od drugiej płaszczyzny głównej ( $g_2$ ) — wyniesie według wzoru (47), § 10 (dla normalnego oka i  $e = 10$  mm):

$$p = \frac{240 f_{1,2}}{f_{1,2} + 240}.$$

Zatem w przypadku, gdy  $f_1 = 27$  mm, a tym samym  $f_{1,2} = 13,5$  mm, będzie  $p = 12,78$  mm, zaś odstęp krzyża nitkowego od soczewki  $S_2$  wyniesie:

$$\delta = p - e_2 = 12,78 - 6,00 = 6,78 \text{ mm.}$$

Inne wielkości są następujące:  $f_2 = \frac{5}{9} f_1 = 15$  mm,  $e = \frac{4}{9} f_1 = 12$  mm,  $e_1 = 0,4 f_1 = 10,8$  mm,  $e_2 = \frac{2}{9} f_1 = 6$  mm,  $e - e_1 = 1,2$  mm.

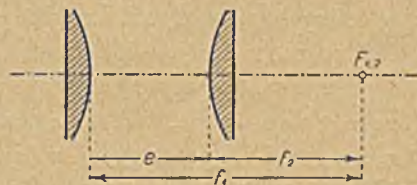
Dalekovidz o większej odległości dobrego widzenia, spojrzawszy do okularu, nie zobaczy krzyża nitkowego wyraźnie (lub nie zobaczy go zupełnie). Aby więc mógł posługiwać się lunetą (geodezyjną) musi szkło oczne okularu

(soczewkę  $S_1$ ) nieco wykręcić, zwiększając przez to  $e$  na  $e' = e + \Delta e$ . Zwiększenie to powoduje jednak nieznaczną zmianę wielkości  $f_{1,2}$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ , oraz  $p$ , natomiast  $f_1$ ,  $f_2$ , oraz  $\delta$  pozostają niezmienione.

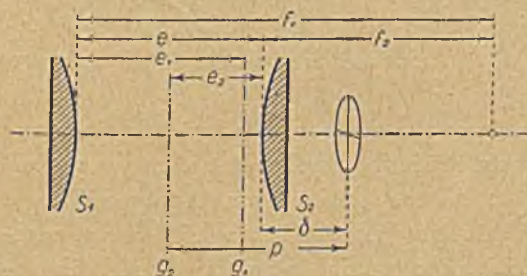
I tak dla  $w' = 50$  cm należy wykręcić szkło oczne o  $\Delta e = 1,25$  mm zwiększając  $e$  na  $e' = 13,25$  mm, a wówczas wypadnie  $f'_{1,2} = 14,09$  mm,  $p' = 13,69$  mm,  $e'_2 = 6,91$  mm,

$e'_1 = 12,65$  mm przy niezmienionym  $\delta = 13,69 - 6,91 = 6,78$  mm.

Przez oddalenie soczewki  $S_1$  od soczewki  $S_2$  o 1,25 mm zmieniają się odległości płaszczyzn głównych od soczewki  $S_2$  i krzyża nitkowego. I tak płaszczyzna  $g_2$  oddala się od nich o  $6,91 - 6,00 = 0,91$  mm, zaś płaszczyzna główna  $g_1$  przybliża się do nich o 0,6 mm, gdyż  $e' - e'_1 = (e - e_1) = 0,6 - 1,2 = -0,6$  mm.



Rys. 23.



Rys. 24.



Natomiast dla normalnego oka bez akomodacji powstanie obraz przedmiotu w ogniskowej okularu, zatem  $p = f_{1,2}$ .

Dla wymiarów okularu podanych wyżej będzie:

$$p = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ mm, zaś } \delta = 13,5 - 6,0 = 7,5 \text{ mm;}$$

dla krótkowidza będzie  $p$  nieco mniejsze, zaś dla dalekowidza nieco większe niż  $f_{1,2}$ .

W lunetach starszych typów widzimy jeszcze czasami okulary Huygensa, w których płaszczyzna krzyża nitkowego znajduje się między soczewkami  $S_1$  i  $S_2$  (o nieco innych kształtach).

Dziś spotykamy często w praktyce okular Kellnera tzw. ortoskopijny, którego szkło oczne, achromatyczne, składa się z dwu soczewek (zbierającej z crownu i rozpraszającej z flintu), zaś soczewka druga okularu ma w przybliżeniu najlepszy kształt (p. § 7).

Okular Steinheila jest zupełnie achromatyczny, gdyż tak soczewka oczna, jak i druga, składają się z soczewek zbierających (crown) i rozpraszających (flint).

Zadanie obiektywu polega na tworzeniu (rzeczywistych) obrazów przedmiotów, na które skierowano lunetę. Obrazy te stanowią przedmioty dla okularu i dla tego muszą się znajdować podczas pomiaru w płaszczyźnie krzyża nitkowego okularu. Aby ten warunek był spełniony, muszą być szkła okularu umieszczone w osobnej rurze (w wyciągu okularowym), którą można odpowiednio przesuwając we właściwej rurze lunety (zawierającej obiektyw). Jeżeli obrazy, utworzone przez obiektyw, nie tworzą się w płaszczyźnie krzyża nitkowego, powstaje tzw. paralaksa (czyli dwugład), uniemożliwiająca nastawienie środka krzyża nitkowego na pewien cel (gdyż przy poruszaniu oka przesuwa się krzyż nitkowy względem celu). Usunięcie paralaksy jest jednak tylko wówczas możliwe, jeżeli przed rozpoczęciem pomiarów ustawimy krzyż nitkowy tak, aby obraz jego znalazł się w odległości dobrego widzenia.

Pierwszą zatem czynnością przy użyciu lunety powinno być takie przesunięcie (wykręcenie lub wkręcenie) szkła ocznego, aby krzyż nitkowy wystąpił jak najwyraźniej, co najlepiej da się zrobić po skierowaniu lunety na szare tło (bez wyraźnych przedmiotów). W ten sposób obraz krzyża nitkowego znajdzie się w odległości dobrego widzenia. Następnie kierujemy lunetę na pewien cel (przedmiot) i wprowadzamy obraz krzyża nitkowego przy pomocy wyciągu okularowego do płaszczyzny, w której znajduje się obraz celu (przedmiotu). Aby się przekonać, czy przecieź nie ma choćby drobnej paralaksy, należy, patrząc przez lunetę, poruszać okiem (poziomo lub pionowo). Jeżeli obraz celu (przedmiotu) nie przesuwa się przy tym względem krzyża oznacza to, że nie ma paralaksy; w razie przeciwnym należy ją usunąć wyciągiem okularowym, kontrolując raz jeszcze czy obraz siatki znajduje się w odległości dobrego widzenia.



b) Powiększenie lunety.

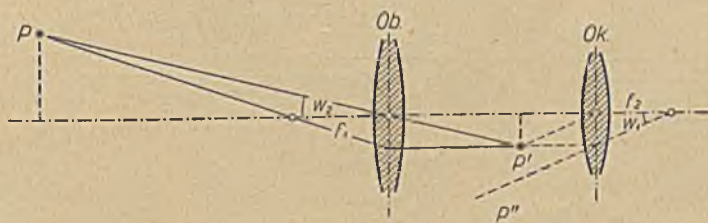
Stosunek  $\omega_1 : \omega_2$ , kąta widzenia przez lunetę pewnego przedmiotu, znajdującego się bardzo daleko, do kąta widzenia tegoż przedmiotu bezpośrednio (gołym okiem), nazywamy *powiększeniem* lunety.

Najłatwiej można by wyznaczyć powiększenie lunety, celując nią na przedmiot bardzo odległy. Wówczas, po usunięciu paralaksy, znajdzie się obraz przedmiotu prawie zupełnie ściśle w płaszczyźnie ogniskowej obiektywu, która pokryje się w przybliżeniu z płaszczyzną ogniskową okularu.

Z rys. 25, na którym przedstawiono bieg promieni, widać, że stosunek kątów  $\omega_1 : \omega_2$  jest równy w przybliżeniu  $f_1 : f_2$ , a więc powiększenie lunety będzie w tym przypadku:

$$P = \frac{f_1}{f_2}. \quad (49)$$

O ile między soczewką obiektywu a okularu nie ma soczewki specjalnej (którą należałoby złożyć z soczewką obiektywu w soczewkę równoważną), można wymierzyć ogniskową obiektywu z błędem kilku mm (odstęp od obiektywu do



Rys. 25.

śrubek krzyża nitkowego). Natomiast trudniej jest wyznaczyć ogniskową okularu (o ile się specjalnie nie zna wymiarów użytych soczewek i ich odstępów).

Dlatego dla wyznaczenia powiększenia lunety używamy innych dwu sposobów:

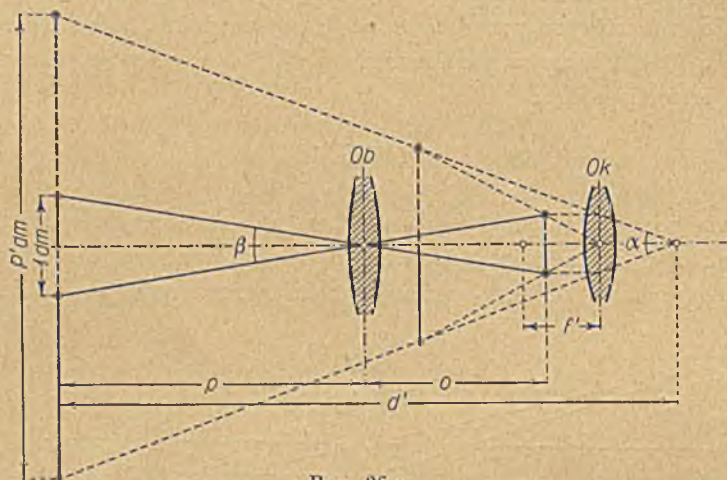
α) Kierujemy lunetę (ustawioną w przybliżeniu poziomo) na latę z podziałem centymetrowym, umieszczoną w odległości  $p$  od obiektywu (rys. 26 a). Następnie, patrząc na latę jednym okiem wprost, a drugim równocześnie przez lunetę, sprowadzamy oba w ten sposób widziane obrazy do pokrycia się, oraz stwierdzamy, ile odstępów decymetrowychłaty widzianych wprost pokrywa obraz jednego decymetra (widzianego przez lunetę). Ta ilość decymetrów  $P'$  jest zarazem stosunkiem kąta widzenia przedmiotu przez lunetę w odległości  $p$  do kąta widzenia tego przedmiotu bezpośrednio. W ten sposób wyznaczone powiększenie byłoby jednak zależne od odległości  $p$ łaty od przyrządu. Aby wyznaczenie właściwego powiększenia  $P$  uwolnić od wpływu zmiennej odległości przedmiotu  $p$ , wyznaczymy  $P$  tak, jakby lata była umieszczona w odległości  $p = \infty$ .

Odsuwając latę od obiektywu, tj. zwiększając odległość  $p$  (rys. 26 b) musimy, chcąc aby kąt  $\beta$ , a tym samym i obraz odcinka utworzony przez obiek-

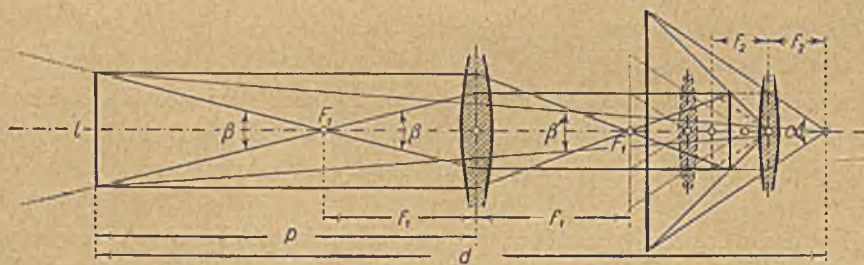
tyw pozostał bez zmiany, powiększać przyjętą jednostkę  $l$  proporcjonalnie do zmieniającej się odległości  $p$ ; zatem dla  $p'$  zwiększy się jednostka na

$$l' = l \frac{p'}{p}. \quad (50)$$

Dla  $p = \infty$  utworzy się obraz przy pomocy obiektywu w płaszczyźnie oddalanej od obiektywu i okularu o odpowiednie ogniskowe (jak to uwidoczono na rysunku kropkami), przy czym kąty  $\alpha$  i  $\beta$  pozostaną niezmiennione.



Rys. 26 a.



Rys. 26 b.

W tym przypadku będzie zatem

$$P = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (51)$$

zaś po wyrugowaniu  $\alpha = P' \beta'$  otrzymamy

$$P = P' \frac{\beta'}{\beta}. \quad (52)$$

Wreszcie, ponieważ  $\beta' = \frac{l}{d}$ , a  $\beta = \frac{l}{p - f_1}$ , otrzymamy ostatecznie:

$$P = P' \frac{p - f_1}{d}. \quad (53)$$



Wielkości  $p$  i  $d$  można łatwo zmierzyć, zaś ogniskową  $f_1$  albo znamy, albo wyznaczamy jak podano wyżej.

β) Nastawia się ostro lunetę na bardzo odległy punkt. Wówczas ma zastosowanie wzór (49), a zarazem, o ile między obiektywem a okulem nie ma specjalnej przysłony (diafragmy, p. ustęp c), wiązka równoległa promieni o średnicy obiektywu  $D$ , padająca przez obiektyw, wyjdzie z okularu również w przybliżeniu jako wiązka promieni równoległych o średnicy  $d$ . Średnicę  $d$  wyznacza się, przepuszczając promienie słoneczne padające prostopadłe przez obiektyw i chwytając je jako świetlny krążek na papier milimetrowy (obraz  $D$ ). Wówczas

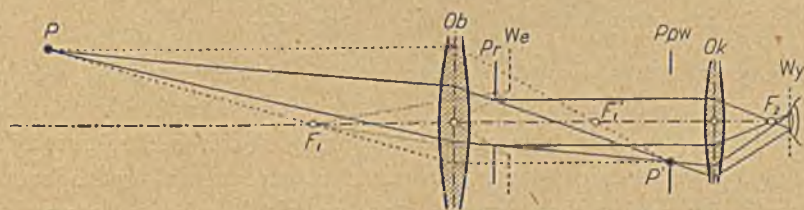
$$P = \frac{f_1}{f_2} = \frac{D}{d}. \quad (54)$$

Jeżeli między obiektywem i okulem jest przysłona, to wówczas należy przed obiektywem umieścić krążek o średnicy  $D' < D$  tak, by średnica  $d'$  wiązki wychodzącej była obrazem  $D'$ . Wtedy powiększenie będzie

$$P = \frac{D'}{d'}. \quad (55)$$

### c) Przysłony.

W optycznych przyrządach geodezyjnych, a więc przede wszystkim w lunetach, można zauważyć przysłony o kształcie pierścieniowym dwojakiego rodzaju: α) przysłony, których zadanie polega na ograniczeniu zasięgu zbyt



Rys. 27.

rozwartych wiązek promieni świetlnych zdążających z pewnego punktu dla wytworzenia po przejściu przez system soczewek obrazu owego punktu, i β) przysłony, ograniczające pole widzenia przyrządu optycznego (lunety) w tym miejscu, w którym powstaje rzeczywisty obraz przedmiotu.

Przysłoną naturalną oka ludzkiego jest jego źrenica.

Przysłony wymienione pod α) mają znaczenie dla tworzenia się obrazów rzeczywistych przy pomocy obiektywu, zaś wymienione pod β) dla tworzenia się obrazów urojonych przy pomocy okularu.

Na rys. 27 widać działanie przysłon. Promienie wychodzące z punktu  $P$  tworzą po przejściu przez obiektyw po drugiej jego stronie obraz  $P'$ . Dla wyeliminowania skrajnych promieni (które nie przecinają się w tym samym punkcie co środkowe) wstawiono poza obiektywem przysłonę  $P_r$ , tak, że pozostała tylko wiązka ograniczona pełnymi liniami. Obraz urojony przysłony  $P_r$ , oznaczony na rysunku literami  $W_e$ , nazywamy *źrenicą wejścia* promieni. Na-



tomiast obraz rzeczywisty przysłony  $P_r$ , utworzony przez okular, stanowi *źrenicę wyjścia* promieni  $W_y$ . W tym miejscu ustawiamy automatycznie oko, którego źrenica powinna być conajmniej równa źrenicy wyjścia, aby wszystkie promienie wiązki świetlnej wychodzącej z  $P'$ , a przechodzącej przez okular, weszły do oka. Gdyby to nie nastąpiło (z powodu nadmiernego oddalenia punktu  $P$  od osi optycznej lunety), nie przeszłyby wszystkie promienie wiązki przez okular, a tym samym zmniejszyłaby się jasność obrazu  $P$  (por. ustęp d). Aby nie dopuścić do tego, zakładamy w miejscu, gdzie obiektyw wytwarza obraz, przysłonę zmniejszającą pole widzenia lunety, czyli tzw. przysłonę pola widzenia lunety  $P_{pw}$ . W razie braku specjalnej przysłony wewnątrz lunety  $P_r$ , rolę jej obejmuje oprawa obiektywu.

d) *Jasność widzenia. Siła świetlna lunety.*

Wrażenie jasności, jakie odczuwa nasze oko nieuzbrojone i uzbrojone lunetą, może być różne, zależnie od tego, czy obraz przedmiotu wysyłającego światło jest większy, czy też mniejszy od średnicy jednego pniaczka (por. § 8).

I tak, obserwując gwiazdy stałe bez lunety, otrzymujemy na siatkówce obraz w przybliżeniu o średnicy  $0,0015 \mu$ , natomiast patrząc na nie przez lunetę, nawet o największym znanym dotychczas powiększeniu  $P = 1000$ , otrzymujemy na siatkówce obraz o średnicy także zaledwie  $1,5 \mu$ , a więc mniejszy od średnicy jednego pniaczka.

W tym przypadku będzie stosunek ilości światła uzyskanego przy użyciu lunety do ilości światła otrzymanego bez niej równy  $\frac{D^2 k}{d^2}$ , jeżeli  $D$  równa się średnicy obiektywu lunety,  $d$  średnicy źrenicy oka (źrenicy wyjścia), a  $k$  jest współczynnikiem przepuszczalności lunety, który dla nowych konstrukcyj można przyjąć  $0,73$  (dla lunet starszych nieco mniej). Wzór ostatni jest tylko wówczas ścisły, gdy średnica wiązki promieni równoległych, wychodzących z okularu, czyli średnica wyjścia promieni równa się  $2 \text{ mm}$ , co odpowiada mniej więcej średnicy źrenicy oka. Gdy średnica wspomnianej wiązki jest mniejsza niż  $2 \text{ mm}$  (tj. od średnicy źrenicy), wówczas stosunek wyżej zaznaczony przedstawia się odpowiednio niekorzystniej.

Natomiast w przypadku, gdy świecąca powierzchnia  $A$  zajmuje na siatkówce powierzchnię kilku pniaczków, należy sprawę traktować nieco inaczej. Powierzchnię  $A$  należy podzielić na małe elementy  $\Delta A$ , z których każdy odpowiada jednemu pniaczkowi, zatem przy patrzeniu okiem nieuzbrojonym odczuwamy taką jasność światła, jaka pochodzi z ilości światła padającej z powierzchni  $\Delta A$ . Patrząc przez lunetę widzimy zamiast powierzchni  $A$  jej powiększony obraz pozorny w odległości dobrego widzenia. Jeżeli powiększenie lunety wynosi  $P$ , wówczas obraz powierzchni  $A$  będzie  $AP^2$ . O ile zatem bez użycia lunety powierzchnia  $\Delta A$  odpowiadała jednostka widzenia, to przy użyciu lunety będzie jej odpowiadało  $P^2$  jednostek.

W ten sposób wypadnie na jeden pniaczek tylko  $\frac{1}{P^2}$  światła wysyłanego przez powierzchnię  $\Delta A$ . Wrażenie jasności przy użyciu lunety jest zatem znacznie



mniejsze niż bez jej użycia, do czego przyczynia się jeszcze strata światła zależna od współczynnika przepuszczalności lunety  $k$ . Natomiast wrażenie jasności przy użyciu lunety powiększa ta okoliczność, że powierzchnia obiektywu lunety jest  $\frac{D^2}{4}$  razy większa od powierzchni źrenicy, gdyż pierwsza wynosi  $\frac{D^2}{4} \pi \text{ mm}^2$ , zaś druga (przy 2 mm średnicy) tylko  $\pi \text{ mm}^2$ .

Przy użyciu lunety przypadnie zatem  $\frac{D^2}{4}$  razy więcej światła na jeden pniaczek niż bez niej.

Uwzględniając wszystkie wypowiedziane tu uwagi, otrzymamy jako stosunek ilości światła przy użyciu lunety do ilości światła bez niej wyrażenie następujące:

$$\frac{k D^2}{4 P^2},$$

a ponieważ  $P = D : d$ , przeto ostatecznie stosunek ten wyniesie  $\frac{k}{4} d^2$ , przy czym  $d$  jest średnicą wiązki równoległych promieni wychodzących przez okular przy użyciu lunety, czyli średnicą źrenicy wyjścia.

W dawniejszych podręcznikach napotykamy na pojęcie jasności lunety jako wielkości stałej. Ze względu na niezupełnie proste prawo Fechnera, lepiej jest wprowadzić jako wielkość stałą tzw. *siłę świetlną* lunety. Jest to stosunek ilości światła przypadającej z pewnej powierzchni świetlnej na jeden pniaczek przez lunetę do ilości światła przypadającej nań z tej samej powierzchni bez lunety.

Jeżeli przyjmiemy również i  $d$  równe 2 mm, wówczas ze wzoru powyższego otrzymamy siłę światła równą współczynnikowi  $k$ , który dla nowszych lunet wynosi 0,73, zaś dla lunet starszych mniej.

Zauważyć jeszcze należy, że gdy  $d$  jest mniejsze od 2 mm, wówczas sprawa przedstawia się jeszcze mniej korzystnie, a obrazy przedmiotów, oglądanych przez taką lunetę, są bardzo przyciemnione; dlatego powinno się konstruować przyrządy o  $d = 2$  mm, co wymaga jednak, dla uzyskania dość znacznego powiększenia, stosunkowo dużych obiektywów. Przyrządy budowane w myśl tej zasady dają bardzo jasne obrazy.

#### e) Pole widzenia lunety.

W stożku, którego podstawą jest użyteczna część obiektywu, a wierzchołek leży w ognisku, znajdują się przedmioty widzialne przez lunetę; kąt wierzchołkowy tego stożka  $\gamma$  nazywamy *połem widzenia* lunety.

Wyznaczenie kąta  $\gamma$  jest nadzwyczaj proste; kieruje się lunetę na łatą niwelacyjną i wykonuje odczyty odpowiadające skrajnym punktom wspomnianego stożka (odczyt najwyższy i najniższy). Różnica odczytów niech będzie  $\Delta o$ , zaś odległość przedniego punktu głównego obiektywu od łat  $b$ ; wówczas pole widzenia w stopniach jest:

$$\gamma^{\circ} = \frac{\Delta o}{b} \rho^{\circ}. \quad (56)$$

Wartość pola widzenia lunet przyrządów geodezyjnych waha się zazwyczaj między  $1^{\circ}$  a  $1,5^{\circ}$ .



## § 12. Lunety nowszego typu (Wilda względnie Zeissa)

Inż. H. Wild z Heerbrugg w Szwajcarii skonstruował lunetę o stałej długości bez wyciągu okularowego, u której usuwanie paralaksy skutecznia się ruchem soczewki wklęsłej tzw. *ogniskującej* (fokusującej), umieszczonej między obiektywem a okularzem.

Konstrukcja pierwotna z r. 1908 polegała na użyciu po obu końcach lunety jednakowych, składanych (po jednej wypukłej i wklęsłej) soczewek  $S_1$  i  $S_3$ , między którymi można było przesuwac soczewkę ogniskująca  $S_2$ , przybliżając ją bądź do  $S_1$  bądź do  $S_3$ . Krzyż nitkowy był utrwalony przy użyciu mikro-fotografii na wewnętrznych stronach obu soczewek zewnętrznych, przed które można było z jednej lub drugiej strony nasadzić okular. Lunetą tą można było zatem celować w dwie odwrotne strony bez jej odwracania.

W typach nowszych zaniechano tej konstrukcji.

Zakładając, że soczewka  $S_1$  stanowi obiektyw, zaś  $S_2$  soczewkę ogniskującą, należy ustalić warunki dla połączenia soczewek  $S_1$  i  $S_2$  o ogniskowych  $f_1$  i  $-f_2$ , przy czym wszystkie wielkości związane z soczewką  $S_1$  oznaczymy wskaźnikiem 1 np.  $o_1, p_1$  itd., zaś związane z soczewką  $S_2$  wskaźnikami 2. Dla uniknięcia nieporozumień, będziemy posługiwali się w dalszych wywodach i wzorach absolutną wartością  $|f_2|$  ogniskowej soczewki  $S_2$ .

Aby soczewka równoważna (obu soczewkom  $S_1$  i  $S_2$ ) była zbierającą, musi być odstęp obu soczewek mniejszy niż  $f_1$ , a zarazem mniejszy niż odległość obrazowa pierwszej soczewki  $o_1$ , poza tym ma być  $|f_2|$  większe od  $f_1 - e$ , zatem:

$$1) e < f_1 < o_1, \quad 2) f_1 - |f_2| - e < 0. \quad (57)$$

Wzór zasadniczy na wielkość ogniskowej  $f_{1,2}$  systemu złożonego z dwu soczewek o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$  jest:

$$f_{1,2} = \pm \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}.$$

Ponieważ iloczyn ogniskowych jest wielkością ujemną tj.

$$-f_1 |f_2| < 0,$$

przeto ogniskowa soczewki równoważnej musi być wielkością dodatnią:

$$f_{1,2} = \frac{-f_1 |f_2|}{f_1 - |f_2| - e} > 0 \quad (\text{znak } +), \quad (58)$$

gdyż mianownik tego wyrażenia jest również wielkością ujemną, a tym samym soczewka równoważna soczewkom  $S_1$  i  $S_2$  działa jako soczewka zbierająca.

Położenie płaszczyzn głównych tej soczewki wyznaczone jest wzorami:

$$e_1 = \frac{f_1 e}{f_1 - |f_2| - e} < 0 \quad (\text{znak } -), \quad e_2 = \frac{-|f_2| e}{f_1 - |f_2| - e} > 0 \quad (\text{znak } +) \quad (\text{p. rys. 28}). \quad (59)$$

Z  $t_1 - |f_2| - e$  i  $f_1 - |f_2|$   $G_1$  znajduje się przed obiektywem, tj. przed punktem  $O_1$  (środkiem optycznym soczewki  $S_1$ ). Aby się prze-



konać, gdzie znajduje się drugi punkt główny  $G_2$  należy zbadać czy wyrażenie  $e - e_1 = e - \frac{f_1 e}{f_1 - |f_2| - e}$  jest wielkością większą czy mniejszą od  $e_2 = \frac{-|f_2| e}{f_1 - |f_2| - e}$ . Otóż ponieważ  $f_1 - |f_2| - e < 0$ , przeto różnica

$$(e - e_1) - e_2 = \frac{-|f_2| e - e^2}{f_1 - |f_2| - e} + \frac{|f_2| e}{f_1 - |f_2| - e} = \frac{-e^2}{f_1 - |f_2| - e} > 0,$$

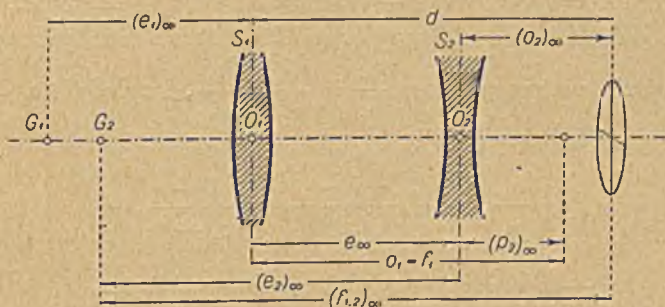
a zatem punkt  $G_2$  znajduje się między punktami  $G_1$  i  $O_1$ .

*Położenie krzyża nitkowego.*

Zmieniając  $e$  zmieniamy również i ogniskową  $f_{1,2}$ . Ponieważ w ten sposób powstanie bardzo wiele różnych ogniskowych, przeto jedną z nich należy wyszczególnić jako ogniskową główną i ją się ma na myśli, mówiąc o ogniskowej lunety. Jest to ogniskowa  $(f_{1,2})_\infty$  obliczona dla odpowiedniej odległości  $(p_1)_\infty$  i rozstawu soczewek  $e_\infty$ .

Zatem 
$$(f_{1,2})_\infty = \frac{-f_1 |f_2|}{f_1 - |f_2| - e_\infty} = \frac{f_1 |f_2|}{|f_2| + e_\infty - f_1}. \quad (60)$$

Przyjmując dla pewnej lunety soczewki, musimy także przyjąć i ich odstęp  $e_\infty$  odpowiadający  $(p_1)_\infty$ .



Rys. 28.

Położenie krzyża nitkowego należy określić względem soczewki nieruchomej tj.  $S_1$ . Odległość płaszczyzny krzyża nitkowego od punktu  $O_1$  niech będzie  $d$ , przy czym, jak wynika z rys. 28,

$$d = (f_{1,2})_\infty - \{(e_2)_\infty - e_\infty\} = (f_{1,2})_\infty + e_\infty - (e_2)_\infty = e_\infty + (o_2)_\infty. \quad (61)$$

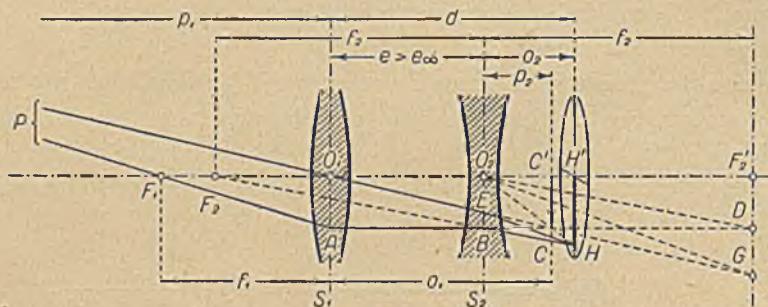
Przy zmniejszaniu odległości przedmiotowej powstałby obraz poza płaszczyzną krzyża nitkowego; otóż przez powiększenie odległości  $e$  zmieniamy  $(f_{1,2})_\infty$  na mniejsze  $f_{1,2}$ , a zarazem  $(o_2)_\infty$  na odpowiednio mniejsze  $o_2$  tak, aż obraz padnie na krzyż nitkowy (rys. 29).

Promienie wychodzące z punktu  $P$  utworzyłyby po przejściu przez soczewkę  $S_1$  obraz w punkcie  $C$ ; ponieważ promienie przechodzące przez  $O_1$  i  $A$  trafiają w punktach  $E$  i  $B$  płaszczyznę główną (zastępującą przy cien-



kiej soczewce dwie płaszczyzny główne) soczewki  $S_2$ , przeto załamują się w tym miejscu, przy czym promień  $O_1E$  zmienia kierunek na  $EH$ , równoległy do  $O_2G$ , zaś promień  $AB$  na kierunek  $BH$  równoległy do  $O_2D$ . Punkty  $G$  i  $D$  uzyskujemy przedłużając odnośne promienie do płaszczyzny ogniskowej soczewki  $S_2$ , znajdującej się po stronie obrazu (ze względu na ujemną ogniskową soczewki  $S_2$ ). Punkty  $F_2$ ,  $B$  i  $H$  leżą zarazem na jednej prostej.

Ponieważ zmiana  $f_{1,2}$  zależy przy stałych wielkościach  $f_1$  i  $f_2$  tylko od odległości  $e$ , zaś  $e$  zmienia się odpowiednio do odległości przedmiotowej  $p_1$ , mu-



Rys. 29.

simy najprzód wyznaczyć związek między odległością  $p_1$  a odstępem soczewek  $e$ . Dla  $(p_1)_\infty$  mamy  $d = (f_{1,2})_\infty + e_\infty - (e_2)_\infty = e_\infty + (o_2)_\infty = \text{const.}$ , zaś dla dowolnego  $p_1$  będzie  $d = e + o_2$  (przy czym  $d$  pozostaje bez zmiany). Dla soczewki  $S_1$  będzie ważny związek  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{o_1} = \frac{1}{f_1}$ , względnie  $o_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}$ ; dla soczewki  $S_2$  będzie (rys. 29):

$$\frac{o_2}{p_2} = \frac{|f_2| + d - e}{|f_2|} = \frac{d - e}{o_1 - e},$$

lub:

$$e^2 - e(d + o_1) + o_1(|f_2| + d) - d|f_2| = 0,$$

a w następstwie:

$$e = \frac{d + o_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(d + o_1)^2}{4} - o_1(|f_2| + d) + d|f_2|}, \quad (62)$$

przy czym

$$o_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}.$$

Ponieważ przy uwzględnieniu znaku + soczewka ogniskująca (fokuszująca) znalazłaby się poza płaszczyzną krzyża nitkowego, przeto ważny dla konstrukcji Wildowskiej jest znak —.

Równanie (62) można przedstawić i w formie następującej, nadającej się lepiej do obliczenia:

$$e = \frac{o_1 + d}{2} - \sqrt{o_1 \left( \frac{o_1}{4} - \frac{d}{2} - |f_2| \right) + d \left( \frac{d}{4} + |f_2| \right)}. \quad (62')$$



Wzór ostatni (62') można przedstawić i w innej formie, która nam będzie potrzebna do późniejszych wywodów, mianowicie ponieważ  $o_1 = f_1 + \Delta o$ , przeto rozwijając ostatni wzór w szereg Taylora z uwzględnieniem wyrazów rzędu pierwszego otrzymujemy:

$$e = e_\infty + \Delta e = \frac{f_1 + d}{2} - \sqrt{f_1 \left( \frac{f_1}{4} - \frac{d}{2} - |f_2| \right) + d \left( \frac{d}{4} + |f_2| \right)} + \\ + \frac{\Delta o}{2} - \frac{\Delta o}{2} \frac{\frac{f_1}{4} - \frac{d}{2} - |f_2| + \frac{f_1}{4}}{\sqrt{f_1 \left( \frac{f_1}{4} - \frac{d}{2} + |f_2| \right) + d \left( \frac{d}{4} + |f_2| \right)}},$$

zaś ze względu na to, że

$$\Delta o = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} - f_1 = \frac{f_1^2}{p_1 - f_1},$$

będzie dalej:

$$e = e_\infty + \frac{f_1^2}{2(p_1 - f_1)} - \frac{f_1 - d - 2|f_2|}{f_1 + d - 2e_\infty} \cdot \frac{f_1}{2(p_1 - f_1)} = e_\infty + \\ + \frac{f_1^2}{p_1 - f_1} \cdot \frac{|f_2| + d - e_\infty}{f_1 + d - 2e_\infty}.$$

Zatem

$$\Delta e = \frac{f_1^2}{p_1 - f_1} \cdot \frac{|f_2| + d - e_\infty}{f_1 + d - 2e_\infty} = \frac{C}{p_1 - f_1}, \quad (63)$$

przy czym C jest dla obranych wielkości  $f_1$ ,  $f_2$  i  $e_\infty$  wielkością stałą. Na podstawie wzorów pierwszego (ścisłego) i drugiego (przybliżonego) obliczono dla obranych wielkości  $f_1$ ,  $f_2$  i  $e_\infty$  wartości  $e$  dla poszczególnych odległości  $p_1$ . Różnice między odpowiednimi wynikami nie przekraczają kilku dziesiętnych mm o, ile  $p_1$  nie przyjmujemy znacznie poniżej 10 m.

### § 13. Oś celowa lunety

#### a) Luneta z wyciągiem okularowym.

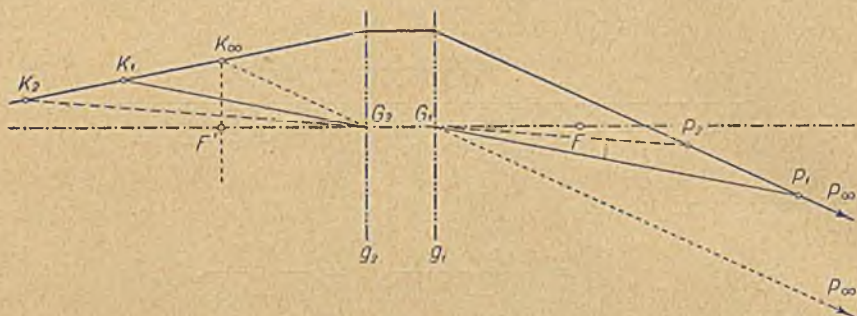
Nastawienie lunety geodezyjnej na pewien cel (sygnał) polega na takim skierowaniu i ustawieniu wyciągu okularowego lunety, aby obraz pewnego punktu celu (sygnału) pokrywał się ze środkiem krzyża nitkowego. Aby to uskutecznić, należy usunąć paralaksę, co jak wiadomo czynimy przy pomocy ruchu wyciągu okularowego.

Jako oś celową możnaby zatem uważać prostą przechodzącą przez zewnętrzny punkt główny obiektywu  $G_1$ , a równoległą do prostej łączącej środek krzyża nitkowego z wewnętrznym punktem głównym obiektywu  $G_2$ . W ten sposób określona oś celowa, zmieniałaby jednak swe położenie zależnie od odległości przedmiotu, dlatego chcąc mieć definicję osi celowej niezależną od odległości przedmiotowej, określamy ją jako *miejsce geometryczne punktów, których obrazem w lunecie są kolejne położenia środka krzyża nitkowego przy*



użyciu wyciągu okularowego. Tak określona oś celowa nazywa się zazwyczaj *główną osią celową* w odróżnieniu od poprzednich.

O ile okular jest wykonany tak precyzyjnie, że środek krzyża nitkowego porusza się w wielkim przybliżeniu po linii prostej, wówczas oś celowa jest także prostą, jak to uwidoczniło na rys. 30.



Rys. 30.

Będzie ona identyczna z osią optyczną, gdy środek krzyża nitkowego poruszać się będzie po osi optycznej; przy każdym innym położeniu prostej drogi krzyża nitkowego względem osi optycznej, wypadnie oś celowa jako prosta ekscentryczna względem zewnętrznego punktu głównego  $G_1$ . Błąd, jaki powstaje przez to przy pomiarach ruguje się przez pomiar w dwu położeniach lunety pod warunkiem, że środek krzyża nitkowego porusza się zawsze po tej samej linii (choćby nawet nie prostej).

Ze względu na konieczny luz między okularu a rurą pozostałej części lunety punkt  $K$  nie zawsze będzie się poruszał po tej samej linii. Oznaczając odsunięcie się przypadkowe krzyża nitkowego, spowodowane luzem, od jego właściwego położenia przez  $\Delta\eta$ , otrzymujemy jako błąd kierunku dla długości celowej  $p$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\eta}{o} = \Delta\eta \frac{p-f}{pf}, \quad (64)$$

przy czym przy celowaniu do punktów bardzo odległych wzór przekształca się (ze względu na to, że  $o = f$ ) na

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\eta}{f}. \quad (64')$$

Wynika stąd, że wyciąg okularowy winien być wykonany bardzo starannie. (Podczas pomiaru nie chwytać za wyciąg okularowy!).

#### b) Lunety z soczewką ogniskującą.

W lunetach posiadających soczewkę ogniskującą, zamiast wyciągu okularowego, definicja *głównej osi celowej* jest nieco inna. Jest to mianowicie *miejsce geometryczne punktów, których obrazem jest zawsze środek krzyża nitkowego lunety*. Oczywiście, że o ile środek siatki i środek optyczny soczewki ogniskującej  $O_2$  leżą na osi optycznej, oś celowa jest z nią identyczna.

W związku z tym nasuwają się następujące pytania.



1. Jaki kształt ma oś celowa, gdy środek siatki nie leży na osi optycznej, a środek optyczny  $O_2$  posuwa się po niej?

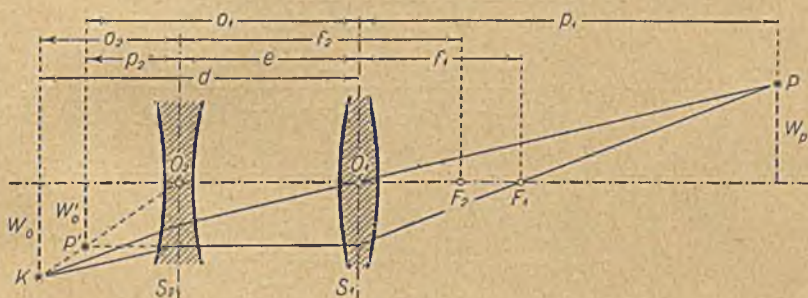
2. Jaki kształt ma oś celowa w przypadku, gdy  $O_2$  (środek optyczny soczewki ogniskującej) posuwa się po pewnej prostej?

3. Jakim zmianom ulega oś celowa, gdy środek soczewki ogniskującej, poruszającej się w przybliżeniu po osi optycznej, z niej się wychyli?

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, postąpimy następująco.

I. Jeżeli nastavimy lunetę geodezyjną nowszego systemu na pewien punkt  $P$ , wówczas obraz tego punktu powstanie po przejściu promieni przez soczewkę obiektywu  $S_1$  w punkcie  $P'$ , zaś po przejściu promieni przez soczewkę ogniskującą  $S_2$  w punkcie  $K$ , w którym znajduje się właśnie środek krzyża nitkowego. Odległości owych punktów od osi optycznej lunety niech będą  $w'_o$  i  $w_o$ , a wówczas, jak to wynika z zasady tworzenia się obrazu (p. rys. 31), jest:

$$w_o : w'_o = o_2 : p_2 \text{ lub } w'_o = \frac{p_2}{o_2} w_o = \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} w_o. \quad (65)$$



Rys. 31.

Oznaczając odległość punktu  $P$  od osi optycznej przez  $w_p$  otrzymamy związek:  $w_p : w'_o = p_1 : o_1$ ,

$$\text{przeto } w_p = \frac{p_1}{o_1} w'_o = \frac{p_1}{o_1} \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} w_o,$$

$$\text{lub } w_p = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \frac{|f_2| w_o}{|f_2| + d - e}. \quad (66)$$

Związek (66) przedstawia *równanie osi celowej* odniesione do prostokątnego układu osi, w którym osią x-ów jest oś optyczna, a początek układu znajduje się w środku optycznym obiektywu  $O_1$ ; odciętymi są tu odległości przedmiotowe  $p_1$ . Po wstawieniu wartości za  $e$  uzyskujemy równanie *czwartego stopnia*, które tu pomijamy ze względu na jego nieprzejrysty kształt i długość.

Aby zbadać, czy krzywa ta może być zastąpiona w praktyce prostą i dla jakich odległości, zbadajmy kąt nachylenia  $\alpha$  jej stycznej, tworząc pierwszą pochodną względem odległości przedmiotowej:

$$\frac{d w_p}{d p_1} = \text{tg } \alpha = \frac{|f_2| w_o}{(|f_2| + d - e) f_1} + \frac{p_1 - f_1}{f_1} |f_2| w_o \frac{\frac{d e}{d p_1}}{(|f_2| + d - e)^2}. \quad (67)$$



Ponieważ  $e = e_\infty + \frac{f_1^2}{p_1 - f_1} \frac{|f_2| + d - e_\infty}{f_1 + d - 2e_\infty}$ , przeto  
otrzymamy, oznaczając  $\frac{|f_2|}{|f_2| + d - e_\infty} = A$ , oraz  $\frac{f_1}{f_1 + d - 2e_\infty} = B$ , (68)

$$e = e_\infty + \frac{f_1 |f_2|}{(p_1 - f_1)^2} \frac{B}{A}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{de}{dp_1} = - \frac{f_1 |f_2|}{(p_1 - f_1)^2} \frac{B}{A} = - \frac{|f_2| B}{(p_1 - f_1)^2} (f_{1,2})_\infty. \quad (69)$$

Stosując do wzoru na  $\operatorname{tg} \alpha$  rozwinięcie w szereg Taylora, z pominięciem wyrazów wyższych niż pierwszego rzędu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_p}{dp_1} &= \frac{|f_2| \omega_o}{(|f_2| + d - e_\infty) f_1} + \frac{p_1 - f_1}{f_1} |f_2| \omega_o \frac{-f_1 |f_2| B}{(p_1 - f_1)^2 A (|f_2| + d - e_\infty)^2} + \\ &+ \frac{|f_2| \omega_o}{(|f_2| + d - e_\infty)^2 f_1} \frac{f_1 |f_2|}{p_1 - f_1} \frac{B}{A} + \\ &+ 2 \frac{p_1 - f_1}{f_1} |f_2| \omega_o \frac{-f_1 |f_2| B}{(p_1 - f_1)^2 A (|f_2| + d - e_\infty)^3 (p_1 - f_1) A}, \\ \frac{d\omega_p}{dp_1} &= A \frac{\omega_o}{f_1} - AB \frac{\omega_o}{p_1 - f_1} + AB \frac{\omega_o}{p_1 - f_1} - 2AB^2 \frac{\omega_o f_1}{(p_1 - f_1)^2}, \\ \frac{d\omega_p}{dp_1} &= A \frac{\omega_o}{f_1} \left( 1 - 2 \frac{B^2 f_1^2}{(p_1 - f_1)^2} \right). \quad (70) \end{aligned}$$

Łatwo jednak udowodnić, że  $\frac{A}{f_1} = \frac{1}{(f_{1,2})_\infty}$ , gdyż jak wynika ze związku:

$$\frac{|f_2| + d - e_\infty}{|f_2|} = \frac{d - e_\infty}{f_1 - e_\infty}, \quad d = \frac{(|f_2| - e_\infty) f_1 + e_\infty^2}{|f_2| + e_\infty - f_1},$$

zaś 
$$\frac{A}{f_1} = \frac{|f_2| + e_\infty - f_1}{f_1 |f_2|} = \frac{1}{(f_{1,2})_\infty}. \quad (71)$$

W przyrządach Wilda i Zeissa  $f_1$  wynosi przeważnie około 150-180 mm, zaś  $B$  odpowiednio do tego około 0,8-1,5; jeżeli tedy przyjmiemy, że wartość wyrażenia  $2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2$  jest wobec jedności zaniedbywalna, o ile wynosi mniej niż 0,005<sup>\*</sup>, to odpowiadające temu odległości  $p_1$  są około 2,6 m, względnie około 5,7 m. Wartości wspomnianego wyrażenia maleją tak szybko przy rosnącej odległości  $p_1$ , że w praktyce możemy uważać oś celową w tych przyrządach (z soczewką ogniskującą) za *prostą*, której nachylenie

<sup>\*</sup>) Przyjęcie to jest wystarczające dla teodolitów i przyrządów niwelacyjnych, zaś dla odległowni precyzyjnych, jak poznamy później,  $2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2$  ma wynosić dla  $p_1 = 10$  m mniej niż 0,0005.



do osi optycznej wynosi  $A \frac{\omega_o}{f_1} = \frac{\omega_o}{(f_{1,2})_\infty}$ , a więc jest proporcjonalne do odstępów środka krzyża nitkowego od osi optycznej.

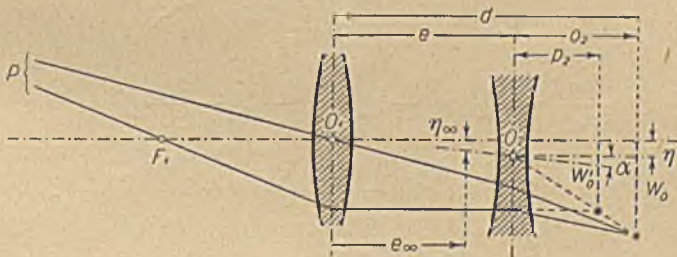
II. Odpowiedź na pytanie drugie, jaki kształt ma oś celowa, gdy środek  $O_2$  soczewki ogniskującej porusza się po linii prostej, można dać po wyprowadzeniu na  $\omega_p$  wzoru ogólniejszego, w którym będzie uwidocznił się wpływ zmieniającego się (prostoliniowo) odstepu  $O_2$  od osi optycznej.

Przyjmijmy, że odległość punktu  $O_2$  od osi optycznej wynosi  $\eta_\infty$ , gdy soczewka ogniskująca jest oddalona od obiektywu o odstęp  $e_\infty$  (kierunek dodatni  $\eta$  niech będzie zgodny z dodatnim kierunkiem  $\omega_o$ ). Przy zmianie  $e_\infty$  na  $e$  niech przesunie się punkt  $O_2$  tak, aby jego odstęp od osi optycznej wynosił:

$$\eta = \eta_\infty + a(e - e_\infty) = \eta_\infty + a \Delta e,$$

przy czym  $a$  niech oznacza tg kąta nachylenia drogi (prostej) punktu  $O_2$  względem osi optycznej (kąt ten niech będzie dodatni, gdy  $\eta$  wzrasta).

Na rys. 32 widzimy bieg promieni w tym przypadku.



Rys. 32.

Z rysunku widać wprost, że:

$$(\omega_o' - \eta) : (\omega_o - \eta) = p_2 : o_2, \text{ a ponieważ}$$

$$p_2 : o_2 = |f_2| : (|f_2| + d - e), \text{ przeto}$$

$$\omega_o' = \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} (\omega_o - \eta) + \eta. \quad (72)$$

Zatem

$$\omega_p = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \left\{ \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} (\omega_o - \eta) + \eta \right\}, \text{ względnie}$$

$$\omega_p = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \left\{ \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} [\omega_o - \eta_\infty - a \Delta e] + \eta_\infty + a \Delta e \right\}. \quad (73)$$

Wstawiając do powyższego równania wartość na

$$\Delta e = \frac{f_1^2}{p_1 - f_1} \frac{|f_2| + d - e_\infty}{f_1 + d - 2e_\infty} = \frac{f_1 |f_2|}{p_1 - f_1} \frac{B}{A}, \text{ otrzymujemy dalej}$$

$$\omega_p = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \left\{ \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} (\omega_o - \eta_\infty) + \eta_\infty \right\} + a |f_2| \frac{B}{A} \left( 1 - \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e} \right).$$

Wobec tego równanie stycznej do krzywej jest:

$$\begin{aligned} \frac{d w_p}{d p_1} &= \frac{|f_2|}{f_1} \frac{d e}{(|f_2| + d - e)^2} + \frac{\eta_\infty}{f_1} + \frac{p_1 - f_1}{f_1} \frac{|f_2|}{(|f_2| + d - e)^2} \frac{d e}{d p_1} (w_0 + \eta_\infty) - \\ &- a f_2^2 \frac{B}{A} \frac{|f_2|}{(|f_2| + d - e)^2} \frac{d e}{d p_1} = \frac{|f_2|}{f_1} \frac{d e}{(|f_2| + d - e)^2} + \frac{\eta_\infty}{f_1} - \frac{f_2^2 B (w_0 - \eta_\infty)}{(p_1 - f_1)(|f_2| + d - e)^2 A} + \\ &+ a |f_2| \left( \frac{B}{A} \right)^2 \frac{f_1 f_2^2}{(|f_2| + d - e)^2 (p_1 - f_1)^2}, \end{aligned}$$

a po zastąpieniu  $e$  przez  $e_\infty + \Delta e$  i rozwinięciu w szereg z pominięciem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy:

$$\begin{aligned} \frac{d w_p}{d p_1} &= \frac{A}{f_1} (w_0 - \eta_\infty) + \frac{\eta_\infty}{f_1} + a f_1 |f_2| \frac{B^2}{(p_1 - f_1)^2} - 2 \frac{A B^2 (w_0 - \eta_\infty)}{(p_1 - f_1)^2} f_1 + \\ &+ 2 a \frac{f_1 |f_2| B^3}{(p_1 - f_1)^3}, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{d w_p}{d p_1} &= \frac{A}{f_1} (w_0 - \eta_\infty) \left\{ 1 - 2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2 \right\} + \\ &+ \frac{\eta_\infty}{f_1} + a f_1 |f_2| \frac{B^2}{(p_1 - f_1)^2} \left( 1 + 2 \frac{f_1 B}{p_1 - f_1} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Ponieważ  $\alpha$  jest bardzo małym kątem, przeto wyrażenie

$$f_1 \frac{a |f_2|}{(p_1 - f_1)^2} B^2 \left( 1 + 2 \frac{f_1 B}{p_1 - f_1} \right)$$

będzie nawet dla  $|f_2|$  znacznie większego od  $f_1$  kilkakrotnie mniejsze niż  $\left( \frac{f_1 B}{p_1 - f_1} \right)^2$  i jako takie może być dla przyrządów Wilda (Zeissa) pominięte dla odległości  $p_1$  ponad 2,6, względnie 5,7 m. Ze względu jednak na to, że wpływ obu wymienionych wyrażen może się (zależnie od znaku) zsumować, należy oś celową uważać praktycznie za prostą dopiero od nieco większych odległości  $p_1$ , jednak w każdym razie znacznie mniejszych niż 10 m.

Zależnie tedy od znaku i wielkości kąta nachylenia drogi punktu  $O_2$  względem osi optycznej, będzie można oś celową uważać za prostą, począwszy od bliższych, względnie dalszych odległości  $p_1$ .

Jeżeli  $\alpha = 0$ , tj. droga punktu  $O_2$  przebiega równoległe do osi optycznej, to wówczas wzór poprzedni zmieni się na:

$$\frac{d w_p}{d p_1} = \frac{A}{f_1} (w_0 - \eta_\infty) \left\{ 1 - 2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2 \right\} + \frac{\eta_\infty}{f_1}; \quad (75)$$



ponieważ począwszy od kilkumetrowych odległości wyrażenie  $2 \left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2$  może być zaniedbane, przeto możemy w tym przypadku sprowadzić oś celową w wielkim przybliżeniu do równoległości z osią optyczną, przesuując odpowiednio płytkę szklaną z krzyżem nitkowym tak, aby  $\frac{d\omega_p}{dp_1}$  było równe zero.

Dla tego przypadku będzie można otrzymać  $\omega_o$  — odległość środka krzyża nitkowego od osi optycznej — z równania:

$$\frac{A}{f_1} (\omega_o - \eta_\infty) + \frac{\eta_\infty}{f_1} = 0,$$

zatem przesunięcie płytki

$$\omega_o = - \frac{1 - A}{A} \eta_\infty = \frac{f_1 - (f_{1,2})_\infty}{f_1} \eta_\infty. \quad (76)$$

W praktyce dochodzimy do tego wyniku empirycznie przez próby.

III. Opierając się na wzorze (74); otrzymujemy odpowiedź na trzecie pytanie, dotyczące osi celowej; mianowicie o jaki kąt zmieni się położenie osi celowej, jeżeli środek optyczny soczewki ogniskującej przesunie się z osi optycznej w kierunku poprzecznym o  $\Delta\eta$ .

Jeżeli we wspomnianym wzorze położymy:  $\frac{d\omega_p}{dp_1} = \Delta\alpha'$ ,  $\omega_o = 0$ ,  $\eta_\infty = \Delta\eta$  i pominiemy wpływ wyrazu  $\left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2$ , wówczas otrzymamy:

$$\Delta\alpha' = - \frac{A}{f_1} \Delta\eta + \frac{\Delta\eta}{f_1} = \frac{\Delta\eta}{f_1} (1 - A) = \frac{\Delta\eta}{f_1} \frac{d - e_\infty}{|f_2| + d - e_\infty}$$

lub

$$\Delta\alpha' = \frac{(f_{1,2})_\infty - f_1}{f_1 (f_{1,2})_\infty} \Delta\eta. \quad (77)$$

Jest to kąt, o jaki odchyli się oś celowa od jej pierwotnego położenia identycznego z osią optyczną przy celowaniu do punktów bardzo odległych. Kąt ten zmienia się nieznacznie przy celowaniu do punktów bliskich, gdyż w miejsce  $e_\infty$  należy wówczas wstawić odpowiednie dla tej odległości  $e$ .

Aby porównać zależność osi celowej od ruchów spowodowanych luzem prowadzenia wyciągu okularowego, a luzem prowadzenia środka optycznego soczewki ogniskującej, należy utworzyć stosunek  $\Delta\alpha : \Delta\alpha'$ , a wówczas otrzymamy dla dalekich celowych przy tej samej wielkości  $\Delta\eta$ :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha'} = \frac{\Delta\eta}{f_1} \cdot \frac{\Delta\eta}{f_1} \frac{d - e_\infty}{|f_2| + d - e_\infty} = \frac{|f_2| + d - e_\infty}{d - e_\infty} = \frac{(f_{1,2})_\infty}{(f_{1,2})_\infty - f_1}. \quad (78)$$

Dla porównania podajemy trzy lunety systemu Wilda:

- a)  $f_1 = 149,0$  mm,  $|f_2| = 500,0$  mm,  $e_\infty = 67,2$  mm,  $d = 165,0$  mm;
- b)  $f_1 = 147,3$  mm,  $|f_2| = 409,0$  mm,  $e_\infty = 69,0$  mm,  $d = 165,8$  mm;
- c)  $f_1 = 179,2$  mm,  $|f_2| = 78,6$  mm,  $e_\infty = 139,8$  mm,  $d = 218,8$  mm.



Każdy z tych typów możemy przemienić na lunetę z wyciągiem okularowym bez soczewki ogniskującej z odpowiednim błędem wedle wzoru (64') i porównać z odpowiednim typem Wilda; wówczas otrzymamy w przypadku:

$$a) \quad \Delta \alpha : \Delta \alpha' = \frac{500,0 + 165,0 - 67,2}{165,0 - 67,2} = 6;$$

$$b) \quad \Delta \alpha : \Delta \alpha' = \frac{409,0 + 165,8 - 69,0}{165,8 - 139,3} = 5;$$

$$c) \quad \Delta \alpha : \Delta \alpha' = \frac{78,6 + 218,8 - 139,8}{218,8 - 139,3} = 2.$$

Wpływ przesunięcia  $\Delta \eta$  w dwu pierwszych typach Wilda jest 6, względnie 5 razy mniejszy, niż przy lunetach (o tych samych ogniskowych obiektywu) z wyciągiem okularowym; typ ostatni wykazuje tylko dwa razy większą dokładność (posiada zato inne zalety, o których mowa w § 3 c, rozdz. X).

Konstruktor lunety może przy danych soczewkach  $S_1$  i  $S_2$  przyjąć albo  $d$  albo  $e_\infty$ ; ponieważ odległość  $d$  jest w przybliżeniu równa długości lunety, przeto zazwyczaj przyjmuje się  $d$ , wyrachowując  $e_\infty$  z wzoru:

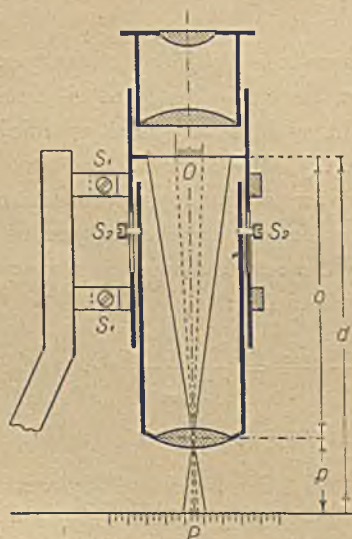
$$e_\infty = \frac{f_1 + d}{2} - \sqrt{f_1 \left( \frac{f_1}{4} - \frac{d}{2} - |f_2| \right) + d \left( \frac{d}{4} + |f_2| \right)},$$

a następnie  $f_{1,2}$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ , itd.; kontrolę rachunku dostarcza równanie:

$$d = (f_{1,2})_\infty + e_\infty - (e_2)_\infty.$$

W końcu należy zaznaczyć, że dziś wyrabiane lunety geodezyjne posiadają prawie wyłącznie soczewki ogniskujące zamiast wyciągów okularowych.

#### § 14. Mikroskopy



Rys. 33.

Mikroskopy służą do oglądania przedmiotów bliskich pod zwiększonym kątem widzenia. Przedmiotami tymi są w geodezji z reguły podziałki precyzyjne. Mikroskop składa się z obiektywu i okularu, który zazwyczaj bywa systemu Ramsdena, wyjątkowo Huygensa. W okularze znajduje się napięta nić, zazwyczaj podwójna, względnie podziałka zaznaczona na płytce szklanej, której przeznaczenie jest analogiczne jak w lunetach.

Mikroskopów używamy w geodezji do odczytywania podziałów limbusu teodolitu w miejscach noniuszów (p. rozdział VII).

Najprostsze mikroskopy mają w przysłonie okularu napiętą pojedynczą nić ułożoną w kierunku promienia limbusu. Rektyfikacja tego ro-



dzaju mikroskopów jest bardzo prosta. Nasamprzód regulujemy odstęp szkła ocznego tak, aby obraz nici znalazł się w odległości dobrego widzenia. Następnie usuwamy paralaksę, tj. przesuwamy (po zwolnieniu śrub  $S_1$ ) mikroskop względem limbusu tak, aby obraz podziału limbusu padł na płaszczyznę, w której jest napięta nić okularu (rys. 33). Czynność ostatnią wykonuje się zasadniczo raz jeden (w praktyce bardzo rzadko, i to tylko, o ile wskutek wstrząsów mikroskop zmienił nieco położenie względem limbusu).

Bardziej skomplikowana jest rektyfikacja mikroskopów mających w obrębie okularów płytkę szklaną z podziałką, oraz mikroskopów posiadających nić ruchomą ze śrubą mikrometryczną. W pierwszym przypadku podziałka na płycie szklanej musi odpowiadać odstępowi dwóch następujących po sobie kresek podziału limbusu; w przypadku drugim przesunięcie się nitki ruchomej od jednej kreski do kreski drugiej podziału limbusu musi odpowiadać pewnej ilości obrotów śruby mikrometrycznej. Dlatego też należy obiektyw oraz płaszczyznę płytki z podziałką (względnie nici ze śrubą mikrometryczną) umieścić w pewnych ściśle wyznaczonych odległościach od limbusu.

Z równań:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$  i  $\frac{O}{o} = \frac{P}{p}$  (rys. 34) otrzymujemy:  $o = f + \frac{Of}{P}$ , względnie  $p = f + \frac{Pf}{O}$ , oraz  $f = o \frac{P}{O+P}$ , względnie  $f = p \frac{O}{O+P}$ .

Związki te istnieją dla zrektyfikowanego mikroskopu, przy czym obraz podziału powstaje w odległości  $d$  od płaszczyzny limbusu. Natomiast w mikroskopie niezrektyfikowanym równanie  $\frac{O}{o} = \frac{P}{p}$  nie będzie spełnione, a w konsekwencji będziemy mieli pewne nieodpowiednie  $o'$ ,  $p'$ ,  $O'$ , oraz  $d'$ :

$$o' = f + \frac{O'f}{P} \text{ i } p' = f + \frac{P'f}{O'}, \text{ a dalej}$$

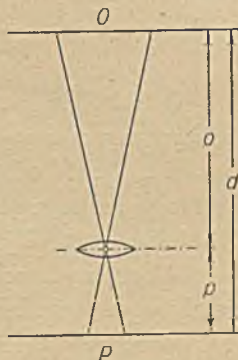
$$o - o' = \frac{fO}{P} \left(1 - \frac{O'}{O}\right) \text{ i } p - p' = -\frac{fP}{O'} \left(1 - \frac{O'}{O}\right) \approx -\frac{fP}{O} \left(1 - \frac{O'}{O}\right).$$

Wstawiając wartości za  $f$  zmieniamy powyższe wzory na:

$$o - o' = \frac{Oo}{O+P} \left(1 - \frac{O'}{O}\right), \quad p - p' = -\frac{Pp}{O+P} \left(1 - \frac{O'}{O}\right), \text{ a uwzględniając, że: } \frac{O}{P} = \frac{o}{p}, \text{ a zatem i } \frac{O}{O+P} = \frac{o}{o+p}, \text{ oraz } \frac{P}{O+P} = \frac{p}{o+p}, \text{ otrzymujemy:}$$

$$o - o' = \frac{o^2}{d} \left(1 - \frac{O'}{O}\right), \quad p - p' = -\frac{p^2}{d} \left(1 - \frac{O'}{O}\right). \quad (79)$$

Związki te umożliwiają nam rektyfikację mikroskopu w przypadku, gdy



Rys. 34.

między okulem a obiektywem nie ma soczewki zbierającej (jak to ma miejsce np. przy okularach Huygensa).

Dodając oba ostatnie związki do siebie otrzymujemy:

$$\Delta d = (o + p) - (o' + p') = \frac{o^2 - p^2}{o + p} \left(1 - \frac{o'}{o}\right) = (o - p) \left(1 - \frac{o'}{o}\right). \quad (80)$$

O  $\Delta d$  należy tedy, po zwolnieniu śrub  $S_1$  (p. rys. 33), zwiększyć odstęp diafragmy mikroskopu od podziałki limbusu, przesuając dla dodatnich wielkości  $\Delta d$  cały mikroskop ku górze (a odwrotnie, dla ujemnej wartości  $\Delta d$ ). Następnie, po zwolnieniu śrub  $S_2$ , przesuwa się sam obiektyw tak, aż obraz limbusu wystąpi jak najwyraźniej; tym samym poprawia się  $p'$  na  $p$ .

W praktyce rektyfikację przeprowadzamy drogą prób, uwzględniając zasady wyszczególnione powyżej.

W razie istnienia między okulem a obiektywem soczewki zbierającej (co trafia się z reguły rzadko), należy zastosować inny sposób rektyfikacji, który czytelnik znajdzie w specjalnych dziełach, traktujących o przyrządach optycznych.



## ROZDZIAŁ IV

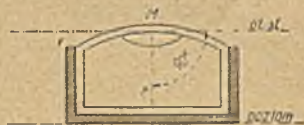
# NAJPROSTSZE PRZYRZĄDY I CZYNNOŚCI MIERNICZE ZDJĘCIE MAŁYCH OBSZARÓW

### § 1. Libela

Libela służy do doprowadzenia pewnych części przyrządów geodezyjnych do położenia pionowego lub poziomego, oraz do pomiaru małych kątów pionowych. Przyrząd ten polega na tym, że swobodna powierzchnia cieczy (w spoczynku) ustawia się zawsze poziomo. Ciecz ta jest zamknięta w rurce szklanej, której górna wewnętrzna powierzchnia jest tak wyszlifowana, aby posiadała kształt czaszy kulistej o pewnym, dość znacznym promieniu, albo bardzo wąskiego paska powierzchni obrotowej, zakreślonej płaskim łukiem koła<sup>1)</sup>.

Rozróżniamy dwa zasadnicze typy libel: a) pudełkową, b) rurkową.

a) *Libela pudełkowa* jest zazwyczaj mało dokładna i służy najczęściej tylko do przybliżonego ustawiania pewnej płaszczyzny albo linii do pionu lub poziomu. Składa się ona z naczynia szklanego walcowego, zamkniętego u góry powierzchnią kulistą. Naczynie to wypełnione jest częściowo eterem siarczanym lub alkoholem, przy czym część niewypełnioną



naczynia zajmują pary tej cieczy, tworząc tzw. *bańkę libeli*. Bańka ta, dzięki swojemu ciężarowi właściwemu, mniejszemu od ciężaru właściwego cieczy, zajmuje zawsze najwyższe położenie w naczyniu, obejmując cen-



Rys. 35b.



Rys. 35a.

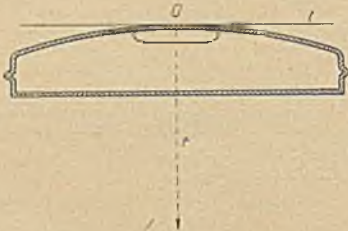
trycznie punkt, w którym promień czaszy kulistej ma położenie pionowe; wobec tego płaszczyzna styczna do czaszy w środku bańki będzie zawsze płaszczyzną poziomą. Na środku powierzchni kulistej wyryte jest kółeczko obejmujące punkt, dla którego płaszczyzna styczna ma być równoległa do podstawy mosiężnej oprawy libeli (rys. 35a i b).

<sup>1)</sup> Szlif wewnętrznej górnej powierzchni libeli uskutecznia się za pomocą odpowiedniego ciernia; ostateczne wygładzenie ścian wewnętrznych następuje ręcznie przy użyciu pyłu diamentowego.

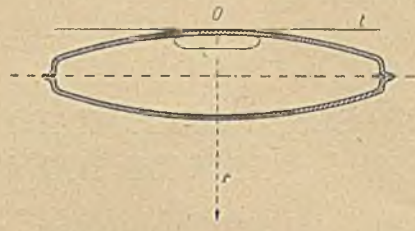


b) *Libela rurkowa*. W praktyce spotykamy dwa rodzaje libel rurkowych, zależnie od tego, czy rurka posiada wyszlifowaną tylko górną część swojej powierzchni wewnętrznej (libela zwykła), czy też górną i dolną część (libela rewersyjna) (p. rys. 36 a i b).

Górna powierzchnia rurki szklanej opatrzona jest podziałem ciągłym lub przerwany w środku (rys. 37 a i b); w obu przypadkach środek libeli znajduje



Rys. 36a.



Rys. 36b.

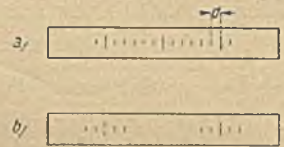
się dokładnie w środku między dwiema dłuższymi, względnie odpowiednio zaznaczonymi, kreskami podziału. Jest to tzw. *punkt główny* libeli.

Odstęp dwu kresek podziału (*pars*) równa się linii paryskiej = 2,26 mm, albo 2 mm.

Styczna do łuku koła w punkcie głównym *G* nazywa się *osią* libeli.

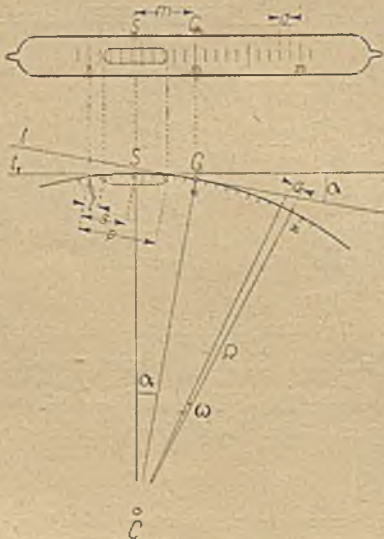
Punkt zerowy podziału *0* u libel o podziale ciągłym (rys. 37a) znajduje się na początku (wzgl. końcu) ich łuku; u libel o podziale przerwany (rys. 37b) schodzi się punkt zerowy *0* z punktem głównym *G*.

Położenie środka bańki libeli otrzymujemy odczytując oba jej końce (prawy *p* i lewy *l*) i tworząc z nich średnią *s*:



Rys. 37a, b.

$$s = \frac{1}{2} (p + l). \quad (1)$$



Rys. 38.

Zauważyć jednak należy, że w przypadku b), tj. gdy punkt zerowy *0* znajduje się w punkcie głównym *G*, należy przyjąć podział w jednym kierunku (na prawo) jako dodatni, zaś w kierunku drugim (na lewo) jako ujemny, wobec czego odczyt *l* wypadnie z reguły jako ujemny.

Chcąc znaleźć na libeli o podziale ciągłym odstęp środka bańki od punktu głównego, należy od łuku *s* odjąć jeszcze łuk *o*, stanowiący odstęp punktu głównego od punktu zerowego, zatem w tym przypadku otrzymamy:

$$m = s - o = \frac{p + l}{2} - o \quad (2)$$

(p. rys. 38).



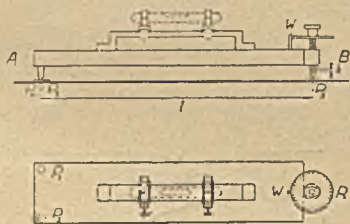
Kąt  $\omega$ , zawarty między promieniami dwu sąsiednich kresek w odstępzie  $d$ , nazywa się *wartością kątową* lub *przewagą* libeli i równa się:

$$\omega = \frac{d}{R}, \text{ względnie } \omega'' = \frac{d}{R} \rho'' \quad (3)$$

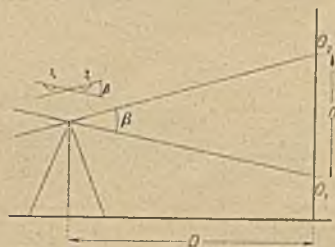
Znając przewagę libeli, możemy wyznaczyć kąt  $\alpha$ , jaki tworzą ze sobą promienie punktów  $G$  i  $S$ , a tym samym kąt między stycznymi w punktach  $G$  i  $S$ , tzn. kąt między osią libeli a poziomem. Kąt ten wynosi w przypadku a)  $\alpha = m\omega$ , zaś w przypadku b)  $\alpha = s\omega$ . (4)

Przy wyznaczaniu wartości kątowej libeli posługujemy się *łożyskiem próbnym*. Jest to płyta mosiężna lub drewniana  $AB$  (rys. 39) oparta na dwu ostrzach  $P_1$  i  $P_2$ , oraz na jednej śrubie  $P_3$ , której gwint musi być wykonany bardzo precyzyjnie. Na płycie są umieszczone widełki, na które nakładamy libelę.

Krok śruby  $k$ , jako też odległość między ostrzami  $P_1 P_2$  a śrubą  $P_3$ , musimy dokładnie pomierzyć, a następnie wyliczyć wysokość  $l$  trójkąta równo-



Rys. 39.



Rys. 40.

noramiennego  $P_1 P_2 P_3$ . Śruba  $P_3$  posiada na złęczonej z nią tarczy podział, z boku zaś obok tarczy jest umieszczony wskaźnik  $W$ , od którego liczymy ilość obrotów śruby.

Na podstawie równania  $\alpha = \frac{k}{l}$  możemy obliczyć, o jaki kąt zmieni się położenie płytki, jeśli podniesiemy lub obniżymy ją o jeden krok śruby, albo o część kroku  $\Delta k$ . Powstały w ten sposób bardzo mały kąt  $\Delta\alpha$  obliczymy z wzoru:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta k}{l}, \text{ względnie } \Delta\alpha'' = \frac{\Delta k}{l} \rho'' \quad (5)$$

Po nałożeniu libeli ustawiamy jej oś do poziomu, robimy odczyt na śrubie, a następnie skręcając tę śrubę tak, aby bańka przesunęła się o jeden odstęp  $d$ , robimy drugi odczyt. Różnica tych odczytów pozwoli obliczyć kąt pochylenia podstawy  $AB$ , który odpowiada wartości kątowej libeli. Obliczamy go według wzoru (5), przy czym  $\Delta k$  jest różnicą odczytów na śrubie. Doświadczenie to powtarzamy dla szeregu następnych kresek, poczynając od jednego z końców libeli, przy czym na wartość kątową libeli powinniśmy otrzymywać stale te same wyniki.



Jeśli libela jest stale osadzona na lunecie, wtedy wyznaczamy jej wartość kątową, robiąc dwa odczyty na łacie niwelacyjnej, ustawionej pionowo w pewnej odległości  $D = 50$  do  $100$  m (rys. 40).

Celując na łatę, robimy na niej odczyt  $o_1$ , zaś na libeli  $s_1 = \frac{p_1 + l_1}{2}$ , następnie celujemy na inny punkt łatę, odczytujemy  $o_2$ , a na libeli  $s_2 = \frac{p_2 + l_2}{2}$ .

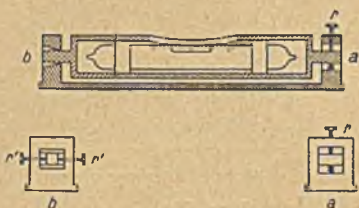
Kąt  $\beta$ , jaki tworzą obie celowe, jest tym samym kątem, jaki tworzy ós libeli w obu położeniach:

$$\beta'' = \rho'' \frac{o}{D} = i \omega'', \quad (6)$$

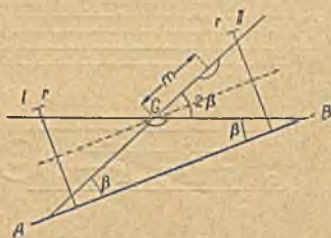
przy czym  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ ,  $s_2 - s_1 = i$ ;

z wzoru (6) obliczymy przewagę libeli:

$$\omega'' = \rho'' \frac{o}{iD}. \quad (7)$$



Rys. 41.



Rys. 42.

Zadanie to przeprowadzamy kilkakrotnie.

Dobra libela powinna posiadać:

- 1) dokładny podział,
- 2) jednakowy promień krzywizny w każdym punkcie,
- 3) czułość, którą poznajemy po szybkim wychyleniu się bańki przy nieznacznej zmianie kąta.

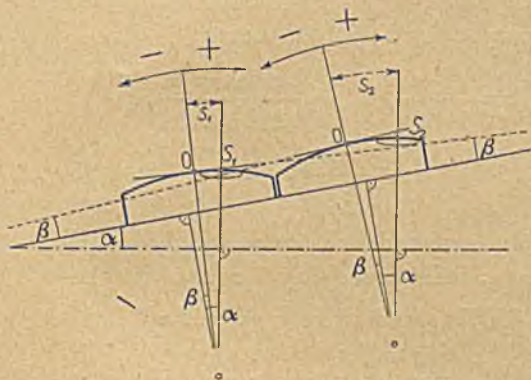
Czułość libeli zależy: a) od wartości katowej  $\omega$  i jest do niej odwrotnie proporcjonalna, b) od promienia  $R$ , do którego jest wprost proporcjonalna.

Celem zabezpieczenia rurki libeli przed uszkodzeniem i dla połączenia jej z podstawą lub instrumentem, umieszcza się ją w odpowiedniej oprawie (rys. 41), dodając śrubki rektyfikacyjne, jedną  $r$ , przy pomocy której możemy zmieniać kąt nachylenia osi libeli względem podstawy i ewentualnie jeszcze dwie  $r'$ , działające w sensie równoległym do podstawy.

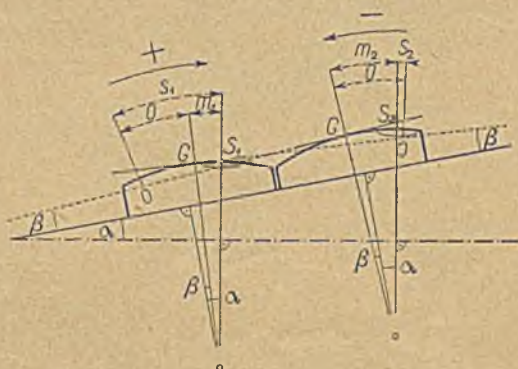
Przedstawiona na rys. 41 libela nazywa się *libelą stolikową* i służy do poziomego ustawienia stołu lub łatę. Rektyfikacja tej libeli polega na sprowadzeniu osi libeli do równoległości z podstawą, co uskuteczniamy w następujący sposób. Kładziemy libelę na płaszczyznę, której kąt nachylenia do poziomu możemy zmieniać (np. na łożysko próbne), i oznaczamy położenie libeli na tej płaszczyźnie.



szczyźnie dwiema kreskami. Następnie pochylamy tak długo płaszczyznę, aż środek bańki znajdzie się w punkcie głównym  $G$ , przy czym oś libeli, o ile płaszczyzna podstawy nie leży w poziomie, będzie z nią zawierała pewien kąt  $\beta$  (rys. 42). Jeśli teraz libelę przełożymy (tj. obrócimy około punktu  $G$  o  $180^\circ$ ) tak, aby śrubka  $r$  zajęła położenie II, to bańka wychyli się o pewną ilość kresek  $m$ . Ponieważ kąt osi libeli z podstawą  $AB$  nie zmieni się, przeto kąt, jaki zawiera oś libeli z poziomem (odpowiadający całkowitemu wychyleniu środka bańki z pierwotnego położenia) będzie, jako kąt zewnętrzny w trójkącie  $AGB$ , równy  $2\beta$ . Chcąc więc sprowadzić oś libeli do równoległości z płaszczyzną podstawy, należy przy pomocy śrubki  $r$  podnieść lub



Rys. 43a.



Rys. 43b.

obniżyć libelę tak, aby bańka przesunęła się o  $\frac{m}{2}$ . Płaszczyznę podstawy sprowadzamy do poziomu pochylając ją tak, aby środek bańki znalazł się w punkcie głównym  $G$  (czyli przesuwamy bańkę o pozostałe  $\frac{m}{2}$ ).

Jak z powyższego wynika, można libelą zrektyfikowaną (tj. o osi równoległej do podstawy) zmierzyć w łatwy sposób mały kąt  $\alpha$ , zawarty między płaszczyzną, na której spoczywa podstawa libeli, a poziomem. Kąt ten otrzymujemy wedle wzoru (4)

$$\left. \begin{aligned} \text{w przypadku a) } \alpha'' &= \left( \frac{p+l}{2} - o \right) \omega'' \\ \text{„ b) } \alpha'' &= \frac{p+l}{2} \omega'' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Natomiast chcąc zmierzyć kąt  $\alpha$  libelą niezrektyfikowaną, należy przeprowadzić pomiar w dwu odwrotnych położeniach libeli (obracając ją w płaszczyźnie poziomej o  $180^\circ$ , jak to uwidoczono na rys. 43a i b).

Aby nie było wątpliwości co do znaku w ten sposób mierzzonego kąta, należy przy pomiarze libelą o podziale ciągłym a) uważać odczyt za dodatni, gdy punkt zerowy podziału znajduje się po stronie lewej, zaś za ujemny, gdy



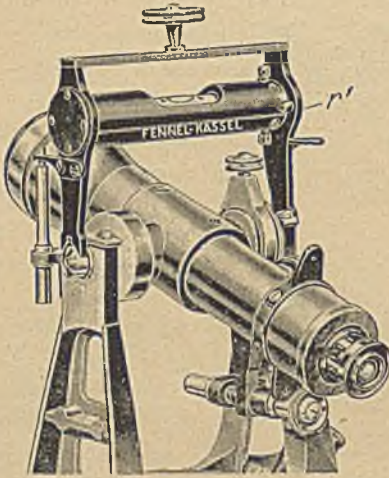
punkt ten znajduje się po stronie prawej obserwatora. Natomiast w przypadku b), tj. gdy punkt zerowy podziału znajduje się w punkcie głównym libeli (podział przerwany), należy uważać zawsze odczyty po lewej stronie punktu zerowego za ujemne bez względu na położenie libeli.

Jak to wynika z rys. 43, obliczamy kąt  $\alpha$  w przypadku a) wedle wzoru:

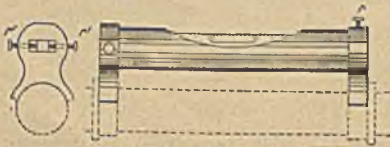
$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{m_1 + m_2}{2} \omega'' = \frac{s_1 - s_2}{2} \omega'' = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{l_1 + p_1}{2} - \frac{l_2 + p_2}{2} \right\} \omega'', \quad (9a) \end{aligned}$$

zaś w przypadku b) wedle wzoru:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{s_1 + s_2}{2} \omega'' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{l_1 + p_1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l_2 + p_2}{2} \right\} \omega''. \quad (9b) \end{aligned}$$



Rys. 44.



Rys. 45.

W obu przypadkach otrzymujemy kąt liczony w sensie przeciwnym ruchowi wskazówek zegara (układ matematyczny).

Rodzaje libel.

Według sposobu użycia rozróżniamy:

- 1) libele stolikowe,
- 2) libele nasadkowe,
- 3) libele ściśle złączone z przyrządami\*).

1) *Libele stolikowe* — omówiono już poprzednio.

2) *Libele nasadkowe* (rys. 44 i 45) zaopatrzone są w dwie nóżki, w dolnej części widelkowato wycięte. Libele te nakładamy na oś obrotu lunety (rys. 44), lub też na pierścienie walca lunety (rys. 45). Rektyfikację ich przeprowadzamy jak poprzednio, jednak dodatkowo musimy sprawdzić czy oś, na którą nałożono libelę, znajduje się w płaszczyźnie łuku libeli. Uzyskanie tego warunku przy użyciu bocznych śrubek libeli  $r'$ , opisano w ustępie »Rektyfikacja typu III«, § 5, rozdz. VI.

## § 2. Noniusz

Powiększenie dokładności odczytu pewnych podziałów otrzymujemy przez zastosowanie *noniusza*. Jest to podziałka umieszczona wzdłuż podziału głównego, przy czym punkt zerowy noniusza jest wskaźnikiem odczytu (rys. 46). Całej długości  $L$  odpowiada  $n$  działek noniusza o wymiarze  $N$ , zaś  $(n - 1)$  działek podziału głównego o wymiarze  $M$ .

Z rysunku widzimy, że

$$L = nN = (n - 1)M, \quad (10)$$

\* ) Libele te omówiono w rozdziałach VI, VII i XIII.



skąd

$$N = \frac{n-1}{n} M = M - \frac{M}{n}. \quad (11)$$

Oznaczając  $M - N = a$ , otrzymamy ze związku (11):

$$a = \frac{M}{n}, \quad (12)$$

którą to wielkość nazywamy *wartością* albo *dokładnością* noniusza.

Czasem stawiamy zadanie odwrotnie: żądamy pewnej dokładności noniusza, przy podanym najmniejszym podziale głównym; wtenczas szukamy:

$$n = \frac{M}{a}; \quad (13)$$

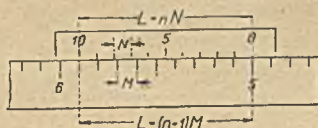
np.  $M = 1$  mm,  $a = 0,05$  mm,  $n = \frac{1}{0,05} = 20$ , czyli odstęp 19 mm należy podzielić na 20 części.

Sposób użycia.

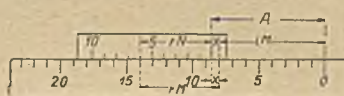
Odczyt na podziale głównym od jego początku do zera noniusza równa się (rys. 47):

$$A = iM + x, \quad (14)$$

przy czym  $i$  oznacza ilość działek podziału głównego,  $x$  zaś resztę do



Rys. 46.



Rys. 47.

punktu zerowego noniusza. Obserwując noniusz, znajdziemy pewne miejsce, w którym kreska podziału zgadza się z  $r$ -tą kreską noniusza. Na podstawie poprzedniego wywodu otrzymamy:

$$x = rM - rN = r(M - N) = ra, \quad (15)$$

zatem

$$A = iM + ra. \quad (16)$$

Można również sporządzić noniusz, którego długość  $L$  odpowiada  $(n + 1)$  działkom podziału głównego.

Ze względu na drobne zwykle podziałki ułatwiamy sobie czytanie noniusza przy pomocy lupy.

### § 3. Zaznaczenie punktów w terenie

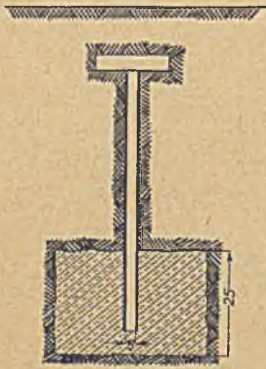
Zaznaczenie punktu w terenie może być naziemne lub podziemne, trwałe albo przejściowe; zależy to od celu i ważności punktu dla pomiaru.

Naziemnie zaznaczamy punkty, ustawiając na nich:



- a) wieże triangulacyjne;
- b) sygnały w kształcie piramidy równobocznej o wysokości 5 - 10 m;
- c) sygnały pojedyncze (żerdzie), oraz tyczki miernicze.

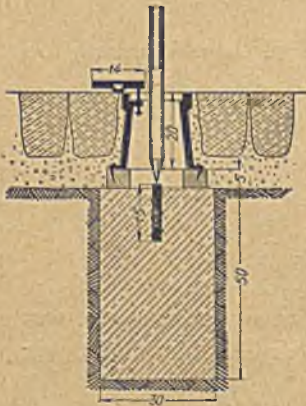
Tak wieża triangulacyjna, jak i sygnał (piramida), pozostaje na terenie nie tylko podczas wykonywania pomiarów, lecz także po ich ukończeniu, jest więc to zaznaczenie do pewnego stopnia trwałe; natomiast tyczką mierniczą zaznaczamy punkt tylko przejściowo na czas przeprowadzania danego pomiaru i dla krótkich celowych (a więc na punktach poligonowych, posilkowych i szczegółowych, o których będzie później mowa).



Rys. 48.

Tyczki miernicze drewniane, o przekroju 3-5 cm, lub żelazne o średnicy 10 mm, mają długość 2-4 m, zaopatrzone są okuciem żelaznym stożkowym i są pomalowane w odstępach 20 cm na przemian kolorem czerwonym i białym.

Tak sygnały, jak i tyczki, ustawiamy centrycznie i pionowo nad punktami, obranymi w terenie, gdyż, nie mogąc celować bezpośrednio na punkt terenu, posługujemy się nimi jako celami. Wymiary sygnałów zależne są od długości celowych i ewentualnych przeszkód terenowych.



Rys. 49.

Do pionowego ustawiania sygnałów używamy instrumentów uniwersalnych, zaś tyczki miernicze ustawiamy pionowo przy pomocy pionów. Stojaki żelazne o trzech nogach utrzymują pionowe położenie tyczki w czasie pomiaru.

Wszystkie ważniejsze punkty zdjęcia zaznaczamy w terenie trwałe, osadzając zależnie od ich ważności pale, drewno, rury żelazne, słupy kamienne itp.

Rys. 48 i 49 podają sposób stabilizacji punktów poligonowych, zaś co do punktów triangulacyjnych p. rozdział VIII, § 12. Każdy z tych punktów powinniśmy zaznaczyć podziemnie przy pomocy trzpieni metalowych lub płyt kamiennych z wyrzniętym na nich krzyżem, albo przy pomocy rurek drenowych głęboko osadzonych (ostatnio wymieniony sposób dla punktów mniej ważnych, leżących na granicach parcel). Dobre i trwałe oznaczenie granic parcel zmniejszyłoby ilość niepotrzebnych sporów granicznych.

#### § 4. Tyczenie linii prostej (bez użycia lunety)

Wytyczenie linii prostej między dwoma danymi punktami polega na znalezieniu w terenie pewnej ilości punktów pośrednich, leżących w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oba te punkty.







tyczek  $C'$  i  $B$ . Czynność tę powtarzamy tak długo, jak długo okazuje się potrzeba przesuwania tyczek, czyli do wprowadzenia ich do płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez tyczki  $A$  i  $B$ .

W przypadku, gdy na prostej  $AB$  znajduje się przeszkoda (domy, las itp.), posługujemy się prostą pomocniczą  $AE$  (rys. 52). Na tej prostej wyznaczamy punkt  $B'$ , leżący na prostopadłej z punktu  $B$  do prostej  $AE$ . Następnie mierzymy długość  $AB' = x_B$  i  $B'B = y_B$ . Punkt pośredni prostej  $AB$  otrzymamy w sposób następujący: na prostej  $AB'$  odmierzamy dowolny odcinek  $x_C$ , a z otrzymanego w ten sposób punktu  $C'$  wystawiamy prostopadłą do  $AB'$ , na której odmierzamy odcinek o długości  $y_C = \frac{y_B}{x_B} x_C$ . Otrzymany punkt  $C$  leży na prostej  $AB$ . Podobnie wyznaczmy następne punkty.

### § 5. Pomiar długości

W miernictwie odnosimy wszelkie pomiary długości do płaszczyzny poziomej, dlatego też przez długość pewnej linii rozumiemy długość jej rzutu na płaszczyznę poziomą. Pomiar wykonany na terenie pochyłym, redukujemy do poziomu.

Długość linii prostej możemy pomierzyć bezpośrednio, przez kolejne przykładanie miary w kierunku prostej, lub pośrednio przy pomocy innych wielkości, które z szukaną długością są odpowiednio związane (trygonometryczny pomiar, tachimetria, fotogrametria itd.).

Ważniejszymi przyrządami, służącymi do bezpośredniego pomiaru długości, są:

- 1) lata miernicza, 2) drut inwarowy, 3) taśma stalowa, 4) taśma parciana,
- 5) przyrząd do pomiaru schodkowego, 6) cyrkiel mierniczy.

*Lata miernicza* jest to lekki drążek drewniany 3-5 m długi, o przekroju prostokątnym lub owalnym, obustronnie zakończony okuciem płaskim lub klinowym.



Rys. 53.

W tym drugim przypadku krawędzie ostrzy klinów sąsiednich układamy pod kątem prostym (rys. 53). Do wyrobu lat używa się drzewa jodłowego, które nasycamy oliwą, by zmniejszyć wpływ

wilgoci na zmianę długości lata. Poszczególne odcinki metrowe lata są pomalowane naprzemian kolorem czerwonym i białym, zaś decymetry oznaczone są mosiężnymi gwoździami.

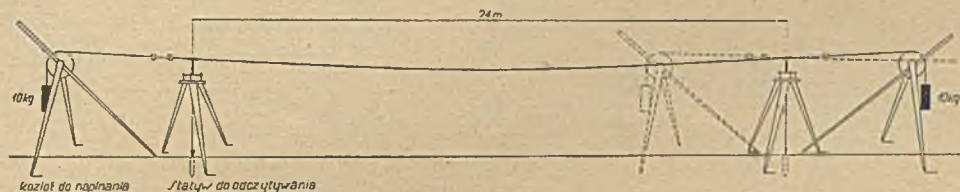
Do pomiaru długości używamy 3 lub 4 lata. Przed przystąpieniem do pomiaru należy prostą dokładnie wytyczyć, wypalikować i wyciągnąć sznur, wzdłuż którego mamy przeprowadzić pomiar. Długość linii mierzymy, przykładając ponumerowane lata kolejno do siebie. Podczas pomiaru uważać należy, by ułożona lata nie została ruszona przez dosunięcie następnej.

Mierząc po pochyłości wyznaczamy za pomocą *pochyłomierza* lub libeli



dla każdego położenia łąty jej kąt nachylenia względem poziomu. Dokładne pomiary długości wykonujemy na palach, które wbijamy w odstępach równych długości łąty. Łąty opieramy na przybitych do palików deszczułkach. Pochylenie łąt wyznaczamy z przeprowadzonej niwelacji palików.

Łąta miernicza daje (obok drutu inwarowego) najdokładniejsze wyniki pomiaru długości, pomiar jednak łątami zabiera stosunkowo najwięcej czasu.



Rys. 54.

Do dokładnego pomiaru dużych odległości (baza sieci triangulacyjnej) używa się obecnie z reguły *drutu inwarowego*. Inwar jest stopem stali (64%) i niklu (36%), posiadającym bardzo mały współczynnik rozszerzalności (około 1:1 000 000). Średnica drutu wynosi 1,5 mm, długość 24 m, końce drutu zaopatrzone są podziałkami milimetrowymi na długości 8 cm. Podczas pomiaru drut napina się z siłą 10 kg, do czego służą specjalne kozły z bloczkami, przez które przesuwa się linkę, zaczepioną za kółko uchwytowe drutu (rys. 54). Pomiar przeprowadza się przy użyciu statywów, na których umieszczone są znaczki (marki), odczytywane na podziałkach drutu. Wadą inwaru jest jego wrażliwość na wszelkie wstrząsy, co zmusza do stosowania specjalnych ostrożności podczas pomiaru i transportu drutu.

*Taśma stalowa*. Przyrzędem używanym najczęściej do pomiaru długości jest taśma stalowa (rys. 55). Ma ona wymiary: 20, 30, 50 m długości, 10, 15, 30 mm szerokości i 0,3-0,4 mm grubości. W odstępach 1 m przymocowane są obustronnie płytki miedziane, opatrzone cyframi, wskazującymi ilość metrów od początku taśmy; pomiędzy nimi w odstępie decymetrowym wycięte są otworki. Odstępy centymetrowe nie są znaczone i dlatego muszą być oceniane albo odczytywane przy pomocy podziałki. Taśma zakończona jest miedzianymi uchwytami, na których zazwyczaj wyryte są znaki (kreski poprzeczne), podające początek i koniec taśmy. Forma uchwytów może być różna (rys. 55 a). Najlepszy z uchwytów oznaczono literą a. Do transportu nawijamy taśmę na kółko żelazne.

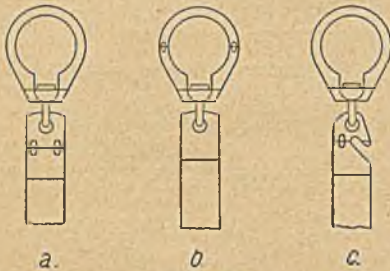


Rys. 55.



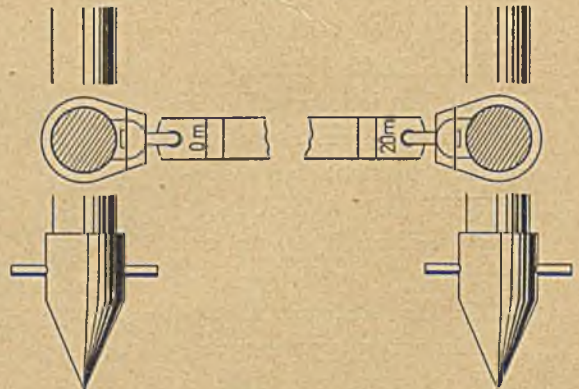
Poszczególne przyłożenia taśmy na terenie zaznaczamy *szpilkami* (p. rys. 55). Do każdej taśmy należy 11 szpilek. Taśmę w czasie pomiaru napinamy z siłą około 15 kg rękami bezpośrednio lub przy pomocy kosturów (rys. 55 b), których użycie zwiększa w znacznej mierze dokładność pomiaru.

Sposób pomiaru taśmą jest następujący: na końcowych punktach mierzonej długości ustawiamy tyczki, przy czym, jeżeli długość prostej przekracza



Rys. 55 a.

100 m, należy przed pomiarem wyznaczyć na niej dokładnie kilka punktów pośrednich. Pomiar długości wykonuje dwu pomocników. Pomocnik I, znajdujący się na przodzie, niesie kółko ze szpilkami, zaś pomocnik II — początkowo kółko bez szpilek. Pomocnik II ustawia kostur z nałożoną taśmą tak, aby początek taśmy znalazł się nad punktem początkowym mierzonej długości, po czym, dając znaki ręką, tak długo kieruje pomocnikiem I, aż ten znajdzie się na kierunku prostej mierzonej. Następnie naciąga się taśmę, a na znak kierującego pomiarem, pomocnik I zaznacza odmierzoną długość na terenie wbicią pionowo szpilki. Szpilkę wbijamy obok taśmy z tej strony, z której przyłożono jej początek. Oczywiście tak przykładanie taśmy, jak i wbijanie szpilek, obowiązuje zawsze z tej samej strony podczas całego pomiaru. Na umówiony znak pomocnicy podnoszą taśmę do góry, przesuwając ją 10-15 cm w bok, po czym przenoszą do następnego przyłożenia. W czasie przenoszenia taśmy należy uważać, aby nie poruszyć szpilek. Pomocnik II przykładą taśmę do szpilki wbitej przez pomocnika I, po czym postępowanie jest identyczne jak poprzednio. W chwili podnoszenia taśmy pomocnik II zbiera na kółko szpilki, wbite przez pomocnika I. Pozostałą resztę mierzymy na taśmie wyciągniętej poza punkt końcowy danej



Rys. 55 b.

prostej, odczytując metry i decymetry wprost, zaś centymetry przy pomocy podziałki lub przez oszacowanie. W czasie pomiaru należy tak układać taśmę, aby podział uwidoczny na taśmie wzrastał w kierunku pomiaru prostej. Pomocnik I orientuje się, jak długo ma kroczyć do następnej szpilki, licząc w czasie marszu 26 kroków. Przy pomiarze w terenie zarośniętym trawą, należy w pobliżu miejsca, w którym wbite szpilki, ułożyć umówiony przedmiot, ułatwiający pomocnikowi II jej odnalezienie. Niedopuszczalne jest wyjmowanie szpilek i wbijanie w ich miejsce ostrzy kosturów, lub jeśli się kosturów



nie używa, opieranie taśmy na szpilce. Ilość szpilek zebranych przez pomocnika II i odczytaną resztę zapisuje się do dziennika, po czym oblicza się całkowitą długość mierzonej prostej. Jeśli w czasie pomiaru po wbiciu 11-ej szpilki okaże się, że musimy wbić następną (przy długości większej od 220 m), wtedy pomocnik II wyjmuje szpilkę 10-tą, zgłasza to prowadzącemu pomiar i oddaje 10 szpilek pomocnikowi I.

Każda długość powinna być mierzona przynajmniej dwukrotnie, tam i z powrotem, zaś w przypadku silniejszego spadku, w kierunku pochylenia stoku (nigdy pod górę).

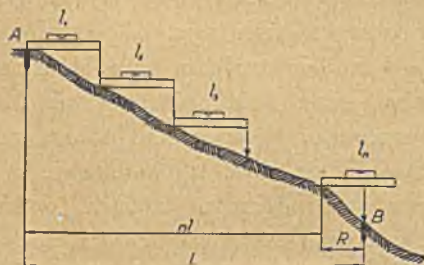
Różnica dwukrotnego pomiaru długości  $b$  nie powinna przekraczać granic, podanych w instrukcjach pomiarowych. I tak wedle przepisów M. R. P. granica ta wynosi w metrach:

$$\Delta b = 0,0002 \sqrt{b^2 + 1000 b}.$$

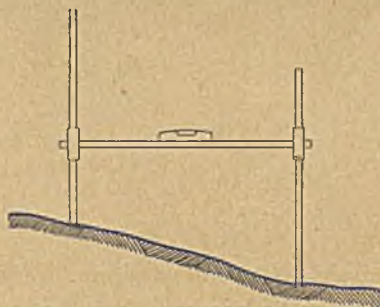
#### Dziennik pomiaru długości.

Bok	Ilość taśm (łat) à 20 m	Reszta 'm	Długość m	Średnia m	U w a g i
1—2	6	15,75	135,75	135,72	
	6	15,70	135,70		

Wyżej opisaną metodę stosujemy w terenie poziomym i równym. W terenie równym i pochyłym pomiar prostej możemy wykonywać w dwojaki sposób. Sposób pierwszy polega na sprowadzaniu poszczególnych łat (taśm)



Rys. 56.



Rys. 57.

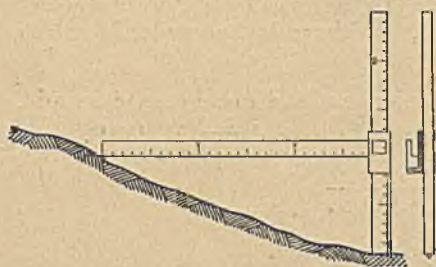
do poziomu przy pomocy libeli; przy sposobie drugim mierzymy długość wprost po terenie, wyznaczając jednocześnie nachylenie łat (taśm) względem poziomu.

W przypadku pierwszym układamy początek łat na punkcie początkowym mierzonej prostej, następnie nakładamy na łatę libelę i, podnosząc łatę do poziomu, kierujemy ją na mierzoną linię, po czym przy pomocy pionu rzutujemy koniec łatę na teren i zaznaczamy go szpilką (rys. 56). W punkcie tym przykładamy następną łatę i postępujemy w dalszym ciągu jak poprzednio. Resztę odczytujemy na łacie przy użyciu pionu. Każde przyłożenie łatę na-



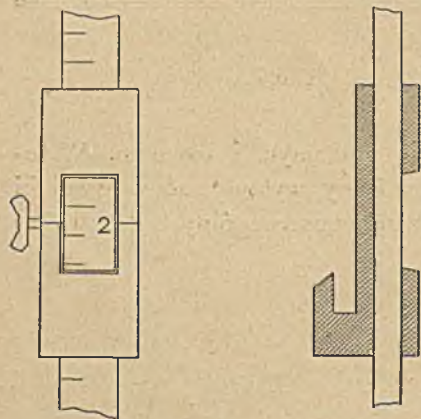
leży zanotować w dzienniku pomiarowym. Jeśli pomiar wykonujemy taśmą, wtedy w dość grubym przybliżeniu możemy uzyskać poziome jej położenie, układając taśmę prostopadłe do sznurka pionu, trzymanego w pobliżu jej środka.

Na wyżej podanych zasadach sporządzono *przyrząd do schodkowania*. Składa się on z trzech, lub tylko dwu łąt, przy czym dwie z nich (względnie jedną) ustawiamy pionowo i na nich opieramy trzecią, którą przy pomocy libeli układamy poziomo (rys. 57 i 58).



Rys. 58.

Wykonanie pomiaru tym przyrządem jest identyczne ze sposobem poprzednio opisanym. Na przyrządzie tym możemy równocześnie odczytywać różnice wysokości; w tym celu łąty pionowe zaopatrzone są w podziałkę centymetrową, zaś suwak, na którym opiera się łąta, posiada okienko, w którym możemy odczytywać różnice wysokości (rys. 58a).



Rys. 58a.

Mierzac wprost po terenie pochyłym, nakładamy na łątę *pochyłomierz*, który podaje, przy pomocy libeli lub pionu, kąt nachylenia łąty względem poziomu. Łąty przykładamy do siebie jak w terenie poziomym.

Posiadamy kilka typów pochylomierzy. Najprostszy z nich (rys. 59) zbudowany jest w kształcie trójkąta równobocznego, którego jeden bok opieramy na łacie. U wierzchołka kąta przeciwnego przymocowany jest pion. Na podstawie umieszczona jest podziałka kątowa, o którą

opiera się lekko nitka pionu. Jeśli więc przyrząd ten ustawimy na pochyłej łacie, to nitka pionu wskaże kąt nachylenia łąty do poziomu. Znając ten kąt i długość łąty  $b'$ , możemy przy pomocy wzoru:

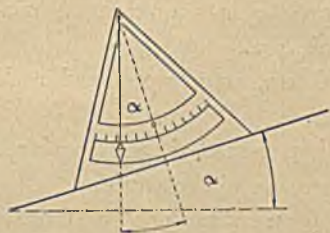
$$b = b' \cos \alpha \quad (17)$$

obliczyć zredukowaną na poziom długość  $b$ .

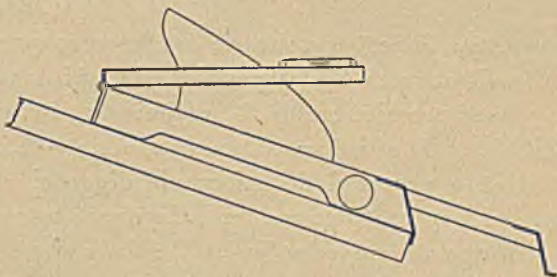
Drugim przyrządem, pozwalającym bezpośrednio w terenie uwzględnić redukcję na poziom, jest pochylomierz automatyczny. Przyrząd ten (rys. 60) nakładamy na łątę, a po sprowadzeniu libeli przyrządu do poziomu, wysunięty wskaźnik w kształcie języka podaje odstęp, o który należy przesunąć łątę, by zredukowana na poziom długość równała się długości łąty. Widzimy więc, że przez zastosowanie tego przyrządu odpada całe obliczenie redukcji, a tym samym unikamy ewentualnych błędów rachunkowych.



Przy pomiarze taśmą stosujemy pochyłomierze zaopatrzone w celowniki. Mamy kilka typów tego rodzaju pochyłomierzy. Pochyłomierz Wolza (rys. 61) składa się z przeziernika, przymocowanego do cylindrycznego pudełka, wewnątrz którego umieszczone jest półkole, zachowujące podczas pomiaru stałe położenie (względem pionu) dzięki odpowiednio z nim związanej przeciwwadze. Na półkolu wyryty jest podział stopniowy. W płaszczyźnie celownika umieszczone jest na pobocznicy cylindra okienko, przez które przy pomocy lupy

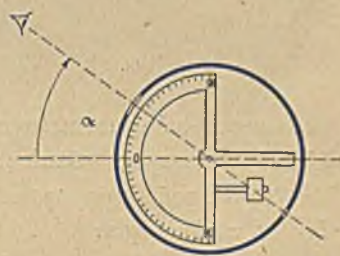


Rys. 59.



Rys. 60.

odezycujemy kąt pochylenia celowej, przeciwwaga bowiem utrzymuje półkole w takim położeniu, że odczyt zerowy odpowiada celowej poziomej. Po skierowaniu przeziernika na pewien punkt pochyla się celowa, a przez okienko odczytuje się jej kąt nachylenia. Celować należy na tyczkę, umieszczoną w końcu taśmy, z przymocowanym do niej znakiem na wysokości, odpowiadającej wysokości oka obserwatora ponad terenem.



Rys. 61.

Jeśli teren jest równomiernie pochyły (rys. 62), wtedy możemy mierzyć po terenie, następnie zanivelować różnicę wysokości punktów *A* i *B* i z tych danych obliczyć długość zredukowaną na poziom przy pomocy wzoru:

$$b = \sqrt{b'^2 - h^2}, \quad (18)$$

lub wzoru uproszczonego (dla małej różnicy wysokości *h* w stosunku do *b*):

$$b = b' - \frac{h^2}{2b'}. \quad (19)$$

Długości nie wymagające wielkiej dokładności mierzymy taśmą parcianą o podziale centymetrowym. Dobra taśma parciana powinna posiadać 8 drucików, wplecionych pomiędzy podłużne nitki taśmy, w celu zmniejszenia rozciągliwości taśmy, która w przeciwnym wypadku pod wpływem wilgoci zmienia znacznie swoją długość.



Rys. 62.

Przy dokładnych pomiarach długości musimy mierzoną prostą przygotować do pomiaru. W tym



celu całą prostą wytyczamy instrumentem<sup>1)</sup>, w miejscach przyłożenia końców taśmy wbijamy paliki, na których umieszczamy wskaźniki. Do tych wskaźników odnosimy poszczególne przyłożenia taśmy. Taśmę naciągamy z siłą 20 kg. Poszczególne paliki niwelujemy, celem zredukowania pomiaru na poziom. Przy długich prostych należy przeprowadzić jeszcze redukcję na poziom morza. Poprawka ze względu na redukcję na poziom morza wyraża się wzorem:

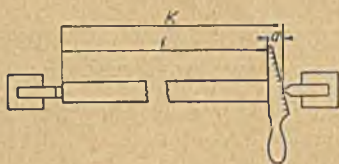
$$db = -\frac{H}{R} b, \quad (20)$$

przy czym  $H$  jest wysokością środkowego punktu prostej nad poziomem morza, a  $R$  oznacza średni promień ziemski danego miejsca.

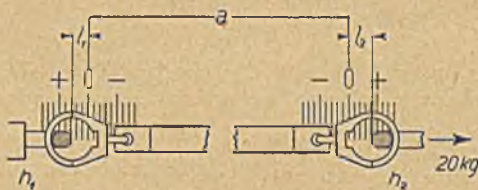
Jeżeli promień ziemi  $R$  przyjmiemy równy 6370 km, wtedy poprawka  $db$  dla  $H = 100$  m i  $b = 100$  m równa się  $-1,57$  mm.

Każdy przyrząd do mierzenia długości musi być przed i po pomiarze sprawdzony na komparatorze. Czynność tę nazywamy komparowaniem.

Komparator dla łat (rys. 63) składa się z dwu (umieszczonych w murze) przyrządów, których odstęp ustalamy przez parokrotny pomiar przy



Rys. 63.



Rys. 64.

pomocy metrów normalnych. Między ostrza te wkładamy łatę i za pomocą klina<sup>2)</sup> mierzymy różnicę między długością łatę a długością komparatora. Znając długość komparatora  $K$  i odczytany odstęp  $d$ , możemy obliczyć długość łatę  $L$  z równania:

$$L = K - d. \quad (21)$$

Komparator dla taśm (rys. 64) składa się z dwu płytek z podziałkami milimetrycznymi, wmurowanych w podłoże, oraz z urządzenia, służącego do zaczepienia taśmy i obciążenia jej z siłą 20 kg. Haczyk  $h_1$  przytrzymuje jeden koniec taśmy, haczyk  $h_2$ , połączony łańcuszkiem z ciężarem 20 kg, zaczepiony jest za drugi koniec taśmy. Odległość  $a$  środków podziałek  $P_1$  i  $P_2$  jest dokładnie zmierzona przy pomocy metra normalnego i wynosi około 20 m tak, że odczytując położenie marek taśmy na jednej i na drugiej podziałce, otrzymujemy dokładną jej długość:

$$L = a + l_2 + l_1. \quad (22)$$

W końcu należy jeszcze przy dokładnym pomiarze długości taśmą stalową zwrócić uwagę na wpływ temperatury. W tym celu w czasie pomiaru (oraz komparacji) zapisujemy temperaturę otaczającego powietrza, znając zaś współczynnik rozszerzalności taśmy, wprowadzamy odpowiednią poprawkę.

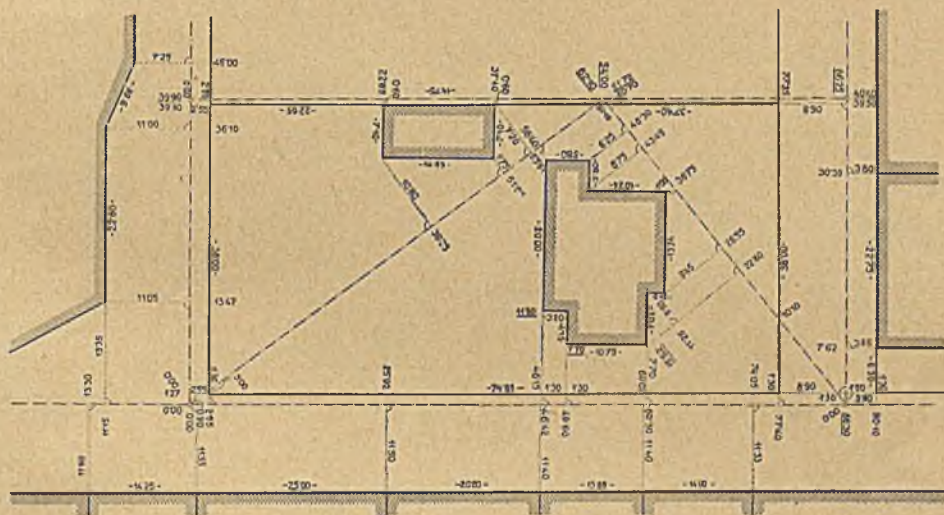
<sup>1)</sup> P. rozdział VII.    <sup>2)</sup> Por. rozdział II, § 9.



## × § 6. Pomiar małych obszarów

Przy zdjęciu małych obszarów posługujemy się, zależnie od ich wielkości, różnymi metodami:

1) *Metoda rzędnych i odciętych* polega na założeniu na obszarze zdjęcia jednej lub kilku *linij pomiarowych*, tworzących trójkąty (rys. 65). Na linie te rzutujemy poszczególne punkty, przy czym odcięte ich odmierzymy na linii pomiarowej od jej początku, a rzędne na prostopadłych, tyczonych węgielnicą. Używamy do tego dwu taśm, z których jedna, taśmę stalową, układamy w kierunku pomiarowej, druga zaś, taśmę parciańską lub także stalową (zwykle w skórzanym futerale), służy do pomiaru rzędnych. Przy metodzie tej nie mierzymy kątów wieloboku, ograniczającego obszar zdjęcia, lecz staramy się zakładać



Rys. 65.

trójkąty tak, aby na boki tych trójkątów (linie pomiarowe) można było odrzutować wszystkie punkty, które mają być uwidocznione na planie. Oprócz miar wynikających z rzutowania, bierzemy również miary kontrolne, a więc tzw. miary czołowe (tj. długości granic parcel i budynków), oraz przecięcia się granic z liniami pomiarowymi (o ile kąt przecięcia się nie jest mniejszy od  $30^\circ$ ). Granice krzywoliniowe, które nie mają kształtu regularnego, zdejmujemy w ten sposób, że zastępujemy je linią łamaną o tak krótkich bokach, aby na planie kształt ich należycie wystąpił.

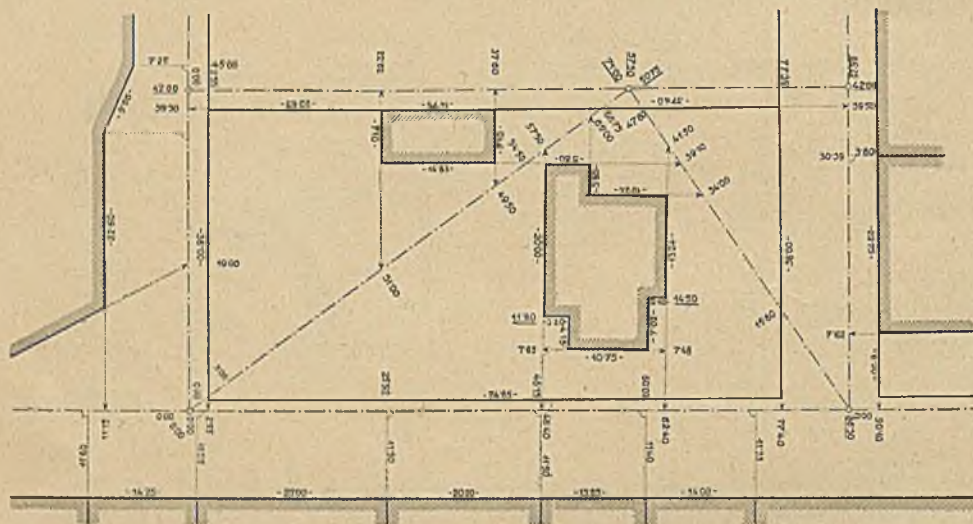
Podczas pomiaru prowadzimy *szkiełko polowy*, na którym szkicujemy zdejmowany obszar i wpisujemy wymiary. Przy wpisywaniu wymiarów należy uwzględnić następujące reguły: odcięte wpisuje się zawsze prostopadle do linii pomiarowej po przeciwnej stronie rzutowanego punktu, zaś wymiar rzędnej wpisuje się na tejże rzędnej, gdy rzutujemy jeden tylko punkt, lub prostopadle do rzędnej, jeżeli punktów na niej jest więcej (w tym drugim przypadku ostatni wymiar należy podkreślić).

2) *Metoda dowiązania* polega na przedłużaniu granic oraz ścian budynków do przecięcia się z liniami pomiarowymi (rys. 66).



3) *Metoda poprzeczek*, stosowana przy długich a wąskich parcelach, polega na tym, że na obszarze zdjęcia zakładamy jako podstawę czworobok z jedną lub dwiema przekątnymi, albo już mamy taki czworobok gotowy, powstały z linii pomiarowych i boków poligonu (p. rozdział IX), jak to przedstawiono na rys. 67. Na dwu przeciwległych bokach wybieramy szereg punktów, które łączymy następnie liniami prostymi i szukamy ich przecięcia się z granicami parcel. Linie te wybieramy tak, by przechodziły przez punkty załamania granic, a gdy to nie jest możliwe, rzutujemy punkty załamania na wytyczone linie.

4) *Metoda biegunowa* polega na pomiarze z jednego lub kilku punktów, tzw. stanowisk, kierunków i odległości do punktów, które na planie mają być przedstawione (rys. 68). Jeżeli podstawę zdjęcia stanowi kilka punktów, poło-



Rys. 66.

żenie ich wzajemne musi być wyznaczone. Zwykle odległości mierzone są optycznie (por. rozdział X, Tachimetria). Dla kontroli mierzymy również obwody (miary czołowe).

5) *Metoda wcinania w przód* polega na tym, że z tzw. podstawy (dwu punktów, których odległość znamy) mierzymy kierunki do poszczególnych punktów, a następnie graficznie lub rachunkowo wyznaczamy położenie tych punktów względem podstawy. Metoda ta znalazła największe zastosowanie przy zdjęciach stolikowych (p. § 7).

6) *Metoda poligonowa* opiera się na założeniu wieloboku, w którym mierzymy wszystkie kąty i długości (boki). Metodę tę opisano w rozdziale IX (Poligonometria).

Każda z wyżej wyszczególnionych metod ma swoje zalety i wady; i tak metoda 1) daje szybką kontrolę i łatwość dostosowania się do terenu, natomiast jej wadę stanowi trudność odtworzenia zdjęcia w razie zaginięcia punktów posilkowych (wierzchołków trójkątów).







Metoda 3) nadaje się tylko w specjalnych przypadkach.

Metoda 4) jest korzystna z tego względu, że popełnione ewentualne błędy pomiaru nie przenoszą się na następne punkty; w połączeniu z metodą poligonową daje ona dobre wyniki, wymaga jednak większej ilości stanowisk i kosztowniejszych przyrządów.

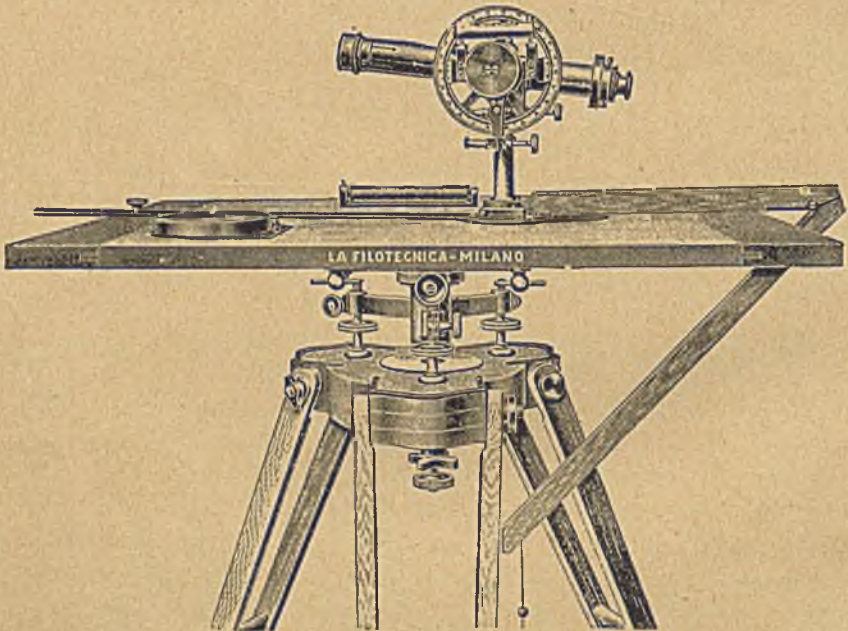
Metoda 5) nadaje się głównie w terenie płaskim i otwartym, a w nielicznych przypadkach i w terenie silnie zabudowanym, gdzie wszystkie inne metody zawodzą.

Zalety i wady metody 6) (poligonowej) znajdzie czytelnik w rozdziale IX.

## § 7. Zdjęcia stolikowe

### 1. Zasada i przyrządy.

Zasada zdjęć stolikowych polega na tym, że w terenie kreślimy bezpośrednio na desce rysunkowej kierunku do poszczególnych punktów terenu



Rys. 69.

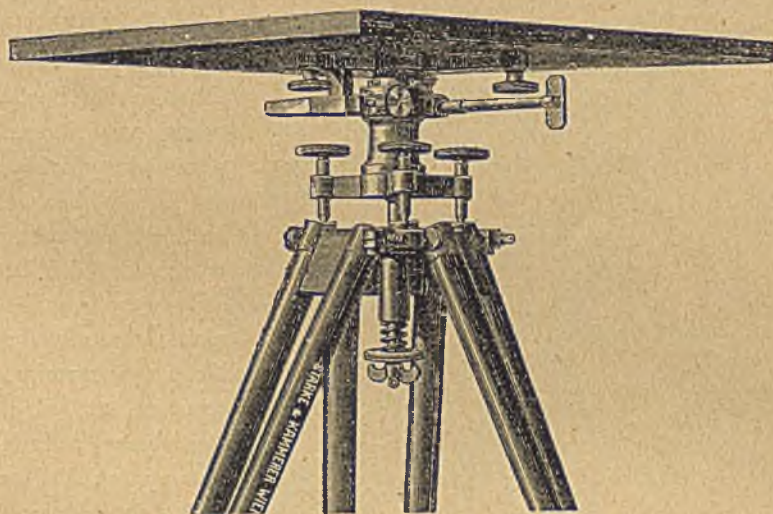
i przy ich pomocy lub też pomierzonych odległości, określamy położenie tych punktów. Podczas pomiarów połowych kreślimy zatem wprost plan zdejmowanego terenu w przyjętej skali.

Do pomiarów wykonywanych metodą stolikową służą następujące przyrządy: stolik mierniczy, kierownica, busola, widełki i libela stolikowa (rys. 69).

a) *Stolik mierniczy* składa się z trzech części: statywu, krzyża i deski stolikowej (rys. 70a). Statyw posiada trzy nogi, przymocowane śrubami do jego głowy. Zwalniając te śruby, możemy nogi nachylać do siebie pod więk-



szym lub mniejszym kątem, co pozwala na wyższe lub niższe ustawienie stolika mierniczego ponad stanowiskiem (terenem). Głowa statywu połączona jest ze stolikiem mierniczym przy pomocy krzyża. Konstrukcja krzyża, podobnie jak przy innych przyrządach służących do pomiaru kierunków, pozwala na pochylenie deski stolikowej przy pomocy trzech śrub ustawczych. Głowę statywu łączy z krzyżem śruba centralna. Jeśli ją zwolnimy, możemy krzyż wraz z deską stolikową przesunąć tak, aby punkt na stoliku znalazł się centrycznie nad odpowiadającym mu punktem terenu. Prócz tego deskę rysunkową możemy skręcać w sensie poziomym o dowolny kąt, do czego służy sprzęg i śruba do ruchu leniwego, umieszczona na krzyżu. Krzyż połączony jest z deską stolikową przy pomocy trzech śrub. Na górnej powierzchni deski



Rys. 70 a.

stolika, o wymiarach zwykle  $60 \times 80$  cm, naklejamy papier rysunkowy lub przymocujemy płyty aluminiowe oklejone papierem rysunkowym.

b) *Kierownica* składa się z liniału i lunety, połączonych ze sobą kolumienką. Na osi obrotu lunety przymocowana jest do kolumienki libela, przy pomocy której ustawiamy kierownicę dokładnie poziomo. Z osią obrotu lunety złączone jest stale koło pionowe, na którym (przy pomocy noniusza) odczytujemy kąt pochylenia lunety (osi celowej). Niejednokrotnie spotykamy przy różnych konstrukcjach kierownic również libelę, umieszczoną na lunecie. Krzyż nitkowy lunety posiada zwykle trzy nitki poziome i jedną pionową, gdyż kierownica przystosowana jest do optycznego pomiaru odległości (p. rozdział X, Tachimetria).

Przed użyciem kierownicy do pomiaru powinniśmy sprawdzić czy odpowiada ona następującym warunkom:

1) Krawędź liniału, wzdłuż której kreślimy kierunki, powinna być linią prostą.



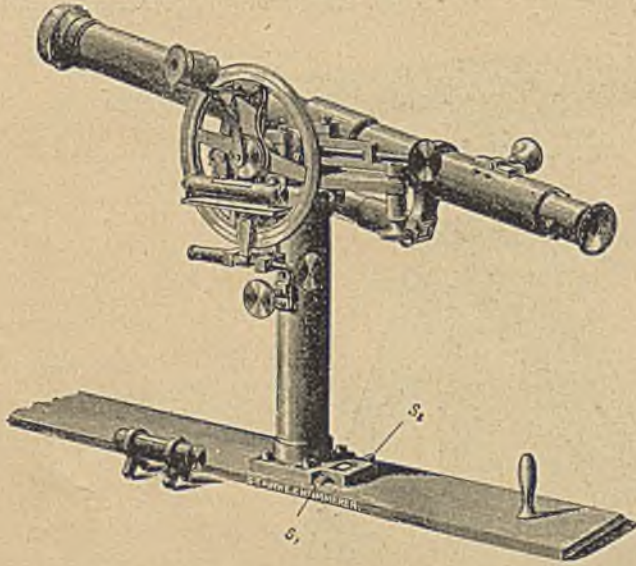
2) Płaszczyzna, zakreślona przez oś celową, powinna przechodzić przez krawędź liniału, wzdłuż której kreślimy kierunki, albo przynajmniej być do niej równoległa.

3) Oś celowa powinna być prostopadła do osi obrotu lunety.

4) Oś libeli powinna być równoległa do osi obrotu lunety.

5) Przy poziomej osi celowej odczyt na kole pionowym powinien być równy zeru.

Ad 1). Prostoliniowość liniału kierownicy sprawdzamy, przykładając krawędź liniału do dwu punktów na desce rysunkowej i kreśląc wzdłuż tej krawędzi cienką linię; następnie obracamy liniał o  $180^\circ$  i przykładamy go do



Rys. 70 b.

tych samych punktów, po czym kreślimy znowu linię. Jeżeli obie linie pokrywają się, to wówczas liniał jest dobry, w razie niezgodności musi on być poprawiony fabrycznie.

Ad 2). Warunek ten badamy, po sprawdzeniu warunków 3) i 4), w następujący sposób. Na poziomo ułożonej desce stolikowej ustawiamy kierownicę tak, aby oś celowa przechodziła przez obrany punkt krawędzi odległego domu. Przy krawędzi liniału wbijamy dwie cienkie szpilki, mo-

żliwie jak najdalej od siebie. Następnie celujemy poprzez te szpilki na poprzecznie obrany punkt. Jeśli płaszczyzna zakreślona przez oś celową jest równoległa do krawędzi liniału, wtedy linia łącząca obie szpilki powinna przechodzić przez ten sam punkt. Występujący błąd należy poprawić przez skrócenie kolumnienki śrubami  $s_1$  i  $s_2$  (rys. 70 b),

Warunki 3), 4) i 5) sprawdzamy podobnie jak przy instrumentach uniwersalnych (p. rozdział VII).

c) *Busola* służy do orientowania stolika mierniczego (rys. 70 c). Składa się ona z płytki kwadratowej, do której przymocowana jest okrągła płaska puszką. Pośrodku tej puszką osadzona jest igła magnetyczna. Na obwodzie puszką znajduje się podział stopniowy, tak umieszczony, by kierunek  $0^\circ - 180^\circ$  zgadzał się z krawędzią płytką. Na podziale odczytujemy wychylenie igły magnetycznej (tzw. kąt kierunkowy magnetyczny). Jeżeli zatem na desce rysunkowej naniesiemy prostokąt i będziemy znali deklinację magnetyczną (odchylenie igły od kierunku południka) dla miejsca pomiaru, wtedy możemy ustawić jeden z boków prostokąta w kierunku północ-południe.



d) *Widelki* składają się z dwóch ramion odpowiedniej długości, zawierających taki kąt ze sobą, aby zawieszony pion na jednym z nich, przechodził przez koniec drugiego ramienia, ułożonego na desce stolika w poziomie. Długość ramion jest tak dobrana, aby każdy punkt na stoliku mierniczym można było odpionować na teren. Z powyższego wynika, że widelki służą do przenoszenia punktów ze stolika na teren i odwrotnie.

Badanie widełek przeprowadzamy w ten sposób, że rzutujemy na teren dowolnie obrany punkt na poziomo ustawionym stoliku mierniczym przy pomocy widełek; następnie obracamy widelki o  $180^\circ$  i w tym położeniu rzutujemy znowu obrany poprzednio punkt. Jeżeli pion trafia na ten sam punkt terenu, to widelki są dobre, w przeciwnym razie należy jedno z ramion skrócić lub zmienić odpowiednio kąt zawarty pomiędzy ramionami.

e) *Libelę stolikową* i jej rektyfikację opisano w § 1 (str. 72).

## 2. Ustawianie stolika.

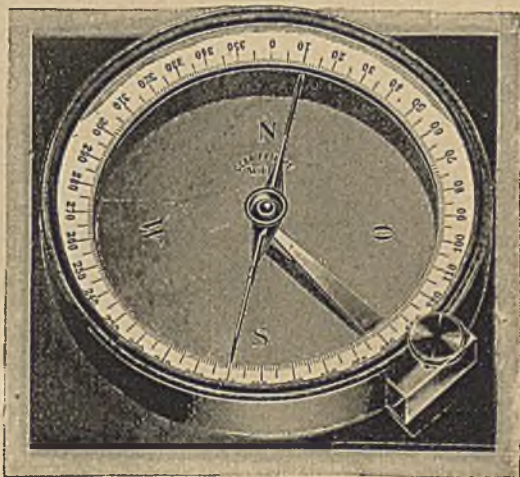
Poziomowanie, centrowanie i orientowanie.

Stolik mierniczy jest wtedy spoziomowany, gdy ustawiona na nim w dowolnym miejscu libela wykazuje w dwu prostopadłych do siebie kierunkach poziome położenie osi libeli (w założeniu, że deska stolika jest płaszczyzną i że libela jest zrektifikowana).

Stolik jest ustawiony centrycznie nad danym punktem wtedy, gdy odrzutowany przy pomocy widełek punkt, uwidoczniiony na stoliku mierniczym, pokrywa się z odpowiadającym mu punktem na terenie.

Stolik mierniczy jest wtedy zorientowany, gdy kierunek łączący dwa punkty na stoliku, znajduje się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez odpowiadające im punkty terenu.

Ażeby więc ustawić stolik nad punktem terenu, musimy stolik mierniczy spoziomować, scentrować i zorientować. W tym celu ustawiamy stolik mierniczy w przybliżeniu poziomo nad danym punktem, następnie badamy przy pomocy widełek, czy leży on centrycznie nad punktem terenu, po czym przykładamy kierownicę do naniesionych na stoliku dwu punktów (z których jeden jest naszym stanowiskiem, drugi zaś punktem dobrze widocznym z tego stanowiska) i patrząc przez lunetę kierownicy, sprawdzamy, czy drugi punkt leży na osi celowej. Jeżeli punkt ten nie leży na osi celowej, wtedy stolik odpowiednio skręcamy i znowu w tej samej kolejności badamy, czy stolik jest centrycznie i poziomo ustawiony. Jeśli wszystkie trzy warunki są spełnione, sprężamy mocno śruby krzyża i możemy już przystąpić do pomiaru.



Rys. 70 c.



### 3. Metody zdjęć stolikowych.

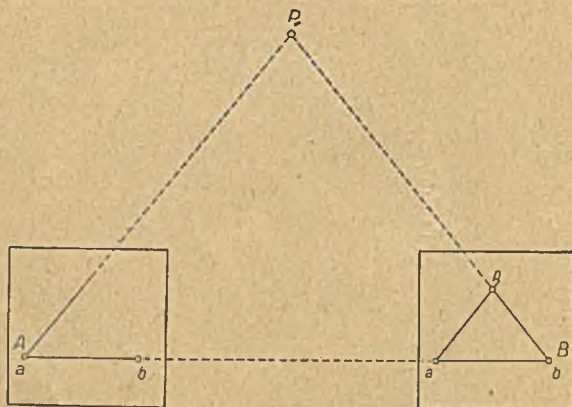
Przy pomocy stolika możemy przeprowadzać zadania, jakie objęte są triangulacją, poligonizacją i zdjęciem szczegółowym. Stosując tę metodę, nie uzyskujemy jednak takich dokładności, jakie dają tamte metody; to też zdjęcia stolikowe nie mają obecnie w miernictwie takiego znaczenia jak poprzednio. Stosuje się je jeszcze przy zdjęciach topograficznych, wykonywanych w mniejszej skali.

#### a) *Triangulacja stolikowa.*

Do triangulacji stolikowej należy zaliczyć:  $\alpha$ ) wcinanie w przód,  $\beta$ ) wcinanie w bok i  $\gamma$ ) wcinanie wstecz.

#### $\alpha$ ) *Graficzne wcinanie w przód.*

Mając dane współrzędne kilku punktów triangulacyjnych, które w danej skali mieszczą się na stoliku mierniczym, nanosimy je na papierze rysunkowym, którym oklejona jest



Rys. 71.

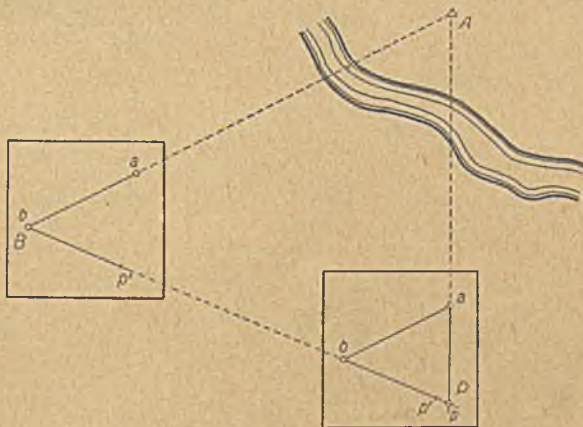
deską rysunkową stolika mierniczego. Z tak przygotowanym stolikiem mierniczym udajemy się w teren, odszukujemy punkty triangulacyjne podane na stoliku, i obieramy nowe, którymi zagęścimy dotychczasową sieć triangulacyjną. Jeśli takie punkty widoczne będą przynajmniej z dwóch punktów stałych  $A$  i  $B$  (rys. 71), to położenie ich

możemy wyznaczyć wcinaniem w przód. W tym celu ustawiamy stolik mierniczy nad jednym z podanych punktów triangulacyjnych np.  $A$  (centrujemy, poziomujemy i orientujemy), następnie przykładamy do punktu  $a$  na stoliku liniał kierownicy i celujemy na nowy punkt triangulacyjny, przy czym liniał powinien stale przechodzić przez punkt, odpowiadający stanowisku stolika. Dla ułatwienia wbijamy w tym punkcie cienką igłę. Po wycelowaniu sprawdzamy, czy położenie liniału nie uległo zmianie, i kreślimy twardym, płasko zaostrozonym ołówkiem wzdłuż krawędzi liniału kreskę (promień), odpowiadającą zorientowanemu kierunkowi do wyznaczanego punktu triangulacyjnego  $P$ . Kreskę tę kreślimy tylko w pobliżu miejsca położenia punktu lub, przy większej ilości punktów wyznaczanych, na skrajach arkusza. Jeżeli przejdziemy na drugi punkt triangulacyjny  $B$  i na nim powtórzmy poprzednio opisane czynności, to z przecięcia się odpowiadających sobie promieni otrzymamy położenie wyznaczanego punktu  $P$ . Dla ułatwienia wyszukiwania odpowiadających sobie kierunków, kreślonych na stanowiskach, opisujemy wykreślone na skrajach stolika kierunki odpowiadającymi im numerami punktów triangulacyjnych. Wyznaczony punkt powinien być skontrolowany z trzeciego, odpowiednio wybranego stanowiska.



β) *Graficzne wcinanie w bok.*

Jeżeli do wyznaczenia nowego punktu posiadamy wprowadzić dwa punkty  $A$  i  $B$ , ale jeden z nich  $A$  jest niedostępny (np. wieża kościelna, punkt położony po drugiej stronie rzeki itp.), wtedy stosujemy metodę wcinania w bok. W tym celu ustawiamy stolik, jak poprzednio, na dostępnym punkcie  $B$ , orientujemy go przy pomocy punktu  $A$  (rys. 72) i po wycelowaniu, kreślimy kierunek do punktu wyznaczanego  $P$ . Na kierunku tym obieramy punkt  $p'$ , który w przybliżeniu odpowiada położeniu wyznaczanego punktu na stoliku mierniczym. Następnie przechodzimy na wyznaczany punkt  $P$ , nad nim ustawiamy stolik, orientując go przy pomocy kierunku, wyznaczonego na poprzednim stanowisku, po czym przykładamy liniał do punktu  $a$  i celujemy do odpowiedniego mu punktu  $A$ . Kreślimy kierunek, a jego przecięcie z poprzednio wyznaczonym kierunkiem, daje położenie punktu  $p$ , który co prawda nie odpowiada punktowi terenu, lecz nieznacznie jest od niego oddalony. Ten punkt rzutujemy na teren i stabilizujemy.



Rys. 72.

γ) *Graficzne wcinanie wstecz.*

Wcinanie wstecz różni się od poprzednio opisanych sposobów wyznaczenia punktów triangulacyjnych tym, że ustawiamy się na szukanym punkcie i z tego stanowiska wyznaczamy jego położenie. Aby jednak można było to zadanie wykonać, musimy mieć przynajmniej trzy punkty triangulacyjne, widoczne z wyznaczanego punktu (punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , rys. 73).

Wykonanie wcinania wstecz możemy przeprowadzić kilkoma sposobami. Podamy tu tylko jeden z nich, najczęściej w praktyce stosowany.

Na punkcie, który chcemy na stoliku mierniczym wyznaczyć, orientujemy stolik według południka magnetycznego (wyznaczonego na poprzednich punktach triangulacyjnych, po zorientowaniu stolika do punktów znanych, przez przyłożenie liniału do busoli i zaznaczenie kierunku północ-południe). Następnie skręcamy nieco stolik i w tym położeniu celujemy przez  $a$  do  $A$ , przez  $b$  do  $B$  i przez  $c$  do  $C$ , zaznaczając kierunki. Kierunki te nie przetną się w jednym punkcie, lecz utworzą tak zwany *trójkąt błędów*  $xy z$ . Jeżeli teraz stolik skróćmy o nieznaczny kąt w przeciwnym kierunku i znowu, jak poprzednio, wyznaczmy kierunki do tych samych trzech punktów, to powstanie nowy trójkąt błędów  $x' y' z'$  (rys. 73 a i b). Łącząc odpowiadające sobie wierzchołki  $xx'$ ,  $yy'$  i  $zz'$  otrzymamy trzy proste, które przy dobrej konstrukcji przetną się w punkcie szukanym  $p$ . Po wyznaczeniu sytuacji szukanego

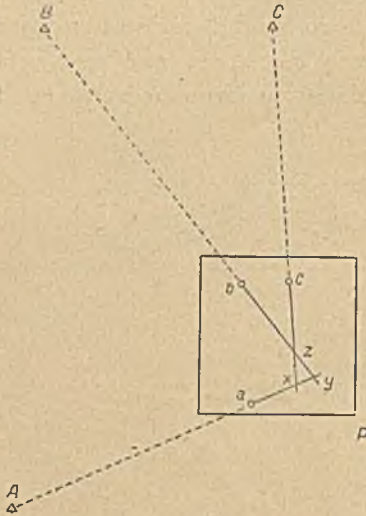


punktu, należy stolik mierniczy zorientować do jednego z punktów znanych np.  $A$  i skontrolować kierunki do dwóch pozostałych punktów. Punkt  $p$  rzutujemy na teren i stabilizujemy. Sposób ten jest uznany przez W. I. G. (Woj-skowy Instytut Geograficzny) za najodpowiedniejszy.

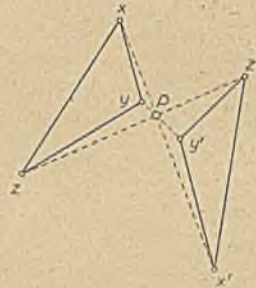
Oprócz wyżej opisanej metody trójkątów błędów, stosowane są jeszcze metody Lehmana, Snelliusa, Bessela i sposób przy użyciu kalki<sup>1)</sup>.

#### 4. Ciągi poligonowe graficzne.

Między punktami triangulacyjnymi zakładamy graficzne ciągi poligonowe przez kolejne dowiązywanie kierunku następnego boku (bezpośrednio lub optycznie). Graficzne ciągi poligonowe możemy wykonać w dwójaki sposób: 1) na każdym stanowisku orien-



Rys. 73.



Rys. 73 a.



Rys. 73 b.

tujemy stolik według kierunku wyznaczonego na stanowisku poprzednim, lub 2) orientując stolik na co drugim stanowisku (punkcie poligonowym) przy użyciu busoli według kierunku południka magnetycznego. W obu przypadkach mierzymy optycznie odległości pomiędzy punktami poligonowymi.

Sposoby te poznamy w rozdziale IX, gdzie również opisane będą ciągi busolowe.

#### 5. Zdjęcia szczegółowe.

Wszystkie szczegóły terenowe (środki komunikacyjne, rzeki, granice parcel, budynki itd.) zdejmujemy się: a) metodą wzięcia w przód (por. 1, str. 88), b) metodą biegunową (rozdział XI), c) metodą rzutów na boki poligonu (rozdział IX).

Metodę b) stosujemy według zasad, podanych w wymienionym rozdziale, z tą różnicą, że kierunki наносimy na stoliku w polu i na nich odcinamy odległości, mierzone optycznie (tachimetrycznie).

<sup>1)</sup> Krentzinger, Topografia, Warszawa 1928.



## ROZDZIAŁ V

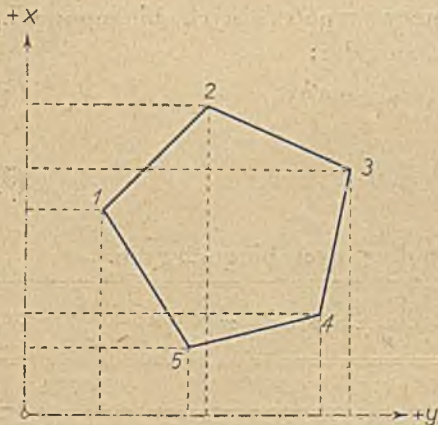
### OBLICZANIE POWIERZCHNI. PLANIMETRY. PODZIAŁ I ZAMIANA GRUNTÓW

Obliczenia (rachunkowego) powierzchni zdjętych obszarów można dokonać na podstawie wymiarów bądź uzyskanych bezpośrednio na gruncie, bądź też wyznaczonych na planie. Poza tym można ją wyznaczyć mechanicznie przy pomocy specjalnych przyrządów, zwanych planimetrami.

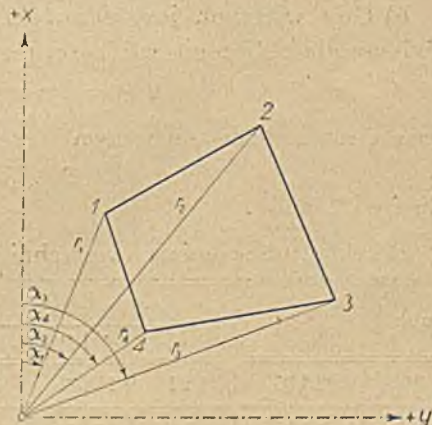
#### § 1. Obliczanie powierzchni z wymiarów na gruncie

Sposób obliczenia zależy w tym przypadku od rodzaju elementów uzyskanych przy pomiarze; elementami tymi mogą być:

- a) współrzędne prostokątne,
  - b) współrzędne biegunowe,
  - c) różne odpowiednio dobrane długości i kąty, względnie same długości.
- a) Najprościej przedstawia się sprawa, gdy wielobok, którego wielkość



Rys. 74.



Rys. 75.

pola wyznaczamy, jest dany za pomocą współrzędnych prostokątnych. Przyjmując układ współrzędnych w ten sposób, że dodatnia oś  $x$ -ów przechodzi na dodatnią oś  $y$ -ów przez obrót o  $90^\circ$  w sensie ruchu wskazówek zegara,



oraz numerując wierzchołki wieloboku w tym samym sensie, otrzymamy wedle L'Huiliera, względnie Gaussa, podwójną powierzchnię  $P$  ze znanych związków:

$$\begin{aligned} 2P &= \sum x_i (y_{i+1} - y_{i-1}), \\ -2P &= \sum y_i (x_{i+1} - x_{i-1}) \quad \text{dla } i \text{ od } 1 \text{ do } n, \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym dla kontroli służą wzory:

$$\begin{aligned} \sum (x_{i+1} - x_{i-1}) &= 0, \\ \sum (y_{i+1} - y_{i-1}) &= 0 \quad \text{dla } i \text{ od } 1 \text{ do } n. \end{aligned} \quad (2)$$

Związki (1) wyprowadza się z wzorów trapezowych kształtu:

$$\begin{aligned} 2P &= \sum (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}), \\ -2P &= \sum (y_i - y_{i+1}) \cdot (x_i + x_{i+1}) \quad \text{dla } i \text{ od } 1 \text{ do } n. \end{aligned} \quad (3)$$

Przykład obliczenia powierzchni ze współrzędnych prostokątnych.

Punkt	$x_m$	$y_m$	$x_{i+1} - x_{i-1}$	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$y_i (x_{i+1} - x_{i-1})$		$x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$	
					+	-	+	-
1	+ 106,95	+ 39,62	+ 127,18	+ 9,66	5038,8716		1033,1370	
2	+ 162,32	+ 94,78	+ 20,05	+ 129,85	1900,3390		21077,2520	
3	+ 127,00	+ 169,47	- 109,99	+ 59,16		18640,0053	7513,3200	
4	+ 52,33	+ 153,94	- 91,86	- 84,35		14140,9284		4414,0355
5	+ 35,14	+ 85,12	+ 54,62	- 114,32	4649,2544			4017,2048
		$\Sigma =$	0,00	0,00	11588,4650	32780,9337	29623,7090	8431,2403
						11588,4650	8431,2403	
						$2P = 21192,4687$	$21192,4687$	

$$P = 10596,23 \text{ m}^2.$$

b) Gdy wielobok jest dany przy pomocy współrzędnych biegunowych, użyjemy dla obliczenia wielkości jego pola związku:

$$2P = \sum r_i r_{i+1} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i), \quad (4)$$

wraz z równaniem kontrolnym

$$\sum (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = 0 \quad (5)$$

dla  $i$  od 1 do  $n$ .

Przykład obliczenia powierzchni ze współrzędnych biegunowych.

Punkt	$r_m$	$\alpha_i$			$\alpha_{i+1} - \alpha_i$			$\sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$	$r_i r_{i+1} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ m <sup>2</sup>
		o	'	''	o	'	''		
1	113,85	22	14	30	18	00	40	0,30920	+ 6732,11
2	191,24	40	15	10	29	36	00	0,49394	+ 16576,03
3	175,48	69	51	10	- 14	10	50	- 0,24498	- 3358,31
4	78,12	55	40	20	- 33	25	50	- 0,55093	- 4899,95
								$2P = \Sigma =$	15149,88

$$P = 7574,94 \text{ m}^2.$$



c) Obliczenie powierzchni z różnych odpowiednio dobranych długości i kątów ma najczęściej miejsce, gdy chodzi o wyznaczenie wielkości pól trójkątów, czworoboków z przekątniami lub tzw. sieci liniowych.

α) Powierzchnię trójkąta obliczamy, zależnie od elementów danych, z wzorów:

$$2P = a h_a = b h_b = c h_c, \quad (6)$$

$$2P = a b \sin \gamma = b c \sin \alpha = a c \sin \beta, \quad (7)$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (8)$$

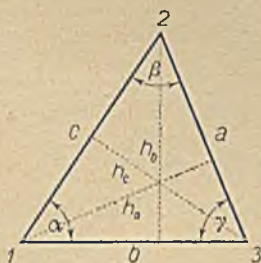
przy czym  $h_a$ ,  $h_b$  i  $h_c$  są wysokościami dla boków  $a$ ,  $b$ ,  $c$  uważanych jako podstawy, zaś  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

β) Obliczenie powierzchni czworoboku uskutecznia się, zależnie od danych elementów, przy pomocy związków:

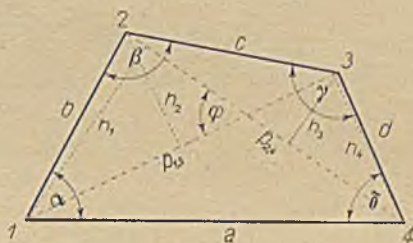
$$2P = p_{1,3}(h_2 + h_4) = p_{2,4}(h_1 + h_3), \quad (9)$$

$$2P = p_{1,3} \cdot p_{2,4} \sin \varphi, \quad (10)$$

$$2P = a b \sin \alpha + c d \sin \gamma = b c \sin \beta + a d \sin \delta, \quad (11)$$



Rys. 76.



Rys. 77.

$$\begin{aligned} 2P &= a b \sin \alpha + b c \sin \beta - a c \sin(\alpha + \beta) = & (12) \\ &= b c \sin \beta + c d \sin \gamma - b d \sin(\beta + \gamma) = c d \cdot \\ &\cdot \sin \gamma + a d \sin \delta - a c \sin(\gamma + \delta) = a d \sin \delta + \\ &+ a b \sin \alpha - b d \sin(\alpha + \delta). \end{aligned}$$

γ) Obliczenie powierzchni objętej siecią liniową objaśnia uwidoczniiony na rys. 78a przykład.

Wielkość pola trójkąta 1, 2, 6 obliczamy wzorem (8), następnie wyznaczamy kąt  $\alpha$  przy wierzchołku 1 ze związku:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad (13)$$

przy czym

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

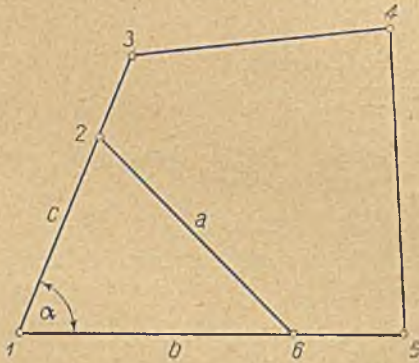
a następnie i długość 3-5:

$$b_{3,5}^2 = b_{1,3}^2 + b_{1,5}^2 - 2b_{1,3} \cdot b_{1,5} \cos \alpha. \quad (14)$$

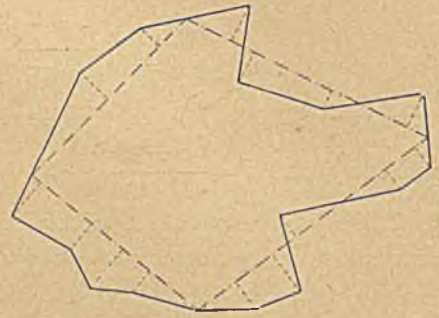


Powierzchnię obu w ten sposób powstałych trójkątów 1, 3, 5 i 3, 4, 5 obliczamy przy pomocy wzoru (8).

Poprzestanie na tym sposobie obliczenia nie jest wskazane ze względu na



Rys. 78 a.



Rys. 78 b.

brak kontroli, dlatego powinno się tak zakładać sieci liniowe, aby można było ich powierzchnię obliczyć jeszcze i inną drogą.

Przy pomiarze (szczególnie większych obszarów) granice zdejmowanego obszaru nie pokrywają się z reguły z założonym dla zdjęcia wielobokiem.



Rys. 79.

W tym przypadku oblicza się powierzchnię wieloboku (poligonu) wzorami L'Huiliera (Gaussa) (1) i (2), zaś powierzchnię partyj, w których granice odbiegają od wieloboku, przy pomocy wzorów trapezowych, względnie trójkątowych (patrz rys. 78 b).

Może się zdarzyć, że punkt wierzchołkowy wieloboku nie znajduje się na granicy zdejmowanego obszaru (p. rys. 79). Wówczas jeden z punktów załomu granicy, np. 2, powinien być odrzutowany nie tylko na linię  $MW$ , ale i na przedłużenie linii  $WN$ . Uzyskujemy przez to zawsze pożądaną kontrolę pomiaru i zarazem najprostszy sposób obliczenia powierzchni częściowych na poszczególnych bokach wieloboku  $MWN$ , przy zastosowaniu wzoru (1). Obliczamy mianowicie osobno część  $M-2-1$  i osobno część  $N-2-3-4$ , przy czym odcięte i rzędne na każdym z boków tworzą oddzielny (lokalny) układ współrzędnych prostokątnych. W razie niemożności dodatkowego odrzutowania p. 2, musimy obliczyć współrzędne punktów  $2'$ ,  $2$ ,  $3'$  i  $3$ , a mając współrzędne punktu  $W$ , zastosować wzór (1) do figury  $2-2'-W-3'-3$  (p. rozdział IX).

Wyznaczenie powierzchni z wymiarów na gruncie daje stosunkowo najdokładniejsze wyniki (p. zdjęcie poligonowe).



## § 2. Obliczenie powierzchni z wymiarów na planie

a) Dzielimy powierzchnię na trójkąty o możliwie największych polach, uważając zarazem, aby stosunek wysokości do podstaw w trójkątach nie wypadł zbyt różny od jedności. Po zmierzeniu długości podstaw i wysokości trójkątów obliczamy ich powierzchnie wzorem (6).

b) Zamiast na trójkąty, można podzielić powierzchnię na trapezy, rzutując wierzchołki wieloboku (którego powierzchnię mamy wyznaczyć) na najdłuższą przekątnię. Powierzchnię w ten sposób otrzymanych trapezów i dwu trójkątów obliczamy wedle związku (3), albo wzorem (6).

c) W przypadku, gdy wielobok ma dużo wierzchołków, zastępujemy go innym o mniejszej ilości wierzchołków, uzyskując jego powierzchnię przez podział na odpowiednie trójkąty. Powierzchnie pozostałych skrawków dzielimy na trójkąty i trapezy przez odrzutowanie wierzchołków właściwego wieloboku na boki wieloboku przez nas wykreślonego, po czym obliczamy ich powierzchnię.

d) Gdy nie chodzi o wielką dokładność (np. przy obliczaniu powierzchni przekrojów robót ziemnych), dzieli się powierzchnię na paski trapezowe o równej szerokości. Jeżeli rysunek jest wykonany na papierze milimetrym lub gdy przykryjemy go kalką z podziałem milimetrym, obieramy szerokość pasków równą 1 cm. Wyznaczenie powierzchni w  $\text{cm}^2$  polega zatem na zsumowaniu średniej długości poszczególnych pasków. Załomy przekrojów, wypadające między paskami, wyrównuje się przez pomiar odpowiedniej średniej długości paska, zaś drobne skrawki ocenia się na oko. Sposób ten wymaga nieco wprawy.

e) Ostatni sposób, najmniej dokładny, polega na wykreśleniu zamianie wieloboku na trójkąt o tej samej powierzchni.

Jak wiadomo, można  $n$ -bok zamienić na  $(n-1)$  — bok o tej samej powierzchni; postępowanie to powtarzamy tak długo, aż jako ostatni wielobok otrzymamy trójkąt, którego powierzchnię obliczymy z pomierzonej podstawy i wysokości.

Obliczenie powierzchni z wymiarów na planie należy przeprowadzić dwukrotnie, a różnica  $\Delta P$ , między otrzymanymi wynikami nie powinna przekraczać granic podanych w odpowiednich instrukcjach pomiarowych.

Granice te wedle instrukcji pomiarowej M. R. P. z roku 1928 wynoszą:

$$\begin{array}{ll} \text{Dla podziałki } 1:4000 & \Delta P = 0,001 P + 0,8 \sqrt{P} \\ \text{„ „ } 1:2000 & \Delta P = 0,001 P + 0,4 \sqrt{P} \\ \text{„ „ } 1:1000 & \Delta P = 0,001 P + 0,2 \sqrt{P}. \end{array}$$

( $P$  i  $\Delta P$  w metrach kwadratowych).

## § 3. Teoria planimetrów wodzikowych

Wyobraźmy sobie ramię  $OW = r$  przesuwane ponad pewną powierzchnią  $F$  w ten sposób, że w końcu zajmie położenie początkowe, przy czym ruch ten będziemy uważali za złożony z przesunięć równoległych i obrotowych ramienia dookoła punktu  $O$ . Umówmy się dalej, że jako dodatnie elementy powierzchni, zakreślonej ramieniem  $r$ , będziemy uważali te, które uzyskujemy przez ruch jego równoległy w kierunku ku nam i obrotowy w kierunku



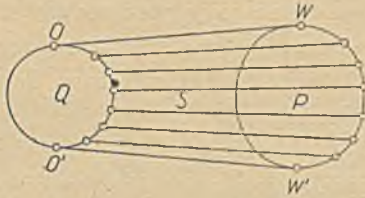
zgodnym z ruchem wskazówek zegara, elementy zaś uzyskane z ruchów w kierunkach przeciwnych przyjmujemy jako ujemne.

Niech podczas przesuwania koniec  $W$  zakreśli powierzchnię  $P$ , zaś drugi koniec  $O$  powierzchnię  $Q$  (jak to uwidoczniło na rys. 80). Wówczas, biorąc pod uwagę najodleglejsze położenie ramienia  $O'W'$  widzimy, że podczas zmian położenia ramienia z  $OW$  na  $O'W'$ , przesunęło się ono nad powierzchnią

$$S + P. \quad (15)$$

W drodze powrotnej z położenia  $O'W'$  do  $OW$  przesunie się ramię (przy uwzględnieniu poprzednio poczynionych założeń) nad powierzchnią

$$-S - Q. \quad (16)$$



Rys. 80.

Zatem powierzchnia, nad którą ramię po powrocie do początkowego położenia się przesunęło, wynosi (z uwzględnieniem zastrzeżeń poprzednich):

$$F = P - Q. \quad (17)$$

Czyli powierzchnia  $P$  obwiedziona punktem  $W$  wynosi

$$P = F + Q. \quad (18)$$

Aby ocenić ścisłość wzoru (18), podamy dowód w myśl wywodów Rungego.

Wedle L'Huiliera, wzgl. Gaussa, wynosi podwójna powierzchnia czworoboku (1, 2, 3, 4) w danym układzie prostokątnym:

$$x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3) = (y_1 - y_3)(x_4 - x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 - x_1). \quad (19)$$

Biorąc pod uwagę czworobok, powstały przez przesunięcie elementarne ramienia  $r$  i kładąc (rys. 81):

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + dx_2 = x_2', & x_4 &= x_1 + dx_1 = x_1' \\ y_3 &= y_2 + dy_2 = y_2', & y_4 &= y_1 + dy_1 = y_1', \end{aligned}$$

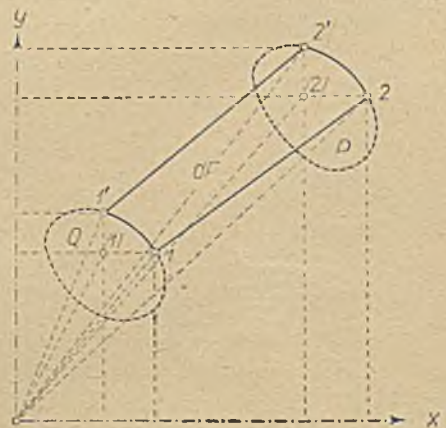
otrzymamy na podwójny element powierzchni wzór:

$$2dF = (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) - (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - y_2 dx_1 - x_1 dy_2 + x_2 dy_1 + y_1 dx_2 - dx_1 dy_2 + dy_2 dx_1, \quad (20)$$

lub

$$2dF = (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) - (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - d(x_1 y_2) + d(x_2 y_1) - dx_1 dy_2 + dy_1 dx_2. \quad (21)$$

Wyraz pierwszy wzoru (21) dostarcza nam podwójnej powierzchni trójkątów  $O2(2)$  i  $O(2)2'1$ , czyli podwójnej powierzchni  $O22'$  z pominięciem elementarnych powierzchni



Rys. 81.

<sup>1)</sup> Początek układu na rys. 81 należy oznaczyć literą  $O$ .



2-go rzędu 2 (2) 2'; analogicznie wyraz drugi odpowiada podwójnej powierzchni trójkąta  $O 1 1'$ , z pominięciem powierzchni 2-go rzędu 1 (1) 1'; wyraz piąty i szósty, jako wielkości rzędu drugiego, można również pominąć.

Po powrocie ramienia  $r$  do położenia pierwotnego i opisanu przez jego punkty końcowe 1 i 2 zamkniętych powierzchni  $Q$  i  $P$ , otrzymamy przez całkowanie:  $2F = 2P - 2Q$ , gdyż całki określone trzeciego i czwartego wyrazu wzoru (21) równe są zeru; pozostaje zatem jak poprzednio:

$$F = P - Q.$$

Błąd, powstały wskutek zaniedbania powierzchni elementarnych 2 rz. we wzorze (21) jest — jak widać z kształtu zaniedbanych wyrazów — tym większy, im większy jest stosunek obwodu planimetrowanej figury do jej powierzchni.

Planimetry wodzikowe nie nadają się zatem do wyznaczenia powierzchni bardzo wąskich i o nieregularnych kształtach.

#### § 4. Planimetry biegunowe w pierwotnej i ulepszonej postaci

Planimetr biegunowy, zwany także od swego wynalazcy planimetrem Amstera (rys. 84), składa się z dwu ramion: biegunowego  $R$  i wodzącego  $r$ , połączonych ze sobą zawiasowo, jak to uwidoczniło na rys. 82. Na przedłużeniu ramienia wodzącego, poza przegubem  $O$ , znajduje się kółko całkujące  $K$ , którego oś obrotu musi być równoległa do osi ramienia wodzącego. Odstęp płaszczyzny kółka całkującego od przegubu niech wynosi  $r'$ .

Wyznaczenie wielkości powierzchni  $P$  danej figury płaskiej, czyli tzw. planimetrowanie, polega na oprowadzeniu po jej obwodzie wodzika przyrządu  $W$ , przy nieruchomym biegunie  $B$ . Podczas obwodzenia powierzchni  $P$  obraca się kółko całkujące, ślizgając się po papierze, a z ilości jego obrotów wnioskujemy o wielkości obwiedzonej powierzchni.

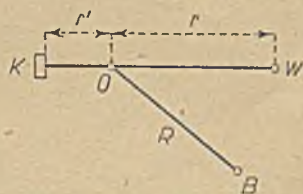
Ponieważ planimetr ten należy do planimetrów wodzikowych, przeto zastosujemy do teoretycznych rozważań nad nim teorię, podaną w § 3. Na rys. 83 widzimy powierzchnię elementarną  $dF$  oznaczoną literami  $O_1 W_1 W_2'$

$W_2 O_2$ , nad którą ramię  $r$  przesunęło się, gdy przegub zakreślił elementarny łuk  $O_1 O_2$ . Zatem

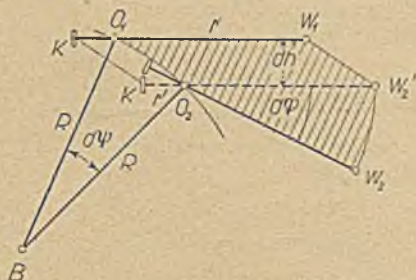
$$dF = r dh + \frac{r^2}{2} d\varphi. \quad (22)$$

Odwiniecie się kółeczka  $K$ , towarzyszące temu przesunięciu, jest:

$$do = dh - r' d\varphi, \quad (23)$$



Rys. 82.



Rys. 83.



przeto

$$dF = r d\phi + \left( r' r + \frac{r^2}{2} \right) d\varphi. \quad (24)$$

Przechodząc do całkowania związku (24) należy rozróżnić dwa przypadki:

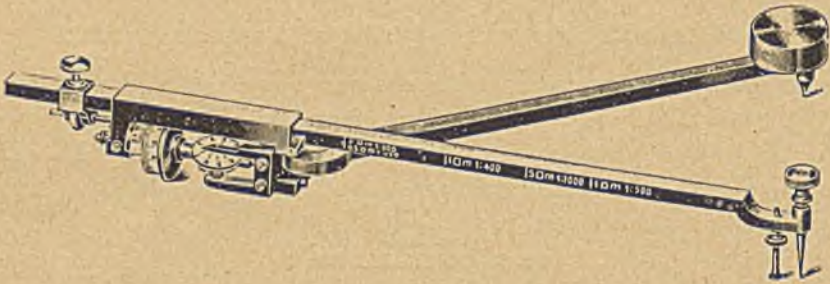
- a) gdy biegun  $B$  umieszczono z e w n ą t r z wyznaczonej powierzchni  $P$ ,
- b) gdy biegun  $B$  umieszczono w e w n ą t r z wyznaczonej powierzchni  $P$ .

a) W pierwszym przypadku otrzymamy, ze względu na to, że  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = 0$ , zaś  $\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi$  dostarcza nam sumarycznego odwinięcia, które wyrażamy obwodem kółka  $K$  i ilością jego obrotów  $n$ :

$$F = 2\pi\rho r n = C_1 n, \quad (25)$$

przy czym  $\rho$  jest promieniem kółka całkującego, a stała  $C_1 = 2\pi\rho r$ .

Wedle wzoru (18) poprzedniego § 3 należy do powierzchni  $F$  dodać po-



Rys. 84.

wierzchnię  $Q$ , aby otrzymać planimetrowaną powierzchnię  $P$ . W przypadku a)  $Q$  jest równe zero, gdyż kąt  $\psi$  zmienić się może tylko w granicach od  $\psi_1$  do  $\psi_2$ , zatem przegub  $O$  nie zakreśla żadnej zamkniętej powierzchni. Ostatecznie otrzymujemy przy ustawieniu bieguna zewnątrz

$$P_z = C_1 n, \quad (26)$$

przy czym  $n$  oznacza ilość obrotów kółka całkującego, równa się zatem różnicy między odczytem końcowym i początkowym kółka całkującego.

b) O ile natomiast umieścimy biegun  $B$  wewnątrz powierzchni obwodzonej, to

$$\left( r r' + \frac{r^2}{2} \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \pi (2 r r' + r^2), \quad (27)$$

a że

$$Q = R^2 \pi, \quad (28)$$

przeto

$$P_w = F + Q = C_1 n + \pi (R^2 + 2 r r' + r^2) = C_1 n + C_2, \quad (29)$$

przy czym

$$C_2 = \pi (R^2 + 2 r r' + r^2) = \pi R'^2. \quad (30)$$



Z twierdzenia Carnota wiemy (p. rys. 85), że

$$R'^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \beta. \quad (31)$$

Ponieważ zaś

$$-\cos \beta = \frac{r'}{R},$$

przeto

$$R'^2 = r^2 + R^2 + 2r r'. \quad (32)$$

Możemy zatem stałe planimetru określić także w następujący sposób. Stała  $C_1$  jest to powierzchnia obwiedziona wodzikiem odpowiadająca jednemu obrotowi kółka całkującego; natomiast powierzchnia zamknięta, powstała w analogiczny sposób bez ruchu kółka  $K$ , jest stałą  $C_2$ , która, jak widać ze związku (30), jest powierzchnią tzw. koła obojętnego.

Wyprowadzenie wzorów (26) i (29) nastąpiło pod założeniem, że oś obrotu kółka całkującego jest równoległa do osi ramienia wodzącego, co w praktyce jest osiągalne tylko z pewną dokładnością, powodując w rezultacie powstanie pewnego błędu systematycznego.

Planimetr jest podczas użycia podparty w trzech punktach:  $B$ ,  $W$ , oraz na dolnym punkcie obwodu kółka  $K$ . Gdy punkty te znajdują się choćby w przybliżeniu na jednej prostej, planimetr chwieje się i powoduje błędne ruchy kółka całkującego; dlatego przy użyciu planimetru kąt zawarty między ramionami wodzącym i biegunowym powinien wynosić od  $30^\circ$  do  $150^\circ$ .

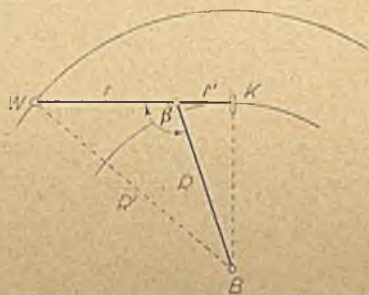
Obwodzenie powierzchni powinno być wykonane możliwie ruchem jednostajnym; ponieważ na początku i końcu obwodzenia jest to niemożliwe, przeto powinno się ono zacząć z takiego położenia, przy którym przyspieszenie i opóźnienie ruchu nie odgrywa roli, a zatem gdy płaszczyzna kółka  $K$  jest prostopadła do kierunku ruchu.

Przy planimetrowaniu umieszczamy z reguły biegun zewnątrz powierzchni.

Dla usunięcia, wzgl. zmniejszenia wpływu powyższych niedomagań, skonstruowała firma Coradi w Zurychu, wedle wskazówek geometry Langa, planimetr kompensacyjny.

Planimetr ten, uwidoczony na rys. 86, jest podczas użycia stale podparty w czterech punktach, gdyż posiada dodatkowe kółko, umieszczone na ramieniu  $r'$ , prostopadle do kółka całkującego; kąt skrzyżowania ramion wodzącego i biegunowego może być zatem dowolny, tak że ramię  $r$  można przesuwąć podopod ramieniem  $R$ .

Najważniejszą zdobyczą, jaką uzyskujemy przy użyciu planimetrów kompensacyjnych, jest możliwość wyrugowania błędu, powstałego wskutek nierównoległości osi obrotu kółka  $K$  do osi ramienia  $r$  (która to równoległość była przyjęta milcząco przy dowodzie).



Rys. 85.







### § 5. Wyznaczenie stałych planimetru biegunowego

Stałe planimetru biegunowego wyznaczamy zawsze oddzielnie, ze względu na to, że stałą  $C_1$  możemy wyznaczyć znacznie dokładniej niż stałą  $C_2$ . (Równoczesne wyznaczenie obu stałych wpływałoby ujemnie na dokładność wyznaczenia stałej  $C_1$ ).

Do wyznaczenia stałej  $C_1$  używamy liniału kontrolnego, tj. linijki metalowej, na której w odstępach 2-centymetrowych są umieszczone otworki, zaś w miejscu, gdzie miałyby przypaść otworek pierwszy znajduje się ostrze.

Po wbiciu ostrza w papier i założeniu wodzika planimetru w dowolny otworek, możemy zakreślić wodzikiem wraz z liniałem dokładnie koło o pewnym znanym promieniu, a tym samym o znanej powierzchni. Dzielnik powierzchni koła  $P$  przez różnicę odczytów między stanem końcowym  $o_2$  a początkowym  $o_1$  otrzymujemy stałą  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{P}{o_2 - o_1} = \frac{P}{n}. \quad (35)$$

Dla dokładniejszego wyznaczenia stałej  $C_1$  wykonujemy więcej tego rodzaju pomiarów, np. 4, 6 lub 8 i to połowę obwodząc planimetrem w kierunku posuwania się wskazówek zegara, zaś drugą połowę w kierunku przeciwnym. Do związku (35) wstawiamy wówczas za  $n$  średnią arytmetyczną utworzoną z poszczególnych różnic.

Wyznaczając powierzchnię w skali naturalnej (1:1), chcemy dla wygody mieć stałą  $C_1 = 1 \text{ cm}^2$ . W tym celu przedłużamy lub skracamy ramię wodzące  $r$  (wyciągając z pochwy lub wsuwając w nią jego część skrajną) tak, aby długość ramienia wynosiła  $r_0$ , a w konsekwencji będzie:

$$C_1 = 2\pi r_0 = 1 \text{ cm}^2. \quad (36)$$

Aby uzyskać taką długość ramienia wodzącego ( $r_0$ ), należy wyznaczyć stałą  $C_1$  dla dwu różnych długości ramienia wodzącego  $r_1$  i  $r_2$ . Jeżeli na ramieniu wodzącym jest podziałka milimetrowa lub półmilimetrowa, odczytujemy przy jej pomocy stan wskaźnika, umieszczonego na pochwie, przy obu wyznaczeniach stałej.

Niech dla ramienia wodzącego  $r_1$  (którego długości nie znamy), wynosi odczyt na podziałce  $O_1$ , zaś dla ramienia  $r_2$  (również nieznanego), przy którym dokonujemy drugiego wyznaczenia stałej, będzie odczyt  $O_2$ . Przypuśćmy dalej, że przy odczycie  $O_1$  otrzymaliśmy wartość stałej  $C_1$  o  $m_1$  większą od  $1 \text{ cm}^2$ , zaś dla  $O_2$  większą o  $m_2$ , wówczas istnieje związek liniowy:

$$\frac{m_2 - m_1}{r_2 - r_1} = \frac{m_1}{r_1 - r_0}, \quad (37)$$

a także:

$$\frac{m_2 - m_1}{O_2 - O_1} = \frac{m_1}{O_1 - O_0}. \quad (38)$$



Odczyt  $O_o$ , na który należy nastawić długość ramienia wodzącego, otrzymamy ze związku:

$$O_o = O_1 - m_1 \frac{O_2 - O_1}{m_2 - m_1}. \quad (39)$$

Gdy na ramieniu wodzącym nie ma podziałki, zaznacza się na nim kreskami położenie  $O_1$  i  $O_2$  i odmierza długość odpowiadającą drugiemu wyrazowi związku (39) od kreski  $O_1$ , otrzymując położenie  $O_o$ .

Nowsze przyrządy są zawsze zaopatrzone w podziałkę półmilimetrową na ramieniu wodzącym, a odczyty  $O$  uskutecznią się przy pomocy noniusza, umieszczonego na pochwie. Jeżeli punkt zerowy noniusza umieszczony jest błędnie, odczyt  $O$  daje nam wprost długość ramienia wodzącego w mm

$$r = \frac{1}{2} O. \quad (40)$$

Zazwyczaj okaże się jednak pewna różnica w osadzeniu noniusza tak, że długość ramienia wodzącego będzie:

$$r = \frac{1}{2} (O - \Delta O), \quad (41)$$

a powierzchnia:

$$P = \frac{1}{2} (O - \Delta O) 2 \pi \rho n = (O - \Delta O) \pi \rho n. \quad (42)$$

Ponieważ na noniuszu kółka kalkującego odczytujemy zazwyczaj nie ilość całkowitych obrotów, ale tysięczne obrotów, przeto:

$$P = \frac{O - \Delta O}{1000} \pi \rho n'. \quad (43)$$

Jeżeli  $\rho$  wyrazimy w milimetrach, wówczas  $P$  będzie w milimetrach kwadratowych; natomiast jeżeli chcemy wyznaczyć powierzchnię, narysowaną w skali  $1:M$  w metrach kwadratowych, to

$$P = \frac{O - \Delta O}{1000} \frac{M^2}{1000^2} \pi \rho n', \quad (44)$$

zaś

$$W = \frac{O - \Delta O}{1000} \frac{M^2}{1000^2} \pi \rho \quad (45)$$

jest powierzchnią, odpowiadającą jednej tysięcznej obrotu kółka kalkującego, którą nazywamy wartością jednostki noniusza.

Wartości  $W$  są podane przez fabryki, wyrabiające planimetry, dla różnych skal i okrągłych wartości jednostki noniusza.

Wyznaczenie stałej  $C_2$  może nastąpić po uprzednim wyznaczeniu stałej  $C_1$ , na podstawie obwodzenia powierzchni o znanej wielkości, np. kwadratu lub koła.



Jeżeli planimetr posiada zmienne ramię  $R$ , można w odpowiedni sposób zmienić i stałą  $C_2$  (por. wzór (34), § 4).

Ze względu na małą dokładność wyznaczenia stałej  $C_2$ , planimetrujemy z reguły umieszczając biegun zewnątrz powierzchni; jeżeli powierzchnia jest wielka, dzielimy ją na kilka odpowiednich do planimetrowania części.

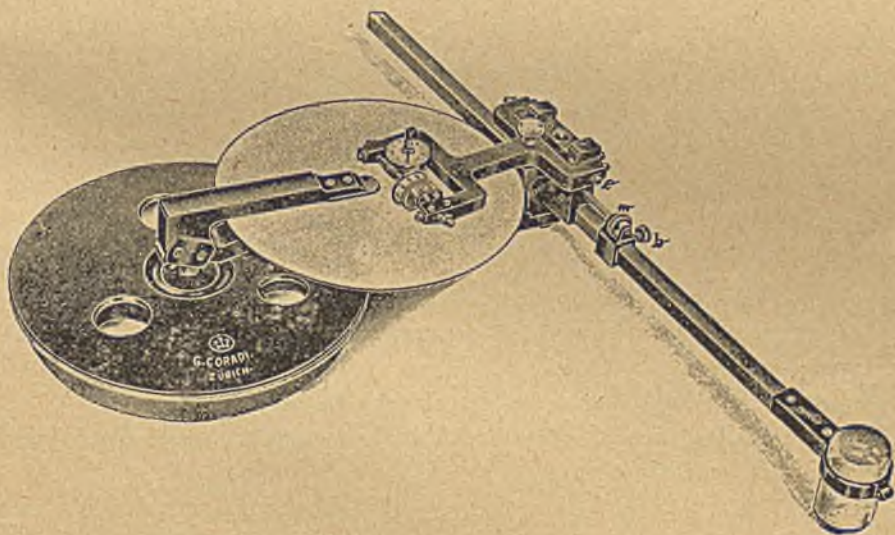
### § 6. Inne typy planimetrów wodzikowych

Firma Coradi w Zurychu dostarcza prócz poprzednio wymienionego planimetru jeszcze inne typy planimetrów wodzikowych, z których opiszemy tylko trzy, a to: biegunowy planimetr tarczowy oraz dwa planimetry tzw. wózkowe, jeden tarczowy, drugi kulisty.

Oprócz tych przyrządów, należy jeszcze omówić jeden specjalny, a mianowicie planimetr Prytza.

#### a) Biegunowy planimetr tarczowy.

Planimetr ten składa się z tarczy stałej (p. rys. 89), w której środku znajduje się biegun  $B$ . Tarcza ta o promieniu  $R$  posiada na swym obwodzie



Rys. 89.

tryby, o które zazębiają się tryby kółeczka, umieszczonego centrycznie pod tarczą ruchomą. Dookoła bieguna zakreśla przegub  $P$  koło o promieniu  $p$ . Na osi przegubu umieszczone jest ramię wodzące  $r$  i prostopadłe doń ramię  $s$ , na końcu którego znajduje się kółko całkujące  $k$  o osi równoległej do ramienia wodzącego. Ruch wodzika po obwodzie powoduje zatem obrót tarczy ruchomej, który wywołuje obrót kółka całkującego  $k$ , zależny od długości ramienia  $l$  i kąta  $\alpha$ .

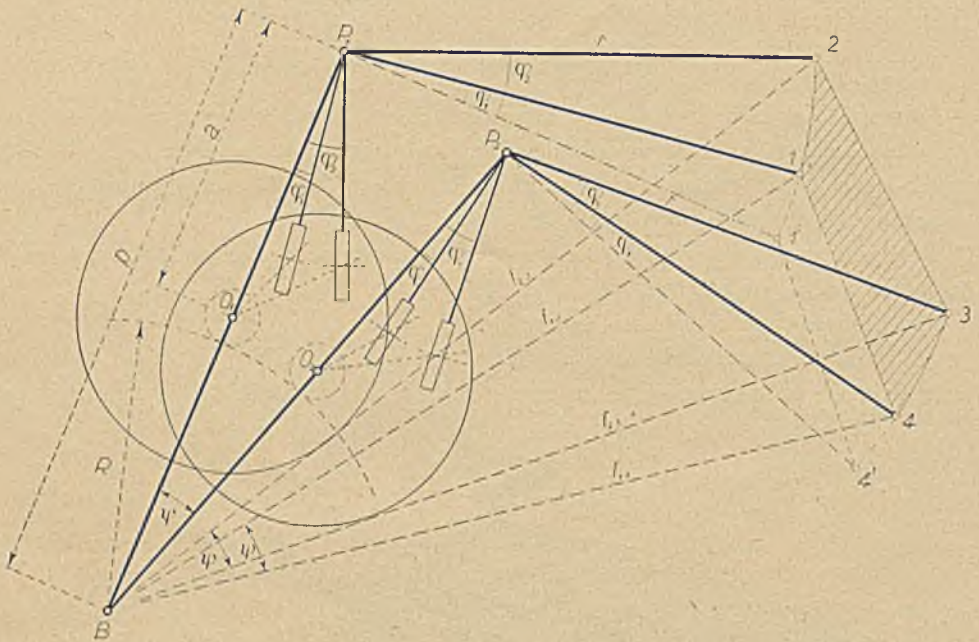


Dla zrozumienia działania tego przyrządu podajemy elementarny dowód na związek między planimetrowaną powierzchnią a ruchem wodzika.

Niech na rys. 90a i b oznacza:

$R$  promień tarczy stałej,

$R_1$  promień kółka zębatego tarczy ruchomej,



Rys. 90 a.

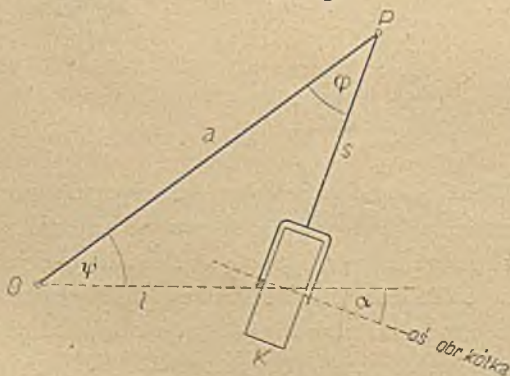
$a$  odstęp punktu  $O$  (środką tarczy ruchomej) od przegubu  $P$ ,

$p$  odległość między biegunem  $B$  a przegubem  $P$ ,

$r$  ramię wodzace,

$s$  odległość między przegubem  $P$  a osią kółka całkującego  $k$ ,

$l$  zmienny odstęp środka tarczy ruchomej od punktu skrzyżowania ramienia  $s$  i osi kółka całkującego  $k$ ,



Rys. 90 b.

$f$  zmienny promień  $WB$  (w położeniu wodzika),

$\varphi$  kąt wychylenia ramienia  $r$  z położenia prostopadłego do kierunku  $BP$ ,

$\alpha$  kąt zawarty między kierunkiem ramienia  $l$  a osią kółka całkującego  $k$ ,

$\psi$  kąt zawarty między kierunkiem ramienia  $l$  a kierunkiem  $BP$ .

Weźmy pod uwagę elementarną powierzchnię (1-2-3-4-1) na



rys. 90a. Jeżeli wodzik znajduje się w punkcie 1, kółko całkujące  $k$  ma położenie na tarczy ruchomej oznaczone liczbą 1, a kąt, jaki zawiera ramię  $r$  z kierunkiem prostopadłym do  $B P_1$ , oraz ramię  $s$  z kierunkiem  $B P_1$  wynosi  $\varphi_1$ . Przesunięcie wadzika do punktu 2 (bardzo bliskiego punktowi 1) nie wywoła ruchu kółka całkującego, gdyż ramię  $s$  przesunie się prostopadle do osi jego obrotu, tylko kąt  $\varphi_1$  zmieni się na  $\varphi_2$ , a ramię  $l_1$  na  $l_2$ . Niech następnie wodzik przesunie się bez zmiany kąta  $\varphi_2$  do punktu 3, a tym samym punkt  $P_1$  do punktu  $P_2$ , wywołując powstanie kąta  $\psi = \sphericalangle P_1 B P_2 = \sphericalangle O_1 B O_2$ .

Przejście punktu  $O_1$  do położenia  $O_2$  powoduje jednak skręt tarczy ruchomej o kąt  $\lambda$ , wynikający ze związku:

$$\lambda = \frac{R}{R_1} \psi = K \psi; \quad (46)$$

zaś elementarne odwinięcie kółka całkującego będzie w tym przypadku:

$$\Delta O_{2,3} = K \psi l_2 \cos \alpha_2, \quad (47)$$

gdyż ramię  $l_2$  zawiera z osią obrotu kółka  $k$  kąt  $\alpha_2$ .

Ponieważ, jak widać z rys. 90b,

$$l : \sin \varphi = a : \sin (90^\circ + \alpha), \quad (48)$$

przeto

$$l_2 \cos \alpha_2 = a \sin \varphi_2,$$

a w następstwie

$$\Delta O_{2,3} = K \psi a \sin \varphi_2. \quad (49)$$

Biorąc pod uwagę trójkąt  $B P_2 3$ , otrzymujemy z twierdzenia Carnota:

$$f_{2,3}^2 = p^2 + r^2 - 2 p r \cos (90^\circ + \varphi_2) = p^2 + r^2 + 2 p r \sin \varphi_2, \quad (50)$$

zatem

$$\sin \varphi_2 = \frac{f_{2,3}^2 - (p^2 + r^2)}{2 p r}, \quad (51)$$

a po wstawieniu do związku (49):

$$\Delta O_{2,3} = \frac{K a}{2 p r} \{f_{2,3}^2 - (p^2 + r^2)\} \psi. \quad (52)$$

Dla uproszczenia wyrażenia położmy jeszcze  $p^2 + r^2 = C^2$ , a wówczas będzie ostatecznie

$$\Delta O_{2,3} = \frac{K a}{2 p r} \psi f_{2,3}^2 - \frac{K a}{2 p r} \psi C^2. \quad (53)$$

Przejście wadzika do punktu 4 nie wywołuje odwinięcia kółeczka  $k$ , zmienia tylko kąt  $\varphi_2$  na  $\varphi_1$ , oraz  $l_2$  na  $l_1$ , otrzymamy zatem odwinięcie kółka przy powrocie do punktu 1, uwzględniając znak ruchu:

$$\Delta O_{4,1} = - \frac{K a}{2 p r} \psi f_{1,4}^2 + \frac{K a}{2 p r} \psi C^2. \quad (54)$$



Sumaryczne odwinięcie kółka  $k$  po obwiedzeniu elementarnej powierzchni 1, 2, 3, 4 będzie:

$$\Delta O = \frac{K a}{2 p r} \psi (f_{2.3}^2 - f_{1.4}^2); \quad (55)$$

a ponieważ w przypadku elementarnej powierzchni

$$\frac{\psi}{2} (f_{2.3}^2 - f_{1.4}^2) = (1, 2, 3, 4) = \Delta P, \quad (56)$$

przeto na wielkość powierzchni obwiedzioną wodzikiem (przy biegunie zewnątrz) otrzymujemy, analogicznie jak przy planimetrze Amslera, wzór:

$$P = C_1 n, \quad (57)$$

zaś przy biegunie wewnątrz

$$P = C_1 n + C_2, \quad (58)$$

przy czym

$$C_1 = 2 \pi p \frac{p r}{K a}, \quad (59)$$

oraz

$$C_2 = (p^2 + r^2) \pi \quad (60)$$

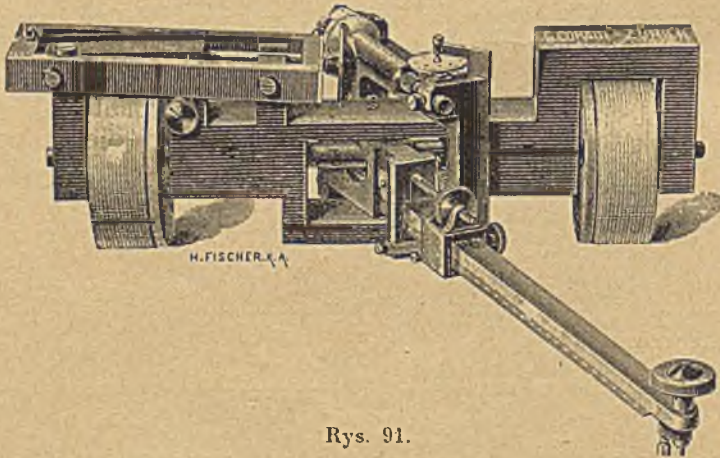
(tj.  $C_2$  równa się powierzchni koła obojętnego).

Luk 1' - 4' stanowi część koła obojętnego.

Planimetr ten daje wyniki bardzo dokładne ze względu na stałą niezależną od szorstkości papieru.

*b) Wózkowy planimetr kulisty.*

Planimetr ten odznacza się przede wszystkim tym, że można nim wyzna-



Rys. 91.

czać niejako nieskończenie długie powierzchnie (rys. 91). Właściwa konstrukcja przyrządu spoczywa na wózku, którego ciężkie koła o szorstkiej powierzchni odwijają bardzo dokładnie drogę, przebytą w kierunku prostopadłym do ich osi. Dookoła osi pionowej wózka obraca się przegibnie



o pewien kąt w obie strony ramię wodzące  $r$ , do którego równoległe umieszczona jest oś walca, zakończonego kółkiem całkującym. Walec ów przytyka do odcinka kuli o osi poziomej, na której znajduje się bardzo małe kółko zębate, zazębiające się o tryby jednego z kół wózka.

Poprzestaniemy na przybliżonej teorii omawianego planimetru, wedle której należy założyć dwa warunki:

1) oś obrotu ramienia wodzącego  $r$  przecina się z osią obrotu kuli (której część stanowi wspomniany odcinek),

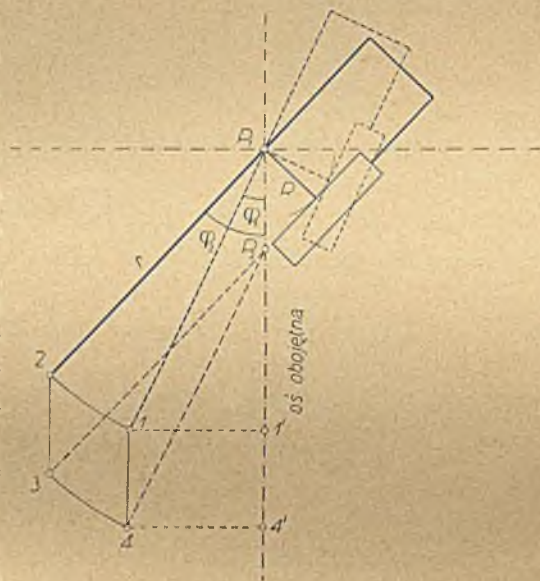
2) przy położeniu prostopadłym ramienia wodzącego walec jest styczny w środkowym punkcie odcinka kuli.

Wprawdzie warunki te nie są z reguły zupełnie ściśle spełnione, jednak można dowieść, że odwinięcie kółka całkującego  $k$  jest zawsze takie same, jak wówczas, gdy warunki powyższe są ściśle spełnione.

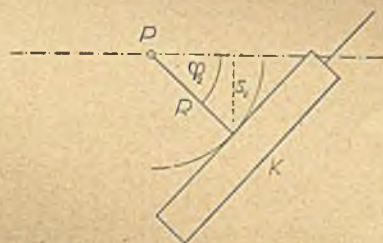
Znów, jak poprzednio (rys. 92a), weźmy pod uwagę elementarną powierzchnię (1-2-3-4-1). Położeniu wodzika w punkcie 1 odpowiada odchylenie ramienia wodzącego  $r$  od osi obojętnej (przechodzącej przez przegub  $P$  prostopadle do osi obrotu kół wózka) o kąt  $\varphi_1$ . (Dla przejrzystości rysunku opuszczono położenie kółka całkującego). Gdy wodzik przesuniemy do punktu 2, kółko całkujące  $k$  nie wykona żadnego odwinięcia, ześlizgując się tylko po powierzchni odcinka kuli. Przesuwając wodzik z punktu 2 do punktu 3 bez zmiany kąta  $\varphi_2$ , przesuwamy przegub do  $P_2$ , a tym samym i wózek o odstęp  $\overline{P_1 P_2}$ . Jeżeli promienie kół wózka wynoszą  $R'$ , skreślą się koła wózka o kąt  $\frac{\overline{P_1 P_2}}{R'}$ .

Jeżeli dalej  $R_1$  i  $R_2$  są promieniami kół zębatach na kole wózka i osi odcinka kuli, skreśli się odcinek kuli o kąt:

$$d\alpha = \frac{\overline{P_1 P_2}}{R'} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$



Rys. 92 a.



Rys. 92 b.



Promień odcinka kuli działający na walec, gdy promień wodzący jest odchylony od osi obojętnej o kąt  $\varphi_2$ , nazwijmy  $s_2$  (rys. 92b). Odwinięcie powstałe na walcu będzie zatem w tym przypadku

$$\Delta O_{2,3} = s_2 d\alpha = \frac{\overline{P_1 P_2}}{R'} \cdot \frac{R_1}{R_2} R \sin \varphi_2, \quad (62)$$

a gdy oznaczymy wyraz stały

$$\frac{R_1 R}{R' R_2} = A, \quad (63)$$

otrzymamy:

$$\Delta O_{2,3} = A \overline{P_1 P_2} \sin \varphi_2. \quad (64)$$

Odstęp  $P_1 P_2$  równy jest odległości punktów 2, 3 i 1, 4, zaś  $\sin \varphi_2 = \frac{\overline{2, 2'}}{r}$  przy czym 2, 2' jest odległością punktu 2 od osi obojętnej; będzie zatem dalej:

$$\Delta O_{2,3} = A \overline{2, 3} \frac{\overline{2, 2'}}{r}. \quad (65)$$

Przesunięcie wodzika z 3 do 4 nie daje odwinięcia kółka  $k$ , natomiast przesunięcie z 4 do 1 dostarcza nam (z uwzględnieniem kierunku ruchu):

$$\Delta O_{4,1} = -A \overline{1, 4} \frac{\overline{1, 1'}}{r} \quad (66)$$

Ostatecznie będzie całkowite odwinięcie

$$\Delta O = \frac{A}{r} (\overline{2, 3} \cdot \overline{2, 2'} - \overline{1, 4} \cdot \overline{1, 1'}) = \frac{A}{r} \Delta P, \quad (67)$$

zatem powierzchnia elementarna  $\Delta P = (1 - 2 - 3 - 4 - 1)$  jest proporcjonalna do elementarnego odwinięcia  $\Delta O$ .

Wzór ogólny jest więc i w tym przypadku miarodajny:

$$P = C_1 n \quad (68)$$

(stała  $C_2$  odpada).

Jak to wynika z konstrukcji planimetru, nadaje się on specjalnie do wyznaczenia powierzchni długich pasów, a więc na przykład zdjęć pod trasę itp.

c) *Wózkowy planimetr tarczowy.*

W miejsce walca poruszającego się po odcinku kuli, posiada ten typ planimetru tarczę, połączoną kółkami zębatymi z kołami wózka, po której ślizga się kółko całkujące  $k$  o osi równoległej do ramienia wodzącego. Teoria tego planimetru jest w zasadzie podobna do teorii biegunowego planimetru tarczowego, dlatego ją pomijamy<sup>1)</sup>.

d) *Planimetr Prytza.*

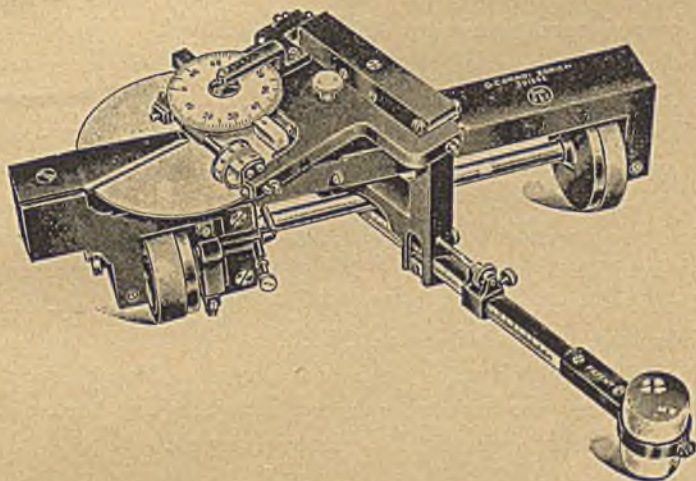
Planimetr ten (rys. 94), wynaleziony przez duńskiego kapitana Prytza (Tekniske Forenings Tidsskrift 1886), jest najprostszym planimetrem wodzi-

<sup>1)</sup> Teorię tego planimetru znajdzie czytelnik w broszurze Coradiego: Die Planimeter Coradi, Zürich 1912, oraz w dziele Jordana - Eggera, t. II, część 1, str. 189.



kowym<sup>1)</sup>, gdyż jest to ramię wodzące  $r$ , zakończone po jednej stronie ostrzem wodzika, zaś po drugiej stronie ostrym, płaskim kółkiem (zwróconym w kierunku ramienia).

Rozpoczynając i kończąc obwodzenie powierzchni, wbijamy lekko płaskie

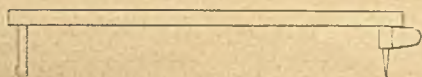


Rys. 93.

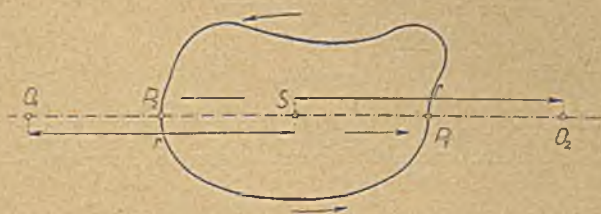
ostrze w papier, otrzymując wielkość powierzchni w pierwszym przybliżeniu; jeżeli odstęp znaków ostrza wynosi  $m$ , a długość ramienia wodzącego  $r$ , to:

$$P' = m r. \quad (69)$$

Natomiast, chcąc otrzymać wynik dokładniejszy, należy po wyznaczeniu przybliżonej osi symetrii figury i środka jej ciężkości  $S$ , przeprowadzić pomiar dwukrotnie (rys. 95), a mianowicie ustawiając pierwszy raz wodzik w  $S$ , a ostrze w  $O_1$  i obwodząc od  $S, P_1, P_2, P_1$  do  $S$ , zaś drugi raz wychodząc z położenia odwrotnego, tj. ustawiając wodzik w  $S$ , a ostrze w  $O_2$  i kończąc po obwiedzeniu figury (w tym samym kierunku) w  $S$ .



Rys. 94.



Rys. 95.

Jeżeli po pierwszym obwiedzeniu odstęp położenia początkowego ostrza wynosił  $m_1$ , a po drugim obwiedzeniu  $m_2$ , otrzymujemy jako wynik:

$$P = \frac{m_1 + m_2}{2} r. \quad (70)$$

<sup>1)</sup> Teoretyczne uzasadnienie działania tego planimetru znajdzie czytelnik w Zeitschrift f. Vermessungswesen 1895 (Runge) i 1886 (Hamann).



### § 7. Planimetr harfowy

Jak wspomniano w § 3, planimetry wodzikowe nie nadają się do wyznaczenia powierzchni figur wydłużonych i przy tym nieregularnych (tj. gdy stosunek obwodu do powierzchni jest stosunkowo znaczny). W tych przypadkach dają lepsze wyniki tzw. planimetry harfowe, których najistotniejszą część stanowią włosy, napięte równolegle w równych odstępach na ramie metalowej. Kładąc tego rodzaju planimetr na rysunek, dzielimy pole figury na równoległe paski o stałej szerokości  $a$  i o zmiennych wysokościach  $h$ , które łatwo odmierza się cyrklem o maksymalnej rozwartości, dostosowanej do wartości szerokości  $a$  i skali rysunku.

I tak, jeżeli skala rysunku wynosi 1:1000, zaś odstęp nitek  $a = 2$  mm, a chcemy wiedzieć ile arów ma pole figury, ustalamy maksymalny rozstaw cyrkla na 50 mm. W ten sposób, odkładając na boku całe ary, otrzymujemy szybko powierzchnię w arach i ich częściach.

W Urzędach Skarbowych (w dziale katastralnym) w Małopolsce są po dzień dzisiejszy używane tego rodzaju planimetry, nadające się bardzo dobrze do wyznaczenia powierzchni figur bardzo nieregularnych.

### § 8. Dokładność planimetrów

Dokładność pomiaru planimetrem da się określić (po wyeliminowaniu błędów systematycznych) pewnym wzorem empirycznym. I tak Lorber ustawił na podstawie doświadczeń<sup>1)</sup> następujący wzór na błąd powierzchni (wynikły z błędów przypadkowych):

$$\Delta P = 0,00126 C_1 + 0,00022 \sqrt{C_1 P}, \quad (71)$$

przy czym wszystkie wielkości należy wyrazić w  $\text{cm}^2$ .

Wedle doświadczeń Montigla<sup>2)</sup> wynosi ów błąd dla planimetru o stałej  $C_1 = 57 \text{ cm}^2$ :

$$\Delta P = 0,056 + 0,0125 \sqrt{P} + 0,000409 P \quad (72)$$

lub

$$\Delta P = 0,041 + 0,0191 \sqrt{P}, \quad (73)$$

które to wzory Eggert zastępuje jednym o kształcie prostszym

$$\Delta P = 0,022 \sqrt{P}. \quad (74)$$

Wzory Lüdemanna<sup>3)</sup> na podstawie doświadczeń, podczas których wyeliminowano błędy, powstałe wskutek nierównoległości osi kółka  $k$  do ramienia  $r$ , są następujące:

1) Zeitschrift f. Vermessungswesen 1884.

2) „ „ „ 1926, str. 257-264.

3) „ „ „ 1927, str. 305-311.



$$\Delta P = 0,0270 \sqrt{P} - 0,00151 P \quad (75)$$

$$\Delta P = -0,0094 + 0,0167 \sqrt{P} \quad (76)$$

$$\Delta P = 0,017 \sqrt{P}. \quad (77)$$

Formuła uproszczona i zastępująca wszystkie powyżej zacytowane wzory jest następująca:

$$\Delta P = 0,02 \sqrt{P}. \quad (78)$$

Jeżeli zatem  $P$  i  $\Delta P$  chcemy mieć w  $m^2$ , a skala planu wynosi  $1:M$ , możemy ustalić następujący związek na  $\Delta P$  (w  $m^2$ ):

$$\Delta P = \pm 0,0002 M \sqrt{P}. \quad (79)$$

Dokładność wyznaczenia powierzchni planimetrem Prytza jest oczywiście mniejsza; wedle doświadczeń Hamanna<sup>1)</sup> średni błąd niezbyt wielkiej powierzchni wynosi około 0,5%. W praktyce można go przyjąć nieco większym, między 0,5% a 1,0%.

### § 9. Uwzględnienie skurczu papieru

Papier rysunkowy zmienia swe wymiary pod wpływem wilgoci, kurcząc się z biegiem lat. Zauważyć to można szczególnie na arkuszach katastralnych, przedstawiających obszary tzw. sekcji szczegółowych. Skurecz ten można łatwo skontrolować, badając wymiary prostokąta sekcyjnego, które dla map katastralnych Małopolski wynoszą:

długość sekcji  $b = 25$  cali = 65,85 cm,

szerokość „  $h = 20$  cali = 52,68 cm.

Skurecz wyrażamy zazwyczaj w procentach

$$p\% \text{ (skurecz dług. sekcji)} = 100 \frac{\Delta b}{b}, \quad (80)$$

$$q\% \text{ ( „ szer. „ )} = 100 \frac{\Delta h}{h}, \quad (81)$$

przy czym  $\Delta b$  i  $\Delta h$  są różnicami między właściwymi wymiarami  $b$  i  $h$  a średnimi wymiarami otrzymanymi z pomiaru.

Średni wymiar np. długości  $b_s$  otrzymujemy, mierząc długość sekcji na obu brzegach  $b_1, b_3$  i w środku  $b_2$ :

$$b_s = \frac{b_1 + 2b_2 + b_3}{4}. \quad (82)$$

<sup>1)</sup> Zeitschrift f. Vermessungswesen 1896, str. 649.



Skurecz liniowy w dowolnym kierunku obliczamy, mając  $p\%$  i  $q\%$ , wedle wzoru

$$s\% = p\% \sin^2 \alpha + q\% \cos^2 \alpha^1), \quad (83)$$

jeżeli długość odcinka odmierzonego na mapie wynosi  $l'$ , a kierunek jego zawiera z szerokością kąt  $\alpha$ , wówczas właściwą długość  $l$  otrzymamy, dodając do  $l'$  wielkość skureczu; będzie zatem

$$l = l' + \frac{s\%}{100} l' \quad (84)$$

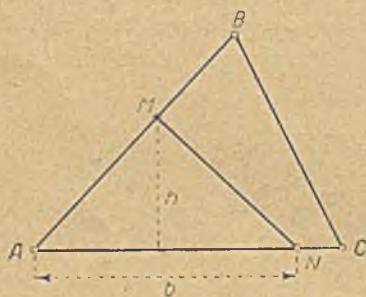
Prócz skureczu liniowego musimy często uwzględniać skurecz powierzchniowy, który bez względu na położenie powierzchni na obszarze sekcji obliczamy z wzoru:

$$P = P' + \frac{p\% + q\%}{100} P'. \quad (85)$$

### § 10. Podział i zamiana gruntów

W praktyce napotykamy dwójakiego rodzaju zagadnienia podziału powierzchni: a) jako bezpośredni jej podział, b) jako zagadnienie regulacji granic.

Drobne przełożenie granic przeprowadza się często przed ustaleniem definitywnym granicy, aby uprościć jej omarkowanie na gruncie.



Rys. 96.

Zagadnienia, jakie się przy wspomnianych czynnościach wyłaniają, mogą być rozwiązane drogą rachunkową, lub początkowo wykreślą dla uzyskania rozwiązania przybliżonego, które poprawia się rachunkowo.

Bezwarunkowo należy przestrzegać zasady, że zagadnienie podziału rozwiązywane tylko rachunkowo, musi być stosunkowo proste. Natomiast zagadnienie zawile należy przeprowadzać albo na gruncie metodą kolejnego przybliżania, lub na sporządzonym w tym celu planie w dostatecznie wielkiej skali, po czym, po uzyskaniu ostatecznego wyniku, przenosi się go na grunt. Dlatego ograniczymy się do podania rachunkowych rozwiązań tylko w najprostszyc przypadkach.

#### 1. Podział trójkąta.

a) Dany jest trójkąt  $ABC$  oraz punkt  $M$ , leżący na boku  $AB$ . Odciąć w trójkącie prostą, przechodzącą przez punkt  $M$ , powierzchnię o wielkości  $P$  (rys. 96).

<sup>1)</sup> Właściwy sposób polega na poprowadzeniu przez środek ciężkości (wyznaczony w przybliżeniu przekątniami) pęku promieni pod pewnymi kątami  $\alpha$  i na wyznaczeniu różnicy między w ten sposób powstałymi odcinkami, obliczonymi i zmierzonymi. Sposób ten prowadzi do uzyskania elipsy skureczu, po czym można wyznaczyć skurecz w każdym kierunku (analogicznie, jak to ma miejsce z elipsą średniego błędu).







c) Podział trójkąta prostą równoległą do podstawy.

Niech powierzchnia trójkąta  $ABC$  wynosi  $P$ , zaś powierzchnia, którą mamy odciąć prostą  $MN \parallel AC$ , będzie  $P'$ ; stosunek obu powierzchni  $P:P' = m$  (rys. 98).

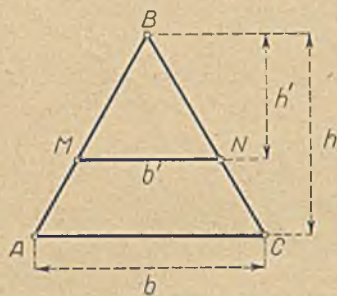
Ponieważ  $\frac{bh}{2} : \frac{b'h'}{2} = m$ , a zarazem:

$$h : h' = b : b' \tag{93a}$$

przeto

$$h'^2 = \frac{h^2}{m}, \text{ wzgl. } h' = \frac{h}{\sqrt{m}}. \tag{94}$$

Należy zatem na prostopadłej do  $AC$  odciąć  $h - h' = h \frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m}}$  i wyty-



Rys. 98.

czyć w tym odstępnie równoległą do  $AC$ , uzyskując w ten sposób punkty  $M$  i  $N$ .

2. Podział czworoboku.

a) Z czworoboku  $ABCD$  (rys. 99), należy odciąć powierzchnię  $P$  prostą, przechodzącą przez dany na jednym z boków punkt  $M$ .

Najprościej postąpimy rzutując punkt  $A$  na przekątną  $MD = d$ .

Ponieważ

$$P = \frac{d}{2} (h_A + h_N),$$

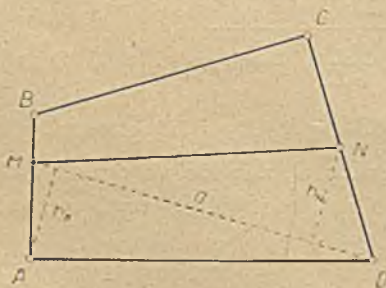
przeto

$$h_N = \frac{2P}{d} - h_A. \tag{95}$$

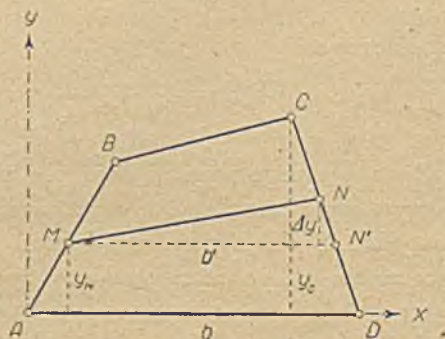
Jeżeli jesteśmy zmuszeni użyć jako podstawy prostej  $AD = b$ , rzutujemy także i p.  $M$  na  $AD$ , otrzymując  $y_M$ , po czym tycząc równoległą do  $AD$ , znajdujemy punkt  $N'$  (rys. 100). Powierzchnia otrzymanego czworoboku będzie

$$P' = \frac{b + b'}{2} y_M, \tag{96}$$

przy czym  $b' = MN'$ .



Rys. 99.



Rys. 100.



Jeżeli  $P > P'$  należy szukać właściwego punktu na boku  $N'C$ , gdy zaś  $P < P'$  w przeciwnym kierunku na  $N'D$  (w razie gdy  $P = P'$  zagadnienie jest rozwiązane).

Dla wyznaczenia rzędnej  $y_N$  posługujemy się powierzchnią trójkąta  $M'N'N$ , którą trzeba dodać lub odjąć od  $P'$ , aby otrzymać  $P$ .

Kładąc  $P - P' = \frac{b'}{2} \Delta y$ , otrzymamy

$$\Delta y = \frac{2(P - P')}{b'}. \quad (97)$$

Rzędna punktu  $N$  wynosi zatem

$$y_N = y_M + \Delta y. \quad (98)$$

Znalezienie punktu  $N$  nie przedstawia następnie żadnych trudności.

b) Podział prostą równoległą do jednego boku.

Zadanie polega na znalezieniu położenia prostej  $MN \parallel AB$ , odcinającej z całkowitej powierzchni  $ABCD$  powierzchnię  $AMND$  o danej wielkości  $P$  (rys. 101). Rachunkowe rozwiązanie tego zadania jest następujące.

Ponieważ

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{y_M}{x_M}, \quad \text{zaś} \quad \frac{y_C}{x_D - x_C} = \frac{y_N}{x_D - x_N},$$

przeto

$$x_M = \frac{x_B y_M}{y_B}, \quad x_D - x_N = \frac{(x_D - x_C) y_N}{y_C}. \quad (99)$$

Oznaczając  $y_M = y_N = y$ , otrzymamy dalej

$$P = \frac{b + b_1}{2} y, \quad (100)$$

przy czym

$$b_1 = b - x_M - (x_D - x_N) = b - y \left( \frac{x_B}{y_B} - \frac{x_D - x_C}{y_C} \right). \quad (101)$$

Kładąc  $\frac{x_B}{y_B} - \frac{x_D - x_C}{y_C} = m$  otrzymamy dalej:

$$P = b y - \frac{m}{2} y^2$$

lub

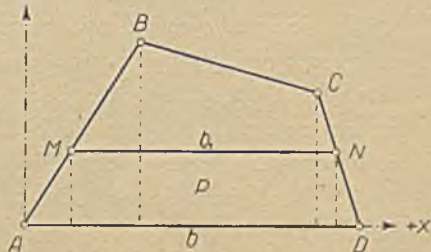
$$y^2 - 2 \frac{b}{m} y + \frac{2P}{m} = 0,$$

zatem

$$y = \frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{2P}{m}} \quad (102)$$

lub

$$y = \frac{b}{m} \pm \frac{b}{m} \sqrt{1 - 2 \frac{P m}{b^2}}. \quad (103)$$



Rys. 101.



Wybór znaku przed pierwiastkiem nie przedstawia w konkretnym przypadku żadnych trudności.

Po obliczeniu  $y$  odcinamy tę długość na prostopadłych w  $A$  i  $D$ , a łącząc ze sobą otrzymane w ten sposób punkty, uzyskujemy ostatecznie punkty  $M$  i  $N$ . Dla kontroli należy zmierzyć długość  $MN = b_1$  i sprawdzić, czy

$$b_1 = \frac{2P}{y} - b. \quad (104)$$

W razie niezgodności należy  $y$  poprawić o  $\Delta y$ , którą to wielkość uzyskamy na podstawie otrzymanej różnicy  $\Delta b$ , ze związku różniczkowego  $\Delta b = -\frac{2P}{y^2} \Delta y$ , czyli

$$\Delta y = -\frac{y^2 \Delta b}{2P}. \quad (105)$$

Jak jednak z ostatniego równania wynika, możemy zagadnienie to rozwiązać przez próby, wytyczając »na oko« obrane  $y$  i mierząc po uzyskaniu punktów  $M$  i  $N$  otrzymaną długość  $b_1$ . Gdy dla uzyskania równości prawej i lewej strony związku (104) trzeba będzie po lewej stronie dodać  $\Delta b$ , obliczymy odpowiednie  $\Delta y$  ze związku (105) (uważając na znak).

3. Podział czworoboków i wieloboków wedle stosunków boków.

Z zagadnieniem tego rodzaju spotykamy się dość często w praktyce.

a) Niech powierzchnia czworoboku  $ABCD$  (rys. 102) będzie równa  $P$ ; należy wydzielić z niego drugi czworobok  $AMND$  o powierzchni  $(P)$  z zachowaniem stosunku boków

$$AM : MB = DN : NC. \quad (106)$$

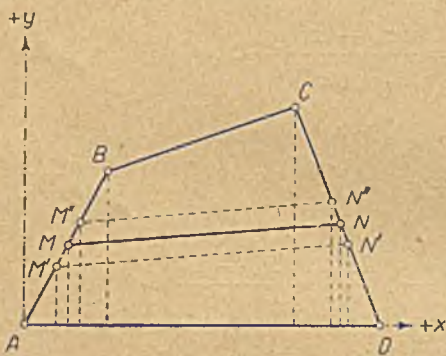
Po zdjęciu czworoboku na podstawie  $AD$  i obliczeniu (z otrzymanych rzędnych i odciętych) długości  $AB$  i  $DC$ , należy je podzielić na  $m$  części i obliczyć, jak wielkim zmianom odciętych  $\Delta x_1$  i  $\Delta x_2$ , odpowiadają  $\frac{AB}{m}$  i  $\frac{DC}{m}$ .

Niech powierzchnia  $P' = (AM'N'D)$  okaże się bliską powierzchni  $(P)$ , zaś drugą z rzędu pod względem przybliżenia niech będzie powierzchnia  $P'' = (AM''N''D)$ , tj. np.

$$P'' > (P) > P'.$$

Odstępy  $M'M''$  i  $N'N''$  można znów podzielić na  $m$ , względnie  $n$  dowolnie małych części, przy czym można ze względu na wąski pasek powierzchni przyjąć, że i powierzchnia  $M'M''N''N'$  zostaje w ten sposób podzielona na  $m$ , względnie  $n$  równych części.

Ponieważ ilość  $n$  możemy przyjąć odpowiednio dużą, przeto i podział można



Rys. 102.



przeprowadzić z dostateczną dla praktyki dokładnością, uzyskując ostatecznie punkty  $M$  i  $N$ .

Oczywiście, że po znalezieniu ich położenia należy wykonać pomiar kontrolny (rzut punktów  $M$  i  $N$  na bok  $AD$ ) i przeprowadzić kontrolne obliczenie. Jeżeli wypadłaby zbyt wielka różnica uzyskanej podziałem powierzchni, należy jeszcze raz powtórzyć interpolację, już na bardzo małym odstępnie, a tym samym otrzymać praktycznie zupełnie dokładny wynik.

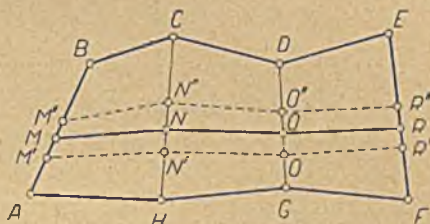
b) To samo zagadnienie, lecz zamiast jednego czworoboku mamy do czynienia z wielobokiem.

Jeżeli mamy wydzielić z wieloboku o powierzchni  $P$  wielobok o powierzchni ( $P$ ), należy jak poprzednio podzielić boki przebiegające w kierunku poprzecznym do linii działowych na  $m$  dowolnie małych części (rys. 103). Wybrać dwie powierzchnie odpowiednich wieloboków  $P' < (P)$  i  $P'' > (P)$  i jak poprzednio przy pomocy interpolacji znaleźć ostateczne położenie punktów  $M, N, O, R$ .

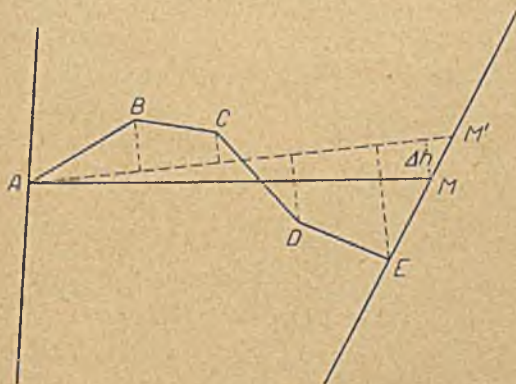
#### 4. Regulacja granic.

a) Granicę łamaną  $A B C D E$  zamienić na prostą, przechodzącą przez punkt  $A$  (rys. 104).

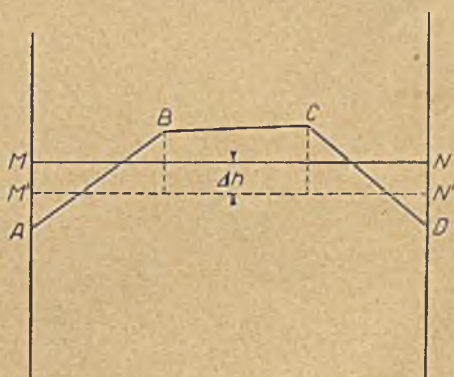
Obieramy prostą  $AM'$  jako przypuszczalną granicę, rzutujemy na nią wszystkie punkty graniczne i obliczamy powierzchnie, powstałe po obu stronach



Rys. 103.



Rys. 104.



Rys. 105.

granicy. Jeżeli przewaga powierzchni po jednej stronie wynosi  $\Delta P$ , skręcamy w odpowiednim kierunku prostą  $AM'$  tak, aby powierzchnia trójkąta  $AMM'$  była równa  $\Delta P$ .

Wysokość tego trójkąta  $\Delta h$  otrzymujemy z wzoru:

$$\Delta h = \frac{2 \Delta P}{AM'}, \quad (107)$$



zaś odstęp  $M' M$  z proporcji:

$$M' M : \Delta h = E M' : y_E,$$

zatem

$$M' M = \frac{E M'}{y_E} \Delta h. \quad (108)$$

b) W podobny sposób otrzymuje się granicę prostą (zamiast lamanej), prostopadłą do danego kierunku.

Zakładamy prostą  $M' N'$ , zdejmujemy na nią punkty załomów i obliczamy wielkości powierzchni po obu stronach prostej  $M' N'$  (rys. 105); przesuwamy następnie granicę w kierunku większej powierzchni o

$$\Delta h = \frac{\Delta P}{M' N'}, \quad (109)$$

przy czym  $\Delta P$  jest różnicą powierzchni po obu stronach prostej  $M' N'$ .

Inne sposoby i przykłady omówiono w działach specjalnych:

F. G. G a u s s, Die Teilung der Grundstücke, Berlin 1904. V o g l e r, Geodätische Übungen, część I, Berlin 1910. J o r d a n - E g g e r t, Handbuch der Vermessungskunde, tom II, część I, Stuttgart 1931. Prócz tego liczne rozprawy w Zeitschrift f. Vermessungswesen.



## ROZDZIAŁ VI

### NIWELACJA GEOMETRYCZNA

#### § 1. Pojęcia wstępne. Geoida. Rodzaje wzniesień i sposoby ich wyznaczania

Dla jednoznacznego wyznaczenia położenia punktów, obranych przez nas na terenie, nie wystarcza wyznaczenie ich sytuacji na przyjętej powierzchni odniesienia (zastępującej dla obliczeń zdjęć poziomych dostatecznie dokładnie powierzchnię morza), lecz należy jeszcze uwzględnić ich wzniesienia nad poziomem morza, czyli ponad tzw. *geoidą zerową*.

Geoida jest to powierzchnia, której elementy są prostopadłe do im przynależnych pionów, zaś geoida zerowa jest specjalną geoidą, zawierającą w sobie powierzchnie mórz.

Kierunek pionu jest jednak zgodny z kierunkiem wypadkowej z siły przyciągania i siły odśrodkowej, geoidy są zatem powierzchniami ekwipotencjalnymi dla tych sił. Jak wiadomo, siła ciężkości jest na równiku najmniejsza i wzrasta ku biegunom, gdzie osiąga swą wartość największą, przeto geoidy przedstawiają się w grubym przybliżeniu (do pewnej odległości ponad ziemią) jako spłaszczone elipsoidy obrotowe.

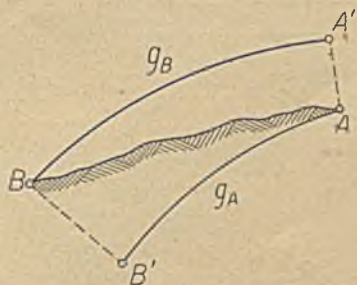
Powierzchnie te tworzą w przeciwieństwie do poziomów geometrycznych, tzw. poziomy geodezyjne, które — jak to wynika z poprzednich uwag — nie są do siebie równoległe.

Weźmy pod uwagę dwa punkty  $A$  i  $B$ , leżące w różnych poziomach geodezyjnych  $g_A$  i  $g_B$  i poprowadźmy w nich trajektorie ortogonalne do układu geoid. Jak na rys. 106 widać, punktowi  $A$  odpowie na geoidzie  $g_B$  punkt  $A'$ , zaś punktowi  $B$  na geoidzie  $g_A$  punkt  $B'$ .

W geodezji rozróżniamy dwojakiego rodzaju wzniesienia: ortometryczne i dynamiczne.

Wzniesienie *ortometryczne*  $h_A^B$  punktu  $B$  nad punktem  $A$  przedstawia na rysunku odstęp  $B'B$ , natomiast  $h_B^A$ , wzniesienie ortometryczne punktu  $A$  nad  $B$  (ujemne), uwidoczniło jako odstęp  $A'A$ , przy czym, z powodu nierównoległości poziomów  $g_A$  i  $g_B$ , odstępów te nie są sobie równe, czyli

$$h_A^B \neq -h_B^A \quad (1)$$



Rys. 106.



Natomiast wzniesienia dynamiczne  $\gamma_A^B$  i  $\gamma_B^A$  są sobie (z odwrotnym znakiem) równe, ze względu na to, że  $g_A$  i  $g_B$  są powierzchniami ekwipotencjalnymi (czyli, że praca na obu drogach  $B'B$  i  $A'A$  jest równa); zatem

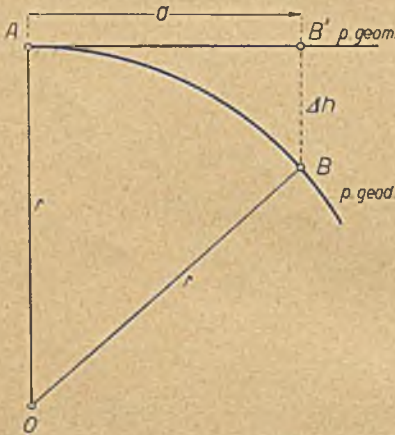
$$\gamma_A^B = -\gamma_B^A. \quad (2)$$

Wzniesienia wyznaczamy przy pomocy następujących pomiarów: a) niwelacji ścisłej i geometrycznej; b) tachimetrycznego, trygonometrycznego lub barometrycznego pomiaru wysokości; c) ponadto w ostatnich czasach zastosowano (dla uzyskania przybliżonych wyników) pomiary, polegające na działaniu echa.

W rozdziale niniejszym będziemy omawiali tylko niwelację, odsyłając czytelnika, chcącego zapoznać się z innymi poprzednio wymienionymi sposobami, do odpowiednich rozdziałów.

## § 2. Niwelacja geometryczna dla celów technicznych, czyli zwyczajna

Niwelacja polega na pomiarach, przy pomocy których mierzymy bezpośrednio różnice wysokości punktów, przy czym, jeżeli chodzi o niwelację dla celów technicznych, możemy przyjąć, że poziomy geodezyjne na niezbyt wielkim obszarze są równoległe. Ponieważ nie rozporządzamy takimi przyrządami, które by nam pozwalały konstruować poziomy geodezyjne, przeto zmuszeni jesteśmy do posługiwania się w tym celu krótkimi elementami poziomów geometrycznych, jakie tworzą osie celowe lunet, ułożonych przy pomocy libeli do poziomu.



Rys. 107.

Przed wszystkim należy zbadać, jak długie mogą być owe elementy poziomów geometrycznych. Nim na to pytanie odpowiemy, należy uświadomić sobie, że w przypadku wykonywania niwelacji dla celów technicznych, będziemy wyznaczali różnice wysokości między poprzednio wspomnianymi poziomami geometrycznymi na pionowo ustawionych łąkach z błędem  $\pm 1$  mm lub przy niwelacji ścisłej nawet mniejszym.

Ponieważ błąd, spowodowany użyciem poziomu geometrycznego zamiast geodezyjnego, nie powinien przekraczać wielkości błędu pomiaru, przeto jego wielkość powinna być nieco mniejsza niż 0,5 mm.

Dla dalszego wywodu przyjmijmy, że względu na bardzo mały element powierzchni ziemi, o którym będzie mowa, że poziomy geodezyjne są kołami.

W tym przypadku (rys. 107), tworząc poziom geometryczny w punkcie A, otrzymamy w punkcie B różnicę między poziomami geometrycznym i geodezyjnym ze związku:

$$r^2 = (r - \Delta h)^2 + d^2,$$



lub

$$O = -2r \Delta h + \Delta h^2 + d^2,$$

a wreszcie z zaniedbaniem  $\Delta h^2$ :

$$\Delta h = \frac{d^2}{2r}. \quad (3)$$

Dla  $\Delta h = 0,5$  mm jest  $d = 80$  m, przyjmujemy zatem jako największe  $d$ :

$$d_m = 75 \text{ m.}$$

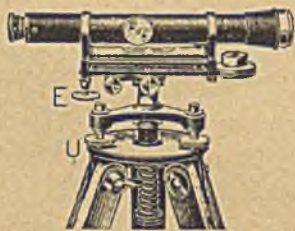
W praktyce stosujemy zazwyczaj  $d$  nieco mniejsze, mianowicie 50 m (co ułatwia nam w wysokim stopniu położenie znaków hektometrycznych wzdłuż gościńców i linii kolejowych).

Poprzestając na podanych uwagach o obiorze odległości  $d$ , zastrzegamy sobie dokładniejsze omówienie tej sprawy przy analizie błędów niwelacji (p. § 11 a).

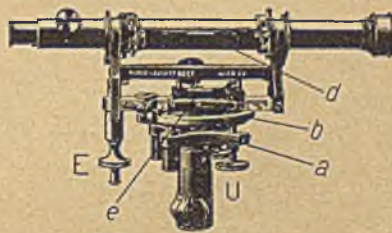
Rodzaje zagadnień z dziedziny niwelacji, z jakimi inżynier spotyka się w praktyce, są: ciąg niwelacyjny, profil podłużny, profile poprzeczne, niwelacja powierzchniowa oraz sieci niwelacyjne. Zanim przejdziemy do omówienia wymienionych prac niwelacyjnych, należy zapoznać się z instrumentem niwelacyjnym.

### § 3. Instrument niwelacyjny

Jak już wspomniano poprzednio, niwelacja wymaga przyrządu, przy pomocy którego można uzyskać krótki element poziomu geodezyjnego. Zadanie to spełnia instrument niwelacyjny, którego zasadniczymi częściami składo-



Rys. 108.



Rys. 109a.

wymi są libela i luneta geodezyjna. Przyrząd ustawiamy na trójnogu, tzw. statywie, o głowie krążkowej (rys. 108) lub (w typach starszych) zakończonej czopem (rys. 109).

Przyrządy, przedstawione na rys. 108, przytwierdza się do statywu śrubą centralną (główną)  $C$ , wkręcając sworzeń z nią połączony w odpowiedni otwór u spodu instrumentu; definitywne ustalenie położenia instrumentu na statywie następuje (po przeprowadzeniu pewnych czynności, o których mowa później) przy pomocy drugiej śruby dostosowanej do gwintu, umieszczonego na zewnętrznej stronie sworznia, ściągnącej silną sprężynę między nią, a krążkiem przyciskającym dół do spodu krążka statywu.





służy do pochylenia lub podniesienia lunety i libeli względem limbusu, tj. do pochylenia lub podniesienia osi libeli i lunety względem osi libel alhidadowych (nie działając na zmianę położenia osi instrumentu). Śrubka korekcyjna libeli *K* wywołuje tylko zmianę położenia osi libeli *l*, zaś śrubki siatki *S* tylko zmianę osi celowej *c*.

Instrumenty niwelacyjne dzielimy na kilka typów, zależnie od sposobu połączenia libeli i lunety z pozostałymi częściami przyrządu.

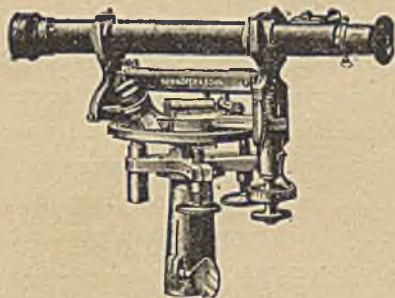
I. Najczęściej spotykany w praktyce, najtańszy i najprostszy jest typ I (rys. 110).

Libela tego przyrządu jest stale (wyjawszy drobne ruchy przy pomocy śrubki korekcyjnej *K*) złączona z lunetą utwierdzoną w dźwigarkach alhidady. Wysokość jednego z dźwigarków może być zwiększona lub zmniejszona, o ile przyrząd posiada śrubę elewacyjną *E*. Typ ten jest właściwie tylko wtedy przydatny do praktyki, gdy posiada libelki alhidadowe lub libelę pudełkową. (Nie wszystkie dawniej wyrabiane przyrządy posiadały wspomniane libelki).



Rys. 110.

II. W typie drugim (rys. 111), dziś prawie zupełnie nie używanym, libela jest stale złączona z alhidadą (z wyjątkiem możliwości nieznacznego przesunięcia jak poprzednio), natomiast luneta, spoczywająca swymi pierścieniami w odpowiednich łożyskach, jest do przekładania. Występuje tu zatem nowa oś, zwana geometryczną; jest nią prosta łącząca środki pierścieni lunety.



Rys. 111.

Obecnie typu tego się nie wyrabia, gdyż okazał się on w praktyce mało korzystny.

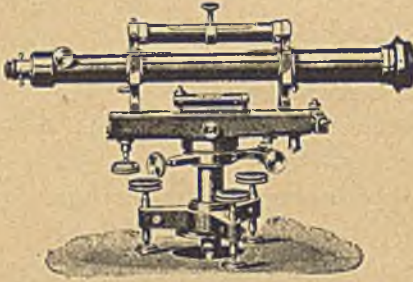
III. W typie trzecim (rys. 112a) tak libela jak i luneta są do przekładania. Również i ten typ jest dziś rzadko używany, choć niektóre fabryki go wyrabiają.

IV. W typie czwartym instrumentu (rys. 112b) widzimy lunetę złączoną stale z libelą *rewersyjną* (podwójną). Lunetę tę można albo przekładać w łożyskach lub, jak to bywa w nowszych konstrukcjach, tylko

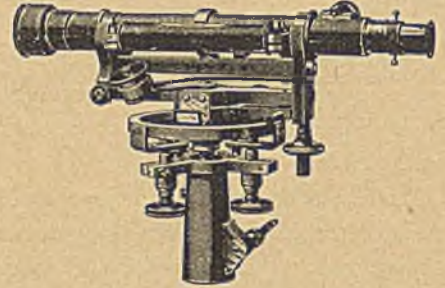
obracać dookoła osi geometrycznej; osią geometryczną jest w tym ostatnim przypadku oś walca, w którym luneta jest ujęta. Typ ten okazał się w praktyce najlepszym, szczególnie po zmianach, jakie w nim zastosował Wild. Zmiany te polegają głównie na dołączeniu do przyrządu systemu pryzmatów, w których widzimy oba końce bańki libeli, oraz na zastosowaniu w lunetach soczewek ogniskujących (fokusuujących). Pochylając lunetę z libelą przy pomocy śruby elewacyjnej, uzyskujemy przesunięcie względem siebie obrazów końców bańki libeli, której oś jest wówczas pozioma, gdy na-



stąpi ich koincydencja. Zastosowanie metody koincydencji do libeli dopuszcza dwa razy mniejszą jej czułość. Zalety lunety o soczewce ogniskującej podano w rozdziale III; najważniejsze z nich są: znaczne skrócenie



Rys. 112a.

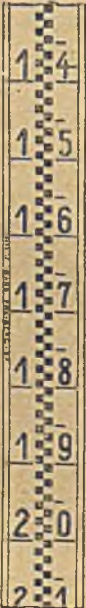


Rys. 112b.

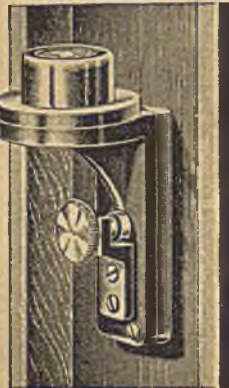
ogniskowej, a w konsekwencji i lunety (przy zachowaniu tego samego powiększenia), zwiększona stałość osi celowej, co może mieć wielki wpływ na przebieg niwelacji.

#### § 4. Łaty niwelacyjne

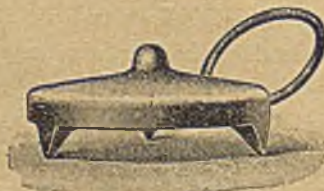
Do niwelacji używamy łat zazwyczaj trzymetrowych, zaopatrzonych w podział centymetrowy, przy czym pola centymetrowe pomalowane są na przemian kolorem czarnym i białym. Podział ten opisany jest cyframi w odstępach decymetrowych.



Rys. 113a.



Rys. 113b.



Rys. 113c.

Aby uniknąć błędów przy oszacowywaniu odczytów na polach białych i czarnych, posiadają niektóre łaty dwa rzędy przesuniętych względem siebie pól, jak to uwidoczniło na rys. 113a. Łaty do niwelacji precyzyjnej mają z reguły podział półcentymetrowy, kreskowy. Do pionowego ustawienia łat posługujemy się pionem, korzystniej jest jednak zaopatrzyć łatę w libelę pudełkową (rys. 113b), której płaszczyzna główna powinna być prostopadła do płaszczyzny łaty zawierającej podział. W tym celu musimy mieć możliwość rektyfikacji libeli przy pomocy odpowiednich śrubek. U dołu łata zaopatrzona jest w stopę (okucie żelazne), co zabezpiecza ją przed



uszkodzeniem, a tym samym przed przesunięciem jej punktu zerowego. W celu uzyskania dobrych wyników podczas niwelacji ustawiamy łąty na podstawkach metalowych (rys. 113c).

### § 5. Sprawdzenie i rektyfikacja instrumentu niwelacyjnego

Aby instrument niwelacyjny był przydatny do użytku polowego, powinny być spełnione następujące warunki:

1) Oś celowa lunety  $c$  ma być równoległa do osi libeli niwelacyjnej  $l$  lub — o ile oś celowa lunety nie leży w płaszczyźnie łuku libeli — równoległa do płaszczyzny, przechodzącej przez oś libeli, a prostopadłej do płaszczyzny łuku libeli, tj. do tzw. płaszczyzny głównej libeli (co przy użyciu wymaga jednak, aby oś instrumentu  $i$  była pionowa);

2) osie libel alhidadowych (względnie płaszczyzna główna libeli pudełkowej) powinny być prostopadłe do osi instrumentu  $i$ ;

3) oś libeli niwelacyjnej  $l$  musi być prostopadła do osi instrumentu  $i$ , szczególnie gdy przyrząd nie posiada śruby elewacyjnej  $E$ ; wreszcie dodatkowo

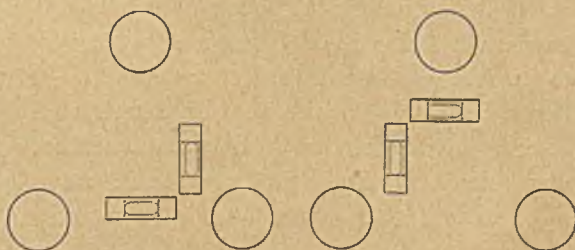
4) nitka poprzeczna (wzgl. nitki poprzeczne) siatki lunety powinna być prostopadła do osi instrumentu  $i$ , zaś nitka podłużna (pionowa) prostopadła do poprzecznej.

Zbadanie, czy oś celowa lunety leży w płaszczyźnie łuku libeli niwelacyjnej (sposobem bezpośrednim), jest możliwe tylko w typach III i IV (tj. w przypadkach, gdy libelę złączoną z lunetą można nieznacznie obrócić dokoła osi geometrycznej lunety).

Rektyfikacja typu pierwszego.

Należy zaznaczyć, że sposób przeprowadzenia rektyfikacji typu I odnosi się także do wszystkich innych typów i dlatego jest niezmiernie ważny.

Rektyfikację rozpoczynamy od sprawdzenia warunku 2), z którym łączy się ściśle zadanie ustawienia osi instrumentu  $i$  pionowo. Jeżeli statyw jest krążkowy, należy nieco zwolnić śrubę, ściskającą sprężynę, po czym tak obrócić alhidadę, aby jej libelki zajęły położenie, wskazane na rys. 114a.



Rys. 114a.

Rys. 114b.

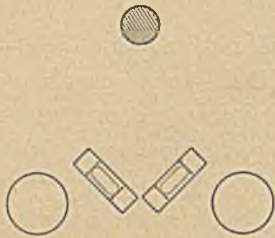
(Kółka przedstawiają śruby ustawcze). Po sprowadzeniu osi libeli do poziomu śrubami ustawczymi  $U$ , obracamy alhidadę do jej diametralnie odwrotnego położenia (o  $180^\circ$ ), otrzymując wynik, uwidoczony na rys. 114b.

Chcąc uzyskać pionowe położenie osi  $i$  należy, ze względu na teorię libeli, usunąć połowę wychylenia środka bańki (z punktu głównego) każdej libeli śrubkami korekcyjnymi  $K$ , a następnie ustawić oś  $i$  pionowo, sprowadzając śrubami  $U$  środki baniek do punktów głównych, po czym ostrożnie dokręcamy śrubę



działającą na sprężynę, ustalając położenie przyrządu na statywie. Dla kontroli powtarzamy czynność tę raz jeszcze, poprawiając ewentualnie wynik.

W przypadku, gdy statyw instrumentu jest czopowy, a limbus połączony ze spodarką łożyskiem kulistym, mogą być tylko dwie śruby i jedna lub dwie sprężyny, które podczas wkręcania lub wykręcania śrub działają również jak śruby. W przypadku dwu śrub i jednej sprężyny zaczynamy od pozycji, uwidocznionej na rys. 115, po czym postępujemy jak wyżej. (Czarne kółko oznacza sprężynę, zastępującą śrubę). Przy dwu śrubach i dwu sprężynach sprawa nie wymaga objaśnień.

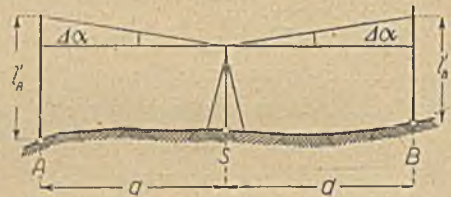


Rys. 115.

Po przeprowadzeniu tych czynności sprawdzamy warunek 4), badając, czy nitka podłużna zgadza się z kierunkiem pionu, lub czy podczas obrotu instrumentu około osi  $i$  nitka poprzeczna (pozioma) przechodzi na całej swej rozciągłości przez jeden i ten sam punkt.

Sprawdzenie warunku 1). Obieramy na terenie płaskim dwa punkty  $A$  i  $B$  (rys. 116) w odstępnie około 80 m i ustawiamy instrument w punkcie  $S$  równoodległym od  $A$  i  $B$ . Czynności dalsze są zależne od tego, czy a) przyrząd posiada śrubę elewacyjną  $E$ , b) czy też jej nie ma.

a) Po ustawieniu na stanowisku  $S$  osi instrumentu do pionu, kierujemy lunetę na łąkę, umieszczoną w punkcie  $A$ , usuwamy paralaksę, a po sprowadzeniu bańki libeli niwelacyjnej do punktu głównego, odczytujemy na łące  $l'_A$ ; następnie kierujemy lunetę w przeciwnym kierunku odczytując, po sprowadzeniu bańki libeli niwelacyjnej do punktu głównego (o ile zeń wyszła),  $l'_B$  na łące w punkcie  $B$ . Jeżeli oś celowa  $c$  zawiera z osią libeli  $l$  pewien kąt  $\Delta\alpha$ , to jest on w obu położeniach ten sam, zatem odczyty wykonane na obu łąkach są z tego powodu błędne o tę samą wielkość  $d\Delta\alpha$ . Ostatecznie więc będzie wzniesienie punktu  $B$  nad punktem  $A$ :



Rys. 116.

$$h_A^B = l'_A - l'_B, \quad (4)$$

przy czym wzniesienie to jest wolne od wpływu błędu nierównoległości osi celowej do osi libeli.

Następnie ustawiamy się w odległości kilku metrów od jednego z punktów, np.  $A$ , sprowadzamy oś instrumentu do pionu i przy poziomej osi libeli niwelacyjnej celujemy do łąki w  $A$ <sup>1)</sup>, otrzymując  $l_A$ . Odczyt ten możemy

<sup>1)</sup> O ile luneta posiada wyciąg okularowy, można zbliżyć się tak do łąki, aby tylko jeszcze obraz jej był wyraźny. O ile natomiast mamy do czynienia z lunetą systemu Wilda (z soczewką ogniskującą), nie należy ustawiać instrumentu bliżej, niż około 5 m, gdyż celowa jest tam krzywą 4 rzędu (p. rozdział III).



uważać za bezbłędny, ze względu na bliskość łaty od przyrządu i bardzo mały kąt  $\Delta\alpha$ .

Mając wzniesienie  $h_A^u$  na podstawie związku (4) oraz bezbłędny odczyt  $l_A$ , otrzymujemy bezbłędny odczyt łaty  $B$ :

$$l_B = l_A - h_A^u. \quad (5)$$

Jeżeli celowa przy poziomej osi libeli dostarcza nam takiego właśnie odczytu, jest to dowodem, że oś libeli  $l$  i celowa  $c$  są do siebie równoległe. W przeciwnym razie, należy śrubą elewacyjną  $E$  nastawić lunetę na obliczony odczyt  $l_B$ , a środek bańki, który przy tej czynności opuścił punkt główny, sprowadzić doń z powrotem śrubką korekcyjną  $K$ . Dla kontroli należy jeszcze raz powtórzyć drugą część rektyfikacji.

b) Jeżeli instrument nie posiada śruby elewacyjnej  $E$ , należy go tak ustawić, aby jedna ze śrub ustawczych  $U$  znalazła się w kierunku prostej  $AB$ . Po przybliżonym ustawieniu osi instrumentu do pionu libelami alhidadowymi, należy ją dokładniej ustawić do pionu przy pomocy libeli niwelacyjnej. Szczególnie zależeć nam musi na zachowaniu pionu w płaszczyźnie  $AB$ . Wprowadzamy tedy lunetę do kierunku  $AB$ , sprowadzamy środek bańki libeli niwelacyjnej dokładnie do punktu głównego za pomocą śruby ustawczej znajdującej się na linii  $AB$ , następnie obracamy lunetę o  $180^\circ$  i połowę ewentualnie powstałego wychylenia bańki usuwamy śrubką korekcyjną libeli  $K$ , po czym sprowadzamy oś instrumentu do pionu wspomnianą śrubą ustawczą, przesuując środek bańki do punktu głównego libeli niwelacyjnej.

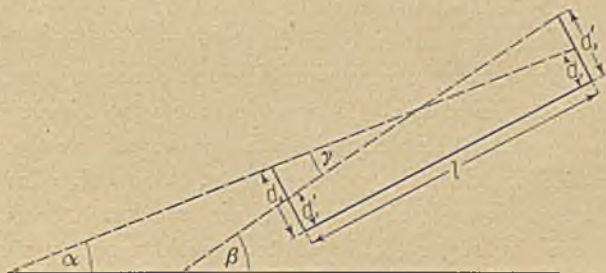
W dalszym ciągu postępujemy jak w przypadku a), z tą tylko różnicą, że nastawienie na obliczony odczyt  $l_B$  następuje przez odpowiednie przesunięcie krzyża nitkowego śrubkami  $S$ .

Rektyfikacja typu drugiego.

Rektyfikacja tego typu odbywa się z jednego stanowiska i jest bardzo prosta, o ile jeszcze dwa dodatkowe warunki są spełnione; mianowicie a) o ile pierścienie, w których spoczywa luneta, są równe i b) oś celowa lunety  $c$  jest identyczna lub conajmniej równoległa do osi geometrycznej lunety  $g$ .

a) Warunek ten sprawdza się przy pomocy libeli nasadkowej.

Przypuśćmy, że średnica  $d_2$ , większa od  $d_1$ , zajmuje położenie jak na rys. 117 i że z dwóch położen libeli otrzymaliśmy odczyty  $s_1$  i  $s_2$ , odnoszące się do środka bańki. Po przelożeniu lunety włożyskach, średnica  $d_2$  zajęła miejsce  $d_2'$ , a  $d_1$  miejsce  $d_1'$ , powodując w dwu położeniach libeli odczyty  $s_3$  i  $s_4$ .



Rys. 117.



Ponieważ wspomnianym położeniom lunety odpowiadają kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , przeto — o ile punkt zerowy podziału  $O$  znajduje się w punkcie głównym  $G$ :

$$\alpha = \frac{s_1 + s_2}{2} \omega, \quad \beta = \frac{s_3 + s_4}{2} \omega, \quad (6)$$

gdzie  $\omega$  jest wartością kątową użytej libeli nasadkowej.

Ponieważ

$$\gamma = \beta - \alpha = \frac{s_3 + s_4 - (s_1 + s_2)}{2} \omega, \text{ a zarazem } \gamma = \frac{2 \Delta d}{l},$$

przy czym  $\Delta d = d_2 - d_1$ , zaś  $l$  jest rozstawem pierścieni, przeto

$$\Delta d = \frac{s_3 + s_4 - (s_1 + s_2)}{4} l \omega. \quad (7)$$

Jeżeli kąt  $\omega$  jest (jak zazwyczaj) podany w sekundach kątowych, wówczas:

$$\Delta d = \frac{s_3 + s_4 - (s_1 + s_2)}{4} l \frac{\omega''}{\rho''}. \quad (8)$$

W przypadku gdy punkt zerowy podziału znajduje się na początku łuku libeli wzór (8) zmienia się na:

$$\Delta d = \frac{s_3 - s_4 - (s_1 - s_2)}{4} l \frac{\omega''}{\rho''}. \quad (8a)$$

Z wielkości  $\Delta d$  można osądzić, czy instrument może być użyty w praktyce i do jak dokładnych pomiarów.

b) Warunek identyczności osi celowej z osią geometryczną jest możliwy tylko w przypadku, gdy obiektyw jest scentrowany, tj. gdy jego oś optyczna jest identyczna z osią geometryczną lunety. Ponieważ nie wiemy, czy obiektyw jest dostatecznie dokładnie scentrowany, przeto przeprowadzamy rektyfikację tak, jakby chodziło tylko o uzyskanie równoległości wspomnianych osi.

Obieramy zatem dość daleki punkt (odległy kilka km), nastawiamy nań lunetę, a obracając ją w pierścieniach obserwujemy, czy środek krzyża nitkowego nie schodzi z celu. Po obrocie lunety w pierścieniach o  $180^\circ$ , usuwamy połowę odchyłki śrubkami siatki, po czym przeprowadzamy to samo postępowanie w kierunku poprzecznym. Obracając lunetę w pierścieniach, zakreślamy osią celową powierzchnię stożka, którego wierzchołek leży w odległości kilku km, który zatem praktycznie można uważać za walec. Jeżeli obiektyw jest scentrowany, oś celowa będzie identyczna z osią geometryczną, o czym można się przekonać, obierając punkt w innej odległości i powtarzając poprzednie czynności. Jeżeli się jednak okaże, że istnieje tylko równoległość wspomnianych osi, można wprawdzie podczas niwelacji lunetę przekładać w łożyskach, jednak bez obracania jej dokoła osi geometrycznej.

Właściwa rektyfikacja jest bardzo prosta i przeprowadzamy ją tylko z jednego stanowiska.



Ustawiamy oś instrumentu pionowo i przy poziomej osi libeli niwelacyjnej celujemy na łatę, ustawioną w odległości 50 do 60 m. (Podczas gdy przy rektyfikacji typu I łatę muszą stać bezwarunkowo pionowo, można rektyfikując typy inne, a więc i typ II, oprzeć łatę o mur itp., uważając tylko, by podczas rektyfikacji nie zmieniła swego położenia). Po odczycie na lacie  $o_1$ , przekładamy lunetę w łożyskach (bez obracania około osi geometrycznej), obracamy alhidadę o  $180^\circ$ , sprowadzamy środek bańki (o ile się przesunął) do punktu głównego i dokonujemy odczytu drugiego  $o_2$ . Jeżeli instrument posiada śrubę elewacyjną  $E$ , nastawiamy przy jej pomocy celową  $c$  na średnią z odczytów, a oś libeli doprowadzamy do poziomu jej śrubką korekcyjną  $K$ . Niezgodność odczytu  $o_2$  po obrocie alhidady z odczytem początkowym  $o_1$  jest tylko dowodem, że albo warunki a) i b) nie są spełnione dostatecznie dokładnie lub, że oś instrumentu nie jest pionowa. Należy zatem skontrolować warunki a) i b); gdy warunki te są spełnione, a oś  $i$  dokładnie pionowa, powinniśmy otrzymać przed i po obrocie alhidady odczyty jednakowe.

Rektyfikacja typu trzeciego.

Podobnie jak przy rektyfikacji typu II, muszą być spełnione przede wszystkim warunki a) i b) (tj. równość pierścieni lunety i identyczność, względnie równoległość osi celowej i geometrycznej). Poza tym mamy możliwość usunięcia tzw. *skrzyżowania* osi, tj. możemy sprowadzić oś geometryczną, a tym samym i oś celową, do płaszczyzny łuku libeli. Przeprowadzamy to w następujący sposób. Po sprowadzeniu do poziomu osi libeli, nałożonej na pierścienie lunety, wychylamy bardzo nieznacznie libelę wraz z lunetą około osi geometrycznej w jedną i drugą stronę; gdy bańka pozostanie w miejscu jest to dowodem, że nie ma skrzyżowania osi, w przeciwnym razie należy bocznymi śrubkami przesunąć libelę w jej metalowej oprawie, aż przy obrocie bańka pozostanie na miejscu.

Właściwa rektyfikacja może być przeprowadzona nawet bez łatę, gdy powyższe warunki są spełnione. Wystarczy bowiem przy osi pionowej instrumentu nałożyć na pierścienie lunety libelę niwelacyjną, sprowadzić środek jej bańki do punktu głównego, a następnie, po jej przerzuceniu, usunąć połowę wychyłki śrubą elewacyjną, a resztę śrubą korekcyjną libeli. Dla kontroli, czy oś instrumentu jest pionowa, można po ustawieniu lunety z libelą nad jedną ze śrub ustawczych obrócić alhidadę o  $180^\circ$ , a powstałą odchyłkę w połowie usunąć śrubą elewacyjną, a drugą połowę wspomnianą śrubą ustawczą. Zazwyczaj nie poprzestajemy na tym lecz celujemy do ustawionej łatę, postępując jak przy rektyfikacji typu drugiego.

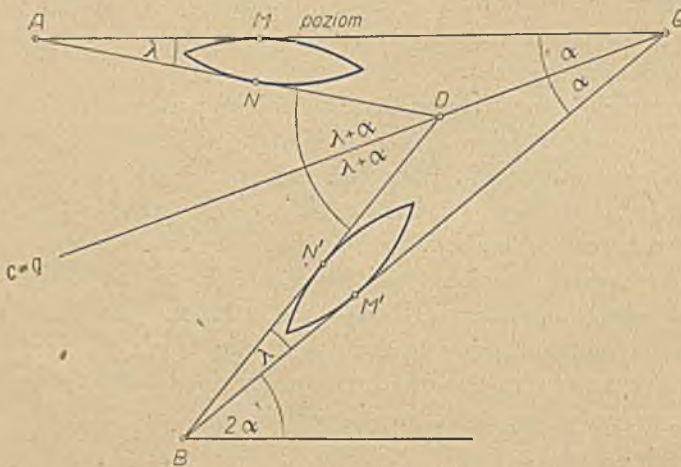
Rektyfikacja typu czwartego.

Luneta typu IV jest stale złączona z libelą rewersyjną. Jak wiadomo, libela rewersyjna posiada dwa wyszlifowane łuki przekroju głównego powierzchni obrotowej. Aby libela była przydatna do pomiarów, powinny nie tylko oba łuki (górny i dolny) znajdować się w jednej płaszczyźnie, lecz ponadto osie, odpowiadające obu łukom, muszą być równoległe. Nie dotrzymanie ściśle warunku drugiego czyni libelę rewersyjną bezużyteczną do po-



miarów. Ponadto muszą być zachowane poprzednio już omówione (typ II) warunki a) i b).

Właściwą rektyfikację przeprowadzamy z jednego stanowiska, celując (po sprowadzeniu osi instrumentu do pionu) przy poziomej osi libeli, znajdującej się np. po stronie lewej lunety, na łate i otrzymując odczyt  $o_1$ ; następnie obracamy lunetę w łożyskach (libela przechodzi na stronę prawą) i celujemy przy poziomej osi libeli ponownie na łate, otrzymując  $o_2$ . Nastawiamy teraz lunetę na średnią z obu odczytów, a bańkę libeli sprowadzamy do punktu głównego śrubką korekcyjną  $K$ . Po ukończonej rektyfikacji powinniśmy — o ile wstępne warunki są dostatecznie spełnione — obracając lunetę w pierścieniach z pierwszego położenia do drugiego, otrzymać ten sam odczyt na łacie, zaś środek bańki powinien w obu przypadkach znajdować się w punktach głównych libeli. Natomiast jeżeli po obrocie lunety w pierścieniach odczyt na łacie jest różny, jest to dowodem, że oś celowa nie jest identyczna z osią geometryczną, zaś jeżeli podczas obrotu lunety środek bańki nie zajmuje punktu głównego, dowodzi to, że istnieje skrzyżowanie osi (celowej i libeli), które usunąć można tylko bocznymi śrubkami libeli.



Rys. 118.

Żachodzi teraz pytanie, jakie jest położenie osi celowej po przeprowadzonej rektyfikacji, jeżeli obie osie libeli rewersyjnej tworzą z sobą kąt  $\lambda$ .

Niech wspólna oś (geometryczna i celowa) zawiera z poziomem kąt  $\alpha$ , zaś zbieżność obu osi libeli rewersyjnej niech wynosi  $\lambda$ . Po sprowadzeniu osi w położeniu górnym do poziomu i dokonaniu na łacie odczytu  $o_1$ , obracamy lunetę dookoła jej osi geometrycznej tak, że libela zajmie położenie dolne (rys. 118), a styczna w jej punkcie głównym  $N'$  będzie odchyłona od poziomu o kąt  $2\alpha + \lambda$ . Aby tedy sprowadzić libelę w drugim położeniu do poziomu, trzeba ją (wraz z lunetą) skrócić o kąt  $2\alpha + \lambda$ , a wówczas oś geometryczna, względnie identyczna z nią oś celowa, będzie zawierała z poziomem kąt  $\alpha + \lambda$ , któremu niech odpowie odczyt  $o_2$ . Średniej arytmetycznej z obu odczytów odpowie zatem kąt  $\frac{\alpha + \lambda - \alpha}{2} = \frac{\lambda}{2}$ . Oś celowa będzie nachylona do poziomu pod kątem, wynoszącym połowę kąta zbieżności obu osi libeli rewersyjnej.

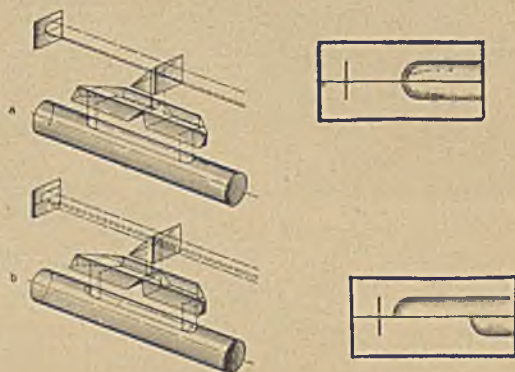


Dla skonstruowania wielkości  $\frac{\lambda}{2}$  (którą można podczas pomiarów niwelacyjnych uwzględnić) istnieją libele, które można przekładać wewnątrz ich oprawy. Lepsze urządzenie, polegające na systemie pryzmatów, odbijających obrazy końców bańki, skonstruował Wild. Urządzenie pryzmatyczne znajduje się obecnie prawie na każdym lepszym przyrządzie niwelacyjnym, przy czym szczegóły wykonania różnych fabryk wykazują nieznaczne zmiany.

Rys. 119a i b przedstawia bieg promieni, przebiegających z obu końców bańki przez urządzenie pryzmatyczne, a rys. 120 obraz ich w pryzmacie, umieszczonym ponad libelą rewersyjną. W chwili koincydencji obrazów końców bańki oś libeli jest pozioma (rys. 119a).

Ponieważ urządzenie pryzmatyczne można przesuwac odpowiednią śrubą wzdłuż libeli, przeto i punkty główne libeli rewersyjnej mogą być w ten sposób zmienione.

Chcąc zrektyfikować libelę rewersyjną (usunąć kąt zbieżności  $\lambda$ ), przeprowadzamy bardzo dokładnie rektyfikację typu IV jako typu I (przy użyciu tylko jednego łuku libeli). Następnie obracamy lunetę z libelą dokoła osi geometrycznej (obecnie już poziomej) i, jeżeli nie uzyskamy koincydencji obrazów końców bańki, usuwamy połowę odchyłki śrubką korekcyjną  $K$ , zaś drugą połowę przez przesunięcie całego urządzenia pryzmatycznego odpowiednią śrubą. Czynność tę należy przeprowadzić kilka razy.



Rys. 119.

Rys. 120.

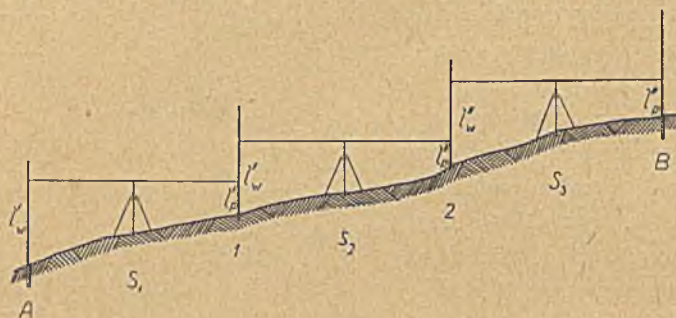
## § 6. Ciąg niwelacyjny

Rzadko kiedy można wyznaczyć różnicę wysokości dwóch punktów z jednego stanowiska, jak to ma miejsce przy rektyfikacji typu I. Zazwyczaj trzeba będzie obrać większą ilość stanowisk, tak że względu na dzielącą wspomniane punkty odległość, jak i różnicę ich wysokości; w ten sposób powstaje *ciąg niwelacyjny* między dwoma punktami.

Jak wiadomo z rektyfikacji typu I, nierównoległość osi celowej i libeli nie ma wpływu na wynik niwelacji, o ile instrument umieszczono w równej odległości od obu łąt, ponadto i wpływ skrzyżowania tych osi zanika, jeżeli oś instrumentu jest pionowa. Dlatego, mając przeprowadzić niwelację między dwoma punktami  $A$  i  $B$ , wybieramy tak stanowiska przyrządu, aby na każdym z nich odległość od łąty znajdującej się za nami, czyli *łąty wstecz*, była równa odległości instrumentu od łąty znajdującej się przed nami, czyli *łąty w przód*. W przypadku gdy to nie jest możliwe, należy się starać, aby przynajmniej



sumy odległości do lat wstecz i w przód były sobie równe. Ponadto powinno się niwelować przy pionowo ustawionej osi instrumentu (gdy instrument posiada śrubę elewacyjną, wystarczy ustawienie przy pomocy libel alhidadowych; gdy jej nie ma, należy usunąć niepionowość osi przy pomocy libeli niwelacyjnej). Dla pionowego ustawienia łąty posługujemy się libelami pudełkowymi lub pionami; łąty ustawia się na punktach niezmiennających swej wysokości (palikach itp.), najlepiej na specjalnych podkładkach.



Rys. 121.

Na rys. 121 mamy schematycznie przedstawione kolejne położenia przyrządu i łąty przy niwelacji ciągu.

Wzniesienie punktu 1 nad punktem  $A$  otrzymujemy (wedle poprzednich uwag):

$$h_A^1 = l_w' - l_p';$$

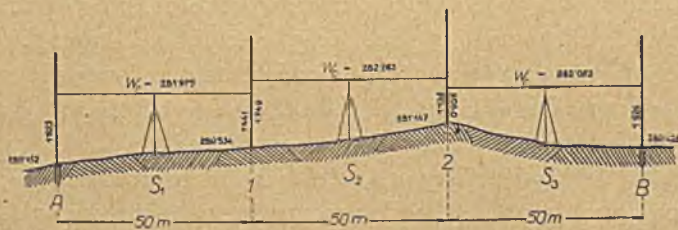
analogicznie

$$h_1^2 = l_w'' - l_p'', \text{ itd.}$$

zatem wzniesienie punktu  $B$  nad punktem  $A$  jest (w założeniu równoległości poziomów geodezyjnych):

$$h_A^B = \Sigma h = \Sigma l_w - \Sigma l_p. \quad (9)$$

Wzniesienie punktu  $B$  nad punktem  $A$  jest zatem — o ile przeprowadzamy niwelację z  $A$  do  $B$  — różnicą między sumą łąt wstecz i sumą łąt w przód.



Rys. 122.

Obliczenie wysokości punktu  $B$  na podstawie znanej wysokości punktu  $A$  i ciągu niwelacyjnego z  $A$  do  $B$  może być przeprowadzone w dwojaki sposób: a) przy pomocy obliczenia wysokości celowych na poszczególnych stanowiskach instrumentu, b) przy pomocy wzniesień między stanowiskami łąt.



Wzory, którymi posługujemy się w obu przypadkach są:

$$a) \quad H_1 = W_c' - l_p', \quad H_2 = W_c'' - l_p'', \text{ itd.}$$

przy czym

$$W_c' = H_A + l_w', \quad W_c'' = H_1 + l_w'', \text{ itd.} \quad (10)$$

$$b) \quad H_1 = H_A + h_A^1, \quad H_2 = H_1 + h_1^2 = H_A + h_A^2, \text{ itd.} \quad (11)$$

Na rys. 122 uwidoczniono schematycznie przykład ciągu niwelacyjnego.

Obliczenia szczegółowe według a) i b) podano poniżej w dziennikach niwelacyjnych.

a)

Stano- wisko	Punkt	Odle- głość m	Odczyt na lacie			Wysokość horyzontu $w_c$	Wysokość ponad poziom po- równawczy	Punkt	SZKIC (nawiązanie, sytuacja terenu)
			wstecz	w bok	w przód				
1	2	3	4			5	6	7	8
$S_1$	A		1,823			280,975	281,152	A	
	1	50			1,441		280,534	1	
$S_2$	1		1,749			282,283			
	2	50			1,136		281,147	2	
$S_3$	2		0,905			282,052			
	3	50			1,624		280,428	3	

b)

Stano- wisko	Punkt	Odle- głość m	Odczyt na lacie			Wzniesienie $h_i^k$	Wysokość ponad poziom po- równawczy	Punkt	SZKIC
			wstecz	w bok	w przód				
1	2	3	4			5	6	7	8
$S_1$	A		1,823				280,152	A	
	1	50			1,441	0,382	280,534	1	
$S_2$	1		1,749						
	2	50			1,136	0,613	281,147	2	
$S_3$	2		0,905						
	3	50			1,624	-0,719	280,428	3	

Sprawdzenie pracy polowej może być uskutecznione w różny sposób. I tak można niwelować na dwu różnych podziałach łąty, na dwie łąty odczytywane wstecz i w przód, wreszcie, przy użyciu typów II, III i IV, w dwu położeniach lunety.



Poza tym można kontrolować wyniki, przeprowadzając niwelację drogą powrotną (przez co powstają pary spostrzeżeń), wracając do punktu początkowego drogą okrężną (stała suma), lub nawiązując się na początku i na końcu ciągu do punktów o znanej wysokości nad p. m. (znaków wysokości, reperów, (p. § 7).

### § 7. Znaki wysokości, repery

Każde cywilizowane państwo przeprowadza na swoim obszarze *niwelację ściśle*, tj. uwzględniającą nierównoległość poziomów geodezyjnych. Pomiar te są nawiązane, o ile państwo posiada wybrzeże, do średniego stanu morza, w przypadku przeciwnym do wyników niwelacyjnych państwa sąsiedniego.



Rys. 123.



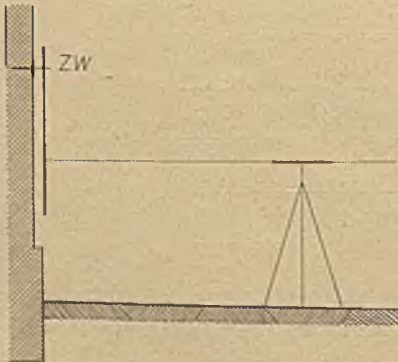
Rys. 124.



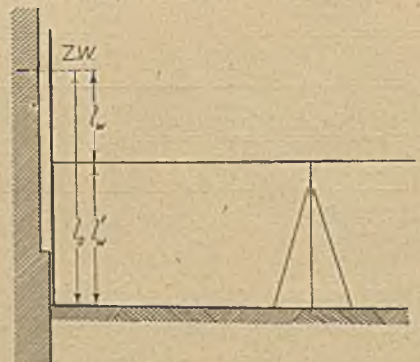
Rys. 125.

Średni stan morza uzyskuje się na podstawie długoletnich obserwacji dziennych (przy pomocy tzw. limnigrafów lub mareografów), z których tworzymy stany średnieienne, miesięczne i roczne.

Po wyznaczeniu średniego stanu morza, ustala się na wybrzeżu pewien



Rys. 126.



Rys. 127.



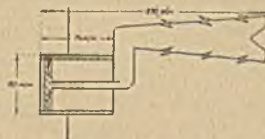
punkt wysokości jako wyjściowy i przeprowadza na obszarze całego kraju niwelację ścisłą, wyznaczając punkty wysokości.

Rodzaje znaków wysokości podane są: na rys. 123 znak niemiecki, na rys. 124 znak francuski i na rys. 125 znak polski.

Prócz znaków wysokości (pochodzących z niwelacji ścisłej), zakłada się jeszcze, szczególnie w miastach i miasteczkach, bolce niwelacyjne (rys. 128 i 129), a wzdłuż rzek i dróg repery. Repery zakładane wzdłuż dróg są to niskie słupy betonowe z umieszczonym na szczycie zaokrąglonym trzpieniem



Rys. 128.



Rys. 129.

metalowym; jako reperów rzecznych używa się zazwyczaj stosunkowo cienkich słupów żelaznych wkręcanych w żwir rzeczny.

Nawiązanie do znaków wysokości, używanych w Polsce, następuje przy pomocy liniału metalowego, zawieszono na trzpieniu, umieszczonym w otworze znaku wysokości (rys. 126). O ile nie posiadamy liniału, nawiązujemy się do Z. W. w sposób, podany na rys. 127. Mianowicie lata wstecz wynosi  $l_w = l_o - l_w'$ , przy czym  $l_o$  odczytujemy bezpośrednio lub pośrednio przy pomocy instrumentu.

### § 8. Profil podłużny

Profil *podłużny* jest to przekrój terenu pionową powierzchnią walcową, która w pewnych przypadkach może być zastąpiona szeregiem płaszczyzn pionowych lub nawet jedną płaszczyzną pionową. Zależnie od wymienionych przypadków, śladem poziomym przekroju może być łuk kołowy, wielobok lub prosta, które to elementy stanowią zazwyczaj oś projektu technicznego na gruncie. Dla rysunkowego przedstawienia profilu rozwijamy go w jednej płaszczyźnie. (Rys. 131).

Na wykonanie profilu podłużnego składają się następujące czynniki: wytyczenie osi profilu, zaznaczenie na niej szeregu punktów charakteryzujących profil, pomiar długości (tj. odstępów poszczególnych punktów profilu od punktu początkowego), a wreszcie wyznaczenie wysokości obranych punktów.

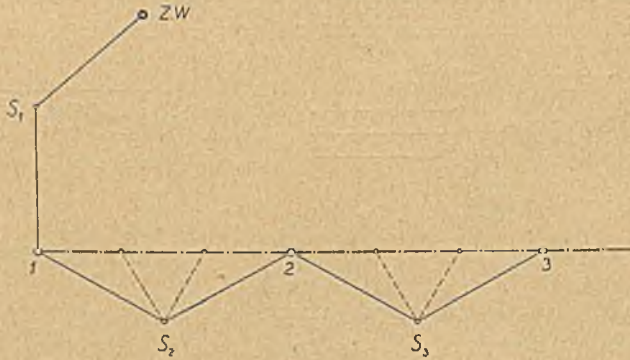
Wytyczenie osi profilu omówiono w rozdziale XII (tyczenie tras).

W sprawie obioru punktów profilu decyduje rodzaj terenu. Jeżeli partie terenu wykazują pochylenie jednostajne, wystarczy obierać punkty profilu w równych odstępach (w terenie zupełnie płaskim co 50 m, dochodząc do 10 m w terenie pagórkowatym), natomiast, o ile teren wykazuje w swej strukturze nieregularności, należy obierać jako punkty profilu punkty charakteryzujące teren (punkty charakterystyczne), tj. punkty, w których zmienia się nachylenie terenu.



Obrane punkty zaznacza się palikami lub palami, zależnie od ich znaczenia dla celów technicznych.

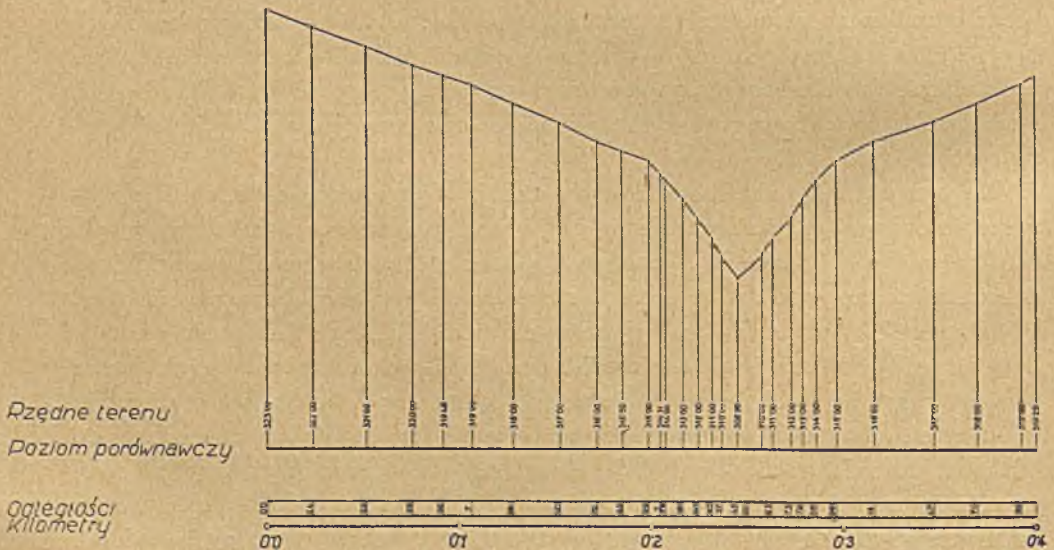
Odstępy poszczególnych punktów od punktu początkowego mierzymy łanami lub taśmą stalową, najmniej dwa razy (tam i z powrotem). Dłuższe profile wymagają oznaczenia punktów w kilometrach i hektometrach (np. 1,4+25,0 oznacza, że punkt ów jest odległy od początku o 1425,0 m).



Rys. 130.

Przed przystąpieniem do niwelacji profilu należy instrument zrektyfikować: następnie nawiązujemy się do najbliższego znaku wysokości (bolca miejscowego lub reperu), po czym następuje właściwy pomiar wysokości, który różni się od pomiaru ciągu niwelacyjnego głównie tym, że z jednego stanowiska odczytujemy nie tylko łąkę wstecz i w przód, ale także jedną lub więcej

Powiaty  
Gminy



Rys. 131.

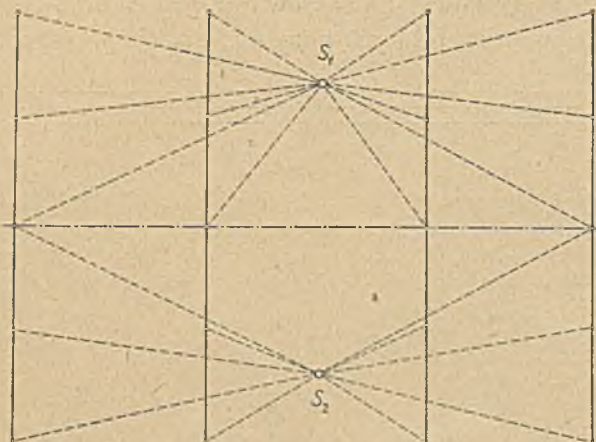






- a) metoda profilów poprzecznych,
- b) metoda punktów rozproszonych,
- c) niwelacja na podstawie danej sytuacji poziomej.

a) Mając daną oś profilu podłużnego, wytyczamy krótkie (z reguły prostopadle) *profile poprzeczne*, przy czym w terenie o jednostajnie nachylonych partiach, obieramy je w równych odstępach, np. co 10, 20 lub 50 m, natomiast w terenach o konfiguracji zmiennej tak, aby uchwycić



Rys. 133.

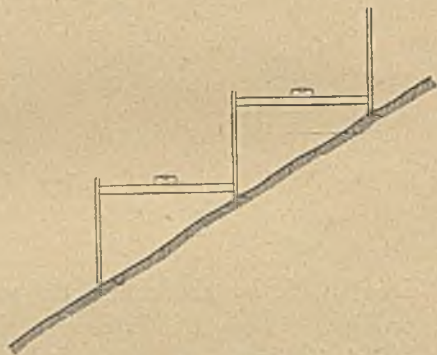
ważniejsze zmiany nachyleń terenu także i poza osią. Przy zdjęciach dla projektów dróg, kanałów kolei itd. wytyczamy profile tak gęsto, aby można było na ich podstawie obliczyć objętości robót ziemnych.

Dziennik zdjęcia prowadzimy dla każdego profilu poprzecznego osobno, lepiej nawet pisać na lewych stronach lewe części profilów, zaś na prawych stronach prawe części profilów.

Teren, nachylony silnie w kierunku poprzecznym do osi, wymaga czasem kilku stanowisk w kierunku poprzecznym, z których zdejmujemy części kilku profilów, wbijając w skrajnie widocznych punktach paliki, mające nam posłużyć do dalszego nawiązania się (rys. 133).

Ponieważ tego rodzaju praca połowa staje się tym mniej ekonomiczna, im więcej wymaga stanowisk, przeto można w przypadkach bardzo stromego spadku poprzecznego, użyć w miejsce instrumentu niwelacyjnego, przyrządu składającego się z trzech lat (rys. 134).

Przyrząd ten składa się z jednejłaty poziomej 4 m długiej i dwu lekkich lat pionowych 3-metrowych. Dołaty poziomej przytwierdza się libelę (o stosunkowo dużej wartości katowej 5' do 10'). Rektyfikacjęłaty z libelą przeprowadza się na dwóch palikach, wbitych w odstępnie 4 m od siebie, albo przy pomocy instrumentu niwelacyjnego lub przez przełożeniełaty z libelą (połowę odchyłki usuwa się śrubą libeli, a drugą połowę przez pobicie jednego z palików).



Rys. 134.

Do wytyczania profilów używamy węgielnic pryzmatycznych lub bębnowych. W łukach, w których obrano punkty w odstępach równych, tyczymy



dla profilu poprzecznego w punkcie  $J$  (rys. 135) prostopadłą do cięciwy, poprowadzonej przez punkt przedostatni  $H$  i ostatni  $K$ . Natomiast, jeżeli długości  $HJ$  i  $JK$  nie są równe, należy obliczyć odstęp (rys. 136):

$$e_H = \frac{(HJ)^2}{2r}, \quad e_K = \frac{(JK)^2}{2r}, \quad (12)$$

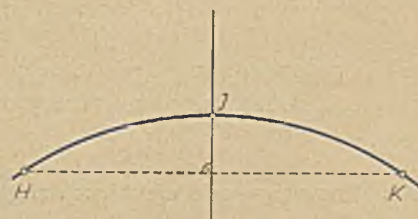
odmierzyć je na zewnątrz łuku z punktów  $H$  i  $K$ , a po uzyskaniu prostej  $H'JK'$ , poprowadzić do niej prostopadłą w punkcie  $J$ .

Metoda profilów poprzecznych nadaje się szczególnie przy zdejmowaniu długich a wąskich pasów, jak to bywa przy trasach dróg, kolei, kanałów itp.

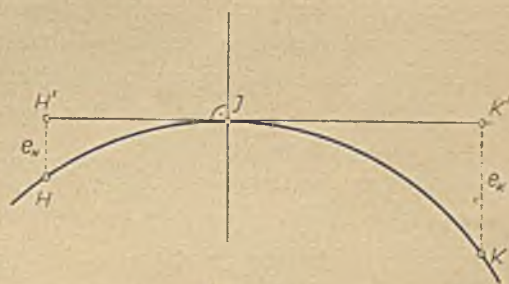
b) Nie zawsze można tak założyć profile poprzeczne, aby niwelacja ich oddała konfigurację terenu dostatecznie dokładnie. W takich przypadkach zakładamy profile poprzeczne, które równocześnie służą do odrzutowania na nie punktów charakterystycznych terenu, znajdujących się poza nimi. Najlepiej obrać najpierw punkty charakterystyczne, wytyczyć profile poprzeczne i wykonać pomiar sytuacji poziomej punktów, a następnie je zaniwelować. Jak widać, metoda ta wymaga sporządzenia bardzo dokładnego szkicu, na którym każdy punkt musi mieć swój numer. Zamiast wyżej opisanego sposobu, można także użyć jako podstawę zdjęcia *sieci kwadratów* o odpowiedniej wielkości boków. W razie, gdy wierzchołki kwadratów nie wystarczają do oddania konfiguracji terenu, wybieramy punkty dodatkowe i rzutujemy je na boki kwadratów. Przy użyciu tego sposobu należy również wykonać najpierw zdjęcie sytuacji punktów, odpowiednio je ponumerować, a po tym z odpowiednich stanowisk zaniwelować, wpisując wyniki przy każdym punkcie, zaznaczonym na szkicu.

c) Trzecia metoda polega na uzupełnieniu zdjęcia poziomego niwelacją. Wskazane jest założenie na całym obszarze zdjęcia szeregu punktów, które należy zaniwelować osobno. Punkty te, po przeprowadzeniu wyrównania, będą służyły jako punkty nawiązania przy niwelacji reszty punktów. Wyniki tej drugiej niwelacji najlepiej zaznaczać na szkicu sytuacyjnym, choć dla kontroli dobrze jest prowadzić i dla nich osobny dziennik niwelacyjny.

Z niwelacją powierzchniową łączy się ściśle sprawa wykreślenia *warstwic* (isohyps), tj. linii równego poziomu. Punkty, znajdujące się w jednym pozio-



Rys. 135.

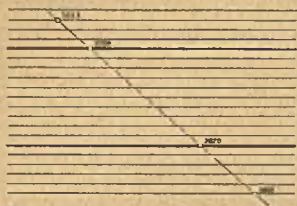


Rys. 136.



mie, wyznaczamy przy pomocy interpolacji, przy czym należy uważać, żeby ją przeprowadzić po linii największego spadku (lub do niego zbliżonej).

Odstęp warstwic wynosi od 0,25 do 50 m; i tak, dla projektów melioracyjnych przyjmujemy go czasem 0,25 m, dla innych projektów inżynierskich od 1,0 do 5,0 m, zaś 10 do 50 m dla planów topograficznych.



Rys. 137.

Interpolację warstwic można przeprowadzić rachunkowo (suwak), praktyczniej jednak mechanicznie przy pomocy kalki (rys. 137), na której nakreślono szereg prostych równoległych w niewielkim odstępie, lub przyrządem inż. Sikorskiego.

Można także sporządzać profile terenu i z nich przenieść położenie punktów przecięcia się prostych (odpowiadających warstwicom) z terenem na plan sytuacyjny.

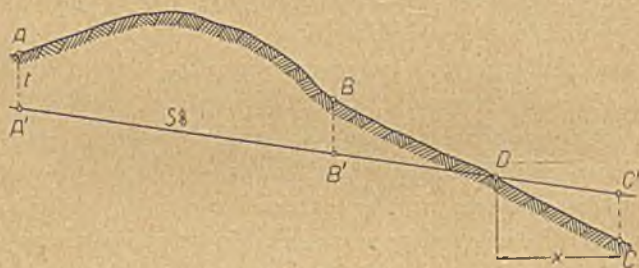
### § 10. Rozwiązywanie niektórych zagadnień inżynierskich za pomocą niwelacji

a) Tyczenie linii stałego spadku na gruncie.

Wprawdzie linię stałego spadku trasujemy z reguły na planach warstwicowych, zachodzą jednak czasem przypadki, w których nie opłaca się wykonanie planu warstwicowego, a następnie trasowanie na nim i przenoszenie projektu na grunt, lecz wykonujemy ostatnią czynność od razu w polu.

Przypuśćmy, że droga ma być wytrasowana w stałym spadku, wynoszącym  $s\%$ . Ustawiamy

w punkcie początkowym trasy  $A$  łąkę pionowo, zaś instrument (przy poziomej osi libeli) w odpowiednio do kierunku trasy i wzniesienia terenu obranym punkcie. Niech odczyt na łące w  $A$  wynosi  $l_A$ ,



Rys. 138.

wówczas należy zakreślić z  $A$  łuk taśmą stalową o długości  $d$  (np. 20 m) i tak długo przesuwając po nim łąkę, aż ujrzymy na niej odczyt  $l_A + \frac{s}{100} d$ . W analogiczny sposób postępujemy wyznaczając dalsze punkty.

b) Znaleźć miejsce wylotu rowu (o danym spadku  $s\%$ ), przechodzącego przez przeszkodę terenową.

Mamy dany sytuacyjnie i wysokościowo punkt trasy rowu  $A$  (rys. 138) i kierunek rowu. Niech głębokość rowu w punkcie  $A$  będzie  $t$ . Obieramy dwa przybliżone punkty  $B$  i  $C$  i mierzymy poziomą długość  $AB$  i  $AC$ , po czym obliczamy wysokości

$$\frac{AB}{100} s, \text{ oraz } \frac{AC}{100} s.$$



Następnie niwelujemy ciąg  $A-B-C$ . Wysokość dna rowu w punkcie  $B$  będzie:

$$H_A - \frac{AB}{100} s, \text{ zaś w punkcie } C: H_A - t - \frac{AC}{100} s,$$

zatem:

$$B'B = H_A - t - \frac{AB}{100} s - H_B, \text{ zaś } C'C = H_A - t - \frac{AC}{100} s - H_C;$$

wobec czego:

$$x = \frac{BC \cdot CC'}{B'B + CC'}. \quad (13)$$

Tę długość należy odmierzyć w kierunku z  $C$  do  $B$ , aby otrzymać punkt  $D$  (wylot rowu).

c) Do niwelacji profilów poprzecznych lub niwelacji dla celów budowlanych nie zawsze używa się instrumentów niwelacyjnych. Ze względu na wymaganą stosunkowo małą dokładność, posługujemy się często przyrządami zastępczymi.

I tak we Francji używa się przyrządu zwanego *kolimatorem* (Gouliera). Jest to przyrząd mały (zatem dogodny w praktyce), dostarczający nam poziomu przy pomocy wahadła, na którym jest umieszczony rodzaj przeziernika. Prócz tego przyrządu są w użyciu dla celów budownictwa poziomicę wodne (hydrostaty), długie rury gumowe wypełnione wodą, której poziom obserwujemy w rurkach, umieszczonych u wylotów rur. Przyrząd ten jest wygodny przy układaniu podłóg większego budynku w jednym poziomie i w t. p. przypadkach.

### § 11. Błędy występujące podczas niwelacji

Błędy występujące podczas niwelacji można podzielić na: a) przypadkowe i b) systematyczne.

#### a) Błędy przypadkowe.

Jako błędy o charakterze przypadkowym należy wymienić:

α) błędy ułożenia osi libeli do poziomu,

β) błędy odczytów na łacie.

α) Na podstawie licznych doświadczeń można przyjąć, że błąd ułożenia osi libeli do poziomu wynosi w sekundach kątowych

$$\pm 0,09 \sqrt{\omega} \quad (14)$$

(gdzie  $\omega$  jest liczbą odpowiadającą wartości kątowej libeli w sekundach kątowych). Błąd ten powoduje powstanie w odległości  $d$  (średniego) błędu wysokościowego w mm:

$$\mu_\lambda = \frac{0,09 \sqrt{\omega}}{\rho''} 1000 d = 0,00044 d \sqrt{\omega}, \quad (15)$$

lub ogólnie

$$\mu_\lambda = k d \sqrt{\omega}. \quad (16)$$

We wzorach (15) i (16) należy wstawić  $d$  w metrach dla otrzymania  $\mu_\lambda$  w mm.



β) Przechodząc do drugiego źródła błędów (odczyty na łacie), należy zauważyć, że interwał  $i$  łaty, ustawionej w odległości  $d$ , ukazuje się nam w odległości dobrego widzenia  $o$ , przy użyciu lunety o powiększeniu  $P$ , jako tzw. pozorny interwał  $J$ ; zatem

$$J = \frac{o i}{d} P. \quad (17)$$

Między błędami średnimi  $\mu_i$  i  $\mu_J$  istnieje związek:

$$\frac{\mu_i}{i} = \frac{\mu_J}{J}. \quad (18)$$

Przyjmując na  $\mu_J$  na podstawie doświadczeń następujący wzór empiryczny

$$\mu_J = \pm (m o + n J), \quad (19)$$

przy czym  $m$  i  $n$  są odpowiednimi współczynnikami, otrzymamy na  $\mu_i$  wzór:

$$\mu_i = \pm \frac{i}{J} (m o + n J), \quad (20)$$

a po wstawieniu wartości na  $J$  z wzoru (17):

$$\mu_i = \pm \left( m \frac{d}{P} + n i \right). \quad (21)$$

Na podstawie liczego materiału doświadczalnego, dostarczonego przez Reinhertza, Kummera, Lorbera i Wagnera, wyznaczył Eggert następujące wartości współczynników  $m$  i  $n$ :

$$m = 0,136, \quad n = 0,0292.$$

Uwzględniając powyższe wartości otrzymamy:

$$\mu_i = \pm \left( 0,136 \frac{d}{P} + 0,0292 i \right), \quad (22)$$

przy czym  $d$  należy wstawić w metrach, aby  $\mu_i$  otrzymać w milimetrach.

Do powyższych uwag należy jeszcze dodać, że błąd popełniony przy ocenianiu odczytu, zależy w wysokim stopniu od miejsca interwału. I tak uczy nas doświadczenie, że błąd ten jest najmniejszy, gdy nitka przecina pole interwału środkowo, zaś największy, gdy odczyt wypada w  $1/4$  lub  $3/4$  interwału (gdyż wynosi około 1,3 poprzedniego błędu). To samo odnosi się do przypadku, w którym nastawiamy nitkę na pewien odczyt na łacie. Nastawienie na środek pola interwału jest, pomijając specjalne urządzenie krzyża nitkowego (w instrumentach Wilda i Zeissa), najkorzystniejsze.

Współdziałanie obu błędów  $\mu_\lambda$  i  $\mu_i$  dostarcza nam błędu wypadkowego:

$$\mu^2 = \mu_\lambda^2 + \mu_i^2. \quad (23)$$

Kwadraty błędów  $\mu_\lambda$  i  $\mu_i$  są:

$$\mu_\lambda^2 = k^2 d^2 \omega, \quad \mu_i^2 = \frac{m^2 d^2}{P^2} + 2 \frac{m n i}{P} d + n^2 i^2,$$



zatem

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left( k^2 \omega + \frac{m^2}{P^2} \right) d^2 + 2 m n \frac{i}{P} d + n^2 i^2 = \\ &= \left( 0,0185 \frac{1}{P^2} + 0,000000194 \omega \right) d^2 + 0,00794 \frac{i}{P} d + 0,00085 i^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Dla pewnego przyrządu i łąty (zatem dla stałych wielkości  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $P$  oraz  $i$ ) będzie ogólnie

$$\mu^2 = \alpha + \beta d + \gamma d^2, \quad (25)$$

przy czym  $\alpha = 0,00085 i^2$ ,  $\beta = 0,00794 \frac{i}{P}$ ,

$$\gamma = 0,0185 \frac{1}{P^2} + 0,000000198 \omega. \quad (26)$$

Powiększenie lunety i wartość kątowna libeli powinny być odpowiednio ustosunkowane, jeżeli przyrząd ma być celowo zbudowany; dlatego też w praktyce ustaliły się następujące typy (zacytowane z Jordana-Eggerta):

Przyrząd niwelacyjny	$\omega$	$P$	$i$
1 do niwelacji ścisłej . . . .	5''	40	1/2 cm
2 do dokładnej, choć nie ścisłej	10-15''	30	1
3 o średniej dokładności . . .	20''	25	1
4 do profilów podłużnych itp. .	30''	15-20	1
5 do profilów poprzecznych itp.	40-50''	10	1

Przyjmując podczas wykonywania niwelacji jednakową długość celowych  $d$  na wszystkich stanowiskach ciągu o długości  $L$ , otrzymujemy na każdym stanowisku po dwa błędy śr.  $\mu$ , zatem jeżeli na ciąg  $L$  przypadło  $n$  stanowisk, jest

$$L = 2 n d, \quad (27)$$

zaś błąd średni  $\mu_L$  ciągu  $L$  da się wyrazić wzorem

$$\mu_L^2 = 2 n \mu^2; \quad (28)$$

rugując z (28)  $2 n$  przy pomocy (27), otrzymujemy

$$\mu_L = \mu \sqrt{\frac{L}{d}} = (\mu) \sqrt{L}. \quad (29)$$

Na tej podstawie przyjmujemy wagi dla ciągów niwelacyjnych o różnej długości (wykonanych w tych samych warunkach):

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'}, \quad (30)$$

Przyjmując długość ciągu  $L'$  równą 1 km, otrzymujemy wagę tego ciągu



równą jedności, a tym samym możemy tworzyć wagi dla ciągów o różnej długości wedle wzoru:

$$p = \frac{1}{L} \quad (31)$$

(gdzie  $L$  jest liczbą odpowiadającą ilości kilometrów ciągu).

Natomiast w przypadkach, gdy część ciągu przebiega nad dolinami, a część nad górami, przyjmujemy wagi nieco inaczej, mianowicie wedle związku:

$$\frac{1}{p} = \alpha L + \beta h^2, \quad (32)$$

przy czym  $\alpha$  i  $\beta$  są współczynnikami, które przyjmujemy na podstawie pomiarów prowizorycznych, zaś  $h$  jest odpowiednim wzniesieniem.

Ze sprawą tą łączy się obiór najkorzystniejszej długości celowej dla niwelacji, mającej się wykonać pewnym przyrządem. Wstawiając do wzoru (29) wartość na  $\mu$  z wzoru (25) otrzymujemy:

$$\mu_L = \sqrt{(\alpha + \beta d + \gamma d^2) \frac{L}{d}} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{d} + \beta + \gamma d\right) L}. \quad (33)$$

Długość celowej  $d$ , dla której  $\mu_L$  będzie najmniejsze znajdujemy, przyrównując pochodną  $\mu_L$  względem  $d$  do zera:

$$-\frac{\alpha}{d^2} + \gamma = 0$$

lub

$$d_o = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (34)$$

Po wstawieniu wartości za  $\alpha$  i  $\gamma$  zmienia się wyrażenie na  $d_o$  następująco:

$$d_o = \frac{2,094 \text{ } i \text{ } P}{\sqrt{95,4 + 0,001 \omega P^2}} = \frac{2,094 \text{ } i}{\sqrt{\frac{95,4}{P^2} + 0,001 \omega}}. \quad (35)$$

$d_o$  otrzymujemy w metrach wstawiając do wzoru (35)  $\omega$  w sekundach kąt., zaś  $i$  w milimetrach.

Na podstawie wzoru (35) można ułożyć następującą tabelę:

$\omega$ "	$P$	$i$ mm	$d_o$ m	$\mu_L$ mm
5	40	5	41	1,4
12,5	30	10	61	2,4
20	25	10	52	2,6
30	17,5	10	36	3,0
45	10	10	21	4,0

Zauważyć jednak należy, że powiększenie długości celowej wpływa stosunkowo nieznacznie na błąd ciągu  $\mu_L$ .



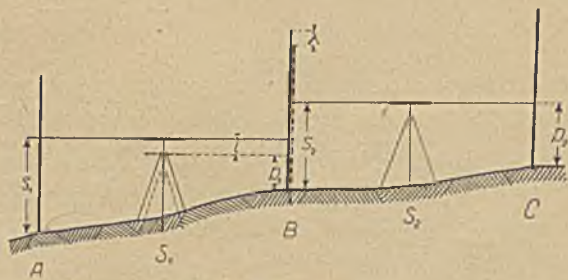
b) *Błędy systematyczne.*

Jako najważniejsze przyczyny wywołujące błędy systematyczne podczas niwelacji można wymienić:

- α) osiadanie łąty i instrumentu podczas pomiaru,
- β) zakrzywienie ziemi,
- γ) refrakcja,
- δ) nierównoległość osi libeli i celowej,
- ε) skrzyżowanie osi libeli i celowej,
- ζ) błędy podziału łąty,
- η) pochylenie łąty,
- θ) fizjologiczne błędy oczu.

α) Podczas trwania obserwacji na jednym stanowisku może tak przyrząd jak i łąta obniżyć się, czyli osiąść nieco w terenie.

Przypuśćmy, że przy wykonywaniu niwelacji na stanowisku  $S_1$  po odczytaniu łąty wstecz  $s_1$  instrument obniżył się o  $i$  (rys. 139); wówczas odczyt na łącie w przód  $p_1$  będzie o tę wielkość za mały. Przypuśćmy następnie, że w czasie przenoszenia instrumentu na stanowisko  $S_2$  łąta w  $B$  obniżyła się o  $\lambda$ , wówczas odczyt na łącie wstecz  $s_2$  będzie za duży. W rezultacie będzie wzniesienie  $h_A^C$  za wielkie o  $\tau = i + \lambda$ , gdyż



Rys. 139.

różnica  $\Sigma s - \Sigma p$  będzie za duża o  $\tau$  ( $\Sigma s$  za duża o  $i$ , zaś  $\Sigma p$  za mała o  $\lambda$ ).

O ile niwelujemy tam i z powrotem, otrzymujemy, oznaczając (błędne) wzniesienie uzyskane drogą z  $A$  do  $C$  przez  $h'$ , zaś z  $C$  do  $A$  przez  $-h''$  (po zmianie znaku), różnicę

$$d = h' - h'' \quad (36)$$

Pomijając błędy przypadkowe i inne systematyczne otrzymamy:

$$d = 2\tau \quad (37)$$

Do takiego samego wyniku dochodzimy w poligonach niwelacyjnych zamkniętych.

β) Wpływ zakrzywienia ziemi w odległości  $d$  od instrumentu wynosi:

$$\frac{d^2}{2r} \quad (38)$$

(przy czym  $r$  jest średnim promieniem ziemskim); błąd powstający z tego powodu znosi się, o ile odległości łąty wstecz i w przód będą jednakowe i niezbyt długie.

γ) Błąd powstały wskutek refrakcji da się określić wzorem:

$$k \frac{d^2}{2r} \quad (39)$$



o ile długość celowej wynosi  $d$  (przy czym  $k$  jest współczynnikiem refrakcji, porównaj rozdział XIV, Trygonometryczny pomiar wysokości).

Błąd ten znosi się w terenie poziomym przy jednakowych odległościach lat wstecz i w przód od instrumentu, wynosi natomiast w terenie pochyłym — z powodu zmiany współczynnika  $k$  — na jednym stanowisku:

$$- d^2 \frac{\Delta k}{2r}, \quad (40)$$

zaś na  $n$  stanowiskach

$$- n d^2 \frac{\Delta k}{2r}. \quad (41)$$

Wzór (41) można podać w innej formie, mianowicie zastępując w nim przy długości ciągu  $L = 2nd$  ilość  $n$  przez  $\frac{L}{2d}$ , zatem:

$$- Ln \frac{\Delta k}{4r}. \quad (42)$$

Błąd z tego powodu może w górskich okolicach osiągnąć poważną wielkość.

δ) Błąd powstający wskutek nierównoległości osi celowej i libeli nie ma wpływu na wyniki niwelacji przy równych odległościach lat od instrumentu.

ε) Natomiast błąd, powstający wskutek istniejącego skrzyżowania osi libeli i osi celowej, nie ma wpływu na wynik niwelacji tylko wtedy, gdy oś instrumentu jest pionowa.

ζ) Błędy podziału łąty mogą być poważnym źródłem błędu i to tak gdy długość całkowitej łąty jest nieodpowiednia, jak i w przypadku lokalnych błędów podziału. Dlatego łąty niwelacyjne powinny być przed, a przy niwelacji ścisłej nawet i po użyciu dokładnie komparowane.

η) Pochylenie łąty jest właściwie za każdym razem różne, działa jednak jednokierunkowo, powodując zawsze odczyty za wielkie, wobec czego błąd powstały z tej przyczyny ma również charakter błędu systematycznego i jest proporcjonalny, dla niwelacji z punktu  $A$  do punktu  $B$ , do wzniesienia  $h^B$ . Należy zatem podczas wykonywania niwelacji (a szczególnie ścisłej) ustawiać łąty bardzo starannie do pionu (libelą pudełkową).

θ) Jeżeli obserwator używa jednego oka do obserwowania stanu bańki libeli powstaje błąd, gdyż końce baniek są w tym przypadku mylnie odrzucone na podział libeli. Błąd ten zanika, jeżeli w przypadku parzystej ilości stanowisk, obserwujemy bańkę stając na przemian to po jednej, to po drugiej stronie instrumentu.

## § 12. Zastosowanie rachunku wyrównawczego do niwelacji

a) *Wyrównanie ciągów niwelacyjnych jako par spostrzeżeń.*

W praktyce napotykamy na następujące zagadnienia:

α) wyrównanie ciągu niwelacyjnego obserwowanego tam i z powrotem (wyrównanie jednej pary spostrzeżeń);



β) wyrównanie większej ilości ciągów niwelacyjnych tam i z powrotem (wyrównanie par spostrzeżeń).

α) Niwelując od  $A$  do  $B$  otrzymaliśmy wzniesienie (różnicę wysokości)  $h$ , zaś niwelując z powrotem (po zmianie znaku)  $h'$ .

Wzniesienie  $h_A^B = \frac{h + h'}{2}$ ; w danym przypadku  $n = 2$ , przeto:

$$\mu^2 = [\lambda\lambda], \text{ przy czym } \lambda_1 = h_A^B - h, \lambda_2 = h_A^B - h'. \quad (43)$$

Tworząc różnicę  $d = h' - h$  i wyrażając przy jej pomocy błędy  $\lambda$  otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= h_A^B - h = \frac{h' - h}{2} = \frac{d}{2} \\ \lambda_2 &= h_A^B - h' = -\frac{h' - h}{2} = -\frac{d}{2} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

zatem 
$$\mu^2 = 2 \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}, \quad \mu = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad (45)$$

(błąd śr. wzniesienia przed wyrównaniem),

$$(\mu) = \frac{d}{\sqrt{4}} = \pm \frac{d}{2} \quad (46)$$

(błąd średni wzniesienia po wyrównaniu).

β) Ciąg niwelacyjny o długości  $L$  składa się z odcinków  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , przy czym  $[l] = L$ .

Niwelując każdy odcinek tam i z powrotem otrzymano wzniesienia:

na odcinku  $l_1$  tam  $h_1$ , z powrotem  $h_1'$ , zatem różnicę  $d_1 = h_1' - h_1$ ,

na odcinku  $l_2$  tam  $h_2$ , z powrotem  $h_2'$ , zatem różnicę  $d_2 = h_2' - h_2$ ,

.....

na odcinku  $l_n$  tam  $h_n$ , z powrotem  $h_n'$ , zatem różnicę  $d_n = h_n' - h_n$ .

Kwadraty różnic mają charakter błędów prawdziwych, więc można utworzyć przeciętną różnicę  $d_o$  wedle wzoru:

$$d_o = \sqrt{\frac{[p d d]}{n}}, \quad (47)$$

ponieważ wagi przyjmujemy (wedle § 11, rozdziału II) zazwyczaj równe odwrotnościom ilości kilometrów poszczególnych odcinków, przeto:

$$d_o = \sqrt{\frac{\left[\frac{d d}{l}\right]}{n}}. \quad (48)$$

Wobec tego błąd średni na 1 km przed wyrównaniem, czyli błąd niwelacji w jednym kierunku, wynosi:

$$\mu_o = \frac{d_o}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{d d}{l}\right]}{2n}}, \quad (49)$$



zaś po wyrównaniu, czyli błąd niwelacji podwójnej:

$$(\mu_o) = \pm \frac{d_o}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \quad (50)$$

Jeżeli odcinki  $l$  są — jak to zresztą najczęściej bywa w praktyce — sobie równe (przynajmniej w przybliżeniu), wówczas  $L = nl$ , a błędy średnie wynoszą:

$$\mu_o = \sqrt{\frac{[dd]}{2 \cdot l \cdot n}} = \sqrt{\frac{[dd]}{2L}}, \quad (51)$$

$$(\mu_o) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{L}}. \quad (52)$$

Gdy chodzi o wyznaczenie błędu średniego po wyrównaniu dla większej ilości ciągów  $L_1, L_2, L_3, \dots$ , z których pierwszy zawiera  $n_1$ , drugi  $n_2$ , a trzeci  $n_3$  odcinków  $l$ , wówczas:

$$(\mu_o) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots) \cdot l}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{[L]}}. \quad (53)$$

b) Wyrównanie ciągu niwelacyjnego przy pomocy spostrzeżeń zawarunkowanych.

α) Ciąg o długości  $L$  składający się z odcinków różnych długości  $l_1, l_2, \dots, l_n$  nawiązany na początku i na końcu (do punktów  $A$  i  $B$ ).

O ile ciąg nie zamknął się do zera wykazując odchyłkę  $\omega$ , tj. gdy:

$$[h] - h_A^B = \omega \text{ (zamiast } = 0), \quad (54)$$

obliczamy wzniesienia między punktami odgraniczającymi poszczególne odcinki wedle wzorów:

$$x_i = h_i - \omega \frac{p_i}{\left[ \frac{1}{p} \right]} = h_i - \omega \frac{l_i}{L}, \quad (55)$$

zaś błąd średni na jeden km:

$$\mu_o = \frac{\omega}{\sqrt{\left[ \frac{1}{p} \right]}} = \frac{\omega}{\sqrt{L}}; \quad (56)$$

analogiczne wzory obowiązują, jeżeli ciąg zamkniemy, powracając do punktu wyjściowego.

β) Gdy ciąg  $L$  zaniwelowano podwójnie (tam i z powrotem) między reperami  $A$  i  $B$ , obowiązują wzory (54), (55) i (56), przy czym poszczególne wzniesienia są średnimi arytmetycznymi z  $h$  i  $h'$ .

γ) Jeżeli poligony niwelacyjne tworzą tak zwaną sieć niwelacyjną, jak to



na przykład uwidoczniono na rys. 140, można przed wyrównaniem całkowitej sieci obliczyć średni błąd z zamknięć ciągów (niwelowanych podwójnie).

Niech odchyłki zamknięć poszczególnych poligonów  $L_1, L_2, L_3, \dots$  będą  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  zaś ilość poligonów niech będzie  $N$ .

Błędy średnie poszczególnych poligonów obliczamy przy pomocy wzoru (56):

$$\mu_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{L_1}}, \quad \mu_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{L_2}} \dots, \quad (57)$$

zaś dla zespołu poligonów:

$$(\mu_0) = \sqrt{\frac{[\mu\mu]}{N}} = \sqrt{\left[ \frac{\omega\omega}{L} \right] \frac{1}{N}}. \quad (58)$$

Jest to błąd średni po wyrównaniu, gdyż ciągi są niwelowane tam i z powrotem i poszczególne  $\omega$  powstały z wyrównanych wartości  $h$ .

c) *Uwzględnienie we wzorach błędów systematycznych.*

Błąd systematyczny objawia się podczas niwelacji w ten sposób, że różnice par spostrzeżeń między poszczególnymi odcinkami mają przeważnie ten sam znak. Aby otrzymać wpływ błędów systematycznych cyfrowo, nanosimy (uważając punkt początkowy jako początek układu) odległości punktów stałych od punktu początkowego, tj. odgraniczających poszczególne odcinki, jako odcięte, zaś sumę bezwzględnych wartości różnic  $d$  do każdego punktu stałego jako rzędne. Następnie prowadzimy prostą wyrównującą w ten sposób otrzymany wielobok. Różnica pierwszej i ostatniej rzędnej (po wyrównaniu powyższą prostą) niech wynosi  $\Delta$ . Jest to średnia wartość jednokierunkowego błędu systematycznego całego

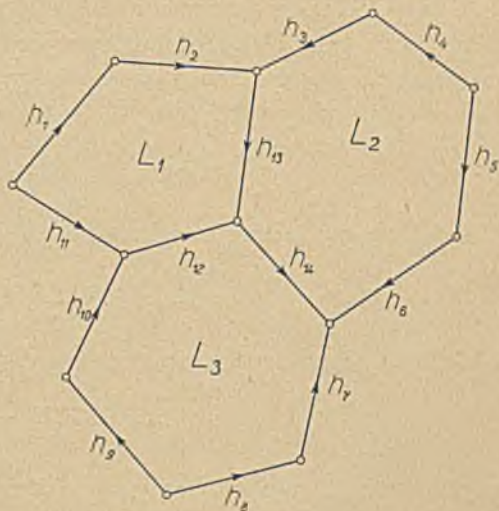
ciągu o długości  $L$  km, zaś na 1 km przypadalby wobec tego błąd  $\frac{\Delta}{L}$ . Należy jednak wziąć pod uwagę, że błąd  $\Delta$  powstał z dwóch niwelacji wzdłuż długości  $L$ , przy czym błędy systematyczne zsumowały się. Przypuszczając za Lallemandem, że błędy systematyczne  $x$  pojedynczych niwelacji składają się na błąd wypadkowy wedle prawa Gaussa, i że w obu pojedynczych ciągach są sobie równe, położymy:

$$\left( \frac{\Delta}{L} \right)^2 = 2x^2,$$

zatem

$$x = \frac{\Delta}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (59)$$

(błąd systematyczny na 1 km pojedynczej niwelacji).



Rys. 140.

Przechodząc do wyznaczenia błędu systematycznego podwójnej niwelacji otrzymamy:

$$\sigma = \pm \frac{\Delta}{2L}. \quad (60)$$

Jeżeli na odcinku  $l_i$  otrzymamy różnicę  $d_i$ , należy zwrócić uwagę, że różnica ta powstała tak z błędów systematycznych jak i przypadkowych; oznaczając zatem różnicę pochodzącą tylko z błędów przypadkowych przez  $d'_i$  otrzymamy związek  $d_i = d'_i \pm 2\sigma l_i$  lub:

$$d_i = d'_i \pm \frac{\Delta}{L} l_i. \quad (61)$$

Związek ten podnosimy do kwadratu:

$$d_i^2 = d_i'^2 \pm 2 d'_i l_i \frac{\Delta}{L} + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 l_i^2, \quad (62)$$

a sumując poszczególne  $d^2$  otrzymamy:

$$[d d] = [d' d'] + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 [l^2], \quad (63)$$

gdyż suma podwójnych iloczynów dąży dla wielkiej ilości par spostrzeżeń do zera.

Wstawiając wartość na  $[d' d']$  we wzorze (52) (wyprowadzonym dla błędów przypadkowych) przemieniamy go na:

$$(\mu_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d d] - \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 [l^2]}{L}}. \quad (64)$$

Jeżeli chodzi o wyznaczenie błędu średniego kilku ciągów  $L_1, L_2, L_3, \dots$  wówczas zamiast wartości  $\sigma$  należy zrobić  $\sigma_0$ , wedle wzoru:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{\Delta_1}{L_1}\right)^2 L_1 + \left(\frac{\Delta_2}{L_2}\right)^2 L_2 + \dots}{[L]}, \quad (65)$$

względnie

$$4 \sigma_0^2 = \frac{\left[\frac{\Delta^2}{L}\right]}{[L]},$$

<sup>1)</sup> Formuła przyjęta przez Międzynarodową Asocjacje Geodezyjną:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{9} \frac{\left|\frac{\Delta^2}{L}\right|}{[L]}$$

odnosi się do prawdopodobnego błędu systematycznego (który równa się  $\frac{2}{3}$  błędu średniego). Formuła ta dostarcza tym mniejszych błędów  $\sigma_0$  im większe są poszczególne  $L$ , dlatego też jest obecnie przedmiotem dyskusji (zaatakował ją prof. Rune, Szwecja).



a że wedle wzoru (61)

$$d_i = d_i' \pm 2 \sigma_0 l_i,$$

przezo z zaniedbaniem—jak poprzednio—sumy podwójnych iloczynów będzie:

$$[d'd'] = [dd] - 4 \sigma_0^2 [l^2] = [dd] - \frac{\left[ \frac{\Delta^2}{L} \right] [l^2]}{[L]},$$

a ostatecznie, po wstawieniu do wzoru w miejsce  $[dd]$  sumy  $[d'd']$ :

$$(\mu_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd] - \frac{\left[ \frac{\Delta^2}{L} \right] [l^2]}{[L]}}{[L]^2}}. \quad (66)$$

#### d) Wyrównanie sieci niwelacyjnych.

Sieci niwelacyjne powstają przez połączenie kilku ciągów niwelacyjnych, zamykających się każdy dla siebie. (Patrz rys. 140 i 140a).

Wyrównanie sieci niwelacyjnych przeprowadzamy najczęściej przy pomocy spostrzeżeń zawarunkowanych, rzadziej metodą spostrzeżeń pośrednich.

Jeżeli  $p$  oznacza ilość wszystkich punktów,  $p'$  — punktów stałych (znaków wysokości, reperów), to ilość warunków określa wzór:

$$w = n - p + p', \quad (67)$$

przy czym  $n$  jest ilością spostrzeganych wzniesień; natomiast wyrównując metodą spostrzeżeń pośrednich, otrzymalibyśmy  $n$  równań błędów o

$$k = p - p' \quad (68)$$

niewiadomych, co pociągnęłoby za sobą w konsekwencji rozwiązanie  $p - p'$  równań normalnych.

Jako warunki występują warunki zamknięć poligonowych oraz sumy algebraiczne wzniesień pomiędzy punktami stałymi.

Przykład ułożenia warunków dla sieci, przedstawionej schematycznie na rys. 140 a.

Warunek 1: ciąg  $CADC$ :

$$h_1 + \lambda_1 + h_2 + \lambda_2 - (h_5 + \lambda_5) = 0.$$

Warunek 2: ciąg  $DABD$ :

$$-(h_2 + \lambda_2) + h_3 + \lambda_3 - (h_4 + \lambda_4) = 0.$$

Warunek 3: ciąg  $DBCD$ :

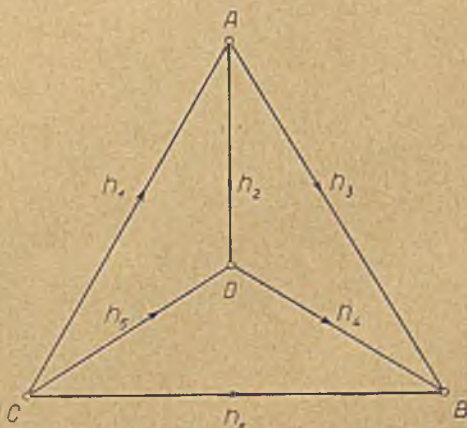
$$h_4 + \lambda_4 + h_5 + \lambda_5 - (h_6 + \lambda_6) = 0.$$

Równania odchyłek:

$$1. \lambda_1 + \lambda_2 \quad . \quad . \quad - \lambda_5 \quad . \quad + \omega_1 = 0.$$

$$2. \quad . \quad - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \quad . \quad . \quad + \omega_2 = 0.$$

$$3. \quad . \quad . \quad . \quad \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 + \omega_3 = 0.$$



Rys. 140 a.

Po ułożeniu warunków i otrzymaniu odchylek  $\omega$ , układamy z uwzględnieniem wag równania korelat, które rozwiązujemy, jak podano w rozdz. II.

Przeprowadzając wyrównanie metodą spostrzeżeń pośrednich, najlepiej układać równania błędów wprost z rysunku, biorąc pod uwagę wzniesienia pomiędzy sąsiednimi punktami. Ponieważ  $p'$  punktów sieci są punktami stałymi, zatem pozostają wysokości  $p - p'$  punktów jako niewiadome. (Zwykle wyznacza się ich wartości przybliżone, a przez wyrównanie uzyskuje się poprawki tych wartości).

Można także w inny sposób ułożyć  $n$  równań błędów.

Ponieważ warunków mamy tylko  $n - (p - p')$ , przeto mogą one uzależnić tylko tyleż błędów pozornych (poprawek)  $\lambda$ , zaś reszta, a więc  $n - n + (p - p') = p - p'$  poprawek jest niezależnych. Poprawki te uważamy za niewiadome i wyrażamy przy ich pomocy wszystkie błędy pozorne  $\lambda$ . Ostatecznie otrzymujemy  $n$  równań błędów o  $p - p'$  niewiadomych. (Por. rozdział II — Zarys rach. wyrówn.).

Przykład ułożenia równań błędów w sieci niwelacyjnej (rys. 140a).

Ponieważ w tym przypadku  $p - p' = 4 - 1 = 3$ , przeto kładąc w równaniach odchylek:

$$\lambda_1 = \xi, \quad \lambda_2 = \eta, \quad \lambda_3 = \zeta,$$

otrzymamy następujące równania błędów dla  $n = 6$  spostrzeżeń:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \xi \dots, & \lambda_4 &= \dots - \eta + \zeta + \omega_2, \\ \lambda_2 &= \dots \eta \dots, & \lambda_5 &= \xi + \eta \dots + \omega_1, \\ \lambda_3 &= \dots \zeta \dots, & \lambda_6 &= \xi \dots + \zeta + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \end{aligned}$$

e) *Formuły na błąd średni pomiarów niwelacyjnych.*

Jak z poprzednich wywodów wynika, mamy kilka formuł, przy pomocy których możemy wyznaczyć średni błąd niwelacji na 1 km; dwie pierwsze z niżej przytoczonych uwzględniają i błędy systematyczne:

$$\text{I. (wzór 64)} \quad (\mu_o) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d d] - \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 [l^2]}{L}}$$

(dla ciągu  $L$  o odcinkach  $l$ ).

$$\text{II. (wzór 66)} \quad (\mu_o) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d d]}{[L]} - \frac{\left[\frac{\Delta^2}{L}\right] [l^2]}{[L]^2}}$$

(dla większej ilości ciągów  $L$  o odcinkach  $l$ ).

$$\text{III.} \quad \mu_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left[\frac{D D}{S}\right]}{N}}. \quad (69)$$

Wzór (69) stosujemy, gdy poszczególnych odcinków jest bardzo wiele, tak że łączymy je w sekcje  $S$ , które przez to wypadają bardzo długie. Ponieważ pomiary niwelacyjne muszą się wówczas odbywać w różnych czasach i wa-



runkach, przeto wydzielenie błędów systematycznych byłoby tu zbyt trudne. We wzorze tym poszczególne  $D_i$  składają się z różnic:  $d_i' + d_i'' + \dots$ , odpowiadających sekcjom  $S_i$ , których ilość wynosi  $N$ . (Błąd średni uzyskany z powyższego wzoru jest nieco większy niż z poprzednich).

IV. O ile poligony niwelacyjne tworzą sieci, można przed wyrównaniem sieci wyznaczyć błąd średni na podstawie wzoru (58):

$$\mu_o = \sqrt{\left[ \frac{\omega \omega}{L} \right] \frac{1}{N}}$$

Wzór ten może być zastosowany i do podwójnej niwelacji (na każdym odcinku sieci, ale wówczas wzniesienia są średnimi arytmetycznymi z niwelacji tam i z powrotem).

V. Wreszcie pozostaje do dyspozycji wzór na błąd średni sieci niwelacyjnej:

$$\mu_o = \sqrt{\frac{\left[ \frac{\lambda \lambda}{l} \right]}{n - p + p'}} \quad (70)$$

(przy czym ilość niewiadomych  $k = p - p'$ ).

### § 13. Niwelacja ścisła, czyli precyzyjna

Jak już wspomniano, nawiązujemy wszystkie pomiary niwelacyjne do znaków wysokości (reperów), których wysokości nad poziom morza zostały poprzednio wyznaczone przy pomocy niwelacji ścisłej; poza tym służą wyniki niwelacji ścisłej także celom naukowym. Jak tedy widać, należy przeprowadzać niwelację ścisłą z możliwie największą dokładnością.

Przede wszystkim należy wyniki otrzymane w polu, nieścisłe z powodu nierównoległości poziomów geodezyjnych, uzupełnić poprawkami ortometrycznymi. Poza tym należy używać instrumentów specjalnych, dających możliwie najlepsze wyniki.

Lunety tych instrumentów muszą mieć bardzo znaczne powiększenie (40-krotne) i bardzo czułe libele. Niemniej ważną rzeczą jest użycie bardzo dokładnych lat, dających gwarancję niezmienności.

Aby zmniejszyć wpływ błędów systematycznych odczytujemy zawsze dwie łaty wstecz i w przód w porządku: wstecz — w przód — w przód — wstecz; muszą być zatem w użyciu równocześnie dwie łaty. Łaty te są z reguły rewersyjne z podwójnym podziałem.

Ponieważ niwelacja ścisła należy właściwie do pomiarów z dziedziny geodezji wyższej, poprzestajemy tylko na ogólnych uwagach dotyczących jej przeprowadzenia, odsyłając czytelnika do dzieł specjalnych i instrukcyj, wydanych przez instytucje je wykonujące <sup>1)</sup>.

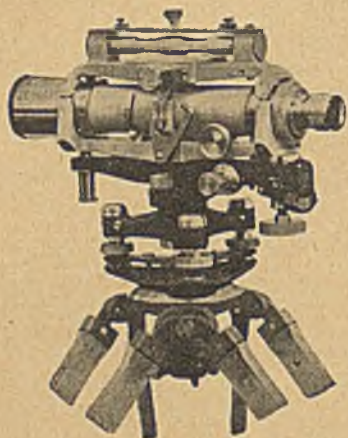
Istnieją w użyciu dwie metody obserwacyjne używane w niwelacji ścisłej:

<sup>1)</sup> Stampfer-Lorber: Nivellieren, 1894. Warchałowski: Niwelacja geometr. Warszawa, 1926. Sprawozdania Międzynarodowej Unii Geodezyjno-Geofizycznej.



a) dawniejsza, przy użyciu osi celowej niezupełnie poziomej i b) nowsza, przy poziomej osi celowej.

a) Instrumenty, którymi posługujemy się przy tej metodzie muszą mieć libelę nasadkową, przy pomocy której mierzy się kąt pochylenia osi celowej, aby odczyt uzupełnić odpowiednią poprawką. Poza tym odczytuje się nie jedną, ale trzy nitki poziome, redukując wyniki na nitkę środkową, oraz obraca się lunetę w łóżykach.



Rys. 141.  
Instrument Société des  
Lunetiers  
(z jedną libelą nasadkową)

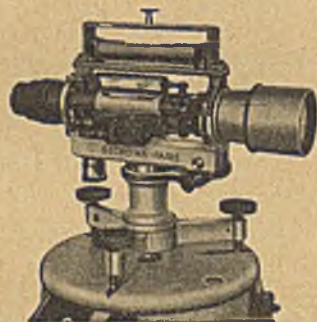
Niektóre nowsze instrumenty mają oprócz wspomnianej libeli nasadkowej jeszcze i drugą libelę rewersyjną, jak np. w dwu instrumentach uwidoczniionych na rys. 141 i 142.

b) Ulepszenia instrumentalne zastosowane przez inż. Wilda wpłynęły również i na zmianę metody obserwacyjnej.

Podany poprzednio, przy końcu § 5, sposób ustawienia osi libeli do poziomu przy pomocy koincydencji obrazów końców bańki, jak też i zwiększenie stałości osi celowej przez wprowadzenie soczewki ogniskującej, skłoniły Wilda do przyjęcia metody obserwacji, polegającej na odczytywaniu łaty ściśle w poziomie. Aby jednak zwiększyć dokładność odczytu, zakłada się na wylot lunety obręcz, w której znajduje się dość grube szkło  *płasko-równoległe*. Przez obrót szkła dokoła osi poziomej obniża się równoległe osi celowa, aż do najbliższej (w półcentymetrowych odstępach znajdującej się) kreski łaty. Obrót szkła wywołuje się śrubą tangencjalną, wobec czego można, jak to wykazano w § 4 rozdz. III, odczytać, względnie oszacować na równomiernym podziale bębena śruby obniżenie celowej do  $\frac{1}{20}$  mm. Dla uzyskania większej dokładności odczytu połowa nitki poziomej krzyża nitkowego ma kształt klina, aby można było przy różnych długościach celowych (a zatem przy różnych wielkościach obrazu kreski łaty) dokładnie ją objąć. Łaty, należące do tego instrumentu, mają podwójny podział półcentymetrowy (kreskowy), uwidoczniiony na taśmie inwarowej, zajmującej środkową część łaty (rys. 143b). Podczas komparacji uzyskujemy właściwe napięcie taśmy za pomocą odpowiedniej śruby.

Na rys. 143c widzimy nasadkę pierścieniową ze szkłem płasko-równoległym i schematycznie przedstawioną śrubę tangencjalną.

Rektyfikację tego przyrządu przeprowadza się w sposób podany przy końcu § 5-go.



Rys. 142.  
Niveau Secrétan  
(z libelą nasadk. i rewers.)



Jak już wspomniano w § 1-ym musi się z powodu nierównoległości poziomów geodezyjnych wprowadzić tzw. poprawki ortometryczne, z których jedna będzie się odnosiła do wzniesień, druga do wysokości. Poprawki te należy uskutecznić przed zastosowaniem rachunku wyrównawczego do wyników uzyskanych podczas pomiarów, dlatego podajemy dwa wzory (przybliżone), z których pierwszy zawiera poprawkę ortometryczną wzniesienia między dwoma punktami  $A$  i  $B$ , drugi poprawkę, jaką należy uskutecznić przy obliczaniu wysokości ortometrycznej nad poziomem morza punktu  $B$  z danej wysokości ortometrycznej punktu  $A$  i wzniesienia między punktami  $A$  i  $B$ .

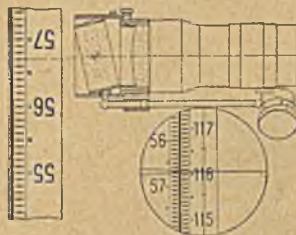
Oznaczając wzniesienia między poszczególnymi punktami ciągu  $A-B$ , otrzymane z niwelacji ścisłej przez  $\delta h'$ , szerokość geograficzną p.  $B$  przez  $\varphi_B$ ,



Rys. 143a.



Rys. 143b.



Rys. 143c.

średnią arytmetyczną szerokości geograficznych punktów  $A$  i  $B$  przez  $\varphi_0$ , oraz szer. geogr. punktów pośrednich tego ciągu przez  $\varphi$  (zmiennie), otrzymujemy następujący wzór na  $h_A^B$  — wzniesienie ortometryczne p.  $B$  nad  $A$ :

$$h_A^B = \Sigma (\delta h') + \beta \sin (\varphi_0 + \varphi_B) \Sigma_A^B (\varphi - \varphi_B) \delta h', \quad (71)$$

przy czym współczynnik  $\beta \approx 0,0053$ . Drugi wyraz strony prawej tego wzoru jest poprawką ortometryczną wzniesienia p.  $B$  nad p.  $A$ .

Przy niwelacji z północy w kierunku południa odpowiada znak poprawki znakowi wzniesienia, tj. gdy punkt  $B$  leży wyżej niż punkt  $A$  należy ją dodać, gdy zaś leży niżej niż  $A$  — odjąć; przeciwnie ma się rzecz przy niwelacji z południa na północ: w tym przypadku znak poprawki jest przeciwny znakowi wzniesienia.

Drugi wzór, który tu podajemy, odnosi się do wysokości ortometrycznej (nad p. m.)  $H_A$  i  $H_B$  punktów  $A$  i  $B$ . Z pojęcia wysokości ortometrycznej wynika, że dla uzyskania  $H_B$  nie wystarcza dodać do  $H_A$  wzniesienie ortometryczne  $h_A^B$ , lecz trzeba uwzględnić jeszcze nierównoległość poziomu geodezyjnego  $A$  do poziomu morza (geoidy zerowej), co uzyskujemy przy pomocy wzoru (przybliżonego):

$$H_B = H_A + h_A^B + \beta \sin (\varphi_A + \varphi_B) \sin (\varphi_A - \varphi_B) H_A. \quad (72)$$

Prócz poprawek ortometrycznych istnieją także poprawki dynamiczne, których obliczenie może być przeprowadzone tylko w tym przypadku, jeżeli wzdłuż ciągu niwelacyjnego wykonano w dość gęsto rozmieszczonych punktach pomiary *grawimetryczne*. Dlatego z reguły uwzględnia się poprawki ortometryczne, przy czym po przeprowadzeniu pomiarów grawimetrycznych, możemy zawsze przejść na poprawki, a tym samym i wzniesienia dynamiczne.

Średni błąd przypadkowy nie powinien przekraczać 1 mm na 1 km, jeżeli niwelacja ma być uznana za ścisłą. Poza tym prawdopodobny błąd systematyczny na 1 km może wynosić najwyżej 0,3 mm.

W Polsce przeprowadza obecnie państwową niwelację ścisłą Biuro Pomiarowe Ministerstwa Komunikacji.

---



## ROZDZIAŁ VII

# TEODOLIT. INSTRUMENT UNIWERSALNY

### § 1. Uwagi wstępne. Opis przyrządu

Dla uniknięcia nieporozumień należy zaznaczyć, że podczas gdy astronom nazywa instrumentem uniwersalnym przyrząd służący do pomiaru kątów poziomych i pionowych, inżynier wymaga, aby instrumentem uniwersalnym można było też wykonywać optyczne pomiary odległości i niwelację; natomiast teodolitem nazywają obaj przyrząd, służący zasadniczo tylko do pomiaru kątów poziomych. Ponieważ jednak teodolity mają zazwyczaj i koło pionowe, choć zwykle o mniej dokładnym podziale, niż podział koła poziomego (limbusu), przeto można ich z reguły używać i do pomiaru kątów pionowych.

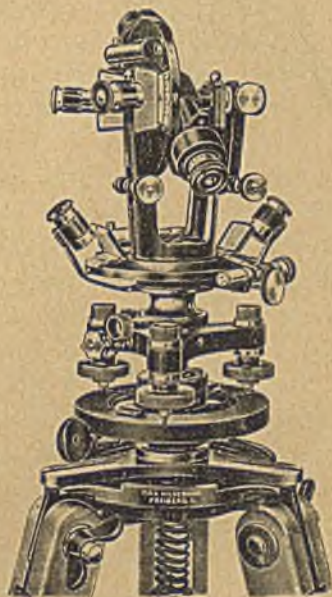
Kąty poziome są to kąty zawarte między płaszczyznami pionowymi; zasadniczą częścią teodolitu musi być zatem luneta geodezyjna, obracalna dookoła dwu (materialnych) osi, a mianowicie: pionowej i poziomej.

Podobnie jak przyrząd niwelacyjny o statywie krążkowym (p. rozdział VI, § 3), tak i teodolit składa się ze spodarki, limbusu i alhidady, na której znajduje się luneta geodezyjna (p. rys. 144 i 145).

Spodarkę stanowi (podobnie jak przy przyrządach niwelacyjnych) płytka trójramienna, złączona z dolną częścią limbusu (rys. 144) lub stanowiąca (w nowszych przyrządach) osobną część przyrządu, pośredniczącą między głowicą statywu a limbusem (rys. 145).

Trzy śruby ustawcze, umieszczone w ramionach spodarki (działające w kierunku pionowym), pozwalają na zmianę położenia całego przyrządu względem statywu.

O ile w instrumentach niwelacyjnych limbus odgrywał bardzo podrzędną rolę, to w teodolitach jest on jedną z najważniejszych części, decydującą zasadniczo o dokładności przyrządu. Na obwodzie bowiem limbusu znajduje się



Rys. 144.



srebrna wkładka (w kształcie pierścienia), na której jest zaznaczony podział kątowy; odstęp kresek odpowiada (zależnie od średnicy koła i dokładności) 20', 10' lub 5', zaś dokładność odczytu wynosi 1', 30", a wreszcie 1" lub mniej. W teodolitech zwyczajnych limbus jest nieruchomy, natomiast teodolity *repetycyjne* i *reiteracyjne* posiadają limbuse obracalne dookoła osi, która przeto powinna przechodzić przez środek ich kątomierza (oś limbusu). Przyrządy te muszą posiadać sprzęg, tzw. limbusowy, i połączone z nim urządzenie do ruchu drobnego (leniwego); urządzenie to nazywają niektórzy leniwką.



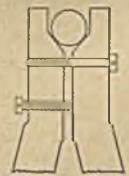
Rys. 145.

Różnica między teodolitami repetycyjnymi a reiteracyjnymi polega na tym, że w repetycyjnych można obracać tak alhidadę po limbusie, jak też alhidadę wraz ze sprzęgniętym limbusem po spodarce, natomiast w teodolitech reiteracyjnych można tylko po odpowiednio nastawionym limbusie obracać alhidadę.

Alhidadą nazywamy obracalną część przyrządu, zaopatrzoną w dźwigarki, na których spoczywa oś obrotu lunety oraz w dwa noniusze lub mikroskopy służące do wykonywania odczytów na limbusie. Oś obrotu alhidady i jest zarazem osią instrumentu i powinna być podczas pomiaru pionowa. Alhidada, na której oprócz dźwigarków lunety i noniuszów lub mikroskopów znajdują się także libelki (tzw. alhidadowe) służące do pionowego ustawienia osi instrumentu, jest krążkiem, albo (w starszych typach) składa się z kilku (zazwyczaj trzech) ramion. Sprzęg alhidady służy przy teodolitech repetycyjnych do połączenia alhidady z limbusem, przy teodolitech zaś reiteracyjnych łączy on alhidadę ze spodarką, tj. z częściami przyrządu znajdującymi się pod ruchomym limbusem. Osie obrotu alhidady i limbusu powinny być w teodolitech repetycyjnych i reiteracyjnych identyczne.

Luneta spoczywa swą osią w łożyskach dwu dźwigarów, umieszczonych na alhidadzie. Niektóre teodolity posiadają konstrukcję służącą do nieznacznego podniesienia lub obniżenia jednego końca osi obrotu lunety  $p$  (rys. 146). Konstrukcja ta polega na tym, że jeden z dźwigarów składa się z dwu części, które można nieco rozsuwać lub ściągać, a tym samym obniżać lub podnosić spoczywający w łożysku koniec osi obrotu lunety.

Do utrzymania lunety pod dowolnym kątem pionowym służy sprzęg pionowy, którego śruba do ruchu drobnego działa jak śruba elewacyjna instrumentu niwelacyjnego.



Rys. 146.

Systemy optyczne lunet są różne w różnych typach przyrządów, przy czym powiększenie lunety pozostaje w ścisłym związku z dokładnością podziału limbusu i waha się od 20 do 30; natomiast lunety teodolitów przeznaczonych do triangulacji I-rzędnej, mają powiększenie 40-krotne i większe <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Za duże powiększenie nie jest wskazane ze względu na małą wówczas jasność i małe pole widzenia lunety.



Do dokładnego ustawienia osi celowej  $c$  lunety do poziomu służy libela rewersyjna albo w typach starszych nasadkowa. Dokładne ustawienie osi instrumentu do pionu uskutecznia się w lepszych teodolitach przy pomocy osobnej libeli nasadkowej, którą umieszczamy na osi obrotu lunety  $p$ . Ustawienie to przeprowadza się w dwu do siebie prostopadłych kierunkach.

Po ustawieniu instrumentu na statywie wkręcamy w dolną część przyrządu (spodarke) trzpień śruby centralnej, po czym ustawiamy oś instrumentu do pionu i ściągamy odpowiednią śrubą sprężynę, znajdującą się na trzpieniu śruby centralnej, podobnie jak to ma miejsce w przyrządach niwelacyjnych. Ponieważ jednak teodolitem mamy mierzyć kąty poziome, przeto oś instrumentu powinna znajdować się podczas pomiaru dokładnie w pionie punktu wierzchołkowego kąta mierzonego. Dlatego, ustawiając instrument na statywie, którego głowica powinna być o ile możności pozioma, należy starać się, aby pion zawieszony u wylotu śruby centralnej znajdował się nad punktem wierzchołkowym kąta. Przy dokładnym ustawieniu osi instrumentu do pionu pion wyjdzie zazwyczaj z punktu, należy go zatem wraz z instrumentem odpowiednio przesunąć; postępując w ten sposób, ustawimy wreszcie instrument nad punktem przy zachowaniu osi instrumentu w pionie.

Instrumenty uniwersalne mają zawsze prócz wymienionych części jeszcze i kolo pionowe, którego podział powinien odpowiadać podziałowi limbusu. Teodolity natomiast posiadają zazwyczaj kola pionowe o mniejszej średnicy niż średnica limbusu, a w konsekwencji dokładność odczytu na kole pionowym jest mniejsza, niż dokładność odczytu na limbusie.

Z noniuszami lub mikroskopami, służącymi do odczytywania kątów pionowych na kole pionowym, jest połączona libela kola pionowego (zwana także libelą kolimacyjną).

## § 2. Błędy instrumentalne teodolitu i ich wpływ na pomiar kątów poziomych

Poprzednio wspomnieliśmy o dwu osiach teodolitu, a to o osi instrumentu  $i$  i osi obrotu lunety  $p$ , z których podczas pomiaru pierwsza powinna być pionowa, zaś druga pozioma.

Ponieważ pomiar kątów odbywa się przy pomocy osi celowej  $c$ , przeto należy zastanowić się, jakie powinno być położenie wymienionych osi względem siebie. Oś celowa powinna przy obrocie lunety zakreślać płaszczyznę pionową, jeżeli pomiary mają odnosić się do kątów poziomych. Wobec tego powinna być (por. rys. 147):

a) oś instrumentu  $i$  pionowa (prostopadła do osi libel alhidadowych, względnie do osi libeli nasadkowej umieszczonej na osi obrotu lunety);

b) oś celowa  $c$  prostopadła do osi obrotu lunety  $p$ ;

c) oś obrotu lunety  $p$  prostopadła do osi instrumentu  $i$ .



Rys. 147.

Wspomniane trzy warunki są znaczenia zasadniczego. Dodając do nich jeszcze inne, drugorzędne, otrzymamy warunki, jakim powinien odpowiadać teodolit, nadający się do pomiarów.

Teodolit, który nie spełnia powyższych warunków posiada tym samym błędy instrumentalne, które w następstwie wywołują przy pomiarze kątów pewne systematyczne błędy pomiarowe. Ponieważ tak warunki, jak i błędy odnoszące się do pomiaru kątów pionowych będą omówione w rozdziale XIII, przeto poprzestaniemy na omówieniu błędów (systematycznych) powstających przy pomiarze kątów poziomych. Błędami tymi są:

a) błąd  $\epsilon_\lambda$  spowodowany niedokładnym ustawieniem osi instrumentu do pionu;

b) błąd  $\epsilon_v$  spowodowany nieprostokątnością osi obrotu lunety do osi instrumentu;

c) błąd  $\epsilon_z$  spowodowany nieprostokątnością osi celowej do osi obrotu lunety, czyli błędem kolimacyjnym  $z$ ;

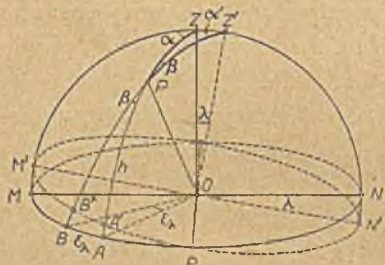
d) błąd spowodowany ekscentrycznością alhidady;

e) błąd spowodowany ekscentrycznością osi celowej;

f) błąd spowodowany systematycznym błędem podziału limbusu.

a) *Błąd spowodowany niedokładnym ustawieniem osi instrumentu do pionu.*

Jeżeli oś instrumentu zawiera z pionem nieznaczny kąt  $\lambda$ , wówczas oś instrumentu nie przechodzi przez zenit  $Z$  (rys. 148), ale przez inny punkt  $Z'$ . Wobec tego otrzymamy na limbusie zamiast odczytu w miejscu  $A$ , odczyt w punkcie  $B'$  (bardzo bliskim punktu  $B$ ); zatem błąd jaki przez to powstaje będzie:



Rys. 148.

$$\epsilon_\lambda = AB \approx A'B'. \quad (1)$$

Z trójkątów sferycznych  $PZZ'$  i  $PAB$  otrzymujemy:

$$\sin \beta = \sin \lambda \frac{\sin \alpha'}{\sin (90^\circ - h)} = \frac{\sin \epsilon_\lambda}{\sin BP}, \quad (2)$$

kładąc

$$BP \approx h, \quad (3)$$

otrzymujemy:

$$\sin \epsilon_\lambda = \sin \lambda \sin \alpha' \operatorname{tg} h, \quad (4)$$

a ze względu na to, że  $\epsilon_\lambda$  i  $\lambda$  są bardzo małymi kątami, możemy napisać:

$$\epsilon_\lambda = \lambda \sin \alpha' \operatorname{tg} h. \quad (5)$$

Zastępując  $\sin \alpha'$  przez  $\sin (o_M - o_A)$ , otrzymujemy ostatecznie:

$$\epsilon_\lambda = \lambda \operatorname{tg} h \sin (o_M - o_A), \quad (6)$$

przy czym  $o_M$  i  $o_A$  oznaczają odczyty na limbusie w miejscach  $M$  i  $A$ .



Widzimy zatem, że pochylenie  $\lambda$  wywiera największy wpływ w kierunku do niego prostopadłym, gdyż wówczas błąd  $\varepsilon_\lambda$  osiąga swą największą wartość

$$\lambda \operatorname{tg} h.$$

Błędu tego nie rugujemy przez pomiar w dwu położeniach lunety (jak to ma miejsce z błędami b) i c)), natomiast należy zaznaczyć, że jest on tylko w tych przypadkach szkodliwy, kiedy celujemy pod wielkimi kątami wysokości  $h$  (względnie wielkimi kątami depresyjnymi —  $h$ ).

Może to mieć miejsce wyjątkowo przy triangulacji III lub IV-rzędnej, a poza tym przy nawiązywaniu się do wysoko położonych a bliskich punktów triangulacyjnych (np. w miastach o wąskich ulicach).

b) *Błąd spowodowany nieprostokadłością osi obrotu lunety p do osi przyrządu i.*

Jeżeli obie wspomniane osie nie są do siebie prostopadłe, lecz zawierają ze sobą kąt  $90^\circ \pm \nu$ , powstaje przy pomiarze kąta poziomego błąd  $\varepsilon_\nu$ . Błąd ten ma ten sam charakter co poprzedni, z tą tylko różnicą, że jest w każdym miejscu limbusu ten sam:

$$\varepsilon_\nu = \nu \operatorname{tg} h. \quad (7)$$

Jeżeli więc  $h = 0$ , to i błąd  $\varepsilon_\nu = 0$ .

Błąd ten rugujemy — o ile oś przyrządu jest ściśle pionowa — mierząc kąt w dwu położeniach lunety, gdyż po przerwaniu lunety oś jej obrotu przybiera wobec osi przyrządu położenie symetryczne, zatem  $\nu$  zmienia się na  $-\nu$ . Średnia arytmetyczna z pomiarów w dwu położeniach lunety jest wolna od wpływu tego błędu.

Oba pod a) i b) wymienione błędy, tj. niepionowość osi przyrządu, jak też i nieprostokadłość osi obrotu lunety do osi przyrządu, powodują nachylenie osi obrotu lunety do poziomu, skutkiem czego powstaje tzw. *błąd inklinacyjny*. I tak, jeżeli oś obrotu zawiera z poziomem kąt  $i$  otrzymujemy kierunek obarzony błędem:

$$\varepsilon_i = i \operatorname{tg} h. \quad (7a)$$

Błąd ten jest tylko w tym wyjątkowym przypadku stały, gdy oś przyrządu jest pionowa (p. wzór (7)), podczas gdy z reguły zmienia się on ze zmianą azymutu (tzn. jest w każdym kierunku inny).

Dla wyrugowania błędu inklinacyjnego nie wystarczy zatem, ściśle rzecz biorąc, mierzyć kąty w dwu położeniach lunety (jak to ma miejsce w przypadku b), lecz należy przy pomiarach bardzo dokładnych (np. astronomicznych) dla każdego zmierzonego kierunku obliczyć odpowiednią poprawkę wedle wzoru (7a). Poprawka ta ma znak  $+$ , gdy lewy koniec osi obrotu jest wzniesiony. Przez pomiar kąta w dwu położeniach lunety rugujemy tylko błąd opisany pod b), natomiast pozostaje wpływ błędu wymienionego pod a).

c) *Błąd kolimacyjny.*

Jeżeli oś celowa  $c$  nie jest prostopadła do osi obrotu lunety  $p$  (rys. 149 i 150), wówczas zakreśla ona podczas obrotu lunety stożek, względnie, jeżeli nie przecina się z osią obrotu lunety, hiperboloidę obrotową.



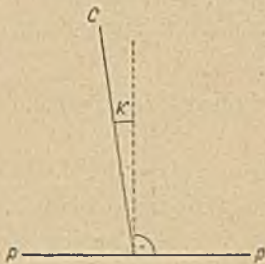
Biorąc pod uwagę trójkąt sferyczny  $PZQ$  (rys. 150 i 151) widzimy, że:

$$\sin \varepsilon_x = \sin z : \sin (90^\circ - h), \quad (8)$$

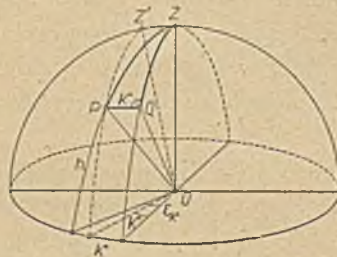
lub ze względu na małe kąty  $\varepsilon_x$  i  $z$ :

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\cos h}. \quad (9)$$

Jak wynika ze wzoru (9), błąd  $\varepsilon_x$  osiąga swą najmniejszą wartość dla  $h = 0$  i jest wówczas równy odchyleniu osi  $c$  od jej właściwego położenia.



Rys. 149.

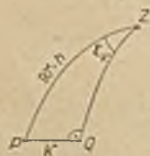


Rys. 150.

Błąd  $\varepsilon_x$  można wyrugować przez pomiar kąta w dwu położeniach lunety, gdyż wówczas otrzymujemy przy pierwszym pomiarze  $\frac{z}{\cos h}$ , zaś przy drugim pomiarze  $-\frac{z}{\cos h}$  tak, że średnia arytmetyczna jest wolna od tego błędu.

Usunięcie błędów kolimacyjnego i inklinacyjnego następuje w kolejności zależnej od tego, czy do instrumentu jest dołączona libela nasadkowa na oś obrotu lunety. Również zasadniczo inaczej przeprowadza się rektyfikację instrumentów, których lunety nie można przerzucać (ani przekładać).

a) Instrument posiada libelę nasadkową do nakładania na oś obrotu lunety.



Rys. 151.

W tym przypadku rozpoczynamy od usunięcia błędu inklinacyjnego. Ponieważ chcemy mieć równocześnie oś przyrządu prostopadłą do osi libeli nasadkowej, przeto rektyfikacja ma przebieg następujący.

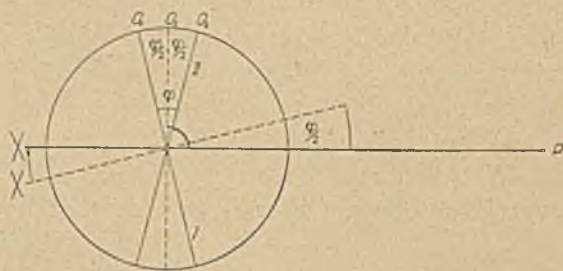
Obracamy alhidadę tak, aby pod jednym końcem libeli nasadkowej znalazła się jedna ze śrub ustawczych. Śrubą tą będziemy się posługiwali przy rektyfikacji. Po sprowadzeniu osi instrumentu  $i$  do pionu libelami alhidadowymi, nakładamy libelę nasadkową na oś obrotu lunety i sprowadzamy oś libeli do poziomu wspomnianą wyżej śrubą ustawczą. Następnie przekładamy libelę i połowę odchyłki środka bańki usuwamy śrubą ustawczą, a drugą połowę śrubką korekcyjną libeli, po czym usuwamy skrzyżowanie osi libeli i osi obrotu lunety w sposób, opisany w § 5, rozdz. VI. W ten sposób uzyskujemy równoległość osi libeli do osi obrotu lunety, pod założeniem, że czopy osi obrotu lunety tworzą walec obrotowy. Założenie to sprawdzi się, jeżeli po przelożeniu lunety w łożyskach środek bańki libeli



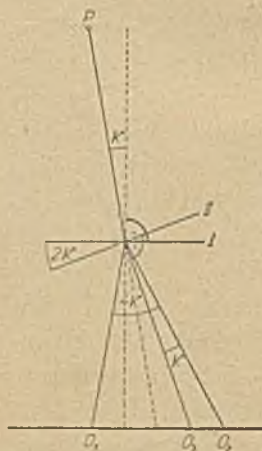
(nałożonej na oś obrotu) znajdzie się, jak poprzednio, w punkcie głównym. Aby uzyskać prostopadłość osi instrumentu do osi obrotu lunety, obracamy alhidadę o  $180^\circ$  (dookoła osi instrumentu), po czym połowę odchyłki środka bańki usuwamy śrubami do podnoszenia osi obrotu, zaś drugą połowę śrubą ustawczą. Następnie obracamy alhidadę o  $90^\circ$  i ewentualne odchylenie bańki usuwamy równocześnie pozostałymi śrubami ustawczymi (przykręcając jedną, rozkręcając drugą). Po ukończeniu tych czynności oś instrumentu jest pionowa, zaś oś libeli i oś obrotu lunety poziome. Dla kontroli można obrócić alhidadę wolno dookoła jej osi, przy czym środek bańki libeli powinien pozostać stale w punkcie głównym.

Mając już usunięty błąd inklinacyjny, przystępujemy do usunięcia błędu kolimacyjnego. W tym celu możemy zastosować kilka sposobów.

1) Po ustawieniu osi instrumentu do pionu, celujemy na pewien wyraźnie widoczny w luncie punkt  $P$ , przierzucamy lunetę i po odczytaniu jednego noniusza, obracamy alhidadę o  $180^\circ$  (odczyt na tym samym noniuszu). Jeżeli nie ma błędu kolimacyjnego, środek krzyża nitkowego (względnie jego nitka pionowa) powinien pokryć się z punktem  $P$ . Natomiast, gdy celowa trafia w inny obok leżący punkt  $P'$ , należy przesunąć krzyż nitkowy (za pomocą śrubek rektyfikacyjnych siatki) tak, aby środek krzyża pokrywał się z punktem, położonym w połowie odcinka  $PP'$ . Zamiast obracać alhidadę o  $180^\circ$ , możemy obrócić ją tak, by celowa przeszła przez punkt  $P$ , a po zmierzeniu kąta  $180^\circ \pm \varphi$  skrócić alhidadę o kąt  $\pm \frac{\varphi}{2}$  i nastawić śrubkami siatki krzyż nitkowy na punkt  $P^1$ ) (rys. 152).



Rys. 152.



Rys. 153.

2) Sposób poprzedni daje wyniki niezbyt dokładne z tego powodu, że zależy on od błędów odczytu i podziału; dlatego dokładniej wyznaczamy błąd kolimacyjny otrzymując jego poczwórną wartość (rys. 153). Po ustawieniu osi instrumentu do pionu, celujemy — jak poprzednio — na pewien (znajdujący się mniej więcej w poziomie instrumentu) punkt  $P$ , przierzucamy lunetę i odczytujemy  $O_1$  na lacie, ustawionej poziomo i poprzecznie do celowej w odległości około 30 m. Następnie kierujemy lunetę znowu na punkt  $P$ ,

<sup>1)</sup> Teodolity bardzo dokładne (do I-rzędnej triangulacji) mają czasem bardzo długie lunety, co uniemożliwia ich przierzucanie, można je natomiast przekładać w łożyskach, uzyskując bez pomocy odczytu symetryczne położenie celowej.

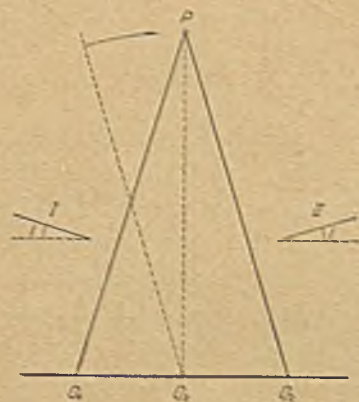


przerzucamy ją po raz drugi, otrzymując odczyt  $O_2$ . Odległość  $O_1 - O_2$  jest na promieniu wspomnianych 30 m łukiem odpowiadającym kątowii 4%. Odejmując od  $O_2$  jedną czwartą część wspomnianego łuku, otrzymujemy miejsce na lacie, na które nastawiona celowa będzie prostopadła do osi obrotu lunety.

3) Przy tyczeniu tras inżynierowie używają często następującego sposobu. Z punktu  $A$  wytycza się w terenie zupełnie płaskim dwa punkty  $B$  i  $C$ , leżące na jednej prostej. Mimo błędów inklinacyjnego i kolimacyjnego prosta będzie dobrze wytyczona, o ile tyczenie odbywa się w poziomie. Następnie ustawiamy instrument (oś pionowo) w punkcie środkowym  $B$ , celujemy do  $A$  i przerzucamy lunetę. Jeżeli jest błąd kolimacyjny, to nie trafimy do punktu  $C$ , lecz do innego, bliskiego  $C'$ . Dzieląc odstęp  $CC'$  na połowę otrzymamy punkt  $C''$ , na który nastawiamy celową śrubkami siatki rugując w ten sposób błąd kolimacyjny.

3) Instrument nie posiada libeli do nakładania na oś obrotu lunety.

W tym przypadku należy usunąć błąd kolimacyjny jednym z podanych wyżej sposobów, uważając by całe postępowanie odbyło się możliwie w poziomie. Usunięcie błędu inklinacyjnego przeprowadzamy najczęściej dwoma sposobami.



Rys. 154.

1) Obieramy punkt  $P$ , leżący w odległości od kilkunastu do kilkudziesięciu metrów, ale w takiej wysokości, aby celowa była poprowadzona pod dość znacznym kątem wysokościowym (ryc. 154). Przed instrumentem ustawiamy mniej więcej w tej samej odległości, w jakiej znajduje się punkt  $P$ , łatę poziomą w poziomie instrumentu. Następnie celujemy do punktu  $P$  i obniżając lunetę, odczytujemy na lacie  $O_1$ ; to samo przeprowadzamy w drugim położeniu lunety uzyskując odczyt  $O_2$ . Pion punktu  $P$  przechodzi przez punkt, odpowia-

dający średniemu odczytowi na lacie  $\frac{O_1 + O_2}{2} = O_s$ . Jeżeli teraz nastawimy

na ten odczyt celową i podniesiemy lunetę w kierunku punktu  $P$ , to z powodu błędu inklinacyjnego celowa nie trafi dokładnie w punkt  $P$ . Usuwa-  
jąc powstałą odchyłkę przy użyciu śrubek rektyfikacyjnych łożyska osi obrotu lunety, doprowadzamy tę oś do prostopadłości z osią instrumentu.

2) Usunięcie błędu inklinacyjnego uskutecznia się również przy pomocy sztucznego horyzontu, który można wywołać dowolną, ciemno zabarwioną cieczą. Rys. 155 objaśnia sposób postępowania.

7) Jeżeli nie można przerzucać lunety (jak to może mieć miejsce w małych instrumentach), ustawiamy instrument pionowo przed ścianą pionową i wyznaczamy na niej przez celowanie dwa punkty, jeden możliwie wysoko, drugi nisko. W punkty te wbijamy gwoździe o małych główkach i napięmy między nimi sznur; jeżeli celowa podczas obniżania lunety nie schodzi ze



sznura, istnieje tylko błąd inklinacyjny, w przeciwnym razie mamy do czynienia z kombinacją obu błędów. Usuwamy zatem przez próby błąd kolimacyjny (śrubkami siatki) dopóty, aż celowa będzie się poruszała po prostej na ścianie. Ewentualny błąd inklinacyjny usuwamy wedle pionu.

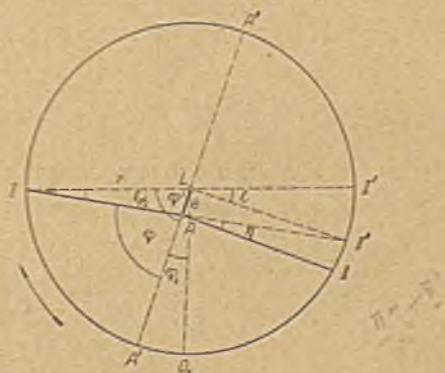
d) *Ekscentryczność alhidady.*

Jeżeli oś obrotu alhidady nie przechodzi przez środek limbusu  $L$ , lecz jest osadzona względem niego ekscentrycznie, musimy liczyć się przy pomiarze kąta poziomego z wywołanym przez to błędem systematycznym. Na rys. 156 uwidoczniono w przesadny sposób wpływ ekscentrycznego osadzenia osi  $A$ .

Oznaczmy odstęp punktów  $A$  i  $L$  przez  $e$ . Niech  $I$  oznacza odczyt na noniuszu (mikroskopie) pierwszym; gdyby nie było ekscentryczności, powinien drugi noniusz (mikroskop) dostarczyć odczytu  $II'$ , z powodu jednak ekscentrycznego osadzenia punktu  $A$  odczyt ten wypadłby  $II''$ . Ponieważ prosta łącząca zera noniuszów nie musi przechodzić przez punkt  $A$ , w rzeczywistości otrzymamy jakiś odczyt  $II$ . Łuk  $II'' II'$  reprezentuje w tym



Rys. 155.



Rys. 156.

położeniu noniuszów i kierunku prostej  $AL$  podwójny błąd kąta  $\varphi'$  spowodowany ekscentrycznością. Prostą  $AL$  (przedłużoną do  $A'$  i  $A''$ ) nazywamy osią ekscentryczności. Jak widzimy, błąd  $II' II$  składa się z dwóch części, a to z  $II'' - II' = \varepsilon$  i  $II - II' = \gamma$ .

Z trójkąta  $ILA$  wynika:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{e}{r} \sin \varphi', \quad (10)$$

a ponieważ  $\varepsilon$  jest bardzo małym kątem, przeto kładąc  $\sin \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2}$  oraz  $\varphi \approx \varphi'$ , otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{2e}{r} \sin \varphi'. \quad (11)$$

Kątowi  $\varphi' = 90^\circ$  odpowiada największy błąd  $\varepsilon_m$ :

$$\varepsilon_m = \frac{2e}{r}. \quad (12)$$

Natomiast błąd  $\gamma$  jest błędem stałym.

Oznaczmy przez  $d_1$  różnicę pomiędzy odczytami obu noniuszów, zmniejszoną o  $180^\circ$ , dla  $I$  od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , zaś przez  $d_2$  taką samą różnicę dla  $I$  od  $180^\circ$  do  $360^\circ$ , wówczas:

$$\begin{aligned} d_1 &= II_1 - I_1 - 180^\circ = \eta + \varepsilon_m \sin \varphi', \\ d_2 &= II_2 - I_2 - 180^\circ = \eta + \varepsilon_m \sin (\varphi' \pm 180^\circ) = \eta - \varepsilon_m \sin \varphi', \end{aligned} \quad (13)$$

przy czym oznaczyliśmy wartości na  $I$  i  $II$ , o ile  $I$  zmienia się od  $0^\circ$  do  $180^\circ$  przez  $I_1$  i  $II_1$ , zaś po przejściu  $I$  poza  $180^\circ$  przez  $I_2$  i  $II_2$ .

Na podstawie związku (13) otrzymujemy:

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \eta, \quad (14)$$

$$\frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon_m \sin \varphi' = \varepsilon_m \sin (I - \varphi_0) = \varepsilon, \quad (15)$$

przy czym  $\varphi_0$  jest kątem, zawartym między kierunkiem zerowym teodolitu i osią ekscentryczności.

Jeżeli odczyty wykonamy w równych odstępach kątowych tak, by na  $180^\circ$  przypadło  $n$  odczytów, otrzymamy dla wyznaczenia  $\eta$ :

$$\eta = \frac{[d_1 + d_2]}{2n}, \quad (16)$$

zaś  $\varepsilon_m$  i  $\varphi_0$  znajdziemy na podstawie spostrzeżeń pośrednich.

Równania błędów będą miały kształt następujący:

$$\varepsilon + \lambda = \sin I \cdot \varepsilon_m \cos \varphi_0 - \cos I \cdot \varepsilon_m \sin \varphi_0, \quad (17)$$

względnie, kładąc  $\varepsilon_m \cos \varphi_0 = x$ ,  $\varepsilon_m \sin \varphi_0 = y$ ,  $\sin I = a$ ,  $-\cos I = b$ ,  $-\varepsilon = l$ :

$$\lambda = ax + by + l. \quad (18)$$

Zauważyć jednak należy, że

$$[ab] = -[\sin I \cos I] = 0, \quad [aa] = [\sin^2 I] = \frac{n}{2}, \quad [bb] = [\cos^2 I] = \frac{n}{2},$$

zatem równania normalne mają kształt:

$$\frac{n}{2} x - [\varepsilon \sin I] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{n}{2} y + [\varepsilon \cos I] = 0,$$

wobec czego

$$x = \frac{2}{n} [\varepsilon \sin I], \quad y = -\frac{2}{n} [\varepsilon \cos I]. \quad (20)$$

Następnie obliczamy:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{-[\varepsilon \cos I]}{[\varepsilon \sin I]} \quad (21)$$

oraz

$$\varepsilon_m = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{n} \sqrt{[\varepsilon \sin I]^2 + [\varepsilon \cos I]^2}, \quad (22)$$



lub lepiej

$$\varepsilon_m = \frac{y}{\sin \varphi_o} = \frac{x}{\cos \varphi_o} = -\frac{2}{n} \frac{[\varepsilon \cos I]}{\sin \varphi_o} = -\frac{2}{n} \frac{[\varepsilon \sin I]}{\cos \varphi_o}. \quad (23)$$

Po wyznaczeniu  $\varepsilon_m$  i  $\varphi_o$  wiemy, że alhidada jest ułożona ekscentrycznie względem limbusu w odstępnie:

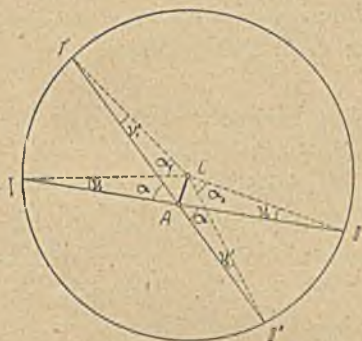
$$e = r \frac{\varepsilon_m}{2} = \frac{\varepsilon_m''}{\rho} \frac{r}{2} \quad (24)$$

w kierunku  $\varphi_o$ . Średni błąd wielkości  $\varepsilon$  obliczamy z wzoru

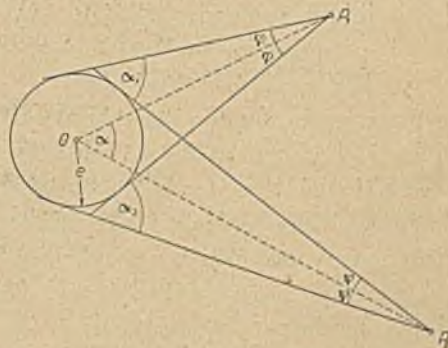
$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}. \quad (25)$$

Jeżeli błąd ten wypadnie stosunkowo dość znaczny, dowodzi to, że ekscentryczność jest zmienna, tj. że instrument posiada za duży luz w osi obrotu.

Błąd  $\eta$  da się usunąć przez odpowiednie przesunięcie jednego z noniuszów (wzgl. poprawienie jednego z mikroskopów).



Rys. 157.



Rys. 158.

Dla wyrugowania wpływu ekscentryczności alhidady wystarczy przy pomiarze kąta poziomego odczytać oba noniusze (mikroskopy). I tak, jak to widzimy na rys. 157, gdy celowa zakreśla kąt  $IAI' = HAII'$  pierwszy noniusz podaje nam kąt  $\alpha_1$ , zaś drugi  $\alpha_2$ , przy czym

$$\alpha + \nu_1 = \alpha_1 + \nu_1',$$

$$\alpha + \nu_2' = \alpha_2 + \nu_2,$$

zatem

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\nu_1' - \nu_1 + \nu_2 - \nu_2'}{2}. \quad (26)$$

W przybliżeniu jednak jest  $\nu_1 = \nu_2$ , zaś  $\nu_1' = \nu_2'$ , zatem

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (26a)$$

e) *Ekscentryczność osi celowej.*

Ekscentryczność ta może występować z powodu celowo ekscentrycznego osadzenia lunety względem osi instrumentu (np. w instrumentach górniczych lub astronomicznych, a to aby można było celować pod bardzo wielkimi kątami wysokościowymi), lub też z powodu nieuszkodzenia dokładnej rekty-



fikacji. Błąd, jaki z tego powodu powstaje, rugujemy przez pomiar kąta w dwu położeniach lunety.

Jak widzimy na rys. 158, mierząc kąt  $P_1OP_2$  otrzymujemy z powodu ekscentryczności osi celowej w pierwszym położeniu lunety kąt  $\alpha_1$ , zaś w drugim położeniu lunety kąt  $\alpha_2$ .

Ponieważ jednak istnieją związki:

$$\begin{aligned} \alpha + \psi &= \alpha_1 + \varphi \\ \alpha + \varphi &= \alpha_2 + \psi, \end{aligned}$$

przeto

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \text{ (zupełnie ściśle).}$$

Podobny błąd może powstać, jeżeli nitki siatki nie mają właściwego położenia, tj. jeżeli nitka podłużna jest wchrowata względem osi instrumentu, a poprzeczna nie jest do niej prostopadła. Dlatego należy i ten błąd o ile możliwości wyrugować, celując na sznurek pionu, lub przy sposobności usuwania błędu inklinacyjnego, badając, czy nitka podłużna znajduje się w wyznaczonej poprzednio płaszczyźnie pionowej (patrz c)  $\beta$  1) lub 2)).

f) *Błędy podziału limbusu.*

Podziały limbusów są wykonywane przy pomocy bardzo precyzyjnych maszyn podziałowych, tak że przesunięcia poszczególnych kresiek od ich właściwych położzeń są w teodolitach, przeznaczonych do triangulacji I-rzędnej minimalne. Mimo to nie ma oczywiście teodolitów bez błędów podziału; natomiast należy zaznaczyć, że wykrycie ich może nastąpić tylko w przypadkach, gdy odczyty można dokonywać z dokładnością kilku sekund. Wykrycie błędów podziału przy pomocy odczytów z dokładnością  $20''$  jest niemożliwe.

Przyjmuje się położenie pewnej kreski podziału jako wyjściowe i bada się, czy inne kreski leżą we właściwych miejscach. Astronom musi (ze względu na ruchomy cel) wyznaczyć błąd każdej kreski podziału; ponieważ zaś geodeta może mierzyć kąt na różnych częściach limbusu i przez to redukuje bardzo silnie wpływ błędów podziału, o ile tylko są one dostatecznie małe, przeto poprzestaje on zazwyczaj na zbadaniu średniego (przeciętnego) błędu podziału, a przekonawszy się, że błąd ten jest tego samego rzędu co błąd nastawienia na cel, uważa podział za dobry.

Wyznaczenie średniego błędu podziału uskutecznia się z błędów pozostałych po przeprowadzeniu wyrównania dla wyznaczenia elementów ekscentryczności alhidady.

Biorąc pod uwagę wielkości  $d_1$  i  $d_2$  z wzoru (13) i uwzględniając błędy systematyczne podziału, należy położyć:

$$\begin{aligned} d_1 + p_d' &= (II_1 + p_{II}') - (I_1 + p_1') - 180^\circ, \\ d_2 + p_d'' &= (II_2 + p_{II}'') - (I_2 + p_1'') - 180^\circ. \end{aligned} \quad (27)$$

Ponieważ kreski podziału są w odstępach, odpowiadających kątom najmniej pięciominutowym, przeto:

$$p_{II}'' = p_1', \text{ zaś } p_1'' = p_{II}'. \quad (28)$$



Wobec tego ze związków (27) wynika:

$$\frac{p_d' - p_d''}{2} = p_{II}' - p_I', \quad (29)$$

a ponieważ

$$\frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon,$$

przeto błąd systematyczny  $p_\varepsilon$  wyrażenia  $\varepsilon$  jest:

$$p_\varepsilon = p_{II}' - p_I'. \quad (30)$$

Błąd  $p_\varepsilon$  zawiera w sobie nie tylko błędy podziału dwu diametralnych miejsc limbusu, ale także cztery błędy odczytu; ponieważ

$$\varepsilon = \frac{(II_1 - I_1) - (II_2 - I_2)}{2}, \quad (31)$$

przeto, uwzględniając błędy przypadkowe  $\sigma$  (odczytu) i systematyczne  $p$  (podziału), otrzymamy:

$$\varepsilon + \lambda = \frac{(II_1 - I_1) - (II_2 - I_2)}{2} + \frac{\sqrt{2\sigma^2 + 2p^2}}{2} + p_{II}' - p_I'. \quad (32)$$

Aby otrzymać średni (przeciętny) błąd podziału, wystarczy potraktować wszystkie błędy jako przypadkowe i zastosować znane z rachunku wyrównawczego prawo przenoszenia się błędów; zatem

$$\mu^2 = 2p^2 + \sigma^2, \quad (33)$$

przy czym  $\mu$  jest błędem średnim, otrzymanym z wyrównania wielkości  $\varepsilon$ , a podanym we wzorze (25).

Wartość średnią błędu podziału otrzymujemy ostatecznie na podstawie wzoru:

$$p = \sqrt{\frac{\mu^2 - \sigma^2}{2}}. \quad (34)$$

Błąd ten powinien być tego samego rzędu co błąd nastawienia na cel.

Inne sposoby, jak np. pomiar metodą repetycyjną kąta, będącego w przybliżeniu  $n$ -tą częścią kąta pełnego, pomijamy ze względu na oszczędność miejsca, odsyłając czytelnika do prac specjalnych (Zeitschrift f. Vermessungswesen z r. 1875, 1878 i 1913, z polskich zaś Wiad. Sl. Geograf. z r. 1934).

Jako przykład szczegółowy wyznaczenia ekscentryczności alhidady oraz średniego błędu podziału limbusu podaję badanie, przeprowadzone na teodolicie f-my Starke-Kammerer (Wiedeń) Nr 279. Instrument ten ma dwa mikroskopy ze śrubą mikrometryczną o wartości kresek bębena 2". Średnica limbusu  $2r = 16$  cm. Odczyty wykonano w równych odstępach 10-stopniowych w ten sposób, że między nitki mikroskopu I (bębenek na 0) wprowadzano odpowiednią kreskę limbusu, a właściwy odczyt robiono na bębenu mikroskopu II. Pomiar wykonano dwukrotnie (tam i z powrotem); wyniki zestawione są w tabeli I.

TABELA I  
Teodolit f-my Starke-Kammerer Nr 279, dokł. odcz. 2''.

Mikroskop <i>I</i>	$d_1 = II - I - 180^0$			Mikroskop <i>I</i>	$d_2 = II - I - 180^0$		
	pomiar 1	pomiar 2	średnia		pomiar 1	pomiar 2	średnia
0°	+ 4,1''	+ 1,5''	+ 2,8''	180°	+ 5,9''	+ 6,0''	+ 6,0''
10	+ 4,7	+ 6,7	+ 5,7	190	+ 5,0	+ 4,0	+ 4,5
20	+ 8,7	+ 9,7	+ 9,2	200	+ 2,8	+ 2,5	+ 2,6
30	+ 11,4	+ 11,6	+ 11,5	210	- 0,9	- 1,9	- 1,4
40	+ 7,4	+ 9,3	+ 8,4	220	- 0,5	- 1,2	- 0,8
50	+ 8,7	+ 11,5	+ 10,1	230	- 0,1	- 1,9	- 1,0
60	+ 10,6	+ 9,9	+ 10,2	240	- 1,8	- 2,6	- 2,2
70	+ 14,3	+ 15,7	+ 15,0	250	- 1,5	- 1,2	- 1,4
80	+ 15,2	+ 17,1	+ 16,2	260	- 0,1	- 6,2	- 3,2
90	+ 16,1	+ 17,7	+ 16,9	270	- 5,4	- 6,8	- 6,1
100	+ 10,0	+ 13,6	+ 11,8	280	- 1,5	- 2,9	- 2,2
110	+ 13,7	+ 17,8	+ 15,8	290	- 0,8	- 5,2	- 3,0
120	+ 15,1	+ 16,1	+ 15,6	300	+ 1,4	- 0,3	+ 0,6
130	+ 11,2	+ 13,6	+ 12,4	310	- 1,7	- 4,0	- 2,8
140	+ 12,3	+ 12,4	+ 12,4	320	+ 0,1	- 2,8	- 1,4
150	+ 8,1	+ 8,9	+ 8,5	330	+ 1,7	- 2,0	- 0,2
160	+ 8,7	+ 11,2	+ 10,0	340	+ 1,5	- 1,1	+ 0,2
170	+ 10,1	+ 8,9	+ 9,5	350	+ 3,3	0,0	+ 1,6

Tabela II podaje obliczenia poszczególnych  $\eta$  i  $\varepsilon$  według wzorów (14) i (15) oraz dalsze rachunki (nie wymagające zresztą objaśnień), które prowadzą do następujących wyników:

$$x = \frac{2}{18} 82,8212 = 9,2024, \quad y = \frac{2}{18} 8,2558 = 0,9173, \quad \text{w/g wzoru (20),}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{+ 8,2558}{+ 82,8212} = 0,09968, \quad \varphi_0 = 5^{\circ} 42', \quad \text{w/g wzoru (21),}$$

$$\varepsilon_m = + \frac{2}{n} \frac{[\varepsilon \sin I]}{\cos \varphi_0} = \frac{2}{18} \frac{82,8212}{0,99507} = 9,25 \quad \text{w/g wzoru (23),}$$

zatem

$$\varepsilon = 9,25'' \sin (I - 5^{\circ} 42'), \quad (\text{a})$$



TABELA II

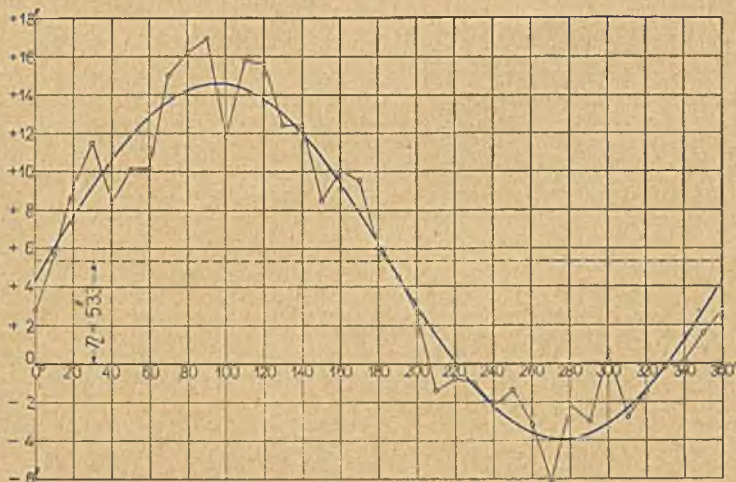
	$I$	$d_1$	$d_2$	$\frac{\eta = d_1 + d_2}{2}$	$\frac{\delta = \eta_{sr} - \eta}{\eta_{sr} - \eta}$	$\frac{\varepsilon = d_1 - d_2}{2}$	$\sin I$	$\cos I$	$\varepsilon \sin I$	$\varepsilon \cos I$	$x \sin I$	$-y \cos I$	$\bar{\varepsilon}$	$\frac{\lambda = \bar{\varepsilon} - \varepsilon}{\bar{\varepsilon} - \varepsilon}$
1	0°	+ 2,8"	+ 6,0"	+ 4,40"	+ 0,93"	-1,60"	—	+ 1,000	—	-1,6000	—	-0,917	-0,92"	+ 0,68"
2	10	+ 5,7	+ 4,5	+ 5,10	+ 0,23	+ 0,60	+ 0,114	+ 0,985	+ 0,1044	+ 0,5910	+ 1,601	-0,904	+ 0,70	+ 0,10
3	20	+ 9,2	+ 2,6	+ 5,90	-0,57	+ 3,30	+ 0,342	+ 0,940	+ 1,1286	+ 3,1020	+ 3,147	-0,862	+ 2,28	-1,02
4	30	+ 11,5	-1,4	+ 5,05	+ 0,28	+ 6,45	+ 0,500	+ 0,866	+ 3,2250	+ 5,5857	+ 4,601	-0,794	+ 3,81	-2,64
5	40	+ 8,4	-0,8	+ 3,80	+ 1,53	+ 4,60	+ 0,643	+ 0,766	+ 2,9578	+ 3,5236	+ 5,917	-0,703	+ 5,21	+ 0,61
6	50	+ 10,1	-1,0	+ 4,55	+ 0,78	+ 5,55	+ 0,766	+ 0,643	+ 4,2513	+ 3,5686	+ 7,049	-0,590	+ 6,46	+ 0,91
7	60	+ 10,2	-2,2	+ 4,00	+ 1,33	+ 6,20	+ 0,866	+ 0,500	+ 5,3692	+ 3,1000	+ 7,969	-0,459	+ 7,51	+ 1,31
8	70	+ 15,0	-1,4	+ 6,80	-1,47	+ 8,20	+ 0,940	+ 0,342	+ 7,7080	+ 2,8044	+ 8,650	-0,314	+ 8,34	+ 0,14
9	80	+ 16,2	-3,2	+ 6,50	-1,17	+ 9,70	+ 0,985	+ 0,174	+ 9,5545	+ 1,6878	+ 9,064	-0,160	+ 8,90	-0,80
10	90	+ 16,9	-6,1	+ 5,40	-0,07	+ 11,50	+ 1,000	—	+ 11,5000	—	+ 9,202	—	+ 9,20	-2,30
11	100	+ 11,8	-2,2	+ 4,80	+ 0,53	+ 7,00	+ 0,985	-0,174	+ 6,8950	-1,2180	+ 9,064	+ 0,160	+ 9,22	+ 2,22
12	110	+ 15,8	-3,0	+ 6,40	-1,07	+ 9,40	+ 0,940	-0,342	+ 8,8360	-3,2148	+ 8,650	+ 0,314	+ 8,96	-0,44
13	120	+ 15,6	+ 0,6	+ 8,10	-2,77	+ 7,50	+ 0,866	-0,500	+ 6,4950	-3,7500	+ 7,969	+ 0,459	+ 8,43	+ 0,93
14	130	+ 12,4	-2,8	+ 4,80	+ 0,53	+ 7,60	+ 0,766	-0,643	+ 5,8216	-4,8868	+ 7,049	+ 0,590	+ 7,64	-0,16
15	140	+ 12,4	-1,4	+ 5,50	-0,17	+ 6,90	+ 0,643	-0,766	+ 4,4367	-5,2854	+ 5,917	+ 0,703	+ 6,62	-0,28
16	150	+ 8,5	-0,2	+ 4,15	+ 1,18	+ 4,35	+ 0,500	-0,866	+ 2,1750	-3,7671	+ 4,601	+ 0,794	+ 5,39	+ 1,04
17	160	+ 10,0	+ 0,2	+ 5,10	+ 0,23	+ 4,90	+ 0,342	-0,940	+ 1,6758	-4,6060	+ 3,147	+ 0,862	+ 4,01	-0,89
18	170	+ 9,5	+ 1,6	+ 5,55	-0,22	+ 3,95	+ 0,174	-0,985	+ 0,6873	-3,8908	+ 1,601	+ 0,904	+ 2,51	-1,44
				$\eta_{sr} = + 5,33''$					+ 82,8212	- 8,2558				



zaś poprawka odczytu I ze względu na na ekscentryczność alhidady będzie  $E = \frac{1}{2} \varepsilon$  (patrz rys. 156). Natomiast liniowa ekscentryczność wynosi według (24):  $e = 0,0018$  mm w kierunku  $\varphi_0 = 5^{\circ}42'$ .

Stałe przesunięcie mikroskopów jest  $\eta_{sr} = +5''{,}33$ , tzn. że mikroskop II jest przesunięty o tę wielkość w kierunku zgodnym z liczbowaniem stopni limbusu od punktu, odpowiadającego odczytowi  $1 \pm 180^{\circ}$ .

W przedostatniej kolumnie tabeli II (pod nagłówkiem  $\varepsilon$ ) podane są wartości funkcji (a) dla poszczególnych I. Przebieg tej funkcji wraz z odpo-



Rys. 159.

wiednimi wartościami  $\varepsilon$ , uzyskanymi z pomiaru, przedstawia rys. 159. Ostatnia kolumna tabeli zawiera błędy  $\lambda$  poszczególnych  $\varepsilon$ , zaś  $[\lambda\lambda] = 27,3865$ . Zatem według (25) jest

$$\mu^2 = \frac{27,3865}{18 - 2} = 1,7116, \text{ skąd } \mu = \pm 1''{,}31.$$

Dla wyznaczenia średniego błędu  $p$  podziału limbusu musimy znać jeszcze średni błąd  $o$  odczytu na mikroskopie, który otrzymujemy np. przez wielokrotne (najmniej 10-krotne) nastawienie nitek jednego mikroskopu na tę samą kreskę koła poziomego. Dla badanego teodolitu jest  $o = \pm 1''{,}01$ , więc

$$2p^2 = \mu^2 - o^2 = 1,7116 - 1,0201 = 0,6915,$$

skąd

$$p^2 = 0,3458, \quad p = \pm 0''{,}59.$$

### § 3. Metody pomiaru kątów poziomych

Istnieją cztery metody pomiaru kątów poziomych:

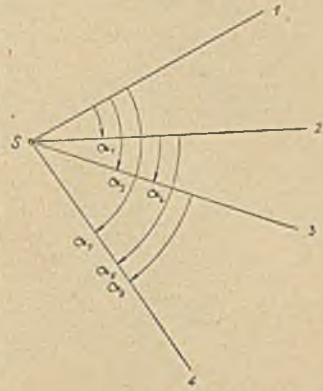
- 1) metoda pomiaru kątów we wszystkich kombinacjach (met. Schreibera);
- 2) metoda reiteracyjna;



- 3) metoda kierunkowa; } stosowane przy wykonywaniu pomiarów  
 4) metoda repetycyjna; } o średniej dokładności.

1) *Pomiar kątów we wszystkich kombinacjach* jest używany przy wykonywaniu najdokładniejszych pomiarów, a więc przy I i II-rzędnej triangulacji. Po oznaczeniu numerami poszczególnych kątów (rys. 160) mierzymy kąty skombinowane z kierunkiem pierwszym, potem (bez powtarzania, tj. już z pominięciem kierunku pierwszego) z kierunkiem drugim, itd., aż do wyczerpania wszystkich kombinacji. Mając tedy pęk promieni

składający się z  $K$  kierunków mierzymy  $\frac{K(K-1)}{2}$  kątów; np. jeśli  $K = 4$ , ilość  $K_i = 6$  kątów. Poza tym dla wyrugowania błędów systematycznych (są to błędy podziału, skręty wież obserwacyjnych itp.) mierzy się każdy kąt w obu położeniach lunety i to w dwu kierunkach (ruch wskazówek zegara i przeciwny), bacząc, aby żaden kierunek nie był mierzony dwa razy na tym samym miejscu limbusu.



Rys. 160.

Dokładny opis tej metody wraz z obliczeniami znajdzie czytelnik w autora »Rachunku wyrównawczym« (str. 195). Metoda ta dostarcza nam niezależnych kierunków (nie niezależnych kątów!).

2) *Metoda reiteracyjna* należy również do bardzo dokładnych metod pomiarowych. Kąty mierzy się wielokrotnie, podsuwając dla zmniejszenia błędów podziału coraz to dalszą partię limbusu. Metoda ta jest mało używana; dostarcza nam ona kątów niezależnych, co może być ułatwieniem w pewnych przypadkach.

3) *Metoda kierunkowa* jest najodpowiedniejsza dla pomiarów średniej dokładności i dlatego też jest powszechnie w użyciu. Mając do pomiaru pęk promieni obieramy jeden kierunek jako wyjściowy. Błąd nastawienia na cel w tym kierunku powinien być możliwie jak najmniejszy, a warunki oświetlenia przez czas pomiaru całego pęku o ile możliwości te same. Wybieramy zatem punkt ostro rysujący się na północnej części widnokregu. Na punkt ten nastawiamy lunetę (środek krzyża nitkowego) i odczytujemy oba noniusze (mikroskopy), po czym kierujemy lunetę kolejno na wszystkie punkty, zapisując wyniki pomiaru. W ten sposób dochodzimy do kierunku pierwotnego, na którym sprawdzamy, czy instrument nie zmienił w międzyczasie swego położenia (skręt lub przesunięcie, np. z powodu przypadkowego, lekkiego nawet, potrącenia). Następnie przierzucamy lunetę i wykonujemy pomiar w kierunku przeciwnym. O ile nie skonstatowaliśmy zmiany położenia teodolitu, obliczamy z obu położen średnie arytmetyczne jako wyniki poszczególnych kierunków.

Na rys. 161 zaznaczono odczyty dla poszczególnych kierunków  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{k-1}, \alpha_k, (\alpha_1)$ , (w kierunku posuwania się wskazówek zegara) i  $\alpha'_1, \alpha'_k, \alpha'_{k-1}, \dots, \alpha'_2, (\alpha'_1)$  (w kierunku przeciwnym). Różnica między  $\alpha_1$  i  $(\alpha_1)$ , oraz  $\alpha'_1$  i  $(\alpha'_1)$  nie powinna







Stanowisko: $\Delta 2$														Obserwowal dnia 17.V. 1930 N. N. Ustawienie instrumentu na statywie, centrycznie Stan atmosfery pochmurno												
Cel	Polozenie lunety	Seria I (Poczet I)					Seria II (Poczet II)					Seria III (Poczet III)					Redukcja na zero									
		o		"		średnia	o		"		średnia	o		"		średnia	o		"		o		"			
$\Delta 3$	I	0	01	07			00	00	60	01	11			00	00	120	00	19			00	00				
	II		00	47			00	57		00	52			01	02		00	03			00	11	0	0	0	
$\Delta 4$	I	53	31	04			29	56	113	31	13			30	00	173	30	16			29	59				
	II		30	42			30	53		30	52			31	02		30	03			30	10	53	29	58	
$\Delta$ P. G.	I	82	18	25			17	16	142	18	28			17	20	202	17	37			17	25				
	II		18	01			18	13		18	15			18	22		17	36			17	36	82	17	20	
$\Delta$ K. p.	I	86	24	59			23	46	146	25	01			23	47	206	24	19			24	08				
	II		24	27			24	43		24	37			24	49		24	19			24	19	86	23	54	
$\Delta 3$	I	0	01	06			00	00	60	01	09			59	55	120	00	19			59	59				
	II		00	48			00	57		00	45			00	57		00	02			00	10	359	59	58	

4) *Metoda repetycyjna* jest dziś używana rzadziej, gdyż po zaopatrzeniu instrumentu w mikroskopy zamiast noniuszów, nie daje już takich korzyści, jak to miało miejsce przedtem.

Postępowanie podczas pomiaru może być dwojakie. Nastawiamy lunetę (środek krzyża nitkowego) na cel lewy i odczytujemy stan noniusza (mikroskopu); zwalniamy sprzęg alhidady i celujemy na cel prawy (odczyt z grubszą dla orientacji). Następnie zwalniamy sprzęg limbusu i celujemy znów na cel lewy, po czym na cel prawy po zwolnieniu sprzęgu alhidady. Zamiast powtarzać pomiar 2 razy, jak to opisaliśmy, wykonujemy to  $r$  razy, odczytując po  $r$ -tej repetycji stan noniusza (mikroskopu). Uzyskaną różnicę dzielimy przez  $r$ , otrzymując mierzony kąt  $\alpha$  w pierwszym położeniu lunety. Następnie mierzymy kąt  $\alpha$  w drugim położeniu lunety w kierunku odwrotnym, zwalniając sprzęgi przed nastawieniem na cel odwrotnie niż poprzednio. Z obu otrzymanych wyników tworzymy średnią arytmetyczną.

Zamiast przeprowadzać w ten sposób repetycje, można po  $r$  repetycjach w pierwszym położeniu lunety przerzucić lunetę i nastawić na cel lewy po zwolnieniu sprzęgu limbusowego, po czym następuje druga część repetycji w tym samym kierunku co poprzednio.

Różnicę między ostatnim odczytem a pierwszym, zmniejszoną o  $180^\circ$ , dzielimy wówczas przez  $2r$ , otrzymując mierzony kąt  $\alpha$ .

Ten sposób pomiaru zmniejsza bardzo silnie wpływ błędów odczytu, gdyż różnice odczytów dzielimy przez  $r$ , względnie  $2r$ . Natomiast błędy nastawie-

nia na cel nie zmniejszają się wcale. Metody tej używamy wówczas, gdy stanowisko jest chwiejne, mało miejsca do obserwacji, lub gdy ze względu na oświetlenie nie można odczytywać w dowolnym położeniu alhidady (np. na wieżach nie przysposobionych specjalnie do pomiarów kątowych); albo też, gdy chcemy otrzymać jako rezultat pomiarów kąty niezależne, co ułatwia bardzo późniejsze wyrównanie.

Załączony przykład podaje obserwacje kątowe wykonane metodą repetycyjną według Przepisów M. R. P. z r. 1928, § 13 (str. 10), przy użyciu instrumentu uniwersalnego f-my Starke-Kammerer o wartości odczytu noniuszów 20".

Dziennik pomiaru kątów poziomych sieci triangulacyjnej. Strona .....

Stanowisko: Δ 5		Obserwowak: dnia 11.VII. 1928 r. N. N. Ustawienie instrumentu: na statywie, centrycznie Stan atmosfery: pogodnie															
Cel	Położenie lunety	Seria I (Poczet I)				Średnia I	Seria II (Poczet II)				Średnia II	Seria III (Poczet III)				Średnia III	Średnia z I, II i III (i popr. zamknięcia)
		o	o	o	o		o	o	o	o		o	o	o	o		
Pomiar repetycyjny																	
Kąt zawarty między:		0	0	0		141	59	20		203	59	20					
		179	59	30	59	45		59	10	59	15		58	30	58	55	
		(nastawienie)				(kąt podwójny)											
		65	59	0		207	58	30		349	58	20					
			58	20	58	40		58	0	58	15		57	40	58	0	
Δ 6 i Δ Gimn.		141	59	45		141	59	35		141	59	45					
		131	58	0									kąt podwójny		141	59	38
			57	0	57	30							kąt pojedynczy		70	59	49
		141	59	30													

Ograniczając się do omówienia dokładności obu ostatnich metod pomiarowych jako używanych najczęściej, rozpoczniemy od omawiania błędów popełnianych przy pomiarze kąta.

Gdyby instrument posiadał tylko jeden noniusz (mikroskop), to na pomiar kąta składałyby się następujące czynności, obarczone błędami nastawienia na cel  $\mu_n$  i odczytu  $\mu_o$ :

- 1) nastawienie lunety na cel lewy z błędem średnim  $\mu_n$ ,
- 2)  $o_1$  odczyt noniusza (mikroskopu) „ „  $\mu_o$ ,
- 3) nastawienie lunety na cel prawy „ „  $\mu_n$ ,
- 4)  $o_2$  odczyt noniusza (mikroskopu) „ „  $\mu_o$ ,
- 5) przerwyczenie lunety,
- 6) nastawienie lunety na cel prawy „ „  $\mu_n$ ,
- 7)  $o_2'$  odczyt „ „  $\mu_o$ ,



8) nastawienie lunety na cel lewy z błędem średnim  $\mu_n$ ,

9)  $o_1'$  odczyt „ „ „  $\mu_o$ ,

Ponieważ kąt obliczamy jako średnią arytmetyczną różnic odczytów w obu położeniach lunety wedle wzoru:

$$\alpha = \frac{o_2 - o_1 + o_2' - o_1'}{2}, \quad (37)$$

przeto, uwzględniając także i błędy nastawienia, otrzymujemy na średni błąd kąta związek:

$$\mu_\alpha^2 = 4 \frac{\mu_o^2 + \mu_n^2}{4} = \mu_o^2 + \mu_n^2. \quad (38)$$

Jeżeli odczytywano dwa noniusze (tworząc z nich średnią) będzie:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{\mu_o^2}{2} + \mu_n^2. \quad (39)$$

Wobec tego błąd n-krotnego pomiaru kąta (2 noniusze) wyniesie:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{1}{n} \left( \frac{\mu_o^2}{2} + \mu_n^2 \right) n. \quad (40)$$

Mierząc kąt repetycyjnie (dwoma noniuszami) otrzymujemy, o ile użyjemy metody pierwszej, tworząc  $\alpha$  wedle wzoru:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{o_r' - o_1'}{r} + \frac{o_r'' - o_1''}{r} \right), \quad (41)$$

na błąd średni związek:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{1}{r} \left( \frac{\mu_o^2}{2} + \mu_n^2 \right); \quad (42)$$

zaś przy użyciu metody drugiej:

$$\mu_\alpha^2 = \frac{1}{r} \left( \frac{\mu_o^2}{4} + \mu_n^2 \right). \quad (43)$$

Na podstawie błędów średnich możemy obliczyć wagi kątów mierzonych podanymi metodami. I tak, jeżeli wagę kąta mierzonego raz w dwu położeniach lunety przyjmiemy równą 1, waga kąta mierzonego n-krotnie (w 2 położeniach lunety) będzie równa  $n$ .

Podobnie, jeżeli przyjęto wagę kierunku raz mierzonego w dwu położeniach lunety równą 1, waga kierunku mierzonego w  $s$  seriach będzie równa  $s$ .

Wagę dla kątów mierzonych repetycyjnie wyznaczmy<sup>2)</sup> jako stosunek kwadratów błędów powstałych dla jednej i  $r$ -tej repetycji:

<sup>1)</sup> Dokładne omówienie błędów metody kierunkowej znajdzie czytelnik w autorze »Rachunku wyrównawczym«, str. 204.

<sup>2)</sup> Por. »Rachunek wyrównawczy«, str. 190.

a) jeżeli zastosujemy pierwszą metodę pomiaru (2 noniusze):

$$\rho_r' = \frac{\mu_1^2}{\mu_r^2} = r^2 \frac{\frac{\mu_o^2}{2} + \mu_n^2}{\frac{\mu_o^2}{2} + r\mu_n^2}; \quad (44)$$

b) gdy zaś postąpimy wedle metody drugiej:

$$\rho_r' = \frac{\mu_1^2}{\mu_r^2} = r^2 \frac{\left(\frac{\mu_o}{2}\right)^2 + \mu_n^2}{\left(\frac{\mu_o}{2}\right)^2 + r\mu_n^2}. \quad (45)$$

Jeżeli błąd odczytu  $\mu_o$  jest stosunkowo duży, można przy mniejszej liczbie repetycyj przyjąć wagę kąta równą w przybliżeniu  $r^2$ , jak to widzimy na następującym przykładzie:

$$r = 4$$

		I met.	II met.
$\mu_o = \pm 10''$	$\mu_n = \pm 1''$	$p \approx 16$	$p \approx 16$
$\mu_o = \pm 1''$	$\mu_n = \pm 1''$	$p \approx 5$	$p \approx 5$

#### § 4. Użycie teodolitu w polu.

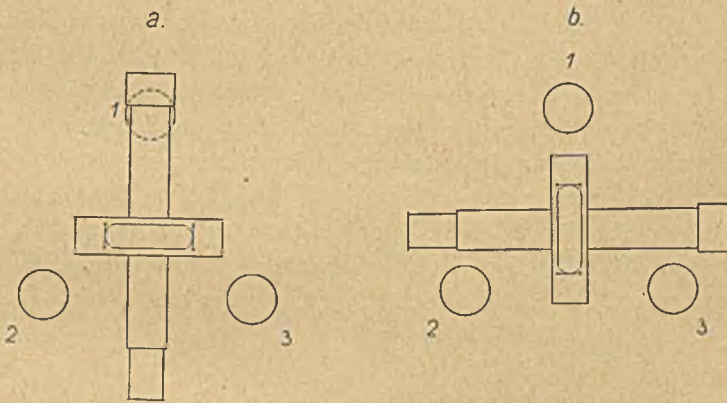
Chcąc pomierzyć kąt poziomy  $AOB$  musimy przede wszystkim ustawić instrument w jego wierzchołku  $O$ . W tym celu ustawiamy statyw nad punktem wierzchołkowym  $O$ , uważając aby głowa statywu była o ile możliwości pozioma, a pion opuszczony na sznurze ze środkowego otworu statywu wskazywał na punkt  $O$  zaznaczony na terenie. Następnie ustawiamy na statywie instrument, wkręcając w otwór znajdujący się między nóżkami ze śrubami ustawczymi śrubę centralną, zawieszamy u jej wylotu pion na sznurze i przesuwamy instrument na statywie tak, aby pion wskazywał na punkt. Aby nie uszkodzić gwintów śrub ustawczych, przyciągamy tylko lekko śrubę sprężynową, po czym przystępujemy do ustawienia osi instrumentu do pionu przy pomocy libel alhidadowych, analogicznie jak to ma miejsce przy instrumentach niwelacyjnych ze statywami krążkowymi. O ile podczas tych czynności pion wychylił się z punktu  $O$ , należy instrument scentrować, przesuując go odpowiednio. Dokładniejsze ustawienie uzyskujemy przy pomocy libeli nasadkowej na oś obrotu lunety.

Jeżeli zależy nam równocześnie na usunięciu błędu inklinacyjnego, postępujemy jak podano w § 2, c. Natomiast jeżeli mamy tylko sprowadzić oś instrumentu do pionu, postępujemy następująco. Przede wszystkim ustawiamy oś instrumentu do pionu libelami alhidowymi i usuwamy ewentualne skrzyżowanie osi libeli i osi obrotu lunety (patrz ustęp: rektyfikacja typu III, rozdz. VI, § 5). Następnie po ustawieniu lunety i libeli, jak to uwidoczono na



rys. 162a, sprowadzamy bańkę libeli do punktu głównego śrubami ustawczymi (2) i (3) znajdującymi się na prostej równoległej do osi libeli, po czym obracamy lunetę o  $180^\circ$  dookoła osi instrumentu. W razie wychylenia się bańki z punktu głównego należy naprzód połowę wychylenia usunąć śrubą korekcyjną libeli, a następnie sprowadzić środek bańki do punktu głównego przy pomocy wspomnianych śrub ustawczych, przy czym powinno się jedną śrubę wkręcać a drugą wykręcać. Wynik należy skontrolować, powtarzając podane postępowanie. Następnie obracamy alhidadę w płaszczyźnie poziomej o  $90^\circ$ , (rys. 162b), a wobec tego, że libela jest zrektyfikowana, należy tylko sprowadzić środek bańki do punktu głównego przy pomocy pozostałej śruby ustawczej (1). Dla dokładnego ustawienia osi do pionu trzeba wyżej opisane czynności powtórzyć. Po przeprowadzonej rektyfikacji powinna oś libeli pozostawać stale pozioma podczas obrotu alhidady.

O ile na lunecie znajduje się libela niwelacyjna, można jej również użyć do ustawienia osi instrumentu do pionu. I tak śruba *E*, powodująca ruch le-

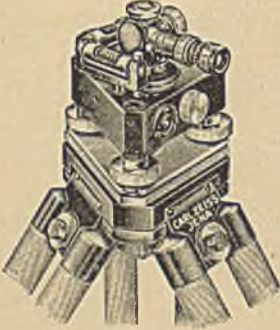


Rys. 162.

niwy lunety w kierunku pionowym, odpowiada wówczas śrubie elewacyjnej instrumentu niwelacyjnego. Postępowanie jest w tym przypadku następujące. Po sprowadzeniu osi instrumentu do pionu libelami alhidadowymi obracamy tak alhidadę, aby luneta z libelą zajęła położenie równoległe do prostej łączącej dwie śruby ustawcze. Następnie sprowadzamy środek bańki libeli do punktu głównego śrubą *E*, po czym obracamy alhidadę o  $180^\circ$ , a ewentualne wychylenie bańki usuwamy w połowie śrubą *E*, pozostałą zaś połowę — śrubami ustawczymi. Po obrocie alhidady o  $90^\circ$  usuwamy ewentualne wychylenie środka bańki pozostałą śrubą ustawczą. Wynik kontrolujemy jak poprzednio.

Jeżeli nam zależy na bardzo dokładnym scentrowaniu instrumentu nad punktem, posługujemy się *pionem optycznym*. Jest to urządzenie, które widzimy w nowszych przyrządach (Wild, Zeiss, Breithaupt i inne), składające się z małej lunetki pryzmatycznej umieszczonej pod spodarką, której oś celowa

pokrywa się z osią instrumentu. Przyrządy firmy Zeissa posiadają oddzielną spodarkę, na którą nakłada się instrument: do dokładnego scentrowania instrumentu nad punktem wystarczy przeto scentrować poprzednio spodarkę. Na spodarkę nakładamy zatem, w miejsce instrumentu, wspomniane urządzenie (krążek z umieszczoną w środku lunetką pryzmatyczną), nastawiamy lunetę »na ostro«, po czym centrujemy dokładnie, przesuując spodarkę tak, aby środek krzyża lunetki pokrywał się z punktem (p. rys. 163).



Rys. 163.

O przyrządach wyposażonych w trzy statywy, spodarki i odpowiednie sygnały wspomniano w rozdziale IX (Poligonometria).

### § 5. Mikroskopy teodolitowe

Istnieją dwa powody, dla których noniusze zastępuje się mikroskopami; pierwszym z nich jest dążność do zwiększenia dokładności (zmniejszenia błędu) odczytu, drugim zaś łatwe wykonanie odczytu, a tym samym zmniejszenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu grubego. Dlatego też spotykamy w praktyce kilka typów mikroskopów zależnie od tego, który z poprzednio wymienionych momentów przeważa.

Mikroskopy teodolitowe można podzielić na cztery grupy: a) zwyczajne czyli kreskowe, b) skalowe z płytką mikrometryczną, c) precyzyjne ze śrubą mikrometryczną i d) tzw. mikrometry optyczne systemu Wilda-Zeissa.

a. Odczyt:  $124^{\circ} 27'$ b. Odczyt:  $20^{\circ} 40'$   
 $\quad\quad\quad 13,6$   
 $\hline 20^{\circ} 53,6'$ 

Rys. 164.

Teorię mikroskopów a), b) i c) podano w rozdziale III; ograniczymy się tu zatem tylko do rysunków, objaśniających ich odczytywanie (rys. 164 a i b, rys. 165).

Celem uzyskania odczytu przy pomocy mikroskopu ze śrubą mikrometryczną przesuwany ramkę, na której są napięte dwie nitki równoległe dopóty przy pomocy śruby mikrometrycznej, aż obejmą one obustronnie obraz najbliższej kreski podziału limbusu (rys. 165).



Dla orientacji ile dokonano pełnych obrotów śruby mikrometrycznej, umieszczono w polu widzenia ząbki. Ilość miniętych przez nitki całkowitych ząbków, czy też w niektórych lepszych przyrządach półząbków, oznacza ilość minut, zaś podwójne sekundy, względnie (w lepszych przyrządach) pojedyncze sekundy, odczytujemy na bębenu śruby mikrometrycznej.

Dla triangulacji II i III-rzędnej należy mikroskopy jak najstaranniej zrektyfikować, aby 5 obrotów śruby mikrometrycznej odpowiadało kątowi  $10'$  (opis tej rektyfikacji podano w rozdziale III »Zasady optyki«). Jeżeli bębenek śruby jest podzielony na 60 części, to odstęp jego kresek odpowiada dwu sekundom kątowym. Dodając pojedyncze minuty i sekundy obu mikroskopów, otrzymujemy od razu średnią arytmetyczną. Np.

$$\begin{array}{l} \text{M. I. } 105^{\circ} 51' 32'' \text{ (właściwa wartość odczytu } 105^{\circ} 53' 04'') \\ \text{M. II. } (285^{\circ}) 51' 37'' \text{ (właściwa wartość odczytu } 285^{\circ} 53' 14'') \\ \text{średnia: } 105^{\circ} 53' 09'' \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad 105^{\circ} 53' 09'' \end{array}$$

Triangulację I-go rzędu należy wykonywać teodolitami dostarczającymi bezpośrednio sekundy katowe. Pięciu, względnie dwu i pół obrotom śruby mikrometrycznej odpowiadać musi pięć minut kątowych. Poza tym w polu widzenia mikroskopu widzimy zawsze najmniej dwie kreski podziału, na które nastawiamy kolejno nitki mikroskopu. Gdyby mikroskop był zupełnie dokładnie zrektyfikowany i nie było błędów podziału (tj. gdyby odstęp wszystkich kresek limbusu był idealnie równy), wystarczyłoby wziąć średnią arytmetyczną z obu dokonanych odczytów, tj. lewego  $l$  i prawego  $p$ , zatem

$$\frac{l+p}{2}$$

Ponieważ jednak nie ma tak idealnego stanu rzeczy, należy jeszcze powyższą średnią arytmetyczną uzupełnić pewną poprawką, spowodowaną wymienionymi niedomaganiem.

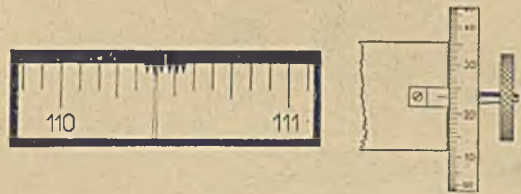
Jeżeli przesuwając nitki mikroskopu z jednej kreski podziału do drugiej otrzymamy ogólnie  $O'$  zamiast  $O$  ( $5'$ ), wówczas tzw. *run mikroskopu*  $\Delta O$  wynosi

$$\Delta O = O - O'. \qquad (46)$$

(por. rozdział III, Zasady optyki, § 14, mikroskopy).

Niech wartości  $O$  odpowiada  $m$  sekund kątowych ( $300''$ ), wówczas odczyt lewy  $l$  (poprawiony wobec istnienia runu) powinien być:

$$l' = l \left( 1 + \frac{\Delta O}{m} \right) = l + \frac{l \Delta O}{m},$$



$$\begin{array}{r} \text{Odczyt: } 110^{\circ} 25' \\ \qquad \qquad \qquad 2' 23,3'' \\ \hline 110^{\circ} 27' 23,3'' \end{array}$$

Rys. 165.

zaś prawy:

$$p' = m - (m - p) \left( 1 + \frac{\Delta O}{m} \right) = p - \frac{m - p}{m} \Delta O.$$

Zatem średnia arytmetyczna poprawionych odczytów będzie:

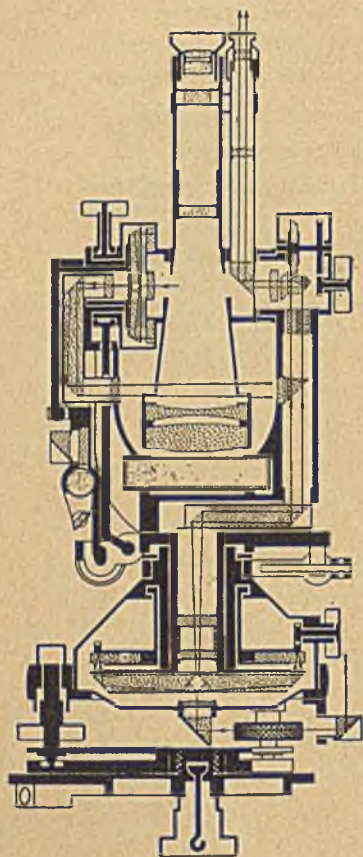
$$\begin{aligned} \frac{l' + p'}{2} &= \frac{l + p}{2} + \left( \frac{l + p}{2} - \frac{m}{2} \right) \frac{\Delta O}{m} = \\ &= s + \left( s - \frac{m}{2} \right) \frac{\Delta O}{m}. \end{aligned} \quad (47)$$

Poprawka, którą należy uzupełnić średnią arytmetyczną (otrzymaną przy pomocy śruby mikrometrycznej) wynosi zatem:

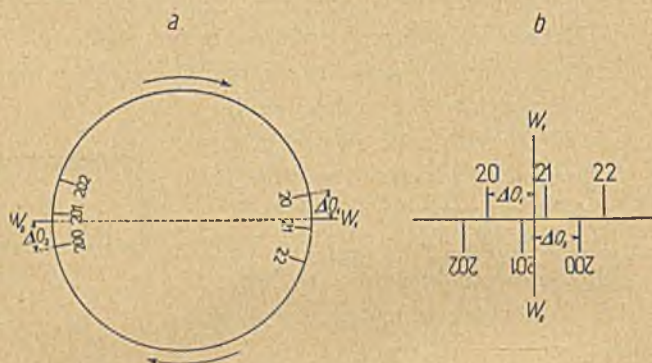
$$\delta = \left( s - \frac{m}{2} \right) \frac{\Delta O}{m}, \quad (48)$$

jeśli

$$s = \frac{l + p}{2}.$$



Rys. 166.



Rys. 167.

d) Na innej zasadzie oparty jest mikrometr optyczny, skonstruowany w roku 1924 przez inż. Wilda, a używany w teodolitach firm Zeissa i Wilda (rys. 168).

Na rys. 166 przedstawiono przekrój instrumentu Wilda oraz bieg promieni, które dostają się do wnętrza teodolitu przy pomocy pryzmatów oświetlających (u dołu dla koła poziomego, u góry z lewej dla koła pionowego). W instrumentach Zeissa promienie te padają na szklane limbuse, mające kształt pierścieni, powodując ostatecznie utworzenie się obrazu wskaźników alhidady oraz diametralnych miejsc limbusu w polu widzenia malej lunetki, znajdującej się obok głównej lunety. Jeśli zatem wskaźniki alhidady  $W_1$  i  $W_2$  zajmują względem kresek limbusu położenie, zaznaczone na rys. 167 a, wówczas w lunetce ukaże się obraz, uwidoczony na rys. 167 b. Pomijając stopnie, otrzymujemy jako średnią z obu odczytów:



$$\frac{\Delta o_1 + \Delta o_2}{2},$$

jeżeli  $\Delta o$  oznaczają odstępów wskaźników od poprzedzających je kresek.

Dla uzyskania dokładnych odczytów należy zatem wymierzyć oba odstępów  $\Delta o_1$  i  $\Delta o_2$ . Zadanie to uskutecznia się przez działanie dwóch płytek płasko-



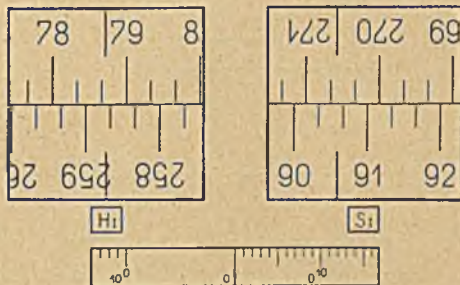
Rys. 168.

równoległych, znajdujących się na drodze promieni, zdążających z obu diametralnych części limbusu.

Ponieważ pod wpływem obrotu specjalnej śruby obie płytki obracają się dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku w dwie przeciwne strony i powodują przesunięcie obrazów kresek, przeto możemy doprowadzić kreski, których numeracja różni się o  $180^\circ$ , do koincydencji, odczytując wielkości przesunięcia (w minutach i sekundach), na odpowiedniej podziałce (tzw. sekundowej) znajdującej się w polu widzenia wspomnianej lunetki (p. rys. 169 i 170). W analogiczny sposób otrzymujemy odczyty na kole pionowym przy pomocy działania dwu innych płytek płasko-równoległych.

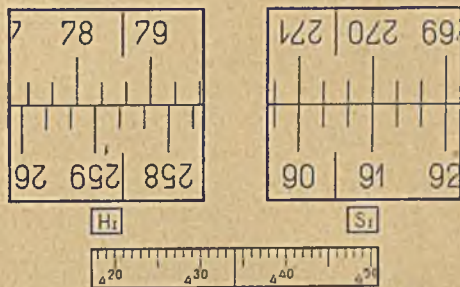
W teodolitach firmy Wilda przewidziano osobny przełącznik, który przy pomocy tych samych płytek płasko-równoległych umożliwia odczyty-

Instrument uniwersalny Zeissa,  
typ I.

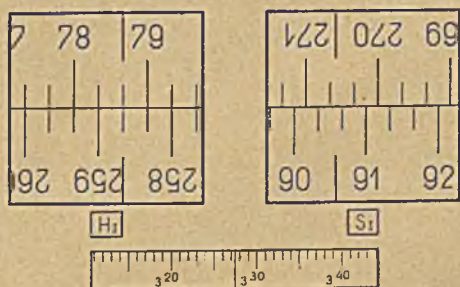


Odczyt:  $78^\circ 43'$   
(oceniony).

Odczyt:  $90^\circ 35'$   
(oceniony).



Odczyt:  $90^\circ 34' 34''$   
(przy użyciu mikrometru).



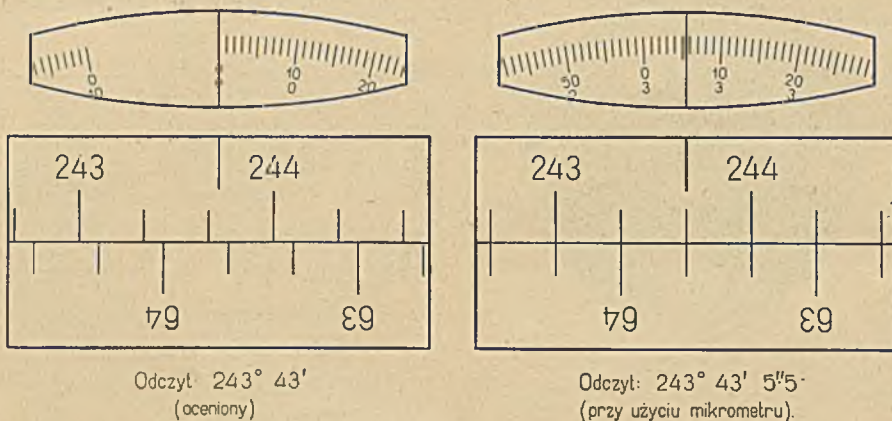
Odczyt:  $78^\circ 43' 27''$   
(przy użyciu mikrometru).

Rys. 169.

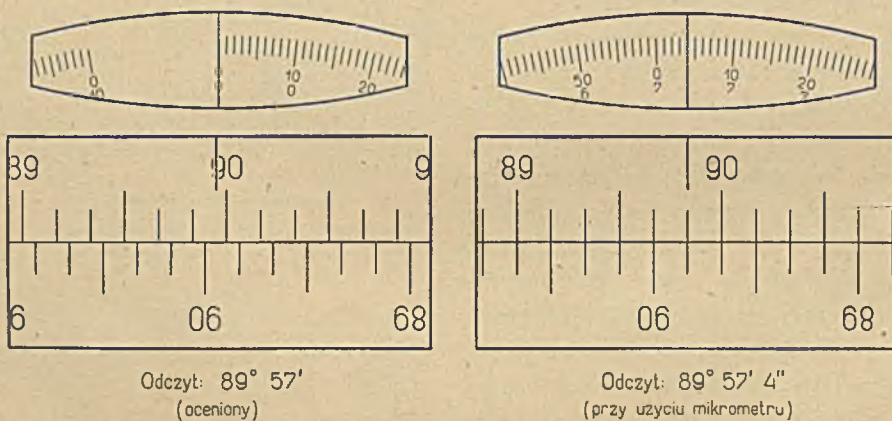
wanie koła poziomego, oraz (po zastawieniu przełącznika) koła pionowego; ponadto w polu widzenia znajduje się tylko jeden wskaźnik *W* (mający charakter orientacyjny).

Na rys. 169 i 170 uwidoczniiono sposób odczytywania mikroskopów w instrumentach firm Zeissa i Wilda.

### Instrument uniwersalny Wilda, typ T 2 (jednosekundowy)



### Koło pionowe



Rys. 170.



## ROZDZIAŁ VIII

# TRIANGULACJA

### CZĘŚĆ PIERWSZA

## NIECO O ROZMIERZANIU KRAJU

### § 1. Uwagi wstępne

Chcąc przeprowadzić rozmierzenie (pomiar) pewnego kraju (państwa), należy w sposób trwały zaznaczyć na jego obszarze dość znaczną ilość punktów i wyznaczyć ich sytuację na pewnej odpowiednio obranej powierzchni, zbliżonej kształtem do geoidy, czyli na tzw. powierzchni odniesienia. Dla pomiarów obejmujących niezbyt wielkie obszary wystarczy przyjęcie jako powierzchni odniesienia płaszczyzny, ew. kuli o odpowiednim promieniu; natomiast dla celów rozmierzania kraju należy przyjąć jako powierzchnię odniesienia — spłaszczoną elipsoidę obrotową. Jeżeli rzuty wspomnianych punktów na powierzchnię odniesienia będą wierzchołkami trójkątów, wzdłuż których boków będzie można celować, wówczas zespół owych trójkątów będzie tworzył tzw. *sieć triangulacyjną*.

Dla wyznaczenia jej kształtu (na powierzchni odniesienia) należy wykonać pomiary kątowe, oraz pomiary pewnych długości, tzw. *baz* czyli *podstaw*, które posłużą nam do wyznaczenia długości boków poszczególnych trójkątów sieci. Całość w tym celu wykonanej pracy określamy nazwą *triangulacji*.

Triangulację na obszarze pewnego państwa wykonują państwowe instytucje geodezyjne (w Polsce obecnie Wydział Triang. Wojsk. Inst. Geogr. i biura pomiarowe Min. Komunikacji)<sup>1)</sup>. Ponieważ wszelkie zdjęcia, mające być przedstawione w układach współrzędnych obowiązujących w danym państwie, opierają się na wspomnianej sieci, przeto nazywamy ją *siecią państwową*.

O ile ilość punktów owych sieci okaże się dla celów specjalnych niewystarczająca, przeprowadza się *zagęszczenie* punktów sieci, przy czym nowe punkty uzyskuje się przez nawiązanie do punktów sieci państwowej.

Natomiast w przypadkach, kiedy na w grę wchodzącym obszarze nie ma

<sup>1)</sup> Wykonanie triangulacji państwowej należało po powstaniu Państwa Polskiego do zadań Min. Robót Publicznych, po którego zniesieniu prace triangulacyjne skoncentrowano w W. I. G. i Min. Komunikacji.

punktów triangulacyjnych (lub znajdują się, praktycznie biorąc, bardzo daleko), można zakładać *sieci o znaczeniu lokalnym*, nie nawiązane do sieci państwowej.

Rozdział, poświęcony w niniejszym dziele triangulacji, będzie odnosił się właściwie do triangulacji, potrzebnej przy zagęszczaniu sieci i do sieci o znaczeniu lokalnym; natomiast sieci państwowe będą opisane tylko szkicowo, gdyż dokładne ich omówienie należy do geodezji wyższej.

## § 2. Sieci państwowe

Państwową sieć triangulacyjną dzielimy na kilka (zazwyczaj cztery) rzędów. Sieć rzędu I obejmuje trójkąty, mniej więcej równoboczne, o długości boków ponad 25 km, sieć rzędu II-go powstaje przez wypełnienie pól trójkątów sieci I rzędu trójkątami o bokach od 15 do 25 km, sieć rzędu III składa się z trójkątów o bokach 6 do 15 km, zaś sieć IV rzędu z trójkątów o bokach 1 do 6 km. Wyznaczenie punktów sieci rzędu wyższego następuje przy pomocy pomiarów nawiązanych do punktów sieci rzędu niższego.

Pomiary katowe przy wykonywaniu triangulacji I i II rzędu uskutecznia się jako pomiary katowe we wszystkich kombinacjach (met. Schreibernera)<sup>1)</sup>, podczas gdy przy przeprowadzeniu triangulacji III i IV rzędu posługujemy się metodą kierunkową<sup>2)</sup>.

Wagi kierunków sieci I-rzędnej powinny wynosić 24, wagi sieci II rzędu 12, (o ile przyjęto wagę kąta obserwowanego w obu położeniach lunety równą jedności), natomiast sieć III rzędu powinna być obserwowana w 6, a IV rzędu w 3 seriach.

Jak z powyższego widać, najważniejszą rolę w triangulacji odgrywają punkty sieci rzędu I-go.

a) W krajach, obejmujących większe obszary (np. Polska), dzieli się sieci I rzędu na:

α) sieci wieńcowe, β) sieci łączne i γ) sieci wypełniające; każdą z tych sieci zakłada się, obserwuje i wyrównuje osobno.

α) *Sieć wieńcowa* przebiega na obszarach granicznych państwa i powinna posiadać w odległościach co 200-300 km zakładane bazy (podstawy). Są to długości, które mierzymy bezpośrednio, dziś zazwyczaj drutami inwarowymi lub precyzyjnymi łańcami sztywnymi. Sposób pierwszy dozwala na obiór nieco dłuższych baz (do kilkunastu kilometrów), niż sposób drugi (kilka kilometrów).

Od baz (podstaw) przechodzimy siecią odpowiednich trójkątów, tzw. *siecią podstawową* (bazową), na bok sieci I rzędu. Najkorzystniejsze okazały się sieci bazowe kształtu *rombowego*. Średni błąd względny bazy około 10 km długiej, mierzonej kilkoma drutami, nie powinien być większy od 1:1 000 000,

<sup>1)</sup> K. Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 195.

<sup>2)</sup> K. Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 277.



zaś błąd względny przeniesienia nie powinien przekraczać 1:350000. Na podstawie wyników pomiarów baz w ostatnich czasach ustawił autor następujący wzór na śr. błąd względny baz

$$\mu_b : b = \frac{1}{10000\sqrt{b}} \quad ^1)$$

(przy czym  $b$  po stronie prawej oznacza ilość metrów).

Wyrównanie sieci wieńcowej przeprowadzamy w najnowszych czasach przy pomocy metody spostrzeżeń zawarunkowanych<sup>2)</sup> na elipsoidzie, lub przy użyciu wiernokątnego odwzorowania na płaszczyźnie. Jeżeli obszar kraju jest stosunkowo znaczny (jak to ma miejsce u nas), lepiej jest zamiast jednej wielkiej, założyć szereg mniejszych sieci wieńcowych, których wyrównanie przeprowadza się w pewnej kolejności.

β) *Sieci łączne* biegną zazwyczaj wzdłuż południków lub równoleżników i dzielą obszar objęty siecią wieńcową na partie, przeznaczone dla sieci wypełniających. Wyrównanie ich przeprowadza się z reguły metodą spostrzeżeń pośrednich.

γ) *Sieci wypełniające* wyrównujemy wyłącznie metodą spostrzeżeń pośrednich na elipsoidzie lub (dziś częściej) przy zastosowaniu wiernokątnego odwzorowania na płaszczyźnie. W najnowszych czasach wyłoniła się myśl przeprowadzenia triangulacji państwowej na innej zasadzie. Mierzy się bardzo wiele krótkich baz, z których rozwija się boki poligonów, łączące właściwe punkty triangulacyjne, odległe od siebie o  $0,02 a_0$  ( $a_0$  wielka półoś przyjętej elipsoidy odwzor.), tj. o około 128 km. Tak powstałe trójkąty, rozwija się bez współudziału kątów. Prawo przenoszenia się błędów jest w tych sieciach znacznie korzystniejsze, niż w poprzednio opisanych, a zagęszczenie ich bardzo łatwe i mało kosztowne<sup>3)</sup>.

b) Punkty sieci rzędu II-go uzyskuje się w analogiczny sposób, przy czym można wyznaczyć współrzędne kilku punktów równocześnie (jako sieć składającą się z kilku punktów) lub współrzędne poszczególnych punktów osobno.

c) Wyrównanie sieci III i IV rzędu przeprowadza się na płaszczyźnie.

Ponieważ sieci triangulacyjne III i IV rzędu opierają się na punktach sieci I i II rzędu, wyrażonych za pomocą współrzędnych geograficz-

<sup>1)</sup> Uzasadnienie zacytowanego wzoru jest następujące. Po skonstatowaniu na podstawie wyników lat ostatnich, że błąd względny bazy 10000 m długiej wynosi (przy użyciu 3 drutów) około 1:1000000 i przyjęciu, że  $\mu_b = \nu\sqrt{b}$ , otrzymujemy (bl. śr. na 10000 m)  $\mu_0 = 100 \nu$ , a ponieważ  $\mu_0 : 10000 = 1 : 1000000 = \frac{\nu}{100}$ , przeto  $\nu = 1 : 10000$ , a tym samym

$\frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{10000\sqrt{b}}$ . Wzór powyższy służy dla orientacji, czy przy pomiarze uzyskano dokładność osiąganą w ostatnich czasach.

<sup>2)</sup> W Polsce wyrównuje się poszczególne sieci wieńcowe metodą spostrzeżeń zawarunkowanych, nazwaną przez Wojskowy Inst. Geogr. metodą Börsch-Weigel; por. Bulletin Géodésique Nr. 19, 1928, Weigel, Nouvelle Méthode de Compensation des Chaines Fermées.

<sup>3)</sup> K. Weigel, Triangulacja bez pomiarów kątowych. Czasop. Techn., Lwów 1932.

nych na przyjętej elipsoidzie odniesienia, przeto dla wyznaczenia punktów sieci rzędów III-go i IV-go należy obrać pewną ilość płaskich układów wiernokątnych. Układy te powinny być wiernokątne, gdyż nawiązanie sieci rzędów wyższych do sieci rzędów niższych przeprowadza się przy pomocy kątów.

## CZĘŚĆ DRUGA

### ZAGĘSZCZENIE PAŃSTWOWEJ SIECI TRIANGULACYJNEJ

#### § 3. Układy współrzędnych

Jak zaznaczono w poprzednim ustępie, przyjęto w poszczególnych państwach pewną ilość układów płaskich (z reguły wiernokątnych) dla celów triangulacji III- i IV-rzędnej.

Przepisy pomiarowe M. R. P. z roku 1928 przewidują dla Polski 5 wiernokątnych układów hanowerskich Gaussa<sup>1)</sup>.

#### § 4. Zasady rachunku współrzędnych

Położenie poszczególnych punktów triangulacyjnych określamy przy pomocy współrzędnych prostokątnych, odniesionych do pewnego przyjętego układu osi, przy czym w układach przyjmowanych w geodezji oś  $x$ -ów biegnie wzdłuż południka z dodatnim kierunkiem na północ, zaś oś  $y$ -ów prostopadle do niej z dodatnim kierunkiem na wschód. Punkt przecięcia się obu osi jest początkiem układu<sup>2)</sup>. W ten sposób cały obszar podzielony został na cztery ćwiartki, w których współrzędne punktów mają odpowiednie znaki (na rys. 171 znak pierwszy odpowiada rzędnej  $y$ , znak drugi odciętej  $x$ ).

Przyjęty tutaj układ współrzędnych prostokątnych różni się, jak widzimy, oznaczeniem osi od układu, używanego w matematyce (analityce).

Dwa dowolne punkty: 1 ( $y_1, x_1$ ) i 2 ( $y_2, x_2$ ), określają w zupełności odcinek je łączący, przy czym obliczać będziemy nie tylko długość tego odcinka (wartość bezwzględna), ale także i jego tzw. *kąt kierunkowy (azymut)*<sup>3)</sup>, który oznaczymy przez  $\alpha_{1,2}$  dla kierunku od 1 do 2, zaś  $\alpha_{2,1}$  dla kierunku od 2 do 1. Czasem wygodniej jest użyć symbolów (1.2) i (2.1).

Kąt kierunkowy (azymut)  $\alpha_{1,2}$  określamy jako kąt, zawarty między odcin-

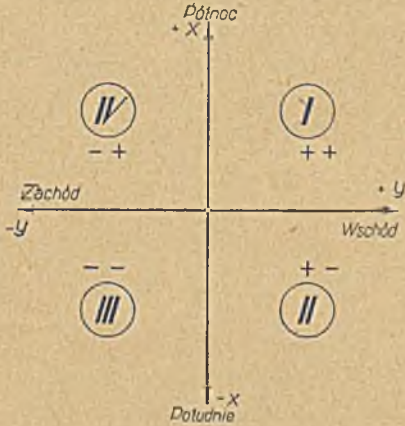
<sup>1)</sup> Wzory dla uskuteczenia powyżej zacytowanego odwzorowania ułożył Dr L. Krüger: »Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene«, Potsdam 1912, oraz »Formeln zur konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene«, Berlin 1919.

<sup>2)</sup> Dla układu tzw. katastralnego w Małopolsce przyjęto dodatni kierunek osi  $x$ -ów na południe, zaś dodatni kierunek osi  $y$ -ów na zachód.

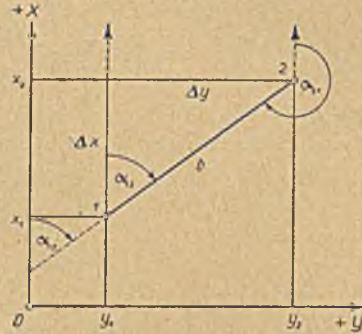
<sup>3)</sup> Kąt ten nazwał Gauss *azymutem płaskim* w odróżnieniu od azymutu na kuli lub elipsoidzie ziemskiej. Termin ten przyjął się częściowo; w praktyce nazywa się go zazwyczaj krótko *azymutem* lub *kątem północnym* (w instrukcjach pomiarowych). Uważam jednak termin *kąt kierunkowy* za najwłaściwszy i zgodny z terminologią wyższej geodezji.



kiem 1.2 a równoległą do dodatniego kierunku osi  $x$ -ów, wykreśloną z punktu 1. Można go również określić jako kąt zawarty między osią  $x$ -ów a kierunkiem 1.2 (jeśli go odpowiednio przedłużymy do przecięcia się z osią  $x$ -ów (rys. 172)). Kąt ten liczy się od dodatniego kierunku osi  $x$ -ów (północy) od  $0^\circ$  do  $360^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara (jak również i kierunkiem liczbowania



Rys. 171.



Rys. 172.

stopni koła poziomego instrumentów uniwersalnych). Kąt kierunkowy  $360^\circ$  jest równoznaczny z kątem kierunkowym  $0^\circ$ . Z rysunku widzimy, że kąty kierunkowe  $\alpha_{1,2}$  i  $\alpha_{2,1}$  tego samego odcinka różnią się od siebie o  $180^\circ$ , możemy więc napisać:

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} + 180^\circ, \quad (1a)$$

albo, po odjęciu  $360^\circ = 0^\circ$ :

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} - 180^\circ. \quad (1b)$$

Ogólnie piszemy te wzory łącznie:

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} \pm 180^\circ. \quad (2)$$

Kąt kierunkowy  $\alpha_{1,2}$  obliczamy z wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (3)$$

przyjmując zawsze (bez względu na wzajemne położenie punktów 1 i 2)

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1, \\ \Delta x &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Dla obliczenia długości  $b$  mamy związki:

$$b = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha_{1,2}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha_{1,2}} \quad (5)$$

lub

$$b = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}, \quad (6)$$

przy czym wzór (6) nadaje się do rachunku maszynowego lub tablicami kwadratów.

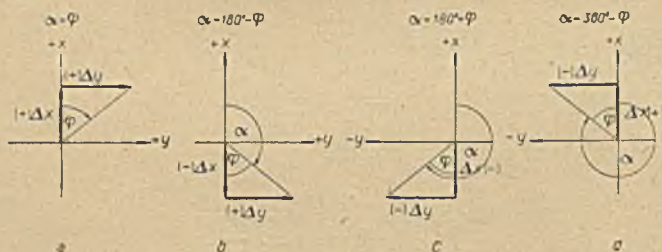
Związki (3) i (5) określają w zupełności kąt kierunkowy oraz długość odcinka, jeżeli dane są współrzędne jego dwu punktów krańcowych. Ponieważ  $b$  jest wielkością bezwzględna, przeto  $\sin \alpha_{1,2}$  ma znak różnicy  $y_2 - y_1$ , zaś  $\cos \alpha_{1,2}$  znak różnicy  $x_2 - x_1$ . Właściwa wartość kąta  $\alpha_{1,2}$ , obliczonego z (3), zależy zatem od znaków licznika i mianownika. Jeżeli mianowicie przez  $\varphi$  oznaczymy kąt ostry, obliczony przy pomocy (3), ale dla bezwzględnych wartości licznika i mianownika, a więc

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}, \quad (7)$$

wówczas

dla znaków ułamka	$\frac{+}{+}$	będzie	$\alpha = \varphi,$	(8)
" "	$\frac{+}{-}$	" "	$\alpha = 180^\circ - \varphi,$	
" "	$\frac{-}{-}$	" "	$\alpha = 180^\circ + \varphi,$	
" "	$\frac{-}{+}$	" "	$\alpha = 360^\circ - \varphi.$	

Dla wyznaczenia właściwej wartości kąta kierunkowego  $\alpha$  możemy w praktyce posługiwać się zamiast wzorami (8), bardzo wygodnymi rysunkami schematycznymi (rys. 173), które wykonuje się odręcznie (na marginesie), gdyż mają one charakter tylko pomocniczy:



Rys. 173.

Rysunki takie są bardzo łatwe i wykluczają jakąkolwiek pomyłkę.

Obliczony kąt kierunkowy  $\alpha$  kontrolujemy przy pomocy wzoru:

$$\operatorname{tg} (\alpha + 45^\circ) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}, \quad (9)$$

który otrzymujemy na podstawie relacji:



$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} + 1}{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$$

Wzory (5) możemy napisać również w formie:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= b \sin \alpha_{1,2} \\ x_2 - x_1 &= b \cos \alpha_{1,2}, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + b \sin \alpha_{1,2} \\ x_2 &= x_1 + b \cos \alpha_{1,2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Wzory (10) rozwiązują tzw. *przenoszenie współrzędnych* z p. 1 do p. 2 przy pomocy znanej odległości  $b$  i kąta kierunkowego  $\alpha_{1,2}$ .

Obliczenie kątów kierunkowych i długości boków ze współrzędnych.

Kąt kier. od A do B		$Y_B$ $Y_A$	$X_B$ $X_A$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\sin \varphi$ $\cos \varphi$	Próba: $\operatorname{tg} \psi = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$		
$\Delta y$	$\Delta x$						Ćwiartka	Kąt kierunk. $\alpha$
+	+	+	I	$\varphi$	$\Delta y = Y_B - Y_A$	$\Delta x = X_B - X_A$	$b = \frac{\Delta y}{\sin \varphi}$	$\psi$
+	-	-	II	$180^\circ - \varphi$	$\Delta x + \Delta y$	$\Delta x - \Delta y$	$b = \frac{\Delta x}{\cos \varphi}$	$\alpha_{AB} + 45^\circ$
-	-	+	III	$180^\circ + \varphi$				
-	+	-	IV	$360^\circ - \varphi$				
Punkty								
	1	2	3	4	5	6		
B	Zimna Woda	-10 756,992	- 3 566,230	2,554 6357	8,742 4678	3,834 9009		
A	Rzęsna R.	-10 398,371	+ 2 912,706	3,811 5037	9,999 3358	3,786 7738		
Nr 1		- 358,621	- 6 478,936	8,743 1320		0,048 1271		
		- 6 837,557	- 6 120,315	3° 10' 5,50"		48° 10' 5,47"		
		$\alpha_{AB} = \text{Rz. R.} - \text{Zim. W.} =$		183° 10' 5,50"		228° 10' 5,47"		
		$\alpha_{BA} = \text{Zim. W.} - \text{Rz. R.} =$		3° 10' 5,50"	3,812 1679			
B	Zimna Woda	-10 756,992	- 3 566,230					
A	Sokolniki	- 4 887,548	- 5 788,677					
Nr 2		- 5 869,444	+ 2 222,447	2,640 9827	$b^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 =$	0,450 6977		
		- 3 646,997	+ 8 091,891	69° 15' 39,54"	39 389 643	24° 15' 39,51"		
		$\alpha_{AB} = \text{Sok.} - \text{Zim. W.} =$		290° 44' 20,46"	$b =$	335° 44' 20,49"		
					6 276,117 m			

Zastosowany tu formularz nie wymaga specjalnych objaśnień<sup>1)</sup>. Natomiast przy wykonywaniu samego rachunku, należy trzymać się następujących reguł (dla rachunku logarytmami):

1. Po obliczeniu różnic  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , a następnie  $\Delta x + \Delta y$  i  $\Delta x - \Delta y$ , wykonujemy w pierw próbę (w kolumnie ostatniej), a dopiero po tym przystępujemy do liczenia kąta kierunkowego  $\alpha$  i odległości  $b$ . Zaznaczyć należy z naciskiem, że mimo zgodności kontroli wynik może być błędny, jeżeli różnice  $\Delta x$  i  $\Delta y$  są błędne (na co już nie ma kontroli!).

2. Dla obliczenia  $b$  mamy według (5) dwa wzory, które — biorąc ściśle — powinny dać wynik jednakowy. W praktyce jednak tak nie będzie, z powodu zaokrągleń rachunkowych. Dokładniejszą wartość otrzymamy z tego wzoru, którego licznik jest większy; wzór drugi traktujemy tylko jako kontrolny.

Rachunek maszynowy, nie wymagający właściwie odmiennego schematu, jest prosty. Długość  $b$  liczymy bezpośrednio z wzoru (6).

### § 5. Wcinanie w przód

Jeżeli w jakikolwiek sposób ustaliliśmy kierunki, zdążające z dwu punktów  $A$  i  $B$  o znanych współrzędnych do punktu  $P$ , powiadamy, że punkt  $P$  został *wcięty w przód*. W praktyce polega to zazwyczaj na pomierzeniu

kątów  $\alpha$  i  $\beta$  na punktach danych  $A$  i  $B$  (kąty te są zawarte między kierunkami  $AB$  i  $AP$ , oraz  $BA$  i  $BP$ ).

Rozwiązanie tego zagadnienia jest następujące. Na podstawie wzorów (3) i (5) lub (6) obliczamy kąt kierunkowy  $\alpha_{A,B}$  oraz długość  $AB = b$  (rys. 174), po czym dla uzyskania długości boków  $AP = b_{A,P}$  i  $BP = b_{B,P}$  rozwiązujemy trójkąt  $ABP$ . Kąty kierunkowe wymienionych boków są:

$$\alpha_{A,P} = \alpha_{A,B} + \alpha \quad \text{i} \quad \alpha_{B,P} = \alpha_{B,A} - \beta \quad (11)$$

Teraz stosujemy wzory (10) na przenoszenie współrzędnych:

$$\begin{aligned} y_P &= y_A + b_{A,P} \sin \alpha_{A,P} \\ x_P &= x_A + b_{A,P} \cos \alpha_{A,P} \end{aligned} \quad (12a)$$

lub (dla kontroli):

$$\begin{aligned} y_P &= y_B + b_{B,P} \sin \alpha_{B,P} \\ x_P &= x_B + b_{B,P} \cos \alpha_{B,P}. \end{aligned} \quad (12b)$$

1. Przykład wcinania w przód (rachunek logarytmami).

Punkt *W. W. Skniłów* został wcięty w przód z punktów triangulacyjnych *Rzęsna R.* i *Zimna Woda*, przy czym pomierzono wszystkie kąty w trójkącie:

<sup>1)</sup> Przykład Nr 1 obliczono logarytmami, zaś Nr 2 maszyną.



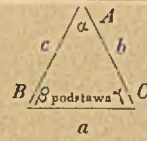

Stanowisko:	Kąt:
P. W. W. Sknilów	$\alpha = 72^{\circ} 14' 33,2''$
A. Rzęсна R.	$\beta = 35 \ 9 \ 31,0$
B. Zimna Woda	$\gamma = 72 \ 35 \ 56,7.$

Współrzędne punktów danych:

Punkt:	$y$	$x$
A. Rzęсна R.	— 10 398,371	+ 2 912,706
B. Zimna Woda	— 10 756,991	— 3 566,230.

Kąt kierunkowy i długość boku  $AB$  obliczono w § 4 tegoż rozdziału. Następuje teraz rozwiązanie trójkąta, co uskuteczniamy w następującym schemacie:

Obliczenie trójkątów.

Strona dzielnika katowego		Kąty mierzone			Kąty wyrównane do 180°		$\log a$ $\log \sin \alpha$ $\log \sin \beta$ $\log \sin \gamma$ $\log m =$ $\log a - \log \sin \alpha$	$\log a =$ $\log m + \log \sin \alpha$ $\log b =$ $\log m + \log \sin \beta$ $\log c =$ $\log m + \log \sin \gamma$	Długości boków
		°	'	''	'	''	$a$	$b$	
1	2	3			4		5	6	7
	W. W. Skn.						3,812 1679		
		$\alpha$	72	14	33,2	14	32,9	9,978 7992	
		$\beta$	35	9	31,0	9	30,7	9,760 3024	3,593 6711
		$\gamma$	72	35	56,7	35	56,4	9,979 6554	3,813 0241
		$\Sigma$	180	0	0,9	0	0,0	3,833 3687	

Rachunek współrzędnych przeprowadzamy również w odpowiednim formularzu, który nie wymaga objaśnień:

Rysunek (szkic)	Punkt: W. W. SKNILÓW			
	I Obliczenie		II Obliczenie	
	z długości i kąta kierunk. boku Rz. R.—W. W. Skn.		z długości i kąta kierunk. boku Zim. W.—W. W. Skn.	
	$P_1 P = s_1 =$		$P_2 P = s_2 =$	
	Kąt kier. $(P_1 P) = \alpha_1 = 148^{\circ} 34,8''$		Kąt kier. $(P_2 P) = \alpha_2 = 75^{\circ} 46' 1,9''$	
	$\sin \alpha_1$	9,724 0924	$\sin \alpha_2$	9,986 4603
	$s_1$	3,813 0241	$s_2$	3,593 6711
	$\cos \alpha_1$	9,928 4662 n	$\cos \alpha_2$	9,390 6921
	$s_1 \sin \alpha_1 = \Delta y_1 \dots$	3,537 1165	$s_2 \sin \alpha_2 = \Delta y_2 \dots$	3,580 1314
	$s_1 \cos \alpha_1 = \Delta x_1 \dots$	3,741 4903 n	$s_2 \cos \alpha_2 = \Delta x_2 \dots$	2,984 3632
	$\Delta y_1 = + 3443,423$	$\Delta x_1 = - 5514,300$	$\Delta y_2 = + 3803,045$	$\Delta x_2 = + 964,635$
	$y_1 = - 10398,371$	$x_1 = + 2912,706$	$y_2 = - 10756,992$	$x_2 = - 3566,230$
	$y = - 6953,948$	$x = - 2601,594$	$y = - 6953,947$	$x = - 2601,595$

Średnie:  $y = - 6 953,947$ ,  $x = - 2 601,594$ .

Do rachunku maszynowego nadają się lepiej inne wzory, które wyprowadzimy ze związków:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \text{ i } \operatorname{tg} \alpha_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}, \quad (13)$$

przy czym  $\alpha_{AP}$  i  $\alpha_{BP}$  są już znane z (11). Związki (13) dają bowiem dwa równania (liniowe) o niewiadomych  $y_P$  i  $x_P$ . Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$x_P - x_A = \Delta x_A = \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{BP}}{\operatorname{tg} \alpha_{AP} - \operatorname{tg} \alpha_{BP}}, \quad (13a)$$

oraz

$$x_P - x_B = \Delta x_B = \frac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{AP}}{\operatorname{tg} \alpha_{AP} - \operatorname{tg} \alpha_{BP}}, \quad (13b)$$

a następnie

$$y_P - y_A = \Delta y_A = \Delta x_A \operatorname{tg} \alpha_{AP}, \quad (14a)$$

lub

$$y_P - y_B = \Delta y_B = \Delta x_B \operatorname{tg} \alpha_{BP}. \quad (14b)$$

Kładąc jeszcze:

$$\begin{aligned} A &= (y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{BP}, \\ B &= (y_B - y_A) - (x_B - x_A) \operatorname{tg} \alpha_{AP}, \\ C &= \operatorname{tg} \alpha_{AP} - \operatorname{tg} \alpha_{BP}, \end{aligned} \quad (15)$$

możemy wzory (13 a i b) napisać:

$$\Delta x_A = \frac{A}{C} \text{ i } \Delta x_B = \frac{B}{C}. \quad (16)$$

2. Przykład wcinania w przód (rachunek maszyną).

Dane te same, jak w poprzednim przykładzie 1. Obliczamy różnice:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_B - y_A = - 358,621 \\ \Delta x &= x_B - x_A = - 6478,936, \end{aligned}$$

kąt kierunkowy  $\alpha_{AB} = 183^\circ 10' 5,5''$ , oraz kąty kierunkowe

$$\begin{aligned} \alpha_{AP} &= \alpha_1 = 148^\circ 0' 34,8'' \\ \alpha_{BP} &= \alpha_2 = 75^\circ 46' 1,9'', \end{aligned}$$

dla których znajdujemy z tablic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= - 0,624 6348 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= + 3,942 4681 \\ \text{różnica: } C &= - 4,567 1029. \end{aligned}$$

Dalszy rachunek jest następujący:



$\Delta y$	— 358,621	$\Delta y$	— 358,621
$\Delta x \operatorname{tg} \alpha_2$	— 25 542,998	$\Delta x \operatorname{tg} \alpha_1$	+ 4 046,969
$A$	— 25 184,377	$B$	— 4 405,590
$\Delta x_A = \frac{A}{C}$	— 5 514,300	$\Delta x_B = \frac{B}{C}$	+ 964,636
$x_A$	+ 2 912,706	$x_B$	— 3 566,230
$x$	— 2 601,594	$x$	— 2 601,594
$\Delta x_A \operatorname{tg} \alpha_1$	+ 3 444,424	$\Delta x_B \operatorname{tg} \alpha_2$	— 3 803,047
$y_A$	— 10 398,371	$y_B$	— 10 756,992
$y$	— 6 953,947	$y$	— 6 953,945

średnia:  $y = -6\,953,946$      $x = -2\,601,594$ .

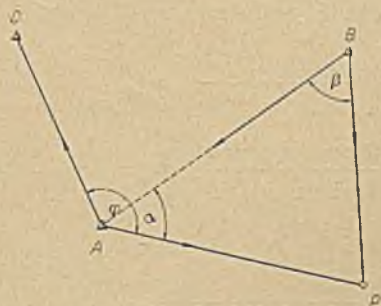
Inny, bardzo wygodny dla rachunku maszynowego, sposób rozwiązania tego zagadnienia znajdujemy w czasop. »Allgemeine Vermessungs-Nachrichten« Nr 21, z 1936 r., str. 382 i nast.

Jeżeli oprócz kątów  $\alpha$  i  $\beta$  pomierzono jeszcze kąt  $\gamma$  na punkcie wyznaczonym  $P$  (co w praktyce najczęściej ma miejsce), to wówczas przed przystąpieniem do rozwiązania weiniana w przód, należy ewentualną odchyłkę kątową, wynikłą z warunku

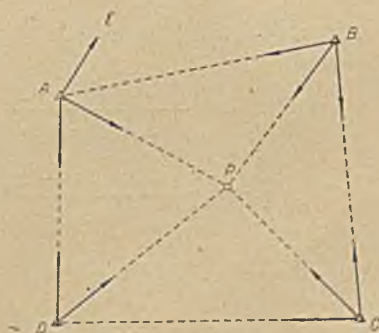
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

rozdzielić równomiernie na wszystkie kąty.

Czasem zdarza się, że z p.  $A$  nie można uzyskać celowej do p.  $B$ . Wówczas należy pomierzyć kąt  $\varphi$ , zawarty między kierunkiem do innego widocz-



Rys. 175.



Rys. 176.

nego punktu  $C$  o znanych współrzędnych, a kierunkiem do p.  $P$  (rys. 175). Po obliczeniu kąta kierunkowego  $\alpha_{A,C}$  (oraz  $\alpha_{A,B}$ ), otrzymamy  $\alpha_{A,P} = \alpha_{A,C} + \varphi$ , zaś potrzebny do rozwiązania trójkąta  $ABP$  kąt  $\alpha$  wynika z różnicy:  $\alpha = \alpha_{A,P} - \alpha_{A,B}$ . Gdy jeden z punktów danych, np.  $A$ , jest niedostępny dla pomiarów kątowych

(np. wieża kościelna), wówczas, aby zadanie było możliwe do rozwiązania, musi być pomierzony na  $p$ .  $P$  prócz kąta  $\beta$  i kąt  $\gamma$ . Ten przypadek nazywamy *wcinaniem w bok*; rachunkowo nie różni się on niczym od wcinania w przód.

Jeżeli  $p$ .  $P$  został wcięty w przód z kilku punktów o znanych współrzędnych (zwykle z trzech albo czterech, rys. 176), wtedy mamy nadliczbowe kierunki wcinające i możemy współrzędne punktu  $P$  nie tylko wyliczyć, ale i *wyrównać* ( $p$ . Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 231).

### § 6. Dokładność wcinania w przód

Dokładność wyznaczenia punktu  $P$  przy pomocy wcinania w przód zależy od dokładności pomiaru kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , oraz od kształtu trójkąta  $ABP$ . Dane współrzędne punktów  $A$  i  $B$  przyjmujemy jako bezbłędne. Jeżeli średnie błędy kątów będą  $\mu_\alpha$  i  $\mu_\beta$ , to średnie błędy  $\mu_y$  i  $\mu_x$  współrzędnych  $p$ .  $P$  obliczymy na podstawie prawa przenoszenia się błędów ( $p$ . str. 8), wychodząc z wzorów np. (12a), które napiszemy w następującej formie:

$$y_P = y_A + b \frac{\sin \beta \sin (\alpha_{A,B} + \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad (17a)$$

$$x_P = x_A + b \frac{\sin \beta \cos (\alpha_{A,B} + \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)}. \quad (17b)$$

Następnie tworzymy pochodne cząstkowe tych funkcji względem  $\alpha$  i  $\beta$ ; np.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_P}{\partial \alpha} &= b \sin \beta \frac{\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha_{A,B} + \alpha) - \sin (\alpha_{A,B} + \alpha) \cos (\alpha + \beta)}{\sin^2 (\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{b \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin (\beta - \alpha_{A,B})}{\sin (\alpha + \beta)} = b_{AP} \frac{\sin (\beta - \alpha_{AB})}{\sin (\alpha + \beta)}; \text{ itd.} \end{aligned}$$

Kwadraty średnich błędów współrzędnych  $p$ .  $P$  będą zatem:

$$\mu_y^2 = \left\{ \frac{b_{AP} \sin (\beta - \alpha_{AB})}{\sin (\alpha + \beta)} \right\}^2 \mu_\alpha^2 + \left\{ \frac{b_{BP} \sin (\alpha_{AP} + \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)} \right\}^2 \mu_\beta^2, \quad (18a)$$

$$\mu_x^2 = \left\{ \frac{b_{AP} \cos (\beta - \alpha_{AB})}{\sin (\alpha + \beta)} \right\}^2 \mu_\alpha^2 + \left\{ \frac{b_{BP} \cos (\alpha_{AB} + \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)} \right\}^2 \mu_\beta^2. \quad (18b)$$

Natomiast średni błąd punktu  $P$  będzie:

$$\mu_P = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} = \frac{1}{\sin (\alpha + \beta)} \sqrt{b_{AP}^2 \mu_\alpha^2 + b_{BP}^2 \mu_\beta^2}. \quad (19)$$

Jeżeli kąty zostały pomierzone z tą samą dokładnością (co zdarza się najczęściej), to  $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu$ , a wówczas

$$\mu_P = \frac{\mu}{\sin (\alpha + \beta)} \sqrt{b_{AP}^2 + b_{BP}^2}. \quad (20)$$



( $\mu$  wyrażone jest w mierze analitycznej). Dla  $\sin(\alpha + \beta) = 1$ , czyli  $\alpha + \beta = 90^\circ$  (trójkąt prostokątny) jest  $\mu_P = \mu \cdot b$ . Wtedy wzór jest możliwie najprostszy, lecz nie daje równocześnie najmniejszej wartości błędu.

Najkorzystniej jest gdy  $b_{AP} = b_{BP} = b'$ , czyli gdy trójkąt jest równoramienny. Wówczas  $\alpha = \beta$  i  $b' = \frac{b}{2 \cos \alpha}$ , a wzór (20) przechodzi na

$$\mu_{P'} = \frac{b' \mu \sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{b \mu}{\sqrt{2} \sin 2\alpha \cos \alpha}. \quad (21)$$

Najmniejsza wartość dla  $\mu_{P'}$  wypada ze związku  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$ , lub  $\operatorname{ctg}^2 \alpha = 2$ , dla  $\alpha = 35^\circ 15' 51,8''$ , co przy p.  $P$  daje kąt  $109^\circ 28' 06,4''$ .

Dla przykładu obliczmy, jak dokładnie należy pomierzyć kąt  $\alpha$  (i kąt  $\beta$ ), aby przy  $b = 2000$  m i  $\alpha = 60^\circ$  (trójkąt równoboczny) błąd średni p.  $P$  nie przekroczył  $\pm 0,05$  m. Z wzoru (21) mamy

$$\mu = \frac{\sqrt{2} \sin 2\alpha \cos \alpha}{b} \quad \mu_{P'} = \frac{\sqrt{2} \sin 120^\circ \cos 60^\circ}{2000} \cdot 0,05 = 0,000217,$$

czyli  $\mu \leq \pm 4,5''$ . W przypadku najkorzystniejszym ( $\alpha \approx 35^\circ$ ) wypadnie  $\mu \leq \pm 8''$ , a więc wystarcza dokładność pomiaru kąta prawie dwukrotnie mniejsza, niż poprzednio.

### § 7. Wcinanie wstecz

Zagadnienie to polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu  $P$  (rys. 177), na podstawie pomiaru (na p.  $P$ ) trzech kierunków do trzech punktów trójkącyjnych  $A$ ,  $B$  i  $C$  o znanych współrzędnych (albo dwóch kątów  $\alpha$  i  $\beta$ ). Ponieważ ze znanych współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$  obliczamy długości  $AB = a$  i  $BC = b$ , oraz kąty kierunkowe  $\alpha_{B,A}$  i  $\alpha_{B,C}$ , z których następnie otrzymamy:

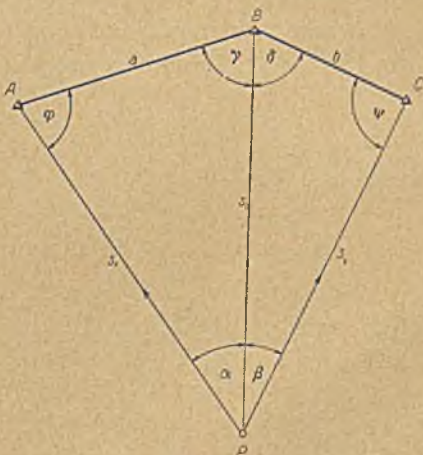
$$\gamma + \delta = \alpha_{B,A} - \alpha_{B,C}, \quad (22)$$

przeto, jak widać z rysunku, jest to zagadnienie rozwiązania czworoboku  $ABCP$ , w którym znamy pięć elementów, mianowicie dwa boki i trzy kąty. Rozwiązanie to wymaga wyznaczenia w pierw pozostałych dwu kątów, oznaczonych przez  $\varphi$  i  $\psi$ . W tym celu obliczamy:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \quad (23)$$

(związek wynikający ze sumy kątów w czworoboku), a następnie

$$BP = s_2 = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \psi}{\sin \beta}, \quad (24)$$



Rys. 177.

skąd

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \quad (25)$$

Dla uzyskania wzorów przydatnych dla rachunku logarytmami, położymy

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \operatorname{ctg} \mu, \quad (26)$$

a tym samym

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} = c : d. \quad (27)$$

Przekształcenie trygonometryczne wzoru (25) będzie miało przebieg następujący:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu},$$

czyli

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu}, \quad (28)$$

lub

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \psi}{2} = \operatorname{tg} (45^\circ - \mu),$$

skąd

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} (45^\circ - \mu). \quad (29)$$

Uzyskane z wzorów (23) i (29) kąty  $\varphi$  i  $\psi$  sprowadzają zagadnienie weinania wstecz do znanego już rozwiązania weinania w przód w dwóch trójkątach  $ABP$  i  $BCP$ . Obliczamy więc kąty:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \varphi) \quad (30)$$

$$\text{i } \delta = 180^\circ - (\beta + \psi),$$

a następnie boki:

$$AP = s_1 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma \quad \text{i} \quad CP = s_3 = \frac{b}{\sin \beta} \sin \delta, \quad (31)$$

zaś  $s_2$  obliczamy dwukrotnie z wzoru (24), co stanowi ważną kontrolę rachunkową. Wreszcie wyznaczamy kąty kierunkowe:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{A.P} = \alpha_{A.B} + \varphi, & \alpha_3 &= \alpha_{C.P} = \alpha_{C.B} - \psi \\ \text{i} & & \alpha_2 &= \alpha_{B.P} = \alpha_1 + \alpha = \alpha_3 - \beta. \end{aligned} \quad (32)$$

Współrzędne p.  $P$  obliczamy z któregośkolwiek z trzech punktów danych, zwykle (dla kontroli) z punktów skrajnych  $A$  i  $C$ :

$$\begin{aligned} y_P &= y_A + s_1 \sin \alpha_1 = y_C + s_3 \sin \alpha_3, \\ x_P &= x_A + s_1 \cos \alpha_1 = x_C + s_3 \cos \alpha_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Wszystkie rachunki przeprowadzamy w odpowiednim formularzu (p. przykład).



Zagadnienie wcinania wstecz bywa często w praktyce określane jako zagadnienie Pothenota, choć niesłusznie, gdyż rozwiązał je już wcześniej Snellius.

Zagadnienie to prowadzi do rozwiązywania nieoznaczonego w przypadku, gdy szukany punkt  $P$  leży na kole, przechodzącym przez punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  (rys. 178). Jest to tzw. *koło niebezpieczne*, które ma bardzo ważne znaczenie. Wtedy bowiem

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \varphi + \psi = 180^\circ,$$

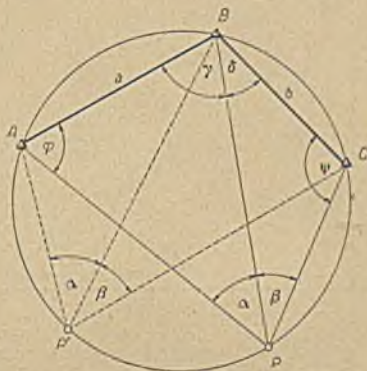
więc

$$\sin \varphi = \sin \psi, \text{ czyli } \mu = 45^\circ,$$

zatem według wzoru (29):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} 90^\circ \operatorname{tg} 0^\circ = \infty \cdot 0 \text{ (symbol nieoznaczony)}.$$

Świadczy to, że  $\frac{\varphi - \psi}{2}$  może przybierać dowolne wartości, zatem rozwiązanie jest nieoznaczone. Dlatego w praktyce musimy szukać takiego wyboru punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ , aby punkt  $P$  nie tylko nie leżał na kole niebezpiecznym, lecz nawet nie był w pobliżu tego koła, a to ze względu na nieuniknione błędy przy pomiarze kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , które w tym wypadku, tzn. przy bardzo bliskim sąsiedztwie punktu  $P$  w stosunku do koła, mogą doprowadzić do zupełnie błędnego rezultatu, praktycznie nieużytecznego. Najkorzystniejsze położenie  $p$  jest w środku koła niebezpiecznego. W tym przypadku jest on stosunkowo najdokładniej wyznaczony. W praktyce staramy się, aby  $p$  znajdował się w obrębie pola trójkąta  $ABC$ , przy zachowaniu możliwie dość znacznej odległości od  $A$ ,  $B$  i  $C$ .



Rys. 178.

Dla uniknięcia przykrych niespodzianek dobrze jest wykonać pomiar kierunkowy do czterech znanych punktów triangulacyjnych, bo wtedy będziemy mogli zawsze wybrać z nich trójkę punktów, najlepszą do rozwiązania wcinania wstecz. Przy tej okazji mamy możliwość wykrycia grubych błędów w pomiarze kątów. Możemy również zastosować wyrównanie współrzędnych<sup>1)</sup>, co będzie lepsze przy większej ilości kierunków wcinających wstecz do punktów znanych. W praktyce wystarczy w zupełności 5 kierunków, rozłożonych o ile możności równomiernie około szukanego punktu.

<sup>1)</sup> Por. K. Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 245.

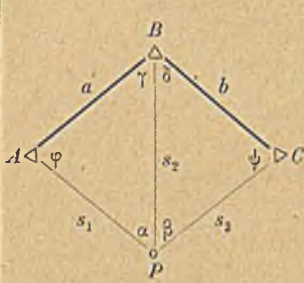


Przykład szczegółowy:

Obliczenie wcinania wstecz  
(Rachunek logarytmami)

Współrzędne punktów danych:			
punkt		$y$	$x$
A	Sokolniki	— 4 887,548	— 5 788,677
B	Zimna W.	— 10 756,992	— 3 566,230
C	Rzęsna R.	— 10 398,371	+ 2 912,706
Punkt szukany: W. W. SKNIŁÓW			



Kąt kier. (AB)	290°44'20,5"	$\alpha$	108°43'30,9"	$a \dots$	3,797 6911
„ (CB)	183 10 5,5	$\beta$	72 14 33,2	$\sin \alpha \dots$	9,976 3816
$\gamma + \delta$	107 34 15,0	$\alpha + \beta$	180 58 4,1	$c \dots$	3,821 3095
$\alpha + \beta$	180 58 4,1	(AB)	290 44 20,5	$b \dots$	3,812 1679
$\alpha + \beta + \gamma + \delta$	288 32 19,1	$\varphi$	26 18 10,4	$\sin \beta \dots$	9,978 7994
: 2	144 16 9,5	(AP)	327 2 30,9	$d \dots$	3,833 3685
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	35 43 50,5	$\alpha$	108 43 30,9	$\operatorname{tg} \mu = \frac{c}{a}$	9,987 9410
$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	0 34 19,9	(BP)	75 46 1,8	$\mu$	44°12'16,7"
$\varphi$	36 18 10,4	$\beta$	72 14 33,2	$45^\circ - \mu$	0 47 43,3
$\psi$	35 9 30,6	(CP)	148 0 35,0	$\operatorname{tg}(45^\circ - \mu)$	8,142 4696
$\gamma$	34 58 18,7	Kontrola (CB)	183 10 5,5	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	9,856 9617
$\delta$	72 35 56,2	$\psi$	35 9 30,6	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	7,999 4313
$c \dots$	3,821 3095	(CP)	148 0 34,9	$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	0°34'19,9"
$\sin \varphi$	9,772 3611	$s_2 \dots$	3,593 6706	$d \dots$	3,833 3685
$\sin \gamma$	9,758 2865	$s_1 \dots$	3,579 5960	$\sin \psi$	9,760 3021
				$\sin \delta$	9,979 6553
				$s_2 \dots$	3,593 6706
				$s_3 \dots$	3,813 0238
Kąt kier. (AP) = 327° 2' 30,9"			Kąt kier. (CP) = 148° 0' 35,0"		
$\sin (AP) \dots$	9,735 6191 $n$	$\sin (CP) \dots$	9,724 0918		
$s_1 \dots$	3,579 5960	$s_3 \dots$	3,813 0238		
$\cos (AP) \dots$	9,923 7975	$\cos (CP) \dots$	9,928 4665 $n$		
$\Delta y_1 \dots$	3,315 2151 $n$	$\Delta y_3 \dots$	3,537 1156		
$\Delta x_1 \dots$	3,503 3935	$\Delta x_3 \dots$	3,741 4903 $n$		
Obliczenie 1 (z punktu A):			Obliczenie 2 (z punktu C):		
$\Delta y_1$	— 2 066,403	$\Delta x_1$	+ 3 187,084	$\Delta y_3$	+ 3 444,416
$\Delta_A$	— 4 887,548	$x_A$	— 5 788,677	$y_C$	— 10 398,371
$y$	— 6 953,951	$x$	— 2 601,593	$x_C$	— 5 514,300
				$x$	+ 2 912,706
				$y$	— 6 953,955
				$x$	— 2 601,594



Zagađnienie to, podane wyżej w formie klasycznej, doczekało się w ciągu lat przeróżnych rozwiązań, przy użyciu rozmaitych środków (logarytmy, maszyna, suwak, rachunek wektorowy, metody rachunkowo-graficzne, graficzne). Większość tych rozwiązań ma na celu uproszczenie żmudnej pracy rachunkowej i skrócenie czasu tej pracy, który przy metodzie klasycznej jest dość długi (dla wprawnego rachmistrza od 50 minut do 1 godziny).

Dziś, kiedy prawie wyłącznie liczymy maszynowo, najbardziej odpowiednio jest rozwiązanie, oparte na konstrukcji geometrycznej Cassiniego<sup>1)</sup>, w którym korzystamy z tablic trygonometrycznych tylko przy wyjęciu wartości dla  $\text{ctg } \alpha$  i  $\text{ctg } \beta$  (wartości naturalne). Wszystkie pozostałe rachunki wykonujemy maszynowo, posługując się zgrabnym i niewielkim schematem (p. przykład).

Współrzędne trzech danych punktów, oznaczone dużymi literami  $A(X_1, Y_1)$ ,  $B(X_2, Y_2)$  i  $C(X_3, Y_3)$ , redukujemy na nowy układ, do pierwotnego równoległy, którego początek leży w punkcie środkowym  $B$  (rys. 179). Tak zredukowane współrzędne oznaczamy:

$$A(x_1, y_1), B(0,0) \text{ i } C(x_3, y_3). \quad (34)$$

Następnie obliczamy wielkości pomocnicze:

$$\begin{aligned} M_1 &= x_1 + y_1 \text{ ctg } \alpha, \\ N_1 &= y_1 - x_1 \text{ ctg } \alpha, \\ M_2 &= x_3 - y_3 \text{ ctg } \beta, \\ N_2 &= y_3 + x_3 \text{ ctg } \beta, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{oraz } \rho = \frac{M_1 N_2 - M_2 N_1}{(M_1 - M_2)^2 + (N_1 - N_2)^2}. \quad (36)$$

Szukane współrzędne punktu  $P$  otrzymamy z wzorów:

$$\begin{aligned} Y &= Y_2 + \rho (M_1 - M_2), \\ X &= X_2 - \rho (N_1 - N_2), \end{aligned} \quad (37)$$

które możemy napisać również i tak:

$$\begin{aligned} Y - Y_2 &= y_p = \rho (M_1 - M_2) \\ X - X_2 &= x_p = -\rho (N_1 - N_2), \end{aligned} \quad (38)$$

a więc w formie rzutów boku środkowego  $BP$  na obie osie współrzędnych.

Kontrolę rachunku otrzymamy przez obliczenie kątów kierunkowych  $\alpha_{PA}$ ,  $\alpha_{PB}$  i  $\alpha_{PC}$ , a z nich kątów

$$\alpha = \alpha_{PB} - \alpha_{PA}, \quad \beta = \alpha_{PC} - \alpha_{PB}, \quad (39)$$

które muszą się zgadzać z kątami pomierzonymi.

<sup>1)</sup> Jordan - Eggert, Handb. d. Vermessungskunde, II tom, 1 część, 1931, str. 435.

Przykład:

Obliczenie wcinania wstecz

(Rachunek maszyną).

(Szkic  
i oznaczenia  
p. rys. 179).

Punkt:	Współrzędne:			
Sokolniki	$Y_1$	— 4 887,548	$X_1$	— 5 788,677
Zimna W.	$Y_2$	— 10 756,992	$X_2$	— 3 566,230
Rzęsna R.	$Y_3$	— 10 398,371	$X_3$	+ 2 912,706
A	$y_1$	+ 5 869,444	$x_1$	— 2 222,447
B	$y_2$	0,000	$x_2$	0,000
C	$y_3$	+ 358,621	$x_3$	+ 6 478,936

$\alpha$	108° 43' 30",9	$\text{ctg } \alpha$	— 0,338 9726
$\beta$	72° 14' 33",2	$\text{ctg } \beta$	+ 0,320 2458
$M_1 = x_1 + y_1 \text{ ctg } \alpha$		$N_1 = y_1 - x_1 \text{ ctg } \alpha$	
$x_1$	— 2 222,447	$y_1$	+ 5 869,444
$y_1 \text{ ctg } \alpha$	— 1 989,580	$-x_1 \text{ ctg } \alpha$	— 753,348
$M_1$	— 4 212,027	$N_1$	+ 5 116,096
$M_2 = x_3 - y_3 \text{ ctg } \beta$		$N_2 = y_3 + x_3 \text{ ctg } \beta$	
$x_3$	+ 6 478,936	$y_3$	+ 358,621
$-y_3 \text{ ctg } \beta$	— 114,847	$x_3 \text{ ctg } \beta$	+ 2 074,852
$M_2$	+ 6 364,089	$N_2$	+ 2 433,473
$M_1 - M_2$	— 10 576,116	$N_1 - N_2$	+ 2 682,623

$$\rho = \frac{M_1 N_2 - M_2 N_1}{(M_1 - M_2)^2 + (N_1 - N_2)^2} = \frac{-42 809 144,3}{119 050 696} = -0,359 5875.$$



$Y_2$	— 10 756,992	$X_2$	— 3 566,230
$y_p$	+ 3 803,039	$x_p$	+ 964,638
$Y$	— 6 953,953	$X$	— 2 601,592
Punkt: W. W. SKNIŁÓW.			

$$y_p = +\rho(M_1 - M_2) = Y - Y_2,$$

$$x_p = -\rho(N_1 - N_2) = X - X_2.$$

Kontrola:

$$\operatorname{tg} \alpha_{pA} = \frac{+ 2 066,405}{- 3 187,087} = - 0,648 3683, \quad \alpha_{pA} = 147^\circ 2' 30'',9$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{pB} = \frac{- 3 803,039}{- 964,638} = 3,942 4520, \quad \alpha_{pB} = 255^\circ 46' 1'',7$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{pC} = \frac{- 3 444,418}{+ 5 514,298} = - 0,624 6340, \quad \alpha_{pC} = 328^\circ 0' 34'',9$$

$$\alpha = 108^\circ 43' 30'',8$$

$$\beta = 72^\circ 14' 32'',2$$

### § 8. Dokładność wcinania wstecz

Dokładność obliczenia współrzędnych punktu  $P$  uzyskanego przez wcinanie wstecz zależy od wzajemnej konfiguracji punktów (kolo niebezpieczne), oraz od dokładności pomiarów kątowych (kierunkowych). Punkty dane  $A$ ,  $B$  i  $C$  uważamy za bezbłędne.

Chcąc obliczyć średnie błędy  $\mu_y$  i  $\mu_x$  współrzędnych, należałoby przedstawić te współrzędne jako funkcje pomierzonych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  i zastosować wzór na błąd funkcji spostrzeżeń niezależnych. Droga ta nie jest jednak odpowiednia. Prędzej dojdziemy do celu, jeśli skorzystamy z wzorów (57) rozdziału II, odnoszących się do średnich błędów niewiadomych przy wyrównaniu spostrzeżeń pośredniczących.

Weźmy pod uwagę najczęstszy przypadek pomiaru kierunków, przy czym średni błąd kierunku  $\mu$  jest już znany, albo przyjmujemy go w zależności od użytego do pomiaru instrumentu. Dla tych trzech kierunków ustawiamy następujące równanie błędów<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 &= -\delta z + a_1 \delta x + b_1 \delta y + l_1 \\ \lambda_2 = 0 &= -\delta z + a_2 \delta x + b_2 \delta y + l_2 \\ \lambda_3 = 0 &= -\delta z + a_3 \delta x + b_3 \delta y + l_3, \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie

$$a_i = \frac{\rho \sin \alpha_i}{s_i}, \quad b_i = -\frac{\rho \cos \alpha_i}{s_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

zaś znajomość wyrazów wolnych  $l$  jest niepotrzebna.

<sup>1)</sup> Por. K. Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 247.

<sup>2)</sup> Współczynniki te można otrzymać również w inny sposób (tablice).

Błędy pozorne  $\lambda$  są zerami, gdyż mamy tu tyle spostrzeżeń ile niewiadomych ( $n = k$ ).

Z równań (40) rugujemy niewiadomą  $\delta z$  przy pomocy tzw. *współczynników zredukowanych*, otrzymując:

$$\begin{aligned} 0 &= a'_1 \delta x + b'_1 \delta y + l'_1 \\ 0 &= a'_2 \delta x + b'_2 \delta y + l'_2 \\ 0 &= a'_3 \delta x + b'_3 \delta y + l'_3, \end{aligned} \quad (41)$$

gdzie

$$a'_i = a_i - \frac{[a]}{3}, \quad b'_i = b_i - \frac{[b]}{3}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Teraz ustawiamy równania wag (Hansena) według wzorów (58) rozdz. II (str. 17):

$$\begin{aligned} [a' a'] Q_{11} + [a' b'] Q_{12} &= 1 \\ [a' a'] Q_{12} + [a' b'] Q_{22} &= 0 \\ [b' b' . 1] Q_{22} &= 1, \end{aligned} \quad (42)$$

z których już łatwo obliczymy  $Q_{11}$  i  $Q_{22}$ , a następnie

$$\mu_x = \mu \sqrt{Q_{11}} \quad \text{i} \quad \mu_y = \mu \sqrt{Q_{22}},$$

oraz

$$\mu_p = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} = \mu \sqrt{Q_{11} + Q_{22}}. \quad (43)$$

Dla przykładu obliczymy średni błąd punktu *W. W. Sknitów* (p. str. 204). Współczynniki  $a$  i  $b$  są następujące:

Punkt:	$a$	$b$
1. Sokolniki	+ 29,5	+ 45,6
2. Zimna W.	— 51,0	+ 12,9
3. Rzęsna R.	— 16,8	— 26,9.

Równania błędów:

$$\begin{aligned} 0 &= -\delta z + 29,5 \delta x + 45,6 \delta y + l_1 \\ 0 &= -\delta z - 51,0 \delta x + 12,9 \delta y + l_2 \\ 0 &= -\delta z - 16,8 \delta x - 26,9 \delta y + l_3. \end{aligned}$$

Równania błędów zredukowane:

$$\begin{aligned} 0 &= +42,3 \delta x + 35,1 \delta y + l'_1 \\ 0 &= -38,2 \delta x + 2,4 \delta y + l'_2 \\ 0 &= -4,0 \delta x - 37,4 \delta y + l'_3. \end{aligned}$$

Współczynniki równań wag:

$$[a' a'] = 3264,5, \quad [a' b'] = 1542,6, \quad [b' b'] = 2636,5;$$

$$[b' b' . 1] = 2636,5 - \frac{1542,6^2}{3264,5} = 2636,5 - 728,9 = 1907,6.$$

Równanie wag:

$$\begin{aligned} 3264,5 Q_{11} + 1542,6 Q_{12} &= 1 \\ 3264,5 Q_{12} + 1542,6 Q_{22} &= 0 \\ 1907,6 Q_{22} &= 1, \end{aligned}$$



skąd

$$Q_{22} = 0,000\ 524\ 22, \quad Q_{12} = -0,000\ 247\ 71,$$

$$Q_{11} = 0,000\ 423\ 38, \quad \text{więc } Q_{11} + Q_{22} = 0,000\ 947\ 60.$$

$$\mu_x = \mu \sqrt{0,000\ 423\ 38} = 0,0206 \mu,$$

$$\mu_y = \mu \sqrt{0,000\ 524\ 22} = 0,0229 \mu,$$

$$\mu_p = \mu \sqrt{0,000\ 947\ 60} = 0,0308 \mu.$$

Przyjmując, że średni błąd pomierzonego kierunku wynosi  $\mu = \pm 1''$ , będzie:

$$\mu_x = \pm 0,021 \text{ m}, \quad \mu_y = \pm 0,023 \text{ m}, \quad \mu_p = \pm 0,031 \text{ m}.$$

W przypadku pomiaru kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , równania będą:

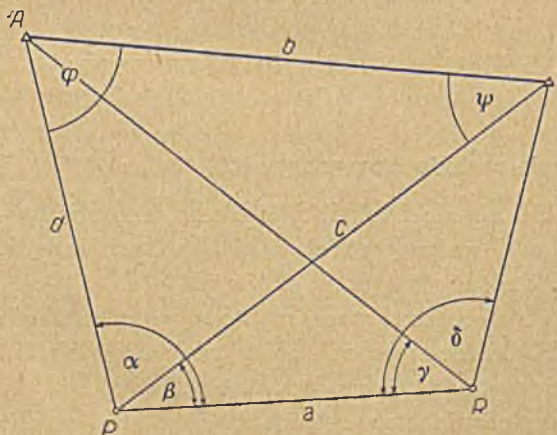
$$\begin{aligned} 0 &= (a_2 - a_1) \delta x + (b_2 - b_1) \delta y + (l_2 - l_1), \\ 0 &= (a_3 - a_2) \delta x + (b_3 - b_2) \delta y + (l_3 - l_2). \end{aligned} \quad (44)$$

Dalszy rachunek jak wyżej, przy czym średni błąd kąta wynosi

$$\mu' = \mu \sqrt{2}.$$

### § 9. Zagadnienie Hansena

Zdarza się czasem, że w danej okolicy mamy do dyspozycji tylko dwa punkty triangulacyjne o znanych współrzędnych ( $A$  i  $B$  na rys. 180), a nieodpowiednie ich położenie (wielkie odległości lub punkty na wieżach) nie pozwala na wykonanie wiecinania w przód. Wówczas sprawdzamy zagadnienie do rozwiązania czworoboku, wyznaczając równocześnie dwa nowe punkty ( $P$  i  $R$ ), na podstawie pomierzonych czterech kątów:  $\alpha$  i  $\beta$  (na punkcie  $P$ ) oraz  $\gamma$  i  $\delta$  (na punkcie  $R$ ). Sposób ten nazywamy *zagadnieniem Hansena*. Rozwiązanie w ten sposób powstałego czworoboku uskuteczniamy przy pomocy kątów pomocniczych  $\varphi$  i  $\psi$ , określonych związkami:



Rys. 180.

$$\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha - \beta), \quad \text{lub } \frac{\varphi + \psi}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (45)$$

oraz

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{d}{c} = \frac{d \cdot a}{a \cdot c} = \frac{\sin \gamma \sin (\beta + \delta)}{\sin (\alpha + \gamma) \sin \delta} = \operatorname{tg} \mu, \quad (46)$$

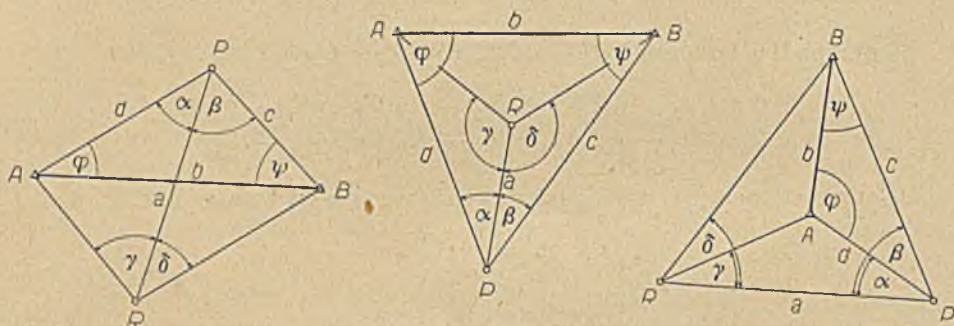


po czym, jak przy rozwiązaniu wcinania wstecz (wzór 29), otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} (45^\circ - \mu). \quad (47)$$

Dalszy ciąg pracy polega na rozwiązaniu poszczególnych trójkątów oraz przeniesieniu współrzędnych według zasadniczych wzorów (10).

Ponieważ położenie punktów  $P$  i  $R$  może być różne względem punktów  $A$  i  $B$ , przeto uwzględniono trzy charakterystyczne przypadki uwidocznione na rys. 181 a), b) i c). Na rysunkach tych oznaczono tak kąty, aby wzór (46) na  $\operatorname{tg} \mu$  pozostał we wszystkich przypadkach bez zmiany.



a

Rys. 181 a.

b.

Rys. 181 b.

c.

Rys. 181 c.

Natomiast związek (45) będzie w przypadkach a) i b)

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ zaś w przypadku c) } \frac{\varphi + \psi}{2} = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

## § 10. Odszukiwanie punktów triangulacyjnych

Pierwszą czynnością przy zakładaniu sieci lokalnej jest odszukanie istniejących punktów triangulacji głównej na podstawie opisów topograficznych, oraz przygotowanie wykazów współrzędnych tych punktów<sup>1)</sup>.

Jeżeli opisy topograficzne były sporządzone starannie, to samo odszukanie punktów jest rzeczą bardzo prostą. Niekiedy jednak opisy takie mogą okazać się zawodne, czy to z powodu niezbyt starannego ich sporządzenia, czy też ze względu na to, że szczegóły uwidocznione na opisach mogą już nie istnieć w terenie. Można wtedy skorzystać z planów już istniejących. W tym celu przy pomocy współrzędnych nanosimy na planie punkt triangulacyjny (o ile nie był on jeszcze naniesiony), następnie z planu odczytujemy te wymiary względem istniejących szczegółów, które pozwolą na odszukanie punktu w terenie.

<sup>1)</sup> Instrukcje pomiarowe dla wykonywania zdjęć szczegółowych podają gdzie należy się zwrócić zarówno po wykazy współrzędnych, jak i opisy topograficzne istniejących punktów triangulacyjnych na mierzonym obszarze lub w jego najbliższym sąsiedztwie.



Niekiedy jednak ani opis topograficzny, ani też nawiązanie do szczegółów nie jest wystarczające (np. gdy punkt leży na większych obszarach leśnych, nieużytkach, pastwiskach itp.). Wtedy możemy posłużyć się inną, następującą metodą. Na podstawie wywiadu miejscowego, przy pomocy mapy wojskowej, planu, względnie informacji u mieszkańców, ustalamy przybliżone położenie punktu, po czym ustawiamy się na nim z instrumentem i mierzymy kierunki przynajmniej do trzech już odszukanych punktów triangulacyjnych (rys. 182). Gdy różnice pomiędzy kątami pomierzonymi a obliczonymi ze współrzędnych są niewielkie (około 1'), przystępujemy do odszukania znaku podziemnego. Jeżeli natomiast różnice są większe, wówczas należy obliczyć współrzędne przyjętego stanowiska instrumentu  $P'$  ( $x'$ ,  $y'$ ) przy pomocy wcinania wstecz, oraz kąt kierunkowy  $\alpha_{P'P}$  i odległość  $P'P$ :

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (48)$$

przy czym  $x$  i  $y$  są znanymi współrzędnymi szukanego punktu  $P$ .

Następnie należy np. od kierunku  $P'3$  odmierzyć kąt:

$$\varphi = \alpha_{P'P} - \alpha_{P'3} \quad (49)$$

i na tak wytyczonym kierunku od punktu  $P'$  odmierzyć odległość  $d$ .

O ile nie odnajdziemy znaku naziemnego, to należy odkopać ziemię i czynić poszukiwania za znakiem podziemnym.

W przypadku odszukania znaku naziemnego, ustawiamy nad nim centrycznie instrument i mierzymy kąty (kierunki) do poprzednich punktów triangulacyjnych. Różnice między obserwacjami a obliczeniem ze współrzędnych nie powinny przekraczać granic podanych w instrukcjach pomiarowych. O ile zgodność jest zadowalniająca, ustawiamy nad odszukanym znakiem sygnał.

Zamiast obliczeń rachunkowych, które w polu nastroczają wiele trudności, możemy posługiwać się metodami graficznymi lub graficzno-rachunkowymi<sup>1)</sup>.

#### § 11. Zagęszczenie sieci triangulacyjnej państwowej w celu oparcia na niej sieci poligonowej

Sieć triangulacyjna państwowa od I do IV rzędu stanowi ogólną i jednolitą podstawę pomiarów, wykonywanych na obszarze całego państwa. Jednakże przy pomiarach szczegółowych, które muszą opierać się na wspomnianej ogólnej podstawie, ilość punktów triang. IV rzędu może się okazać za małą dla założenia dobrej i odpowiadającej celowi sieci ciągów poligonowych. Punkty triangulacyjne, służące do bezpośredniego dowiązania poligonów, powinny być tak gęste, aby długość ciągów wynosiła około 1 km, a w żadnym razie nie przekraczała 2 km (ze względu na dość niekorzystne prawo przeno-



Rys. 182.

<sup>1)</sup> Łaska-Widł, Miernictwo, część II, Lwów 1903. L. Grzyb, Wcinanie wstecz. Lwów 1933.

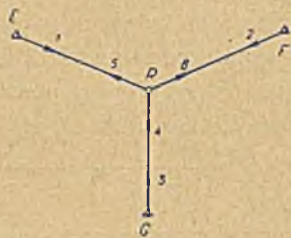


szczenia się błędów w ciągach poligonowych). Dlatego okazuje się w praktyce z reguły potrzeba zagęszczenia istniejącej już sieci państwowej pewną ilością nowych punktów triangulacyjnych. Tego rodzaju sieci zagęszczające nazywamy — wypełniającymi. Zagadnienie to przybiera jeszcze na znaczeniu w przypadku, gdy sieć triang. państwowa przeprowadzona jest tylko do III rzędu włącznie (punkty w odległości 6 do 15 km).

Ogólne reguły dotyczące wyboru, pomiaru i obliczenia nowych punktów, są w zasadzie takie same, jak w sieciach państwowych. Jednakże główną za-



Rys. 183.



Rys. 184.

sadą jest tutaj taki wybór punktów, aby jak najlepiej na nich oprzeć ciągi poligonowe; rezygnujemy natomiast z równomiernego rozkładu nowych punktów na całym obszarze zdjęcia.

Nowe punkty triang. wyznaczamy najczęściej metodą wcinania wstecz, rzadziej metodą wcinania obustronnego (skombinowanego), oczywiście z reguły z wyrównaniem. Wyjątkowo tylko stosuje się metodę wcinania w przód.



Rys. 185.

Pamiętać tu należy o naczelnej zasadzie geodezji, że lepiej jest mierzyć mało, ale celowo i dobrze, aniżeli tracić drogi czas na wielką ilość pomiarów nadliczbowych, lecz mało wartościowych. Zasada ta odnosi się szczególnie do triangulacji.

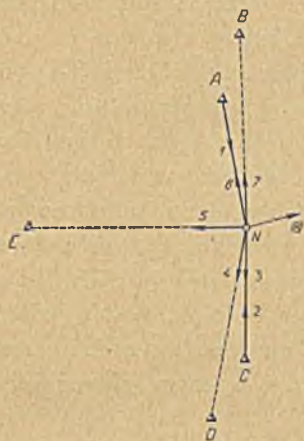
Najdokładniej można wyznaczyć położenie takiego punktu, który znajduje się w środku ciężkości punktów triangulacyjnych użytych do nawiązania. Tego rodzaju rozwiązanie podaje rys. 183 dla wcinania wstecz i rys. 184 dla wcinania obustronnego. Ilość elementów, tzn. kierunków wcinających w przód (zewnętrznych) i wcinających wstecz (wewnętrznych), potrzebna do dobrego wyznaczenia punktów, nie powinna być mniejsza od 6. Przy wcinaniu wstecz nie mierzymy z reguły więcej niż 5 kierunków (oczywiście dobrze rozłożonych).

Na rys. 185 punkt *M* jest wyznaczony wcinaniem obustronnym przy 7 kierunkach (2 zewnętrzne i 5 wewnętrznych). Jednakże kierunek 5 (do p. *E*)

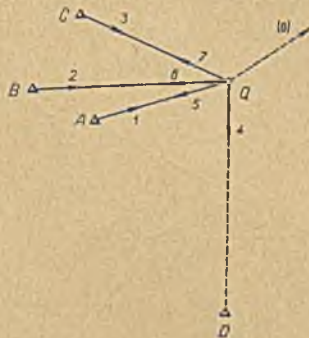


wpływa tylko bardzo nieznacznie na powiększenie dokładności wyznaczenia punktu  $M$ , gdyż biegnie on w pobliżu korzystnego kierunku (4) i do odległego punktu  $E$ . Możemy więc kierunek (5) wyłączyć z programu pomiarowego. Pozostałe kierunki (w ilości 6) są dobrze rozłożone i wystarczają w zupełności.

Mniej korzystne jest wyznaczenie p.  $N$  (rys. 186), jakkolwiek ogólna ilość kierunków jest 7. Bliskie kierunki (3) i (4) oraz (6) i (7) są prawie równo-



Rys. 186.

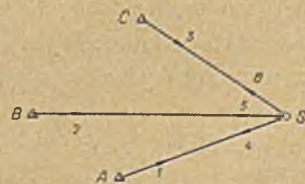


Rys. 187.

znaczne, z tym, że ważniejsze są zawsze kierunki obustronne, a kierunek 5 do p.  $E$  jako jednostronny jest dość słaby. Znaczne wzmocnienie p.  $N$  nastąpiłoby przez stworzenie jeszcze dodatkowego kierunku (8) do jakiegoś punktu nowego.

Rys. 187 przedstawia punkt  $Q$ , wyznaczony wprawdzie z 7 kierunków, jednak bardzo niekorzystnie rozłożonych. Punkty triangulacyjne dane znajdują się wszystkie tylko po jednej stronie punktu  $Q$ , a w dodatku kierunek 4 jest tylko jednostronny i to do dalekiego punktu  $D$ . Tutaj również nastąpiłaby znaczna poprawa przez dodanie (kreskowanego) kierunku (8).

Niedopuszczalne wogóle jest takie wyznaczenie punktu nowego, przy którym skrajne kierunki na stanowisku  $S$  (rys. 188, kierunki 4 i 6) zawierają ze sobą kąt mniejszy od  $90^\circ$ .



Rys. 188.

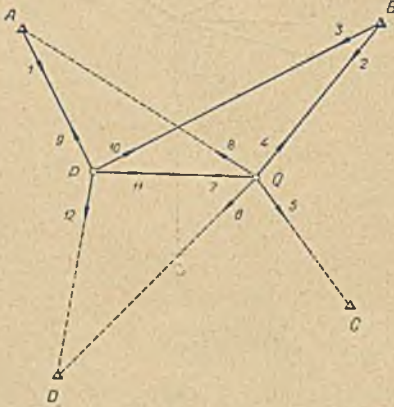
W przypadkach, przedstawionych na rys. 187 i 188, oraz we wszystkich innych, gdy punktów triangulacyjnych danych jest mało i są niekorzystnie rozłożone, radzimy sobie przez równoczesne wyznaczenie dwóch punktów<sup>1)</sup> tak wybranych, aby wzajemne celowe między nimi były możliwe. Wtedy następuje nie tylko wzmocnienie obu nowych punktów dodatkowymi elemen-

<sup>1)</sup> Por. K. Weigel, Rachunek wyrównawczy, str. 260.



tami, ale równoczesne ich wyrównanie wiąże je lepiej z triangulacją państwową (mamy tu bowiem do czynienia z bardziej równomiernym rozkładem błędów pomiarowych na całym obszarze). Widzimy to na rys. 189, na którym oba nowe punkty  $P$  i  $Q$ , traktowane oddzielnie, miałyby tylko po 5 elementów, natomiast wyrównywane równocześnie — z wyzyskaniem wzajemnych kierunków 7 i 11 — mają ich nie tylko razem 12, lecz kierunki te są równomiernie rozmieszczone. Sam rachunek jest nieco obszerniejszy niż, przy obliczeniu pojedynczych punktów, lecz jest to trud, który nie idzie na marne.

Równoczesne wyznaczenie dwóch lub czasem nawet więcej (3-4) punktów, może okazać się korzystne i konieczne przy małej ilości punktów triangulacji państwowej, znajdujących się na danym obszarze zdjęcia. W każdym razie przynajmniej dwa punkty triangulacji państwowej muszą być znane, aby zadanie można było rozwiązać metodą wyrównania współrzędnych jako spostrzeżeń pośrednich. Mając jednak tylko dwa punkty dane, można zadanie rozwiązać również inaczej, o czym obszerniej będzie mowa.

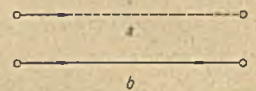


Rys. 189.

Wybór nowych punktów triangulacyjnych musi poprzedzić bardzo staranny wywiad terenowy. Wywiad taki ułatwia w dużym stopniu mapa wojskowa z zaznaczonymi na niej punktami triangulacji państwowej. Po ostatecznym wyborze punktów sporządzamy szkic orientacyjny w skali 1:20000 lub 1:25000, który wykonujemy przy pomocy istniejących już map danego obszaru (np. map katastralnych odpowiednio zmniejszonych) lub też na stoliku mierniczym (nie chodzi tu o ścisłą skalę szkicu, lecz o poprawną wzajemną sytuację punktów). Szkic taki powinien zawierać punkty triangulacji państwowej (ich nazwę lub oznaczenie) i punkty triangulacyjne nowe, które numerujemy cyframi arabskimi od 1 począwszy, dalej celowe pomiędzy punktami, przy czym

należy rozróżnić i zaznaczyć inaczej celowe jednostronne (rys. 190a), inaczej zaś celowe obustronne (rys. 190b). Celowe najlepiej oznaczać strzałkami. W końcu wkreśliśmy do szkicu zewnętrzne granice obszaru zdjęcia, oraz zaznaczamy kierunek północny. Szkic punktów triangulacyjnych (choćby tylko pobieżny) stanowi doskonałą orientację przy pomiarze kątów (kierunków) sieci, oraz przy obliczaniu i wyrównaniu punktów.

Po trwałej stabilizacji nowych punktów triangulacyjnych i ustawieniu na nich odpowiednich sygnałów, przystępujemy do pomiarów kątowych. W sieciach lokalnych, w których celowe są stosunkowo krótkie (1-5 km), stosujemy wyłącznie pomiar metodą kierunkową w seriach pełnych. Ilość seryj zależy od użytego instrumentu uniwersalnego i od żądanej dokładności; ilość ich nie powinna być jednak mniejsza niż 3.



Rys. 190.

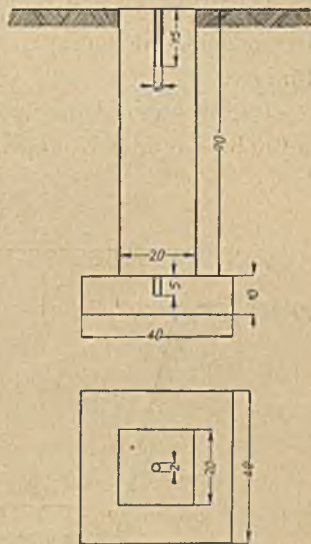


## § 12. Utrwalenie (stabilizacja) i oznaczenie (sygnalizacja) punktów triangulacyjnych

Przepisy pomiarowe wszystkich krajów normują dokładnie typy oraz wymiary znaków triangulacyjnych, których zadaniem jest zrealizowanie i utrwalenie na czas dłuższy punktów triangulacyjnych. Będą to stosownie obrobione kamienie granitowe, słupy betonowe (najczęściej używane), albo o niezbyt wielkiej średnicy rury żelazne (gazowe) lub drenowe. Wymiary słupów kamiennych i betonowych dostosowane są do znaczenia (rzędu) punktów, od największych dla punktów I rzędu do najmniejszych dla punktów IV rzędu lub punktów sieci zagęszczającej sieć rzędu IV. W każdym przypadku stabilizacja punktu musi być zawsze przynajmniej podwójna, tzn. musi składać się ze znaku podziemnego (płyty lub kostki betonowej) i znaku naziemnego (słupa), dokładnie centrycznie nad sobą ustawionych.

Rys. 191 przedstawia znak triangulacyjny betonowy najmniejszych wymiarów. Znak podziemny jest płytą  $40 \times 40 \times 10$  cm z trzpieniem żelaznym 5 cm długim o średnicy 2 cm. Środek trzpienia jest punktem triangulacyjnym (w miejsce trzpienia żelaznego można użyć również płytki mosiężnej o średnicy 3-5 cm z wrytym krzyżem). Znak naziemny stanowi słupek o wymiarach  $20 \times 20 \times 70$  cm, który w górnej swej części posiada również wpuszczony trzpień żelazny (lub rurkę) długości 10-15 cm. Całość musi być osadzona w ziemi w ten sposób, aby górna część słupka nie wystawała ponad teren więcej niż 10 cm. Ze względu jednak na łatwe uszkodzenie znaku (a tym samym i punktu triangulacyjnego) lepiej jest, jeśli górna powierzchnia słupka umieszczona jest równo z terenem lub nawet nieco (kilka cm) wpuszczona w teren. Wówczas jednak odszukanie znaku jest utrudnione i musimy posługiwać się dokładnie sporządzonym opisem topograficznym odnośnego punktu, albo też specjalnymi znakami (świadcami).

Osadzenie i centrowanie znaku odbywa się w sposób następujący. W starannie wybranym miejscu na punkt triangulacyjny kopie się dół takiej głębokości, aby górna powierzchnia znaku naziemnego wypadła w żądanej wysokości (zwykle równo z terenem). Dno dołu musi być poziome i tak wielkie, aby płyta nie tylko dobrze się mieściła, ale mogła być w razie potrzeby jeszcze nieco przesuwana w różnych kierunkach podczas osadzania. Krawędzie płyty orientuje się (w przybliżeniu) do stron świata. Poziome ułożenie płyty kontrolujemy przy pomocy libeli stolikowej. Następnie wbija się po przeciwnych stronach dołu dwa pale *a* i *b* (rys. 192), na których spoczywa łąta drewniana *c*. Na krawędzi łąty zaznaczamy kreską pionową miejsce *S*, które leży dokładnie w pionie nad środkiem trzpienia żelaznego

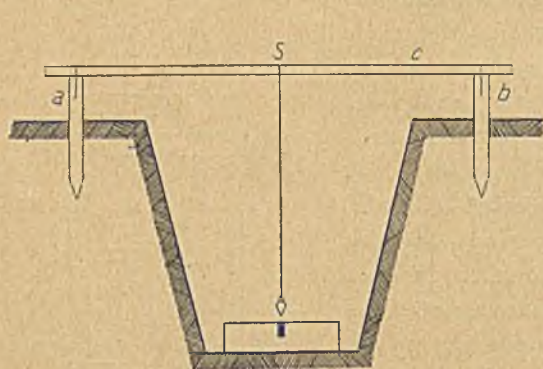


Rys. 191.

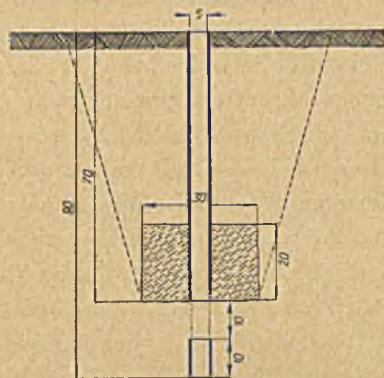


(rurki) płyty betonowej. Wykonujemy to przy pomocy zwykłego pionu i odpowiedniego podsuwania łąty do sznurka pionu, po czym przybijamy łątę gwoździami do palików. Możemy również przybić łątę do pali w przybliżonym położeniu, a po zawieszeniu pionu przy naznaczonej kresce  $S$ , podsuwać odpowiednio płytę aż do dokładnego scentrowania. Teraz ustawiamy na płycie słupek betonowy dokładnie pionowo i kontrolujemy jego centryczne położenie pionem, zawieszonym przy  $S$ . W czasie zasypywania dołu ziemią i jej ubijania należy ciągle kontrolować słupek i nie dopuścić do jego wychylenia się z położenia centrycznego; należy również uważać, by łąta nie zmieniła swego położenia (np. przez potrącenie lub uderzenie łopata). Dobrze jest przykryć znak triangulacyjny małym kopcem ziemnym, który go chroni i ułatwia odszukanie punktu. W czasie pomiaru znak musi być oczywiście odsłonięty.

Rys. 193 przedstawia znak triangulacyjny, wykonany z dwóch centrycznie nad sobą i pionowo umieszczonych rurek gazowych o średnicy około 5 cm.



Rys. 192.



Rys. 193.

Znak podziemny jest krótki (10-15 cm) i umieszcza się go możliwie głęboko (0,9-1,0 m) w otworze, dostosowanym do średnicy rurki, a wykonanym odpowiednim świdrem ziemnym. Znak naziemny jest długi 70-80 cm i zwykle od dołu zabetonowany, co wykonujemy na miejscu bez większych trudności.

W celu umożliwienia celowania do poszczególnych punktów triangulacyjnych muszą być na nich umieszczone odpowiednie znaki (sygnały), których wielkość zależy od odległości punktów. Zwykła tyczka wystarcza tylko dla stosunkowo niewielkich odległości (do 1 km) i to przy dobrych warunkach oświetlenia.

Najprostszym sygnałem jest żerdź o przekroju kołowym, średnicy 6-10 cm, długości 5-6 m, ustawiona centrycznie i pionowo na punkcie triangulacyjnym. Ustawienie centryczne osiąga się przez wbicie u dołu żerdzi w jej osi trzpienia żelaznego, którego średnica zgadza się ze średnicą otworu rurki, umieszczonej w słupku betonowym. Żerdź podpieramy trzema łątami (zastrzałami), wbitymi jednym końcem w ziemię. Dla łatwiejszego odszukania

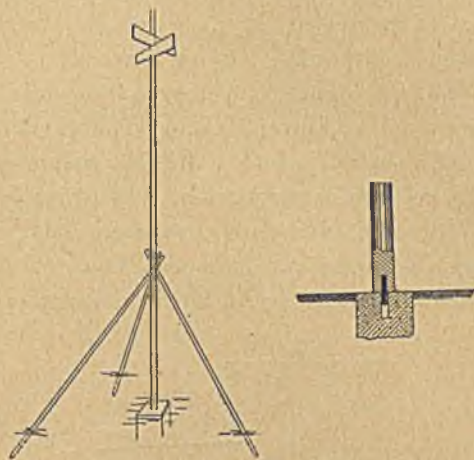


sygnału przybijamy u jego szczytu chorągiewkę (biało-czerwoną) lub dwie deseczki na krzyż (rys. 194), oraz malujemy żerdź na biało lub na czarno, zależnie od tła, od którego powinna się dobrze odbijać.

Ponieważ taki sygnał uniemożliwia centryczne ustawienie instrumentu na danym punkcie, przeto pomiary wykonujemy na nim przed założeniem sygnału, albo też usuwamy sygnał zupełnie po wykonaniu pomiarów na punktach sąsiednich, z których ów sygnał wzięto.

Przy celowych dłuższych (do 10 km) budujemy sygnały w postaci ostrosłupa (piramidy) umiarowego trój- lub czworościennego (rys. 195) z żerdzią pionową (tzw. świecą) u wierzchołka. Górną część piramidy objęta się deskami (malowanymi na biało lub czarno) celem łatwiejszego odszukania. Ukośne słupy (nogi) sygnału zakopane są w ziemi

tym głębiej, im wyższy jest sygnał, i odpowiednio zakotwione. Miejsca na nogi muszą być tak obrane, aby nie zasłaniały celowych do sąsiednich punktów triangulacyjnych. Celowe te nie mogą również przebiegać bliżej niż



Rys. 194.

10 cm od słupa. Świeca, która jest właściwym celem (gdyż środek siatki nastawiamy na nasadę świecy), musi być dokładnie pionowo i centrycznie umieszczona nad punktem triangulacyjnym. Stąd wynikają duże trudności przy ustawianiu sygnału na starym, już utrwalonym punkcie triangulacyjnym. Natomiast na punktach nowych postępujemy odwrotnie, tj. w pierw budujemy sygnał, a dopiero później (gdy sygnał dobrze osiadzie w ziemi) umieszczamy centrycznie znak triangulacyjny. Uskuteczniamy to przy pomocy instrumentu uniwersalnego, ustawionego kolejno na dwóch stanowiskach I i II (rys. 196), w pewnej odległości od sygnału (zależnie od wolnego miejsca dookoła punktu), oraz przy pomocy trzech lat  $a$ ,  $b$  i  $c$ , z których łąty



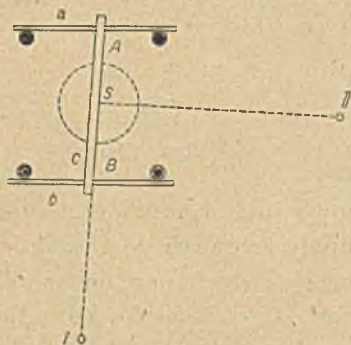
Rys. 195.

$a$  i  $b$  przybite są do nóg sygnału tuż nad terenem. Na stanowisku I ustawiamy oś instrumentu dokładnie pionowo i rzutujemy w obu położeniach lunety środek świecy (u jej nasady) na łąty  $a$  i  $b$ . Jeżeli zaznaczone ołówkiem miej-

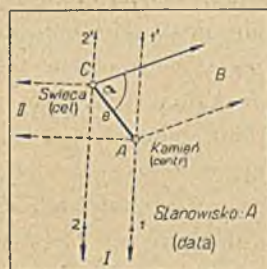


sca różnią się od siebie (z powodu błędów instrumentalnych), to wyznaczamy miejsca pośrednie  $A$  i  $B$ , do których przykładamy starannie krawędź równo obciętej laty  $c$  i przybijamy ją gwoździami. Instrument przenosimy na stanowisko II tak obrane, aby kierunki do świecy z I i II zawierały w przybliżeniu kąt prosty. Po ustawieniu osi instrumentu do pionu rzutujemy znowu środek świecy na latę  $c$  w obu położeniach lunety. Średnia z obu położeń daje punkt  $S$ , który zaznaczamy ołówkiem na krawędzi laty, i teraz już łatwo (po uprzednim wykopaniu dołu) scentrujemy płytę i słupek przy pomocy pionu, którego sznurek przykładamy do punktu  $S$ .

Zaznaczyć jednak należy, że mimo starannego scentrowania znaków triangulacyjnych w chwili ich osadzania, sygnał wraz z świecą z czasem zdeformuje się i odchyli (z powodu dalszego osiadania, schnięcia, wiatru itp.), zajmując położenie mimośrodkowe (ekscentryczne) względem punktu naziemnego. Różnica ta jest wprawdzie zwykle drobna (1-2 cm), ale przy dokład-



Rys. 196.



Rys. 197.

nych pomiarach nie może być pominięta. Dlatego też należy zawsze bezpośrednio przed przystąpieniem do pomiarów kątowych wyznaczyć wielkość i kierunek ekscentryczności świecy (celu) i odpowiednio zredukować kierunki (por. § 13).

Elementy ekscentryczności celu wyznaczamy przy pomocy instrumentu uniwersalnego i (małego) stolika mierniczego z napiętym papierem rysunkowym. Stolik ustawiamy poziomo nad punktem triangulacyjnym i z dwóch stanowisk instrumentu I i II (oraz w obu położeniach lunety) rzutujemy na papier (rys. 197) zarówno punkt na kamieniu (centr), jak i świecę (cel).

Robimy to w ten sposób, że np. ze stanowiska I zaznaczamy na brzegach papieru punkty 1 i 1' (dla kamienia) oraz 2 i 2' (dla świecy), które łączymy cienkimi liniami prostymi, a następnie dopiero ze stanowiska II znajdujemy właściwe rzuty centra i celu na papierze w skali 1:1 (naturalnej). Prócz tego należy jeszcze wyrysować kierunek do jakiegokolwiek widocznego punktu triangulacyjnego (na rys. 197 punkt  $B$ ) przy pomocy specjalnej linijki z przeziernikami lub też samej tylko linijki, celując wzdłuż jej krawędzi z wystarczającą do tego celu dokładnością. Kierunek ten może wychodzić zarówno

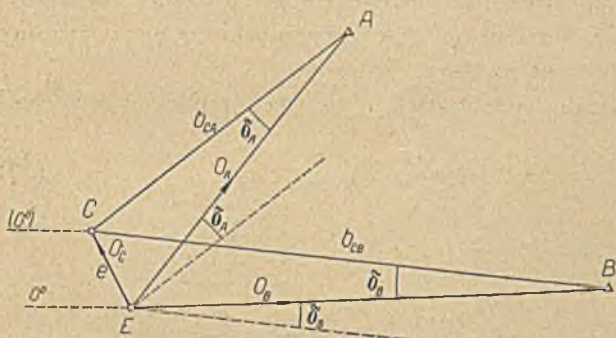


z punktu  $C$ , jak i z punktu  $A$ , gdyż wobec małego mimośrodów  $e$  można uważać oba kierunki jako do siebie równoległe.

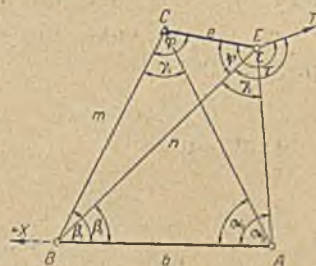
Kąt  $BCA = \alpha$  (zmierzony małym kątomierzem) i odcinek  $CA = e$  (zmierzony podziałką milimetrową) stanowią dwa zasadnicze elementy mimośrodu, potrzebne do redukcji kierunków na właściwy punkt  $A$  ze względu na ekscentryczność celu (świecy).

### § 13. Redukcja pomiarów mimośrodkowych (ekscentrycznych)

Punkty triangulacyjne muszą być w miarę możliwości tak obierane, aby można było na nich ustawić instrument uniwersalny centrycznie (na statywie lub na specjalnym słupku obserwacyjnym). Jeżeli jednak punktem triangulacyjnym będzie punkt niedostępny, np. krzyż na wieży kościelnej i na tym punkcie mają być wykonane obserwacje katowe, to centryczne ustawienie na



Rys. 198.



Rys. 199.

nim instrumentu natrafi z reguły na znaczne trudności techniczne (pomijając koszty). Wtedy zmuszeni jesteśmy wykonać pomiary z jakiegoś blisko leżącego, a dogodnego do pomiaru, punktu  $E$  (rys. 198), czyli z tzw. stanowiska mimośrodkowego (ekscentrycznego). Pomiary te muszą być następnie przeliczone czyli zredukowane na właściwy punkt triangulacyjny (centr)  $C$ .

Dla uskutecznienia tej redukcji wyobraźmy sobie, żeśmy przestawili instrument z punktu  $E$  do punktu  $C$ , przy zachowaniu kierunku  $0$ , odpowiadającego kierunkowi  $0^\circ$ . Jak to z rys. 198 wynika, odczyty  $o_A, o_B \dots$  odpowiadające kierunkom  $EA, EB$ , itd. należy poprawić o  $\delta_A, \delta_B \dots$  aby uzyskać takie odczyty  $o'_A, o'_B, \dots$ , które otrzymalibyśmy, gdyby instrument był ustawiony w tym samym położeniu na punkcie  $C$ . Wobec czego położymy:

$$o'_A = o_A + \delta_A, \quad o'_B = o_B + \delta_B \quad \text{itd.}$$

Poprawki  $\delta_A, \delta_B$  itd. wyznaczamy z twierdzenia sinusowego

$$\sin \delta_A = \frac{e}{b_{CA}} \cdot \sin (o_A - o_C), \quad \sin \delta_B = \frac{e}{b_{CB}} \cdot \sin (o_B - o_C) \dots, \quad (50)$$



a ponieważ  $\delta$  są bardzo małymi kątami, przeto możemy napisać ostatecznie:

$$\delta_A'' = \frac{e}{b_{CA}} \rho'' \sin(o_A - o_C), \quad \delta_B'' = \frac{e}{b_{CB}} \rho'' \sin(o_B - o_C), \dots, \quad (51)$$

przy czym mimośród  $e = CE$  mierzymy bezpośrednio lub pośrednio, zaś odległości  $b_{CA}$ ,  $b_{CB}$ , ... otrzymuje się z pomiarów triangulacyjnych wykonanych na innych stanowiskach.

Odległość  $e$  i kąt odpowiadający odczytowi  $o_C$  nazywamy elementami ekscentryczności. Tylko rzadko się zdarza, że elementy ekscentryczności będzie można pomierzyć bezpośrednio. Najczęściej musimy je wyznaczyć pośrednio przy pomocy odpowiednio założonej bazy  $AB = b$  (rys. 199), z której końców weinamy w przód oba punkty  $C$  i  $E$ . Prócz tego na stanowisku (ekscentrycznym)  $E$  mierzymy kąt  $\tau$ , zawarty między kierunkiem do pewnego punktu triangulacyjnego  $T$  i kierunkiem do punktu  $B$ ; mierzymy także kąt  $\gamma_2$  (jeśli to tylko możliwe) dla sprawdzenia i ewentualnego poprawienia kątów w trójkącie  $ABE$ . Obliczenie elementów ekscentryczności przeprowadzamy przy pomocy logarytmów lub maszyny do rachowania.

a) W rachunku logarytmami posługujemy się następującymi wzorami (p. rys. 199):

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1), \quad (52)$$

i ewentualnie

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta_2);$$

$$m = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}, \quad n = \frac{b \sin \alpha_2}{\sin \gamma_2}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{m}{n}. \quad (53)$$

$$\varphi + \psi = 180^\circ - (\beta_1 - \beta_2), \quad \text{czyli } \frac{\varphi + \psi}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \quad (54)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n}{m} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu}, \quad \text{skąd } \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} (45^\circ - \mu) \quad (55)$$

( $\mu$ ,  $\varphi$  i  $\psi$  są kątami pomocniczymi).

W końcu

$$e = \frac{m \sin (\beta_1 - \beta_2)}{\sin \psi} = \frac{n \sin (\beta_1 - \beta_2)}{\sin \varphi} \quad (56)$$

i

$$\sphericalangle TEC = \varepsilon = \tau + \psi. \quad (57)$$

Gdyby na stanowisku  $E$  został zmierzony kąt  $TEA = \tau'$ , wówczas

$$\varepsilon = \tau' + \gamma_2 + \psi.$$

b) Rachunek maszynowy jest najprostszy, gdy obliczymy współrzędne punktów  $C$  i  $E$  w odniesieniu do układu prostokątnego, którego oś  $x$ -ów po-



krywa się z bokiem  $AB$ , a początkiem układu jest punkt  $A$ . Wtedy np. dla punktu  $C$  (rys. 199) będzie:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_1 = (b - x) \operatorname{tg} \beta_1, \quad (59)$$

skąd

$$x = \frac{b \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta_1} = \frac{B}{C} \quad (60)$$

i

$$b - x = \frac{b \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta_1} = \frac{A}{C}, \quad (61)$$

przy czym kontrolą jest suma  $x + (b - x) = b$ .

Analogicznie obliczymy współrzędne punktu  $E$ , a następnie mimośród

$$EC = e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (62)$$

i kąt kierunkowy  $(EC)$  z wzoru:

$$\operatorname{tg}(EC) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (63)$$

przy czym

$$\Delta y = y_C - y_E \quad \text{i} \quad \Delta x = x_C - x_E.$$

Potrzebny jeszcze (do dalszych rachunków) kąt  $\phi$  obliczamy z różnicy odpowiednich kątów kierunkowych, a więc:

$$\phi = (EC) - (EB) = (EC) - (-\beta_2) = (EC) + \beta_2. \quad (64)$$

Przykład. W celu wyznaczenia potrzebnych elementów dla ekscentrycznego stanowiska na punkcie triangulacyjnym *Wieża Wodna Kulparków* (triangulacja m. Lwowa) pomierzono długość (bazę)  $AB = b = 54,716$  m (średnia z dwóch pomiarów) i następujące kierunki (jako średnie z dwóch seryj):

Stanowisko $A$ :	Stanowisko $B$ :	Stanowisko $E$ :
punkt $B$ . $0^\circ 0' 0,0''$	punkt $C$ . $0^\circ 0' 0,0''$	punkt $WZ$ . $0^\circ 0' 0,0''$
„ $C$ . $58 15 45,0$	„ $E$ . $2 19 27,0$	„ $A$ . $129 55 50,3$
„ $E$ . $59 46 18,5$	„ $A$ . $72 5 43,5$	„ $B$ . $180 23 20,8$

Ponieważ w trójkącie  $ABE$  pomierzono wszystkie kąty:

$A$ . $59^\circ 46' 18,5''$
$B$ . $69 46 16,5$
$E$ . $50 27 30,5$
Suma: $180^\circ 0' 5,5''$ ,

przeło po rozdzieleniu odchyłki będzie:

$A$ . $59^\circ 46' 16,7''$
$B$ . $69 46 14,7$
$E$ . $50 27 28,7$
Suma: $180^\circ 0' 0,1''$ .



Dalszy rachunek przeprowadzamy w następującym schemacie:

Stanowisko ekscentryczne: W. WODNA KULPARKÓW.

$b = 54,716$  m

Punkt:	$C$	$E$	$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	0,241 8630
$\alpha$	58°15'45,0''	59°46'16,7''	$\lambda$	13°35'48''
$\beta$	72 5 43,5	69 46 14,7		
$\operatorname{tg} \alpha$	1,616 7702	1,716 1945	$(EC)$ $\beta_2$	13°35'48'' 69 46 15
$\operatorname{tg} \beta$	3,095 2130	2,713 6447		
$C$ (suma)	4,711 9832	4,429 8392	$\phi$ $\sphericalangle TEB = \tau$	83 22 3 180 23 21
$B = b \operatorname{tg} \beta$	169,357 67	148,479 78		
$A = b \operatorname{tg} \alpha$	88,463 20	93,903 30		
$x = \frac{B}{C}$	35,941 91	33,518 10	$\epsilon$	263 45 24
$b - x = \frac{A}{C}$	18,774 09	21,197 90		
suma ( $b$ )	54,716 00	54,716 00	Kontrola:	
$y = x \operatorname{tg} \alpha$ $= (b - x) \operatorname{tg} \beta$	58,109 81	57,523 58	$\Delta x + \Delta y$	+ 3,010 04
	58,109 81	57,523 57	$\Delta x - \Delta y$	+ 1,837 58
$\Delta y = y_C - y_E$	+0,586 23	$e =$ 2,493 7 m	$\operatorname{tg} \mu$	1,638 0457
$\Delta x = x_C - x_E$	+2,423 81		$\mu$	58°35'48''
			$45^\circ + (EC)$	58 35 48

Aby kąty (kierunki), uzyskane z redukcji pomiarów ekscentrycznych na pewnym stanowisku, nie ustępowały dokładnością kątom innych stanowisk triangulacyjnych, należy elementy ekscentryczności  $e$  i  $\epsilon$  wyznaczyć dostatecznie dokładnie. Mianowicie mimośród  $e$  musi być pomierzony z błędem nie przekraczającym 0,5-1 mm, zaś dokładność kąta  $\epsilon$  zależy od wielkości  $e$ . I tak

dla  $e < 0,1$  m błąd  $\epsilon$  nie powinien przekraczać 20'

„  $e < 1$  „ „  $\epsilon$  „ „ „ 2'

„  $e < 5$  „ „  $\epsilon$  „ „ „ 30''

„  $e < 10$  „ „  $\epsilon$  „ „ „ 10''.

Odległości  $d$  liczymy zwykle z przybliżonych współrzędnych (lub z odpowiednich trójkątów) z zaokrągleniem na całkowite metry.

Redukcję pomiarów mimośrodkowych przeprowadzamy w odpowiednim formularzu, który podajemy niżej (dla rachunku maszynowego), w odniesieniu



do stanowiska (ekscentrycznego) *W. Wodna Kulparków*, na którym pomierzono następujące kierunki:

Kleparów . . . .	0°	0'	0,00"
Wys. Zamek . . . .	54	57	4,43
Sokolniki . . . .	219	24	37,18.

Przy pomocy obliczonego już poprzednio kąta  $\epsilon = 263^{\circ}45'24''$  orientujemy te kierunki na  $EC$  jako  $0^{\circ}0'0''$  (z odpowiednim zaokrągleniem) i obliczamy poprawki  $\delta''$  dla każdego kierunku według (51):

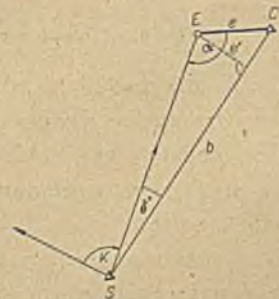
Stanowisko ekscentryczne: W. WODNA KULPARKÓW		$e = 2,4937 \text{ m}$ $e\rho'' = 514\,362,5$ $\epsilon = 263^{\circ}45'24''$		Szkic:	
Celowa do punktu	$b$ odległość m	$(o_i - o_c)$ kierunki zorientowane na $EC$ jako 0	$\sin(o_i - o_c)$	$\delta'' = \frac{e\rho''}{b} \sin(o_i - o_c)$	
				$\pm$	poprawka
Kleparów	4833	$41^{\circ}17'30''$	0,659 89	+	$70,23'' = 1'10,23''$
Wys. Zamek	4779	96 14 40	0,994 07	+	$106,99'' = 1'46,99''$
Sokolniki	2863	260 42 10	0,986 86	-	$177,30'' = 2'57,30''$

Kierunki zredukowane na centr będą więc następujące:

Kleparów . . . .	0°	1'	10,23"
Wys. Zamek . . . .	54	58	51,42
Sokolniki . . . .	219	21	39,88

Prócz stanowisk ekscentrycznych mamy jeszcze w triangulacji i cele ekscentryczne, a to najczęściej w tym przypadku, gdy celujemy na świecę sygnału, która z reguły nigdy nie znajduje się dokładnie w pionie nad punktem triangulacyjnym. Dlatego wszystkie kierunki muszą być jeszcze poprawione ze względu na ekscentryczny cel (rys. 200). Elementami ekscentryczności są tutaj mimośród  $EC = e$  oraz kąt  $\alpha$ , o jaki odchyła się kierunek  $ES$  od  $EC$  (kąt ten liczy się od  $0^{\circ}$  do  $360^{\circ}$ ). Poprawkę  $\delta''$  obliczamy z wzoru (przybliżonego)

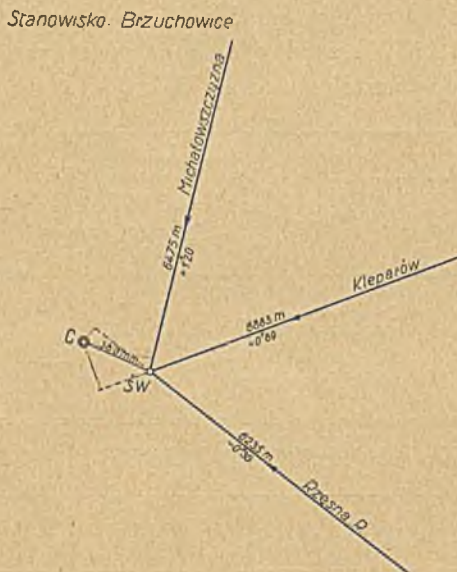
$$\delta'' = \frac{e\rho''}{b} \sin \alpha. \quad (65)$$



Rys. 200.

Jeżeli  $e$  nie przekracza 20 cm, wówczas posługujemy się rysunkiem wykonanym w skali naturalnej, z którego przy pomocy podziałki odczytujemy odstęp  $e'$ ; poprawkę  $\delta''$  obliczamy (najlepiej suwakiem) z wzoru:

$$\delta'' = \frac{e'}{b} \rho''.$$
 (66)



Rys. 201.

Poprawki (z ich znakami) piszemy wprost na odpowiednich kierunkach, na których umieszcza się również (przybliżoną) długość boków, jak to przedstawiono na rys. 201 (przykład z triangulacji m. Lwowa).

### CZĘŚĆ TRZECIA

#### TRIANGULACJA LOKALNA NIEZALEŻNA (TJ. NIE NAWIĄZANA DO SIECI PAŃSTWOWEJ)

##### § 14. Uwagi wstępne. Najczęściej spotykane typy sieci lokalnych

W przypadkach, gdy zdjęcie pewnego obszaru powinno być oparte na sieci triangulacyjnej, a w promieniu kilkunastu kilometrów nie ma punktów sieci państwowej, zakładamy specjalną sieć, którą można nazwać lokalną siecią niezależną; zakładamy ją bowiem dla celów lokalnych niezależnie od sieci państwowej.

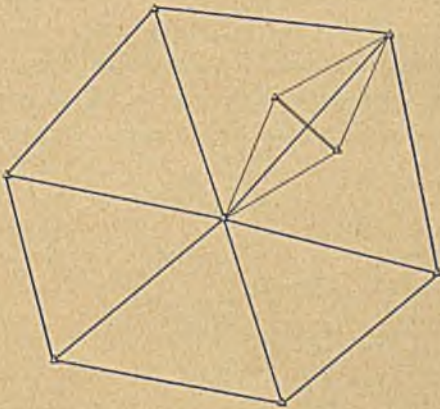
Z powodu nie nawiązania pomiarów do sieci państwowej, należy pomierzyć pośrednio lub bezpośrednio jeden bok sieci lokalnej, oraz ją odpowiednio zorientować. Sposób przeprowadzenia orientacji zależy od znaczenia sieci;



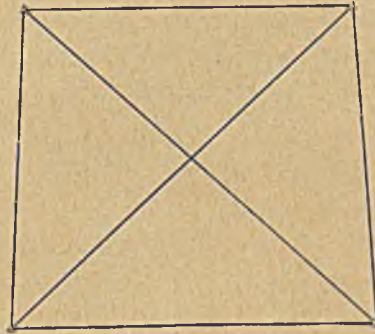
z reguły orientujemy sieci lokalne mierząc azymut jednego boku astronomicznie (z równych wysokości słońca); sieci o znaczeniu podrzędnym można zorientować przy pomocy busoli.

Sieci lokalne zakłada się również i w tych przypadkach, kiedy istniejące punkty sieci triangulacyjnej głównej są za mało dokładne dla celów, jakim ma służyć wykonane zdjęcie szczegółowe. I tak przy wykonywaniu pomiarów szczegółowych miast (grunta o wielkiej wartości) dokładność punktów triangulacyjnych sieci państwowej nie zawsze jest wystarczająca. Tak samo np. przy tyczeniu osi długiego tunelu wymagana jest zazwyczaj większa dokładność niż ta, jaką można uzyskać opierając się na punktach triangulacji państwowej. W tych przypadkach zarówno pomiar podstawy, jak też i kątów należy przeprowadzić z odpowiednią dokładnością.

Typy najczęściej stosowanych siatek lokalnych są: sieć promienista, czworobok zupełny (geodezyjny) i łańcuch trójkątów.



Rys. 202 a.



Rys. 202 b.

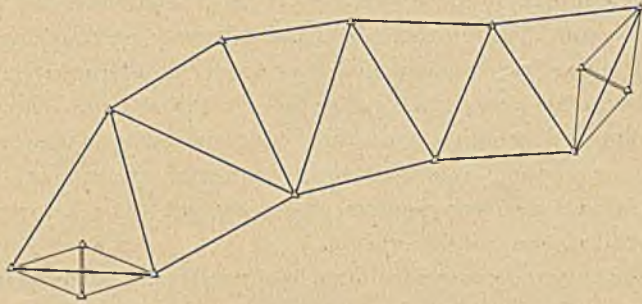
I. Siatki promieniste (centralne). Typ ten powszechnie używany, posiada największe zalety. Najkorzystniej przedstawia się sprawa, gdy siatka jest sześcioboczna (rys. 202a). W praktyce zakładamy również siatki pięcioboczne i siedmioboczne.

II. Czworobok zupełny (geodezyjny) jest siatką czworoboczną, w której wykonano obserwacje tak wzdłuż boków, jak i wzdłuż obu przekątni (rys. 202 b). Siatka ta posiada dużo zalet i jest często stosowana w geodezji (stąd nazwa czworobok geodezyjny), zwłaszcza jeżeli chodzi o niewielki obszar zdjęcia.

III. Łańcuch trójkątów. Jeżeli zdejmowany obszar jest wydłużony, sieć promienista i czworoboczna nie są odpowiednie, a najkorzystniejszym i najdogodniejszym kształtem siatki jest wówczas łańcuch trójkątów (rys. 202 c). Można też założyć łańcuch czworoboków geodezyjnych w tych przypadkach, kiedy będzie nam zależało na większej dokładności (co jednak w terenie górzystym utrudnia wybór punktów).

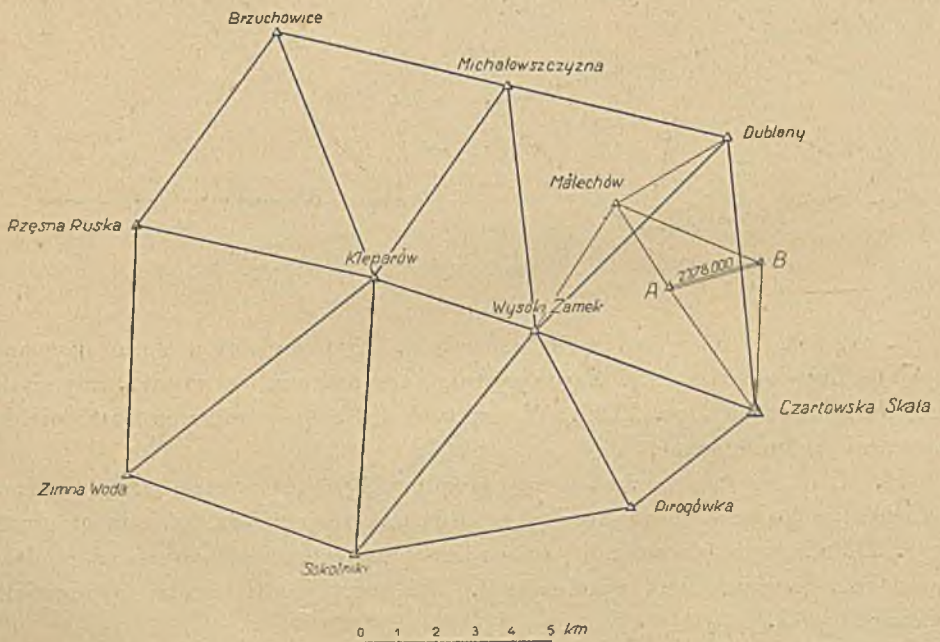


Te trzy rodzaje siatek są najczęściej spotykane. Nie zawsze jednak warunki terenowe pozwalają na założenie sieci o kształtach poprzednio wymienionych. Zasadniczo starać się jednak należy, aby siatka była możliwie prosta, ilość trójkątów niewielka, a kształt sieci nie różnił się wybitnie od



Rys. 202 c.

przedstawionych typów. Jako przykład większej sieci lokalnej służyć może sieć triangulacyjna I rzędu miasta Lwowa przedstawiona na rys. 202 d, wykonana w 1935 r. przez Biuro nowych pomiarów Zarządu Miejskiego we Lwowie.



Rys. 202 d.

Sieć lokalna winna być tak zakładana, aby obejmowała cały zdejmowany obszar, tj. aby skrajne punkty leżały conajmniej na obwodzie tegoż obszaru. Korzystniej będzie jednak, gdy obierzemy je poza zdejmowanym obszarem,



wtedy bowiem zdjęcie szczegółowe będzie można łatwo rozszerzyć na przylegające tereny.

Punkty siatki powinny być obierane o ile możliwości na miedzach i nieużytkach, gdyż wtedy będą lepiej zachowane. Teren obranego punktu triangulacyjnego powinien nadawać się do postawienia sygnału.

Poza tym przy obieraniu punktów siatki lokalnej należy pamiętać, że małe sieci lokalne służą zazwyczaj do bezpośredniego nawiązania do nich ciągów poligonowych, z czym już przy obiorze punktów należy się liczyć. W każdym razie definitywne ustalenie położenia wierzchołków (punktów) sieci następuje po przeprowadzeniu dokładnego wywiadu w polu. Sprawę tę mogą nam do pewnego stopnia ułatwić topograficzne mapy wojskowe, na których można jeszcze przed wywiadem polowym zaprojektować wierzchołki sieci i sprawdzić w przybliżeniu (przy pomocy profilów), czy celowe między wierzchołkami są możliwe. Ostateczne ustalenie położenia wierzchołków sieci poprzedza wykonanie na nich przybliżonego pomiaru kątów (stolikiem mierniczym, ewentualnie mało dokładnym teodolitem).

Następnie należy sporządzić dokładny opis topograficzny każdego punktu triang., oraz orientacyjny szkic całkowitej sieci w skali 1:10000 lub 1:20000. Przy sporządzaniu szkicu mogą się okazać pomocne wspomniane mapy wojskowe, lub (np. w Małopolsce) pomniejszone mapy katastralne.

Po tych czynnościach przystępujemy do stawiania sygnałów i utrwalania punktów.

### § 15. Obiór podstawy i siatki podstawowej

Jak wspomniano wyżej, musimy znać długość co najmniej jednego boku sieci lokalnej. Bezpośredni pomiar takiego boku jest rzadko kiedy możliwy z powodu trudności terenowych oraz zazwyczaj dość znacznej długości boku siatki. Dlatego z reguły wykonujemy pomiar jednego boku sieci (lub ew. kilku) drogą pośrednią. W tym celu mierzymy nadającą się do bezpośredniego pomiaru długość, tzw. *bazę* lub *podstawę*; rozwijamy ją przy pomocy szeregu trójkątów odpowiedniego kształtu, czyli przy pomocy tzw. *sieci podstawowej* (*bazowej*) na bok sieci triangulacji lokalnej.

Zarówno podstawa, jak i siatka podstawowa wymagają bardzo starannego wyboru w terenie i dlatego już przy wyborze punktów siatki lokalnej należy zwrócić uwagę na to, aby można było założyć dogodną do pomiaru podstawę oraz odpowiednio rozwiniętą sieć podstawową.

Sieć podstawowa wymaga możliwie najkorzystniejszego kształtu, aby dokładność przeniesienia pomierzonej długości podstawy na bok siatki triangulacyjnej była możliwie duża. Na podstawie studiów i analizy szeregu częściściej stosowanych typów siatek podstawowych okazało się, że najbardziej dokładną i celową jest sieć *rombowa* pojedyncza (rys. 203 a), względnie, gdy jej założyć nie można, sieć *rombowa* podwójna (rys. 203 b).

Obecnie przyjęto też jako zasadę, że przy triangulacji lokalnej należy użyć do rozwinięcia bazy sieci *rombowej* pojedynczej lub podwójnej.

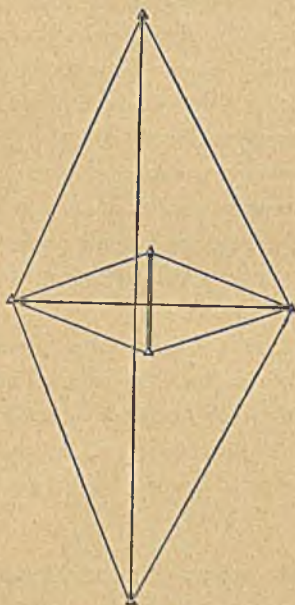


Kąty ostre leżące naprzeciw pomierzonej podstawy nie powinny być zbyt małe; najkorzystniej jest, gdy kąty te wynoszą około  $33^\circ$ ; różnica ich od tej wielkości nie powinna przekraczać  $5^\circ$ .

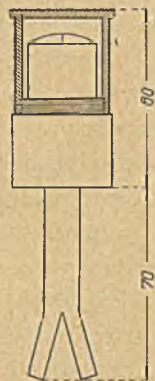
Podstawę obieramy w terenie o ile możliwości zupełnie płaskim i równym, a w każdym razie o możliwie jednostajnym, niewielkim nachyleniu, które nie powinno przekraczać  $3\frac{1}{2}\%$ . Zwrócić należy też uwagę na to, aby na końcach



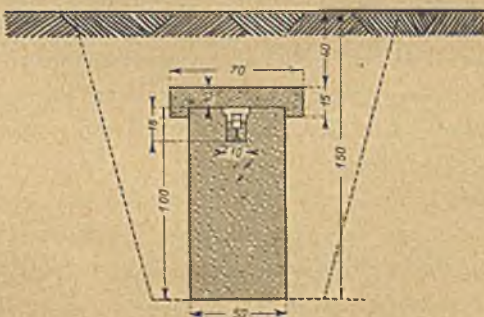
Rys. 203 a.



Rys. 203 b.



Rys. 204 a.



Rys. 204.

podstawy nie trzeba było budować wysokich wież dla wykonania obserwacji kątowych w siatce podstawowej; powinny to być stanowiska terenowe (tzn. statyw ustawiony wprost na terenie), względnie dla uniknięcia wpływu refrakcji bocznej kilkumetrowe wieże obserwacyjne. Jest to konieczne dla zwiększenia dokładności obserwacji kątowych i dokładniejszego przeniesienia pomierzonej podstawy na bok siatki triangulacyjnej.



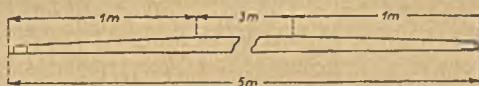
Utrwalenie końców podstawy różni się od znaków punktów triangulacyjnych. Rys. 204 przedstawia sposób utrwalenia końców bazy sieci triangulacyjnej m. Lwowa. W bloku betonowym o wymiarach  $50 \times 50 \times 100$  cm osadzono bolec z wrytym krzyżem na jego górnej, wypukłej powierzchni (rys. 204 a, wymiary w mm). Bolec taki posiada nakrętkę dla ochrony wrytego znaku i osadza się go w bloku tak, aby jedno ramię krzyża zgadzało się z kierunkiem bazy. Całość przykryta jest pokrywą betonową odpowiednich rozmiarów i zasypana warstwą ziemi o grubości około 40 cm. Czasem umieszcza się jeszcze znak naziemny dla orientacji. Przy pomiarach długości podstawy i kątów siatki podstawowej należy zdjąć pokrywę dla dokładnego scentrowania instrumentu nad środkiem krzyża, albo odpionowania początku (końca) bazy.

Ze względu na osiadanie znaku, należy utrwalenie obu końców podstawy przeprowadzić kilkanaście dni przed samym pomiarem podstawy.

### § 16. Pomiar długości podstawy

W siatkach lokalnych wymagających wielkiej dokładności, jak np. w siatkach triangulacyjnych wielkich miast, lub sieciach zakładanych dla wytyczenia osi długich tunelów, mierzy się podstawy z możliwie wielką dokładnością, nie licząc się z nakładem kosztów. W tych też sieciach stosuje się metody i przyrządy używane przy pomiarze podstaw dla sieci państwowej. W sieciach mniejszych stosuje się metody mniej dokładne, ale znacznie tańsze.

Najczęściej mierzymy podstawę łątami mierniczymi. Łaty te długości 5 m są sporządzone z impregnowanego drzewa o przekroju prostokątnym (szerokości około 4 cm). Przekrój podłużny łąty ma kształt belki trapezowej o wysokości 4 cm na końcach, a 8 cm w środku (rys. 205). Końce łąty okute są stalowymi ostrzami, tak by jedno z nich było poziome, a drugie pionowe.



Rys. 205.

Łaty takie należy przechowywać i przewozić w specjalnej skrzyni, celem uniknięcia uszkodzenia obu końców łąt. Przed każdym pomiarem podstawy należy łąty komparować. Komparację taką wykonuje Główny Urząd Miar w Warszawie.

Do pomiaru podstawy używa się trzech łąt, które oznaczamy literami *A*, *B* i *C*.

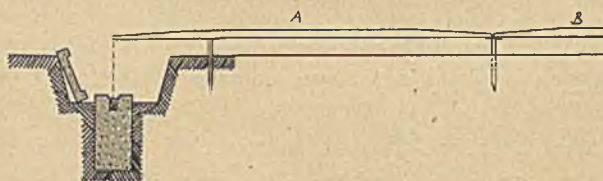
Os podstawy tyczą się dokładnie przy pomocy teodolitu. W odstępach 5 metrowych, pomierzonych taśmą stalową, wbijamy pale około 1,2 m długie, tak aby wystawały ponad terenem na 30 do 40 cm. Wierzchołki pali powinny znajdować się w jednej płaszczyźnie poziomej lub w płaszczyźnie o jednakowym nachyleniu. Na wierzchołki pali przybijamy deszczułki o wymiarach  $10 \times 15$  cm, na których układamy łąty w czasie pomiaru podstawy.

Ostrze pierwszej łąty należy odpionować przy pomocy instrumentu uniwersalnego lub teodolitu, ustawionego na kierunku prostopadłym do osi



podstawy w odległości kilku metrów od początku podstawy. Instrument ustawiony dokładnie do pionu, powinien być dobrze zrektyfikowany, szczególnie ze względu na błąd inklinacyjny. Kierujemy lunetę na znak podziemny początku podstawy i następnie kontrolujemy, czy po podniesieniu lunety ostrze pierwszej łaty pokrywa się z krzyżem nitkowym (rys. 206). Do łaty *A* dosuwamy łaty *B* i *C* tak jednak, aby ostrza tych łat na styku się krzyżowały. Po ułożeniu wszystkich trzech łat należy jeszcze instrumentem sprawdzić, czy początek pierwszej leży dokładnie w pionie początku podstawy. Takie ułożenie trzech łat nazywamy jednym przyłożeniem i notujemy je w dzienniku pomiaru podstawy.

Przy przenoszeniu łat na następne pale trzeba przestrzegać, aby stale dwie łaty spoczywały na deszczulkach, gdyż wtedy mamy pewność, że przy dosuwaniu przenoszonej łaty nie nastąpi ich przesunięcie. Dopiero po przeniesieniu łaty *A* i dosunięciu do leżących *B* i *C*, należy przenieść następną łatę *B* i dosunąć do łat *C* i *A*, itd. Na analogicznie ułożoną ostatnią łatę rzutu-



Rys. 206.

jemy przy pomocy instrumentu drugi koniec podstawy, a powstały w ten sposób odcinek mierzymy podziałką milimetrową.

Dla zwiększenia dokładności oraz uniknięcia błędów grubych przeprowadza się pomiar trzykrotnie w obie strony. Błąd średni  $\mu_b$  średniej arytmetycznej z dokonanych w ten sposób sześciu pomiarów obliczony wzorem:

$$\mu_b = \pm 0,2 \sqrt{[\lambda\lambda]} \quad (\text{przy czym } \lambda \text{ s\k{a} b\l{e}dami pozornymi spostrzeżeń)$$

nie powinien przekraczać wartości  $\pm (0,00002 b + 0,0015)$  m, przy czym *b* oznacza ilość metrów<sup>1)</sup>.

Zamiast łat można użyć do pomiaru podstawy specjalnej taśmy inwarowej o długości około 22 m, a szerokości 3 cm, zakończonej obustronnie pierścieniami i haczykami, do których przymocowuje się na czas pomiaru ciężarki o wadze 20 kg. Na taśmie tej jest zaznaczona długość 20 m dwiema kreskami. Dla możności pomiaru nieco większych lub mniejszych odcinków niż 20 m znajduje się po obu stronach kresek podział milimetrowy (na długości 20 cm). Przy wytyczaniu podstawy rozmieszczamy pale z deszczulkami w odstępach 20-metrowych. Do deszczulek tych wbija się bezpośrednio przed pomiarem płytki metalowe opatrzone u spodu kolcami, przy czym indeksy znajdujące się na płytkach powinny zająć położenie prostopadle do kierunku podstawy.

<sup>1)</sup> Przepisy pomiarowe .... M. R. P. Warszawa 1928.



W odległości około 65 cm przed punktem początkowym podstawy i za pierwszym palem (znajdującym się w odległości 20 m od punktu początkowego) ustawia się kozły drewniane zaokrąglone górą w półkole. Po ułożeniu na nich taśmy w kierunku podstawy napina się ją zaczepiając ciężary 20 kg na haczykach umieszczonych na końcach taśmy.

Pomiar rozpoczynamy od odrzutowania punktu początkowego podstawy na podział milimetrowy taśmy za pomocą teodolitu (ustawionego w odstępnie kilku metrów prostopadle do podstawy), a na pierwszym palu odczytujemy *równocześnie* położenie indeksu płytki względem podziału milimetrowego drugiego końca taśmy. Następne odcinki mierzymy odczytując zawsze *równocześnie* położenie obustronnych indeksów płytek względem podziałów milimetrowych taśmy. Odczyty powtarzamy trzykrotnie (po nieznacznym przesunięciu taśmy).

W ten sposób postępując dochodzimy do końca podstawy, który odrzutujemy również na podział milimetrowy taśmy przy użyciu teodolitu umieszczonego, podobnie jak poprzednio, po tej samej stronie podstawy (dla wyrugowania wpływu błędów instrumentalnych teodolitu).

W opisany sposób mierzymy podstawę trzy razy tam i z powrotem, a średni błąd  $\mu_b$  średniej arytmetycznej z wykonanych sześciu pomiarów obliczony wzorem :

$$\mu_b = \pm 0,2 \sqrt{[\lambda\lambda]}$$

nie powinien przekraczać wartości  $\pm (0,00003 b + 0,001) m$ , przy czym  $b$  oznacza ilość metrów.

### § 17. Obserwacje kątowe w siatkach lokalnych i ich wyrównanie

Przy wyborze metody obserwacyjnej kątów w siatkach triangulacyjnych odgrywają rolę następujące czynniki: wielkość sieci, stałość stanowisk oraz wymagana dokładność.

Stalość stanowiska jest bardzo ważnym czynnikiem przy wyborze metody obserwacji. Na stanowiskach mniej stałych (np. wysokie wieże triangulacyjne, trzęsawiska itd.) możliwą jest tylko metoda pomiaru każdego kąta z osobna.

O ile celowe są bardzo długie (około 10 km), a tym samym warunki obserwacyjne trudne, szybkie wykonywanie obserwacji w seriach pełnych jest prawie niemożliwe. Serie niepełne utrudniają zarówno wyrównanie stacyjne, jak i późniejsze wyrównanie całej siatki triangulacyjnej. W tym przypadku stosujemy metodę obserwowania kątów. Jeżeli nam zależy na bardzo dokładnych wynikach, użyjemy do pomiaru metody obserwowania kątów we wszystkich kombinacjach (metoda Schreiber'a). Metoda pomiaru kątów wpływa na późniejsze wyrównanie siatki triangulacyjnej. Przy wyrównaniu czworoboku geodezyjnego oraz łańcucha trójkątów wybór metody kierunkowej czy też kątowej jest prawie obojętny ze względu na nakład pracy rachunkowej i tok wyrównania. Natomiast ściśle wyrównanie siatki promienistej oraz łańcucha trójkątów jest znacznie prostsze i następuje mniej pracy rachunkowej przy wyrównaniu kątów, niż przy wyrównaniu kierunków.



Na podstawie powyższego możemy ustalić następującą zasadę. Przy wykonywaniu obserwacji kątowych w małych siatkach lokalnych bez wieńc triangulacyjnych obierzemy metodę kierunkową, z tym jednak, że w siatce promienistej i łańcuchu trójkątów wyrównywać będziemy nie kierunki, lecz kąty obliczone z tych kierunków. Będzie to metoda wprawdzie niezupełnie ścisła, jednak różnice, jakie w ten sposób powstaną w sytuacji punktów sieci, będą z reguły minimalne. Natomiast przy sieciach większych rozmiarów oraz o większej wymaganej dokładności, należy obserwować z reguły kąty (we wszystkich kombinacjach).

Ilość seryj, czy też ilość pomiarów kątowych, zależy od dokładności instrumentu oraz od wymaganej dokładności siatki triangulacyjnej. W każdym razie przy użyciu nawet najbardziej dokładnych instrumentów pomiar należy przeprowadzić kilkakrotnie (najmniej w 3 seriach). Ilość pomiarów w siatkach lokalnych normują odnośne przepisy (instrukcje).

Ze względu na to, że sieci lokalne obejmują stosunkowo niewielkie obszary, przeprowadzamy ich wyrównanie z reguły na płaszczyźnie<sup>1)</sup>.

Obserwacje kątowe siatek podstawowych przeprowadza się zupełnie niezależnie od obserwacji kątowych siatki triangulacyjnej. Przy większych siatkach podstawowych, gdzie zależy nam na większej dokładności, np. przy sieciach zakładanych dla celów triangulacji państwowej, przeprowadza się obliczenia rozkładu ilości obserwacji na poszczególne kąty, tak aby dokładność przeniesienia pomierzonej podstawy na bok sieci triangulacyjnej była możliwie największa.



Rys. 207.

Przy sieciach podstawowych, zakładanych dla celów lokalnych, nie oplaci się przeprowadzać żmudnych obliczeń rozkładu ilości obserwacji; wykorzystuje się wyniki uzyskane przy badanych już sieciach podobnego kształtu. Wynika z nich przede wszystkim, że kierunki wzdłuż boku sieci triangulacyjnej nie muszą być obserwowane. Natomiast kąty leżące naprzeciw mierzonej podstawy wywierają największy wpływ na dokładność przeniesienia podstawy na bok siatki triangulacyjnej i dlatego powinny być możliwie najdokładniej pomierzone (zatem największą ilość obserwacji trzeba na te właśnie kąty przeznaczyć). Stąd też przy siatkach podstawowych niewielkich sieci triangulacyjnych lokalnych obserwacje kątowe wykonujemy wedle następującego planu: kątów leżących po obu stronach boku sieci triangulacyjnej nie obserwujemy wcale, natomiast kąty leżące naprzeciw pomierzonej podstawy  $\alpha_1$  i  $\alpha_4$  (rys. 207) obserwujemy dwukrotną ilość razy niż pozostałe kąty  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  i  $\alpha_5$ .

<sup>1)</sup> Eksces sferyczny na obszarze o średnicy 30 km wynosi mniej niż przypuszczalny średni błąd kątowy.



Wyrównanie siatki polegać będzie na rozdzieleniu odchyłek kątowych obu trójkątów odwrotnie proporcjonalnie do wag:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 - 0,2 \omega_1 & \alpha_6 &= \alpha_6 - 0,2 \omega_2 \\ \alpha_2 &= \alpha_2 - 0,4 \omega_1 & \alpha_4 &= \alpha_4 - 0,4 \omega_2 \\ \alpha_3 &= \alpha_3 - 0,4 \omega_1 & \alpha_5 &= \alpha_5 - 0,4 \omega_2, \end{aligned} \quad (67)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 180^\circ \\ \omega_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 180^\circ. \end{aligned} \quad (68)$$

Kąty  $x$  i  $y$ , które potrzebne są do obliczenia boku siatki triangulacyjnej otrzymamy ze wzorów:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\alpha_6}{2}, \quad (69)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{tg} (45^\circ - \mu). \quad (70)$$

Kąt pomocniczy  $\mu$  obliczymy wedle wzoru:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \alpha_2 \sin (\alpha_3 + \alpha_5)}{\sin \alpha_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_4)}. \quad (71)$$

### § 18. Zorientowanie niezależnej sieci lokalnej. Wyznaczenie azymutu

Zorientowanie sieci polega na wyznaczeniu azymutu jednego z jej boków. Obieramy zatem pewien ważniejszy punkt sieci jako początkowy  $A$  i wyznaczamy kąt, jaki tworzy południk przechodzący przez obrany punkt z bokiem łączącym go z punktem sąsiednim  $B$ , czyli azymut astronomiczny kierunku  $A - B$ .

O ile sieć jest znaczenia podrzędnego, może to nastąpić przy pomocy instrumentu busolowego, lub lepiej teodolitu z kompasem orientacyjnym, przy czym należy jeszcze uwzględnić poprawkę deklinacji magnetycznej (patrz § 10 rozdziału IX).

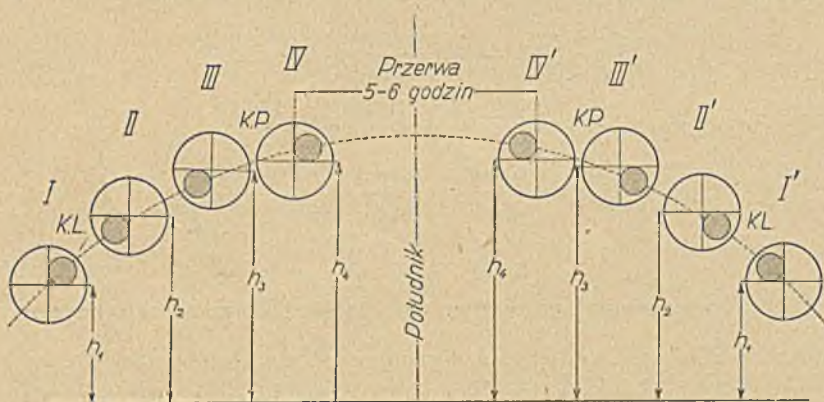
Natomiast zorientowanie sieci ważniejszych (np. miejskich) względem południka obranego punktu  $A$  przeprowadzamy mierząc wspomniany azymut bezpośrednio. Punkt, do którego przy tym celujemy ( $B$ ) powinien znajdować się w przybliżeniu na północ od miejsca obserwacji ( $A$ ) i stanowić wyraźny cel. Ponieważ tok postępowania przy pomiarze azymutu opisano bardzo dokładnie w »Przepisach Pomiarowych...« M. R. P. (Warszawa 1928) na stronach 15-17 oraz 155-160, przeto ograniczymy się tylko do podania rzeczy w ogólnych zarysach.

Zasada postępowania opiera się na obserwacjach pewnej gwiazdy w równych wysokościach przed i po jej kulminacji, przy czym otrzymujemy kierunek południka miejsca obserwacji połowiąc kąt, jaki tworzą celowe skierowane do gwiazdy w tej samej wysokości przed i po kulminacji.



Ponieważ obserwacje gwiazd mogą być przeprowadzane tylko w nocy, przyrządami uniwersalnymi o odpowiednio oświetlonym polu widzenia lunety (i do celów świetlnych), przeto dla uniknięcia wspomnianych trudności obserwuje się, jako gwiazdę, słońce. W tym przypadku obserwacje (dokonane przy użyciu odpowiedniego ciemnika) nie mogą dotyczyć środkowego punktu tarczy słonecznej, lecz są dokonywane, gdy tarcza słoneczna zajmuje położenie styczne do nitki pionowej i poziomej, przy czym dla odpowiadających sobie spostrzeżeń słońce musi się znajdować w kwadrantach krzyża nitkowego symetrycznie położonych względem nitki pionowej (rys. 208).

Niech  $o_r$  i  $o_p$  oznaczają odczyty na kole poziomym dokonane podczas dwu odpowiadających sobie obserwacji słońca (rano i po południu). Średnia arytmetyczna utworzona z obu odczytów dostarczyłaby nam odczytu odpowiadającego kierunkowi południka, gdyby nie okoliczność, że deklinacja słońca jest



Rys. 208.

zmienna. Odczyt na kole poziomym  $o_m$ , odpowiadający kierunkowi południka, uzyskujemy wobec tego przez dodanie do wspomnianej średniej poprawkę azymutalną  $\Delta o$ :

$$o_m = \frac{o_r + o_p}{2} + \Delta o, \quad (73)$$

którą obliczamy z wzoru

$$\Delta o = -d\delta \frac{t_p - t_r}{2} \sec \varphi \operatorname{cosec} \left( 15 \frac{t_p - t_r}{2} \right). \quad (73)$$

We wzorze tym  $d\delta$  oznacza przyrost godzinny deklinacji słońca (wyrażony w sekundach kątowych), który otrzymujemy dzieląc przez 24 odczytany z efermeryd astronomicznych przyrost deklinacji słońca od poprzedzającej do następującej północy,  $t_r$  i  $t_p$  — czasy odpowiadających sobie obserwacji, tj. ranej i popołudniowej, oraz  $\varphi$  przybliżoną szerokość geograficzną miejsca obserwacji.

Jeżeli odczyt do punktu  $B$  (drugiego punktu obranego boku sieci) wynosi  $o_B$ , otrzymujemy azymut (kąt północny) boku sieci  $A-B$  z różnicy odczytów, czyli  $\alpha_{AB} = o_B - o_m \pm 180^\circ$ .

Chcąc uzyskać wynik na podstawie pomiarów przeprowadzonych jednego







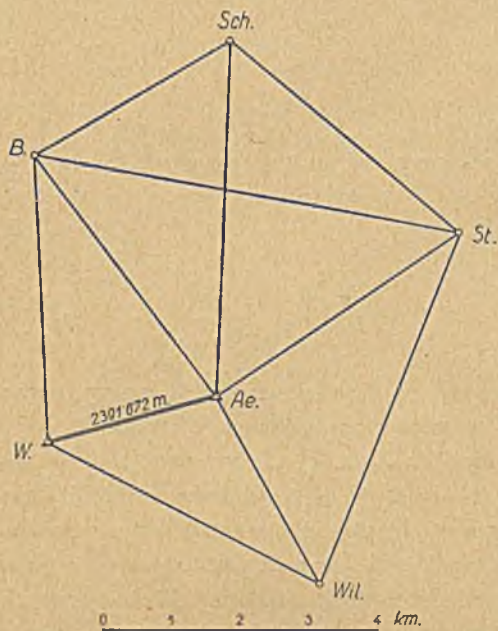
nych. Punkty te muszą być bezwzględnie włączone do triangulacji lokalnej i należy do nich dostosować odpowiednio kształt sieci lokalnej. Przez włączenie takich dwu punktów odpada konieczność pomiaru własnej bazy i azymutu jednego boku sieci lokalnej.

I. Oba dane punkty triangulacji państwowej tworzą równocześnie jeden bok sieci lokalnej. Obliczona ze współrzędnych długość tego boku jest bazą sieci lokalnej, zaś obliczony azymut daje jej orientację. Przykładem jest tu sieć triangulacyjna miasta Hanoweru (Niemcy) przedstawiona na rys. 209,

którą wykonał Jordan w r. 1891 (p. Jordan, Handbuch d. Vermessungskunde, tom I, str. 226, wyd. z r. 1920).

Punkty *W* i *Ae* są dane z triangulacji państwowej.

II. W przypadku drugim (w praktyce dość częstym) oba dane punkty triang. znajdują się w większej od siebie odległości, tak że nie mogą tworzyć boku sieci lokalnej, a wzajemna celowa między nimi jest z reguły niemożliwa. Gdyby nawet celowa ta była możliwa, nie korzystamy z niej zwykle, a to z powodu znacznych komplikacyj w wyrównaniu sieci przy niewielkiej korzyści. Zwykle punkty takie łączymy łańcuchem trójkątów (rys. 210), który uważany jako sieć lokalna samodzielna, daje bardzo proste wyrównanie



Rys. 209.

w przypadku, gdy w poszczególnych trójkątach każdy kąt będzie mierzony z osobna (kąty niezależne). Wówczas w każdym trójkącie rozrzucaemy odchyłkę równomiernie na kąty. W przypadku tym odpada również potrzeba pomiaru własnej bazy i azymutu, a rachunek współrzędnych punktów I, II, ... V (w układzie państwowym) przeprowadzamy w dwu etapach. W etapie pierwszym wyrównujemy sieć lokalną jako całkowicie niezależną i obliczamy współrzędne punktów sieci w dowolnym układzie (tymczasowym), przyjmując np. początek tego układu w punkcie *A*, oś *X*-ów wzdłuż boku *A-I*, a długość boku *A-I* = *b'* dowolnie. W tymże układzie (tymczasowym) otrzymujemy współrzędne punktu *B* ( $x'_B, y'_B$ ), a następnie długość *A-B* = *S'* i azymut  $\alpha'_{AB}$ . Natomiast dane w układzie państwowym współrzędne punktów *A* i *B* dostarczają długość właściwą *A-B* = *S* i azymut  $\alpha_{AB}$ . Stosunek obu długości  $S:S' = k$  daje współczynnik potrzebny do przeliczenia długości tymczasowych na właściwe, zaś różnica azymutów  $\alpha_{AB} - \alpha'_{AB} = \varphi$  kąt skręcenia obu układów. W etapie drugim przeprowadzamy transfor-





Kierunki wyrównane sieci lokalnej:

	Stan. <i>Pg.</i>		Stan. 5		Stan. 1
5.	0° 0' 0,0"	1.	0° 0' 0,0"	2.	0° 0' 0,0"
<i>Kp.</i>	67 48 15,9	<i>Kp.</i>	56 16 21,0	<i>Kp.</i>	55 26 1,2
4.	126 58 44,6	<i>Pg.</i>	93 18 51,3	5.	128 26 30,1

	Stan. 2		Stan. 3		Stan. 4
3.	0° 0' 0,0"	4.	0° 0' 0,0"	<i>Pg.</i>	0° 0' 0,0"
<i>Kp.</i>	86 23 55,2	<i>Kp.</i>	39 48 47,0	<i>Kp.</i>	55 59 32,7
1.	147 33 31,3	2.	93 27 22,4	3.	130 15 0,3

	Stan. <i>Kp.</i>
1.	0° 0' 0,0"
2.	63 24 22,6
3.	103 21 52,0
4.	169 17 37,4
<i>Pg.</i>	234 7 36,0
5.	309 16 49,9

Układ lokalny (tymczasowy) opiera się na następujących przyjęciach:

$$Pg. \begin{cases} y'_{Pg} = 0,00 \\ x'_{Pg} = 0,00 \end{cases}$$

$$Pg. - 5 = b' = 1700,0 \text{ m,}$$

$$\alpha'_{Pg-5} = 36^\circ 0'.$$

Współrzędne tymczasowe punktów sieci lokalnej:

Punkt	$y'$	$x'$
<i>Pg.</i>	0,00	0,00
<i>Kp.</i>	+ 1028,84	— 252,79
1.	+ 2108,52	+ 663,57
3.	+ 1776,74	— 1723,30
4.	+ 338,59	— 1106,04
5.	+ 999,24	+ 1375,33
2.	+ 2253,51	— 774,75

Ponieważ

$$\alpha'_{Pg-2} = 108^\circ 58' 22,1'' \text{ i } Pg. - 2 = S' = 2382,97 \text{ m,}$$

przeto

$$\varphi = 110^\circ 11' 52,0'' - 108^\circ 58' 22,1'' = + 1^\circ 13' 29,9'',$$

$$k = \frac{2402,26}{2382,97} = 1,008 \ 095,$$

zatem

$$k \sin \varphi = + 0,021 \ 551, \quad k \cos \varphi = + 1,007 \ 865;$$

$$\eta = + 336 \ 521,31 \text{ m,} \quad \xi = - 10 \ 976,17 \text{ m.}$$

( $\eta$  i  $\xi$  obliczono ze wzorów (75)).

Ostatecznie więc wzory transformacyjne są:

$$y = 336 \ 521,31 + 1,007 \ 865 y' + 0,021 \ 551 x'$$

$$x = - 10 \ 976,17 + 1,007 \ 865 x' - 0,021 \ 551 y'.$$



Obliczenie ostatecznych (katastralnych) współrzędnych punktów sieci lokalnej:

Punkt	$k \cos \varphi y'$	$k \sin \varphi x'$	$y''$	$y = y'' + \eta$
Kp.	+ 1 036,932	— 5,448	+ 1 031,48	337 552,79
1.	+ 2 125,103	+ 14,301	+ 2 139,40	338 660,71
3.	+ 1 790,714	— 37,139	+ 1 753,57	338 274,88
4.	+ 341,253	— 23,836	+ 317,42	336 838,73
5.	+ 1 007,099	+ 29,640	+ 1 036,74	337 558,05

Punkt	$k \cos \varphi x'$	$-k \sin \varphi y'$	$x''$	$x = x'' + \xi$
Kp.	— 254,778	— 22,173	— 276,95	— 11 253,12
1.	+ 668,789	— 45,441	+ 623,35	— 10 352,82
3.	— 1 736,853	— 38,291	— 1 775,14	— 12 751,31
4.	— 1 114,739	— 7,297	— 1 122,04	— 12 098,21
5.	+ 1 386,147	— 21,535	+ 1 364,61	— 9 611,56

## ROZDZIAŁ IX

# POLIGONOMETRIA

### § 1. Zadanie i rodzaje ciągów poligonowych

Punkty sieci triangulacyjnej, nawet IV-rzędnej, są zbyt od siebie odległe, aby mogły służyć za podstawę zdjęć szczegółowych. Wynika stąd konieczność założenia szeregu punktów bardziej skupionych, tzw. punktów *poligonowych*. Wszystkie szczegóły terenowe, które mają być zdjęte możemy odrzutować bądź na proste łączące punkty poligonowe, tj. na *boki* poligonu, bądź też na *pomiarowe*, tj. proste założone między bokami poligonu.

Elementami w ten sposób powstałych ciągów poligonowych są kąty wierzchołkowe  $\beta$  i boki  $b$ .

Jeżeli ciągi poligonowe mają służyć do pomiaru większych obszarów (np. do rozmierzania kraju), wówczas muszą być nawiązane do sieci triangulacyjnej państwowej lub lokalnej. Punkty: początkowy  $A$  i końcowy  $B$  poligonu, są w tym przypadku punktami triangulacyjnymi. Prócz tego na obu punktach  $A$  i  $B$  muszą być pomierzone kąty zawarte między bokiem poligonu a kierunkiem do innego, znanego punktu triangulacyjnego (kąty nawiązania).

Jeżeli nie nawiązujemy się z jakichkolwiek powodów do punktów triangulacyjnych, to zakładamy poligony zamknięte, które stanowią zarazem podstawę zdjęcia. Przypadek ten ma miejsce przy zdejmowaniu małych obszarów.

Jeżeli złączymy ze sobą więcej ciągów poligonowych, powstają *sieci* poligonowe, które mają ważne znaczenie przy rozmierzaniu kraju, zdjęciach miast oraz pomiarach przeprowadzanych dla przemiany ustroju rolnego (parcelacji i komasacji).

Kształt poligonów założonych między dwoma punktami triangulacyjnymi nie powinien odbiegać zbyt od prostej łączącej oba wspomniane punkty; zatem kąty wierzchołkowe nie powinny różnić się zbyt od  $180^\circ$ , zaś długości boków powinny być mniej więcej sobie równe. (Szczególnie nie jest wskazane, aby boki bardzo różne co do długości graniczyły ze sobą).

Poligony zamknięte powinny natomiast zbliżać się możliwie do wieloboków umiarowych.



Z teoretycznych wywodów (o czym później) wynika, że boki poligonu powinny być jak najdłuższe; w praktyce, normowanej odpowiednimi instrukcjami, przyjmujemy je od 50 do 300 m<sup>1</sup>).

## § 2. Założenie i utrwalanie punktów poligonowych

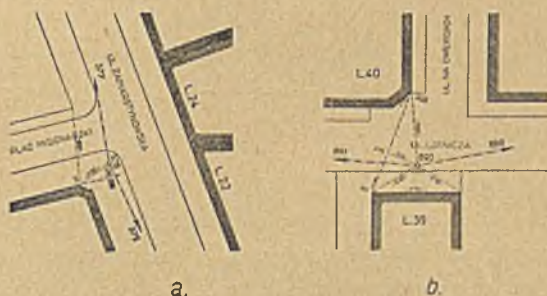
Punkty poligonowe powinny się zasadniczo tak zakładać, aby podczas pomiaru kątów wierzchołkowych  $\beta$  spody sygnałów (tyczek), ustawionych na poprzednim i następnym punkcie, były dokładnie widoczne. Z drugiej strony, zakładając poligon w polu musimy baczyć, aby punkty poligonowe pozostały jak najdłużej nienaruszone, zatem przekraczając grunta orne, należy zakładać je na miedzach. Ponieważ miedze nie stanowią najwyższych punktów pól ornych, przeto postulat poprzedni jest w tych przypadkach nie do osiągnięcia. Aby uniknąć powstającego z tego powodu błędu, musi pomocnik ustawiać na punktach, do których się celuje, tyczkę pionowo przy pomocy swobodnie wiszącego pionu.

Punkty poligonowe należy odpowiednio utrwalać. Przy pomiarach mniej ważnych zaznaczamy je palami (około 10 cm średnicy). Ważniejsze pomiary wymagają oznaczania punktów nie tylko naziemnego, lecz i podziemnego. Najprostsze oznaczenie podziemne uzyskuje się przy pomocy rurek drenarskich, o średnicy około 10 cm, ponad którymi zakłada się osiowo rurki nieco cieńsze. Lepsze zaznaczenie polega na ułożeniu w pewnym nieznanym odstępie nad sobą dwu kamieni (lub bloków betonowych) z wyrzytymi krzyżami, których środki znajdują się w jednym pionie.

W miasteczkach i miejscach o silnym ruchu używa się też

rur żelaznych umieszczonych w blokach betonowych, ułożonych poniżej bruku. Punkty poligonowe w miastach są zawsze podwójne; pod ziemią, poniżej bruku, umieszcza się blok betonowy z rurą lub krzyżem, a ponad nim rodzaj rury żelaznej zakończonej odpowiednią przykrywą, którą, w razie potrzeby, otwieramy osobnym kluczem dla dokładnego ustawienia nad punktem instrumentu lub sygnału (patrz rozdział IV, rys. 48 i 49).

Bardzo często zabezpieczamy poligon zaznaczając na terenie punkty, będące przedłużeniem boków poligonu. Ma to miejsce szczególnie w miastach, gdzie przedłużenia trafiają zazwyczaj na mury kamienic; w tym przypadku zaznaczamy owe punkty bolcami.



Rys. 212.

<sup>1</sup>) Jak się okaże w późniejszych wywodach, można by ze względów teoretycznych zakładać poligon o bokach znacznie dłuższych, co jednak powodowałoby przy rzutowaniu szczegółów pewne niedogodności; dlatego rzadko spotykamy poligony o bokach znacznie dłuższych niż 300 m.



Bardzo ważną rzeczą jest sporządzenie *opisu topograficznego* punktów, poligonowych, przy czym należy podać tego rodzaju odległości i kierunki, aby punkt można było szybko odnaleźć. Najlepiej ustalić na terenie położenie kilku prostych i odrzutować na nie punkt, jak to uwidoczniło na rys. 212.

Poza tym dobrze jest sporządzić szkic ciągu w skali 1:10000 lub 1:5000.

Jeżeli jeden ciąg poligonowy nie wystarcza do zdjęcia danego obszaru, zakładamy kilka ciągów, których zespół nazywamy *siecią poligonową*. Sporządzenie starannego opisu topograficznego punktów, jak też i szkicu sieci jest w tym przypadku szczególnie ważne.

### § 3. Pomiar i wyrównanie ciągu poligonowego

W poligonach, nawiązanych obustronnie do punktów triangulacyjnych, mierzymy długości wszystkich boków  $b$  oraz wszystkie kąty wierzchołkowe  $\beta$ , znajdujące się po *lewiej* stronie ciągu, a zatem także na punktach początkowym (1) i końcowym ( $n$ ) (które są zarazem punktami triangulacyjnymi  $A$  i  $B$ ). Kąty mierzone na tych punktach  $\beta_1$  i  $\beta_n$  są to kąty nawiązujące poligon do sąsiednich punktów triangulacyjnych  $C$  i  $D$ , jak to widać na rys. 213.



Rys. 213.

Natomiast w poligonach zamkniętych mierzymy prócz wszystkich boków  $b$ , wszystkie kąty wewnętrzne  $\beta_w$  lub zewnętrzne  $\beta_z$ .

Chcąc przeprowadzić zupełnie ściśle wyrównanie poligonu, należałoby, wobec ilości elementów mierzonych w poligonach, uwzględnić równocześnie trzy warunki: jeden warunek kątowy i dwa warunki rzutów boków.

Warunki te przedstawiają się dla poligonów zamkniętych o  $p$  punktach:

$$\left. \begin{array}{l} 1) [\beta_w] - (p - 2) 180^\circ = 0, \text{ względnie } [\beta_z] - (p + 2) 180^\circ = 0, \\ 2) [b \sin \alpha] = 0, \\ 3) [b \cos \alpha] = 0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

przy czym  $\alpha$  oznaczają kąty kierunkowe (azymuty) poszczególnych boków poligonu w przyjętym układzie współrzędnych.

Analogicznie przedstawia się sprawa w poligonach, łączących dwa punkty triangulacyjne  $A$  i  $B$ , jeżeli wykonano pomiary wszystkich kątów i boków.

Warunki poprzednie zmieniają się wówczas na następujące:

$$\left. \begin{array}{l} 1) [\beta] - n 180^\circ - (\alpha_B - \alpha_A) = 0, \\ 2) [b \sin \alpha] - (y_B - y_A) = 0, \\ 3) [b \cos \alpha] - (x_B - x_A) = 0, \end{array} \right\} \quad (2)$$



przy czym  $\alpha_B$  i  $\alpha_A$  oznaczają azymuty kierunków nawiązujących w punktach  $A$  i  $B$ , zaś  $y_A$  i  $x_A$  oraz  $y_B$  i  $x_B$  ich współrzędne.

Równoczesne uwzględnienie powyższych trzech warunków ma miejsce tylko przy ścisłym wyrównaniu ciągów poligonowych. Wyrównanie tego rodzaju przeprowadzamy tylko w bardzo rzadkich przypadkach, np. gdy poligon obejmuje obszar gruntu o wyjątkowo wysokiej cenie (najdroższe parcele stolecznych miast itp.).

Natomiast z reguły poprzestajemy na wyrównaniu przybliżonym, dzieląc je na dwie części: a) wyrównanie kątów i b) wyrównanie współrzędnych.

Kąty poligonu mierzymy co najmniej raz w obu położeniach lunety, przy czym należy zauważyć, że o ile dla pomiaru kątów poligonów pozamiejskich wystarczają z reguły teodolity jednogminutowe, to przy pomiarach kątów poligonów miejskich należy używać teodolitów 10- lub 6-sekundowych.

Dla uniknięcia błędów grubych mierzy się każdy bok poligonu co najmniej dwa razy (tam i z powrotem, w silniejszych spadach z góry na dół), zazwyczaj taśmą stalową; do pomiaru boków poligonów miejskich używa się drewnianych łat pięciometrowych lub precyzyjnych odległownic. Tak kąty, jak i długości boków, zapisujemy w osobnych dziennikach.

Różnice  $\Delta b$  otrzymane przy dwukrotnym pomiarze boków poligonowych nie powinny przekraczać następujących granic (przy czym  $b$  należy wstawić w metrach, aby  $\Delta b$  otrzymać również w metrach):

I) wedle »Przepisów pomiarowych M. R. P. z roku 1928«, obowiązujących przy wykonywaniu nowych pomiarów,

$$\Delta b \leq 0,0002 \sqrt{b^2 + 1000 b}$$

(dla niekorzystnych warunków terenowych granica błędu zwiększa się o 20%);

II) wedle przepisów, obowiązujących przy pomiarach katastralnych w Małopolsce i do nich nawiązanych (Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen, z r. 1904):

$$\Delta b \leq 0,00015 b + 0,005 \sqrt{b} + 0,015$$

(powyższa wartość zmniejsza się o 25% w terenach korzystnych, zaś zwiększa o 25% w terenach niekorzystnych);

III) wedle obowiązującej instrukcji w byłym zaborze pruskim (Anweisung IX, 1881):

$$\text{dla terenu łatwego} \quad \Delta b \leq 0,01 \sqrt{4 b + 0,0050 b^2},$$

$$\text{dla terenu średniego} \quad \Delta b \leq 0,01 \sqrt{6 b + 0,0075 b^2},$$

$$\text{dla terenu trudnego} \quad \Delta b \leq 0,01 \sqrt{8 b + 0,0100 b^2};$$

IV) wedle instrukcji z r. 1926, obowiązującej przy przebudowie ustroju rolnego na obszarze byłego zaboru rosyjskiego, dla kategorii średniej

$$\Delta b \leq 0,0005 b + 0,015 \sqrt{b} + 0,05,$$

przy czym dla kategorii łatwej przyjmujemy  $0,8 \Delta b$ , dla trudnej zaś  $1,4 \Delta b$ ;



V) wedle instrukcji z r. 1931, obowiązującej przy przebudowie ustroju rolnego na obszarze b. zaboru austriackiego,  $\Delta b$  wynosi jak w instrukcji II.

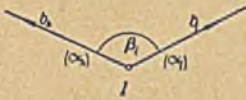
W dalszym ciągu będziemy poszczególne przepisy oznaczali odpowiednimi liczbami rzymskimi.

a) *Wyrównanie kątów.*

Nim przystąpimy do wyrównania kątów w poligonie musimy zbadać, czy wyniki nasze w ogóle nadają się do wyrównania.

Jeżeli zatem przedmiotem wyrównania mają być kąty poligonu, założonego między dwoma punktami triangulacyjnymi, obliczamy, wychodząc z kąta kierunkowego boku początkowego  $b_0$ , po kolei kąty kierunkowe (azymuty) wszystkich boków aż do  $b_n$  włącznie.

Weźmy pod uwagę dwa boki  $b_h$  i  $b_i$  o kątach kierunkowych  $\alpha_h$  i  $\alpha_i$ . Nazwijmy  $b_h$  i  $\alpha_h$  bokiem i kątem kierunkowym poprzednim, zaś  $b_i$  i  $\alpha_i$  bokiem i kątem kierunkowym następnym. Ponieważ, jak to wi-  
dać na rysunku 213a,



Rys. 213a.

przeto

$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_h \pm 180^\circ,$$

$$\alpha_i = \alpha_h + \beta_i \pm 180^\circ; \quad (3)$$

czyli kąt kierunkowy następny równa się kątowi kierunkowemu poprzedniemu powiększonemu o kąt wierzchołkowy (lewy, między nimi zawarty)  $\pm 180^\circ$ .

Uwzględniając powyższe twierdzenie widzimy, że w poligonie, nawiązanym na początku i końcu do dwu punktów triangulacyjnych, możemy obliczyć kąt kierunkowy końcowy  $\alpha_n$  nie tylko ze współrzędnych punktów  $B$  i  $D$  (rozdział VIII, § 4), ale także z wielkości kąta kierunkowego początkowego i kątów wierzchołkowych  $\beta$ . Oznaczając w ten sposób obliczony końcowy kąt kierunkowy przez  $\alpha'_n$ , otrzymujemy:

$$\alpha'_n = \alpha_0 + [\beta] \pm n 180^\circ, \quad (4)$$

(przy czym, ze względu na to, że  $2 \cdot 180^\circ = 0^\circ$ , może wynik wypaść za mały lub za duży o  $360^\circ$ ).

Natomiast suma kątów w poligonach zamkniętych odpowiada warunkowi (1). Sprawdzenie, czy w ogóle mamy przystąpić do wyrównania kątów, polega na przekonaniu się, czy różnica  $f_\beta$ , którą obliczamy dla poligonów nawiązanych wzorem:

$$f_\beta = \alpha'_n - \alpha_n, \quad (5)$$

zaś dla poligonów zamkniętych wzorem:

$$f_\beta = [\beta_w] - (p - 2) 180^\circ = [\beta_z] - (p + 2) 180^\circ, \quad (6)$$

nie przekracza granicy, dozwolonej przepisami pomiarowymi, podanej w tabeli (7) (str. 245).

O ile odchyłka  $f_\beta$  nie została przekroczona, przystępujemy do wyrównania kątów.

Rozróżniamy tu dwa przypadki: 1) długości mierzonych boków ciągu poligonowego są w przybliżeniu równe, tak że stosunek boków najkrótszego do



Wedle instrukcji:	$f_{\beta}$ :	U w a g i:
I	$40'' \sqrt{n}$	dla warunków korzystnych — 20% „ „ niekorzystnych + 20%
II	$75'' \sqrt{n}$	„ „ „ + 50%
III	$1,5' \sqrt{n}$	—
IV	$1,5' \sqrt{n}$	—
V	$75'' \sqrt{n}$	—

(7)

najdłuższego jest większy lub równy  $\frac{1}{4}$ ; 2) stosunek boku najkrótszego do najdłuższego wynosi mniej niż  $\frac{1}{4}$ .

1) W tym przypadku rozdzielamy odchyłkę  $f_{\beta}$  równo na poszczególne kąty, odejmując od każdego  $\beta$  wartość  $\frac{f_{\beta}}{n}$ , po czym obliczamy wyrównane kąty kierunkowe.

2) Gdy stosunek  $b_{\min} : b_{\max}$  jest mniejszy od  $\frac{1}{4}$ , rozdzielamy odchyłkę  $f_{\beta}$  proporcjonalnie do sumy odwrotności długości ramion poszczególnych kątów. W tym celu obliczamy w zaokrągleniu (do dziesiątych)

$$\frac{1000}{b_0}, \frac{1000}{b_1}, \dots, \frac{1000}{b_n},$$

(przy czym  $b$  oznacza ilość metrów) i tworzymy współczynniki:

$$k_{0.1} = \frac{1000}{b_0} + \frac{1000}{b_1}, k_{1.2} = \frac{1000}{b_1} + \frac{1000}{b_2}, \dots, k_{n-1,n} = \frac{1000}{b_{n-1}} + \frac{1000}{b_n},$$

rozdzielając odchyłkę proporcjonalnie do nich:

$$\Delta \beta_1 = -\frac{k_{0.1}}{[k]} f_{\beta}, \Delta \beta_2 = -\frac{k_{1.2}}{[k]} f_{\beta}, \dots, \Delta \beta_n = -\frac{k_{n-1,n}}{[k]} f_{\beta}; \quad (8)$$

następnie obliczamy wyrównane kąty kierunkowe.

b) *Wyrównanie współrzędnych.*

Uzyskawszy w ten sposób wyrównane kąty kierunkowe  $\alpha$ , obliczamy, wychodząc z pierwszego punktu triangulacyjnego  $A$ , współrzędne punktów poligonowych<sup>1)</sup> aż do drugiego punktu triangulacyjnego  $B$  włącznie, na podstawie wzorów:

$$x_i = x_h + b_h \cos \alpha_h, \quad y_i = y_h + b_h \sin \alpha_h. \quad (9)$$

Wobec czego będziemy mieli do dyspozycji podwójne współrzędne drugiego

<sup>1)</sup> W rachunkach tych posługujemy się logarytmami (3-cyfrowymi), odpowiednimi tabelami (np. tablice przyrostów współrzędnych Gaussa), lub dziś najczęściej maszyną (przy użyciu 5-cyfrowych tablic naturalnych wartości funkcji trygon.). Rachunek powinien być przeprowadzony dwukrotnie, różnymi sposobami.

punktu triangulacyjnego  $B$ : jedne  $x_B, y_B$  dane z triangulacji, drugie  $x_B', y_B'$  obliczone wzorami:

$$\begin{aligned}x_B' &= x_A + [b \cos \alpha] = x_A + [dx], \\y_B' &= y_A + [b \sin \alpha] = y_A + [dy].\end{aligned}\quad (10)$$

Dalsze postępowanie zależy od instrukcji pomiarowej, wedle której wykonujemy pomiar.

Omówmy tok wyrównania naprzód wedle trzech pierwszych instrukcyj.

Wedle instrukcji I i II należy obliczyć  $\alpha_{AB}$  i  $\alpha'_{AB}$  z wzorów:

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha'_{AB} = \frac{y_B' - y_A}{x_B' - x_A}, \quad (11)$$

oraz długości  $L = AB$  i  $L' = AB'$  z wzorów:

$$L = \frac{y_B - y_A}{\sin \alpha_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{\cos \alpha_{AB}}, \quad L' = \frac{y_B' - y_A}{\sin \alpha'_{AB}} = \frac{x_B' - x_A}{\cos \alpha'_{AB}}. \quad (11a)$$

Do rachunku maszynowego nadają się lepiej wzory:

$$\alpha_{AB} - \alpha'_{AB} = \frac{f_x \Delta y - f_y \Delta x}{L^2} \rho'' \quad (\text{w sekundach}), \quad (12)$$

$$L - L' = - \frac{f_y \Delta y + f_x \Delta x}{L}, \quad (12a)$$

przy czym  $\Delta y = y_B - y_A$ ,  $\Delta x = x_B - x_A$  i  $L^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$ .

Wzory te dają bezpośrednio różnice kątów kierunkowych i długości.

W myśl instrukcji I powinno być

$$\alpha_{AB} - \alpha'_{AB} \leq \frac{1,4([b] + 100)}{L} \quad (\text{w minutach kątowych}), \quad (13)$$

$$L - L' \leq 0,008 \sqrt{[b]} + 0,04 \quad (\text{w metrach}); \quad (14)$$

wedle instrukcji II ma być różnica  $\alpha_{AB} - \alpha'_{AB}$  jak (13), natomiast

$$L - L' \leq 0,012 \sqrt{[b]} + 0,06 \quad (\text{w metrach}). \quad (15)$$

Jeżeli poligon jest zamknięty lub zbacza bardzo znacznie z kierunku  $A-B$ , stosuje się podany niżej wzór (23).

Instrukcja III wymaga spełnienia innego warunku; według niej oblicza się:

$$f_x = x_B' - x_B \quad (16)$$

i 
$$f_y = y_B' - y_B,$$

oraz 
$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \quad (17)$$

przy czym w terenie

$$\text{łatwym} \quad f \leq \sqrt{4 [b] + 0,0050 [b]^2}, \quad (18)$$

$$\text{średnim} \quad f \leq \sqrt{6 [b] + 0,0075 [b]^2},$$

$$\text{trudnym} \quad f \leq \sqrt{8 [b] + 0,0100 [b]^2}.$$

Dalszy tok wyrównania jest następujący.

Instrukcja I. Po obliczeniu  $f_x$  i  $f_y$  wedle wzoru (16) poprawia się rzuty boków na obie osie o wielkości:



$$-\frac{f_x}{[b]} b_i, \quad -\frac{f_y}{[b]} b_i \quad (i \text{ od } 1 \text{ do } n-1). \quad (19)$$

Suma poprawionych rzutów dodana do współrzędnych punktu  $A$  powinna dać bezbłędne wartości współrzędnych punktu  $B$ .

Instrukcja II rozróżnia następujące przypadki:

- a) o ile  $\alpha_{AB} - \alpha'_{AB} < 1'$ , następuje wyrównanie jak pod 1;
- b) o ile różnica  $\alpha_{AB} - \alpha'_{AB}$  jest zawarta w granicach od  $60''$  do  $90''$ , należy obliczyć współczynniki  $z$  wedle wzoru:

$$z_i = i(n - i), \quad (20)$$

przy czym  $i$  oznacza liczbę boku, zaś  $n$  liczbę wierzchołków. Poprawki dla poszczególnych rzutów boków wynoszą:

$$-\frac{f_x}{[zb]} z_i b_i, \quad -\frac{f_y}{[zb]} z_i b_i. \quad (21)$$

Natomiast gdy  $n > 7$ , wszystkie  $z$  są sobie równe, z wyjątkiem dwu początkowych i dwu końcowych. Np. dla  $n = 5$  otrzymujemy wedle (20):

$$z_1 = z_4 = 1(5 - 1) = 4, \quad z_2 = z_3 = 2(5 - 2) = 6.$$

- c) Gdy różnica  $\alpha_{AB} - \alpha'_{BA}$  przekracza  $90''$ , przeprowadza się wyrównanie wykreślnie wedle sposobu, podanego w instrukcji (w praktyce sposób ten nie jest używany).

Wedle instrukcji III rozdziela się błędy  $f_x$  i  $f_y$  proporcjonalnie do długości boków ciągu w przypadku, gdy:

$$\frac{f_y [dx] - f_x [dy]}{[dy]^2 + [dx]^2} < 0,0003, \quad (22)$$

w przeciwnym razie rozdział następuje (przy najmniej trzech bokach) przy pomocy obliczonych współczynników  $z$ .

Wyrównanie ciągów poligonowych wedle instrukcji IV jest podane w § 3 (punkty węzłowe).

Wyrównanie ciągów poligonowych wedle instrukcji V przeprowadza się zależnie od tego, czy poligony są oparte na punktach triangulacyjnych, czy też założono tylko sieć poligonową. W pierwszym przypadku obowiązuje instrukcja II, w drugim sposób używany w instrukcji IV, jednak z uwzględnieniem granic błędów instrukcji II.

Wyrównanie współrzędnych poligonu zamkniętego przeprowadza się zasadniczo sposobem podanym w instrukcji III, z tą różnicą, że odchyłka  $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$  nie powinna przekraczać:

$$\text{wedle instrukcji I wartości: } 0,008 \sqrt{[b]} + 0,04, \quad (23)$$

$$\text{wedle instrukcji II wartości: } 0,012 \sqrt{[b]} + 0,06.$$

W ten sam sposób przeprowadza się wyrównanie poligonu, odbiegającego znacznie od linii, łączącej punkt początkowy  $A$  i końcowy  $B$  poligonu (instrukcja I i II).







Przykład 2. Rachunek maszyną<sup>1)</sup>.

## Obliczenie ciągów

Nr. ciągu	Oznaczenie wierzchołków poligona	Kąty wierzchołkowe			Kąty kierunkowe			Długość boków	log sin $\alpha$ log $b$ log cos $\alpha$	log $dy =$ log $b \sin \alpha$ log $dx =$ log $b \cos \alpha$	Przyrosty						
		$\beta$			$\alpha =$ $\alpha_{\text{poprz}} + \beta$ $+ 180^\circ$						$b$	rzednych		odciętych			
												$dy$		$dx$			
		0		"		0					"		poprawki				
								maszyną: $dy = b \sin \alpha$ $dx = b \cos \alpha$									
												$v_y$		$v_x$			
												+		-			
1	2	3			4			5	6	7	8		9				
	$\Delta W_a$																
	$\Delta O_k$	62	16	+3 17	212	13	29										
				+3	94	29	49	127,45	-0,078 41			127,06				+ 2 9,99	
1	178 39			+3 57					0,998 47							+ 2 8,23	
10	178 38			+3 48	93	09	49	149,13	-0,055 19			148,90				+ 2 4,48	
9	179 28			+3 57	91	48	40	141,68	-0,031 60			141,61				+ 2 5,23	
8	180 38			+3 28	91	15	40	237,51	-0,022 01			+1 237,45				+ 2 5,15	
2	164 51			+3 56	91	54	11	155,12	-0,033 21			155,03				+ 2 14,94	
	$\Delta L$	14	24	+3 39	76	46	10	65,28	0,228 87			63,55				+ 2 14,94	
								$[b] = 876,17$				$[dy] =$	+ 873,60			$[dx] =$	-18,14
	$\Delta O_k$				271	10	52					$\Delta y =$	+ 873,61			$\Delta x =$	-18,01
												$f_y =$	-0,01			$f_x =$	-0,13
	$[\beta] =$	958	57	02													
	$\alpha_p =$	212	13	29													
	$\alpha_p + [\beta] =$	1171	10	31													
	$+ 5 \cdot 180^\circ +$																
	$+ \alpha_k =$	1171	10	52													
	$f_\beta =$			21				(1'46")									

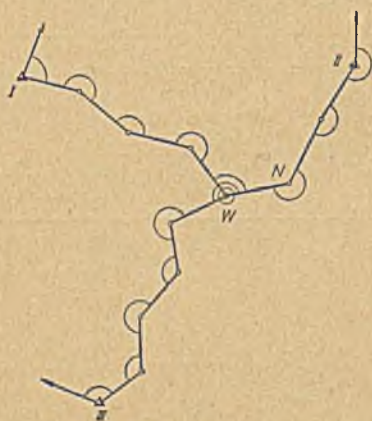
<sup>1)</sup> Formularz jak w przykładzie 1.





## § 3. Punkty węzłowe

Sieć triangulacyjna, obejmująca zdejmowany obszar, składa się zazwyczaj z stosunkowo niewielkiej ilości punktów, tak że nawiązane do nich ciągi poligonowe wypadłyby często zbyt długie. Ponieważ, jak to udowodnimy później, prawo przenoszenia się błędów w poligonach jest dość niekorzystne, przeto staramy się unikać zakładania długich ciągów, skracając je przy pomocy punktów *węzłowych*, znajdujących się na skrzyżowaniu kilku ciągów. Poza tym uzyskujemy przez to możliwość zgodnego przedstawienia szczegółów, zdjętych w okolicy punktu węzłowego na boki poszczególnych ciągów z nim złączonych.



Rys. 214.

W praktyce ustaliły się dwa typy punktów węzłowych. Pierwszy typ (a) stanowią właściwe punkty węzłowe, powstałe w sposób poprzednio podany, a więc możliwe tylko w razie istnienia sieci triangulacyjnej. Typ drugi (b) wyłonił się przy zdjęciach, dokonywanych bez sieci triangulacyjnej, a opartych tylko na sieci poligonowej.

a) Na rys. 214 uwidoczniło trzy ciągi schodzące się w punkcie węzłowym *W*. Po pomiarzeniu kątów i boków, przystępujemy do wyrównania węzła w sposób następujący.

α) Wyrównanie kątów.

Obieramy jeden z kierunków, wychodzących z punktu *W*, np. kierunek *W-N*, i obliczamy kąt kierunkowy  $\alpha$  boku *W-N* w nawiązaniu do wszystkich kątów kierunkowych w punktach I, II, III. W ten sposób uzyskujemy trzy wartości  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$ , z których tworzymy średnią arytmetyczną (ogólną) z uwzględnieniem wag, utworzonych wedle wzoru:

$$p_i = \frac{10}{n_i} \quad (24)$$

(przy czym  $n_i$  oznacza ilość kątów mierzonych w każdym ciągu). W naszym przypadku (rys. 214) będzie:

$$p_1 = \frac{10}{5} = 2,0, \quad p_2 = \frac{10}{3} = 3,3, \quad p_3 = \frac{10}{6} = 1,7.$$

Wyrównany kąt kierunkowy boku *W-N* będzie zatem:

$$\alpha_w = \frac{[p \alpha]}{[p]} \quad (25)$$

Po obliczeniu  $\alpha$  należy sprawdzić, czy poszczególne różnice  $\alpha_i - \alpha_w$  nie przekraczają granicy błędów ( $f_2$ ), a następnie wyrównać kąty każdego poligonu, jak to podano poprzednio.



β) Wyrównanie współrzędnych.

Po obliczeniu (wyrównanych) kątów kierunkowych, wyznaczamy współrzędne punktu  $W$  przy pomocy tychże kątów i pomierzonych boków z poszczególnych ciągów. Otrzymujemy zatem znów kilka (w naszym przypadku trzy) wartości

$$x_1 \text{ i } y_1, x_2 \text{ i } y_2, x_3 \text{ i } y_3, \dots,$$

odpowiadające punktom  $W'$ ,  $W''$ ,  $W'''$  itd.

Z wartości poszczególnych odciętych, jak i rzędnych, tworzymy średnie arytmetyczne ogólne, przy czym wagi należy obrać następujące:

$$p_x = \frac{5000}{[b](1 + \cos^2 K)}, \quad p_y = \frac{5000}{[b](1 + \sin^2 K)}. \quad (26)$$

W ten sposób otrzymujemy, zależnie od długości ciągów  $[b]$  i kątów  $K$ , różne wagi<sup>1)</sup>, przy czym  $K$  są to kąty kierunkowe prostych  $I-W'$ ,  $II-W''$ ,  $III-W'''$  itd.

Po uzyskaniu wyrównanych współrzędnych punktu węzłowego, wyrównujemy poszczególne ciągi według obowiązujących instrukcyj.

b) Wyrównanie współrzędnych punktów węzłowych w przypadku oparcia zdjęcia o sieć poligonową.

Wyrównanie to ma miejsce głównie przy pomiarach dla przebudowy ustroju rolnego (instrukcja IV).

Miejsce poprzednio omawianego punktu węzłowego obejmuje obecnie punkt główny  $G$  (rys. 215), zaś punkty na obwodnicy, w których schodzą się co najmniej trzy poligony, stają się punktami węzłowymi. Zaczynamy od wyznaczenia lub obrania kąta kierunkowego pewnego boku, wychodzącego z punktu głównego, np.  $G-N$ . Następnie obieramy jeden z boków wychodzących z punktu węzłowego  $W_1$ , np.  $W_1M_1$ , obliczamy jego kąt kierunkowy przy pomocy trzech poligonów:  $G-W_1-M_1$ ,  $G-W_2-M_1$  i  $G-W_3-M_1$ , otrzymując (w tym przypadku) trzy wartości

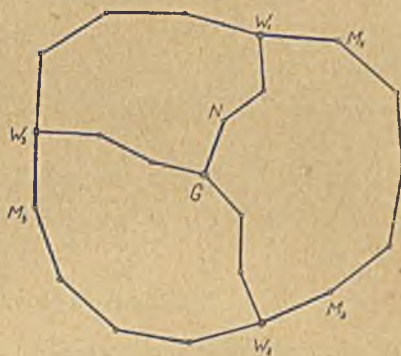
$$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3',$$

po czym uzyskujemy wyrównany kąt kierunkowy boku  $W_1-M_1$  z średniej arytmetycznej ogólnej:

$$\alpha_{w_1} = \frac{[p\alpha']}{[p]};$$

wagi obieramy, jak poprzednio,  $p = \frac{10}{n}$ .

<sup>1)</sup> Wartości  $\frac{5000}{1 + \cos^2 K}$  i  $\frac{5000}{1 + \sin^2 K}$  znajdujemy w odpowiednich instrukcjach dla argumentu  $K$  w odstępach  $1^\circ$ , co dla praktyki wystarcza.



Rys. 215.



Mając kąt kierunkowy boku  $W_1 - M_1$ , sprawdzamy czy  $f_\beta$  (dla poligonu  $G - W_1$ ) nie przekracza wartości  $1,5' \sqrt{n}$ , po czym przystępujemy do ustalenia kąta kierunkowego boku  $W_2 - M_2$ , do którego zdążamy również trzema drogami, mianowicie  $G - W_2 - M_3$ ,  $G - W_1 - M_2 - W_2$  i  $G - W_3 - W_2 - M_2$  i wyrównujemy jak poprzednio.

Wreszcie w podobny sposób ustalamy kąt kierunkowy  $W_3 - M_3$  z trzech odpowiednich ciągów, wychodzących z punktu  $G$ .

Mając już kąty kierunkowe trzech wybranych boków, wyrównujemy kąty poszczególnych sześciu poligonów (na które rozpadła się sieć), rozdzielając odchyłki równo na poszczególne kąty, po sprawdzeniu, czy odchyłki te nie przekraczają dozwolonych granic.

Następnie przystępujemy do wyrównania współrzędnych punktów węzłowych. Postępujemy jak poprzednio, uzyskując trzema drogami z punktu  $G$  współrzędne punktu  $W_1$ , przy uwzględnieniu wag  $p = \frac{1}{[b]}$ , czyli odwrotnie proporcjonalnych do długości poszczególnych ciągów (dróg). Zatem będzie

$$x_{w_1} = \frac{[p x_1]}{[p]}, \quad y_{w_1} = \frac{[p y_1]}{[p]}.$$

Analogicznie wyznaczamy wyrównane współrzędne pozostałych dwu punktów węzłowych  $W_2$  i  $W_3$ , wychodząc zawsze z punktu  $G$  trzema niezależnymi od siebie drogami.

Następnie wyrównujemy współrzędne punktów poszczególnych poligonów, rozkładając odchyłki proporcjonalnie do długości boków.

#### § 4. Sposoby nawiązania ciągów poligonowych

Prócz nawiązania ciągu poligonowego, podanego w § 2, które możemy nazywać normalnym, należy omówić inne sposoby nawiązania, spotykane najczęściej w praktyce.

a) Jeżeli punkty triangulacyjne znajdują się daleko poza obszarem zdjęcia, nie oplaca się z reguły przedłużać ciągu poligonowego; wówczas wyznaczamy wcinaniem wstecz (lub czasem wprzód) nowe punkty triangulacyjne jako punkty wyjściowe dla naszego poligonu.

b) Jak już wspomniano, należy unikać ciągów poligonowych o większej ilości boków, dlatego staramy się długie poligony nawiązać w ich środkowej partii. Nawiązanie to może być albo zupełne, lub tylko częściowe.

α) Zupełne nawiązanie uzyskujemy celując z dwu sąsiednich punktów poligonu do dwu punktów triangulacyjnych.

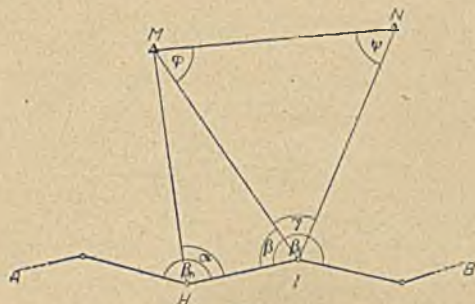
Na rysunku 216 a uwidocznił ten przypadek nawiązania; na punktach poligonowych  $H$  i  $I$  zmierzono dokładnie kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , oraz bardzo dokładnie bok  $H - I$ . Punkty  $M$  i  $N$  są punktami triangulacyjnymi, zatem długość boku  $MN$  i jego kąt kierunkowy można obliczyć. Rozwiązując trójkąt  $HMI$  otrzymujemy bok  $MI$ , a tym samym jesteśmy w stanie, wobec znajomości



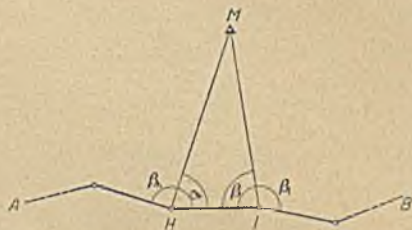
dwu boków i kąta  $\gamma$  w trójkącie  $MNI$ , rozwiązać także i ten trójkąt, otrzymując kąty  $\varphi$  i  $\psi$ .

Możemy zatem podzielić poligon  $AB$  na dwa:  $AHM$  i  $HB$  (albo  $MIB$ ), wyrównując każdą część z osobna.

$\beta$ ) Częściowe nawiązanie, bo bez kontroli azymutalnej, otrzymujemy, jeżeli nawiążemy się z dwu sąsiednich punktów poligonu tylko do jednego punktu



Rys. 216a.



Rys. 216b.

triangulacyjnego  $M$  (rys. 216b). W tym przypadku uzyskujemy przez rozwiązanie trójkąta  $HMI$  tylko długości boków  $HM$  i  $IM$ . Wobec tego kąty należy wyrównać w całości poligonu, natomiast wyrównanie współrzędnych można przeprowadzić osobno w poligonie  $A-M$ , a następnie w poligonie  $H-B$ .

### § 5. Sieci poligonowe

Sieci poligonowe rozróżniamy dwojakiego rodzaju, zależnie od tego, czy podstawą zdjęcia jest sieć triangulacyjna, czy sieć poligonowa.

W pierwszym przypadku zakładamy ciągi między punktami triangulacyjnymi. Ciągi te mogą posiadać również i punkty węzłowe. Wyrównanie sieci poligonowej możnaby przeprowadzić, uwzględniając równocześnie wszystkie warunki sieci. W praktyce nie używamy jednak tego sposobu wyrównania (wyrównanie ściśle), gdyż nastęrcza on wiele pracy obliczeniowej i nie wpływa zbyt na powiększenie dokładności wyników. Dla powiększenia dokładności korzystniej jest w takich przypadkach bardziej zagęścić sieć triangulacyjną.

W celu ułatwienia obliczenia dzielimy poligony sieci na pierwszorzędne, drugorzędne itd., przy czym uważamy, że poligon I rzędu przebiega stosunkowo krótką drogą między punktami triangulacyjnymi, poligony II-rzędne są oparte o punkty poligonów I-rzędnych itd.

Rys. 217a przedstawia sieć poligonową, zawierającą punkty triangulacyjne, poligony I, II i III rzędu, które w tej kolejności należy wyrównać.

Sieć poligonowa, nie oparta na triangulacji, składa się z ciągów głównych (I rzędu), łączących punkty węzłowe (p. § 3, b) oraz z poligonów dalszych rzędów, jak to uwidoczniło na rys. 217b.

W praktyce zachodzi często potrzeba dokonywania na tym samym obszarze zdjęcia poligonowego i tachimetrycznego (zdjęcia poligonowo-tachime-



tryczne, p. rozdział X). W tym przypadku uważamy nietylko punkty ewentualnej sieci triangulacyjnej, ale także i poligonowej za ważniejsze od punktów, przeznaczonych wyłącznie na stanowiska tachymetryczne. W konsekwencji należy przy zakładaniu ciągów poligonowych zachować zasady, podane już poprzednio, a następnie dopiero obrać stosowne punkty jako stanowiska tachymetryczne.



Rys. 217a.



Rys. 217b.

### § 6. Wykrywanie grubych błędów w poligonach

Błędy grube, popełnione podczas pomiarów poligonowych, mogą być dwójakiego rodzaju: kątowe i długościowe. Jeżeli w poligonie ma miejsce błąd tylko jednego rodzaju, możemy go łatwo wykryć rachunkowo lub wykreślić.

Zalóżmy, że w punkcie  $M$  (rys. 218) pewnego poligonu popełniono gruby błąd kątowy  $\Delta\varphi$ , skutkiem czego poligon zboczył, tak że zamiast otrzymać ostatecznie punkt  $R$ , otrzymaliśmy odległy od niego punkt  $R'$ . Aby znaleźć punkt, w którym popełniono błąd (tj. punkt  $M$ ), obliczamy współrzędne punktu  $S$  jako średnie współrzędnych  $R$  i  $R'$  oraz kąt kierunkowy  $\alpha$  powstałego boku  $RR'$ . Następnie tworzymy równanie prostej, przechodzącej przez  $S$  i prostopadłej do kierunku  $RR'$ :

$$y - y_s = \text{ctg } \alpha (x - x_s),$$

lub

$$y - x \text{ ctg } \alpha = y_s - x_s \text{ ctg } \alpha = C. \quad (27)$$

Punkt poligonu, którego współrzędne spełniają w przybliżeniu powyższy warunek jest tym punktem, na którym popełniono błąd kątowy.



Rys. 218.



Rys. 219.

Ze względów praktycznych lepiej jest zastąpić powyższy rachunek sposobem graficznym.

Błąd gruby długościowy można jeszcze łatwiej wykryć; należy tylko obliczyć kąt kierunkowy powstałego boku  $5.5'$  (rys. 219). O ile znajdzie się bok poligonu,



którego kąt kierunkowy zgadza się w przybliżeniu z obliczonym kątem kierunkowym  $5-5'$ , można przypuścić, że jest to właśnie bok obarczony błędem grubym (na rysunku jest to bok  $1-2'$ ).

W obu przypadkach usuwamy błędy grube, po czym poligon powinien się zamknąć w granicach dozwolonych.

### § 7. Linie pomiarowe. Punkty posilkowe (łączone). Zdjęcie szczegółów. Szkic połowy

Jak poprzednio zaznaczono, staramy się poligon prowadzić zachowując jego zasadniczy kierunek między punktami triangulacyjnymi, przeto łatwo może się zdarzyć, że punkty, które zamierzamy odrzutować na bok poligonu, znajdą się od niego w dość znacznej odległości. Dlatego zakładamy specjalne linie, które mają służyć do zdejmowania szczegółów; powinny one zatem znajdować się w ich najbliższej odległości. Linie te, zwane *miarowymi*, łączą boki poligonu, względnie poligonów w punktach *posilkowych (łącznych)*. Podobnie jak to ma miejsce w ciągach, rozróżniamy miarowe różnych rzędów. Im ważniejsze są szczegóły zdjęcia, tym bliżej nich należy założyć miarowe. W każdym razie rzędne punktów ważniejszych nie powinny w zasadzie przekraczać 10 m. Punkty o znaczeniu najbardziej podrzędnym mogą być odległe od miarowej w terenie płaskim do 40 m, w terenie pochyłym do 30 m.

Miarowych nie przedłużamy z reguły ponad  $\frac{1}{4}$  ich długości, zaś w przypadkach gdy to jest konieczne, należy położenie końcowego punktu przedłużonej części uchwycić przy pomocy dodatkowej miary kontrolnej.

Lica budynków, parkanów, parcel itp. mierzy się zawsze dla kontroli osobno; są to tzw. miary *czołowe*. Można również przedłużać kierunki granic parcel, leżących blisko miarowych i mierzyć powstałe w ten sposób odcinki, co stanowi może także dobrą kontrolę.

Położenie punktów posilkowych ustalamy, mierząc na boku poligonu odległości punktu posilkowego od sąsiednich punktów poligonowych. Oba pomierzone odcinki wyrównujemy do długości boku poligonu, obliczonej ze współrzędnych. Natomiast jeżeli miarowa ma służyć do wytyczenia pewnego projektu, należy pomierzyć jeszcze na punkcie posilkowym kąty, zawarte między miarową a bokami poligonu.

Zdjęcie szczegółów przeprowadza się rzutując poszczególne punkty na miarowe lub boki poligonów, jak to podano w metodzie rzędnych i odciętych (p. rozdział IV, § 6).

Zdjęcie poligonowe wymaga, jak każda większa praca połowa, uwidocznienia wszelkich zdejmowanych szczegółów w szkicu połowym. Szkice te można prowadzić w dwojaki sposób.

a) Sposób, polecany przez większość instrukcyj miarowych, polega na szkicowaniu systematycznym w pewnej skali. Szkice tego rodzaju, zestawione razem, stanowią znakomity obraz mierzonego obszaru i ułatwienie przy sporządzeniu planu oraz kontrolę już w czasie wykonywania pomiaru. Ujemną ich stroną jest pewna powolność pracy połowej oraz konieczność zatrudnie-

nia wprawnego rysownika. Sposób ten powinien być stosowany przy zdjęciach miast.

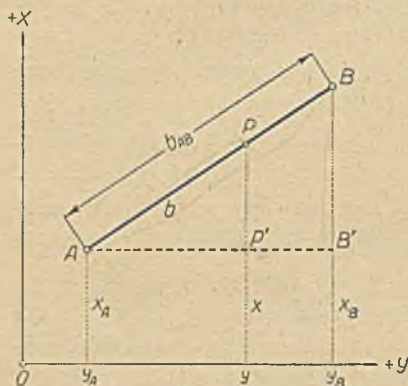
b) Wedle sposobu drugiego wykonujemy szkice »na oko« dla każdego boku poligonu (lub linii pomiarowej) osobno, co jest bardzo wygodne, ale pozbawia nas kontroli zdjęcia w polu. Sposób ten jest dość powszechnie używany ze względu na to, że szczegóły mogą być zdejmowane przed ukończeniem pomiaru poligonów, oraz i ze względu na pewne ułatwienie pracy przy nanoszeniu zdjęcia.

### § 8. Obliczenie współrzędnych punktów posilkowych

Obliczenia te występują bardzo często w praktyce mierniczej przy wykonywaniu zdjęć szczegółowych metodą poligonową. Rachunki wykonuje się dziś już prawie wyłącznie maszyną; dlatego podane niżej przykłady są dostosowane do rachunku maszynowego.

Rachunek współrzędnych punktów posilkowych obejmuje wiele bardzo różnych zagadnień. Poniżej omawiane będą tylko niektóre z nich, jako zagadnienia podstawowe.

1. Obliczenie współrzędnych punktu posilkowego, leżącego na boku poligonu (lub na linii pomiarowej).



Rys. 220.

Dane są współrzędne punktu początkowego  $A(y_A, x_A)$  i końcowego  $B(y_B, x_B)$  oraz odległość  $b$  punktu posilkowego  $P$  od początku (rys. 220). Obliczamy długość boku  $AB = b_{AB}$  (z danych współrzędnych).

Szukane współrzędne punktu  $P(y, x)$  otrzymujemy z następujących proporcji:

$$(x - x_A) : b = (x_B - x_A) : b_{AB} \quad \text{i} \quad (y - y_A) : b = (y_B - y_A) : b_{AB},$$

skąd

$$y = y_A + \frac{b}{b_{AB}} (y_B - y_A) \quad \checkmark \quad (28)$$

$$x = x_A + \frac{b}{b_{AB}} (x_B - x_A) \quad \checkmark$$

Są to wzory zasadnicze dla wszelkich obliczeń punktów posilkowych.

Przed przystąpieniem do rachunku współrzędnych należy sprawdzić, czy długość boku  $AB$ , uzyskana z pomiaru — oznaczmy ją przez  $b_m$  — zgadza się z obliczoną  $b_{AB} = b_r$ . Według »Przepisów obowiązujących... M. R. P.« z 1928 r. różnica  $b_r - b_m$  nie może przekraczać wartości, uzyskanej z wzoru (14) na str. 246, zwiększonej o 5 cm.

W rachunku szczegółowym stosujemy wzory (28), lecz w nieco zmienionej formie:

$$y = y_A + \frac{b}{b_m} \Delta y \quad (28a)$$



$$x = x_A + \frac{b_r}{b_m} \Delta x, \quad (28a)$$

gdzie  $\Delta y = y_B - y_A$  i  $\Delta x = x_B - x_A$ ,  $b$  jest to długość pomierzona od  $A$  do punktu posiłkowego  $P$ ,  $b_m$  — pomierzona długość boku  $AB$ .

Schemat rachunku jest następujący<sup>1)</sup>:

L. p.	Oznaczenie punktów		Długość $b$	Współrzędne		U w a g i
	danych	szuka- nych		$y$	$x$	
1	○ 22			+ 25 266,89	- 22 747,20	$b_r - b_m = 79,19 - 79,17$ $= + 2 \text{ cm}$ (błąd dozwol. = 17 cm)
			72,45	+ 17,75	+ 70,26	
		335		+ 25 284,64	- 22 676,94	$\frac{b}{b_m} = \frac{72,45}{79,17} = 0,915 12$
	○ 23		79,17	+ 25 286,29	- 22 670,42	
			(79,19)	+ 19,40	+ 76,78	

Obliczone wielkości  $\frac{b}{b_m} \Delta y$  i  $\frac{b}{b_m} \Delta x$  mają znaki *zgodne* z różnicami  $\Delta y$  i  $\Delta x$ .

Kontrolę obliczenia punktu  $P$  otrzymujemy przez ponowne obliczenie jego współrzędnych z punktu  $B$  jako początkowego, przy użyciu długości  $b = 79,17 - 72,45 = 6,72 \text{ m}$  (lecz wtedy  $\Delta y$  i  $\Delta x$  zmieniają znaki na przeciwne).

2. Obliczenie współrzędnych kilku punktów posiłkowych, leżących na jednym boku (wzgl. pomiarowej).

W tym przypadku obliczamy najpierw ilorazy  $\frac{\Delta y}{b_m}$  i  $\frac{\Delta x}{b_m}$ , które następnie mnożymy po kolei przez odległości  $b_1, b_2, b_3, \dots$  punktów posiłkowych  $P_1, P_2, P_3, \dots$  od punktu początkowego. Rachunek maszynowy da się tutaj tak ułożyć, że w schemacie zapisujemy już tylko ostateczne współrzędne kolejnych punktów posiłkowych.

Przykład.

L. p.	Oznaczenie punktów		Długość $b$	Współrzędne		U w a g i
	danych	szuka- nych		$y$	$x$	
2	○ 24			+ 25 293,89	- 22 608,45	$b_r - b_m = + 6 \text{ cm}$ (błąd dozwol. = 16 cm)
		337	9,12	+ 25 284,83	- 22 607,34	
		338	27,98	+ 25 266,09	- 22 605,04	$\frac{\Delta y}{b_m} = 0,993 54$ $\frac{\Delta x}{b_m} = 0,122 03$
		339	37,75	+ 25 256,38	- 22 603,84	
	○ 156		63,51	+ 25 230,79	- 22 600,70	
			(63,57)	- 63,10	+ 7,75	

<sup>1)</sup> Dane liczbowe z »Przepisów M. R. P.« wyd. z r. 1928 r., str. 136.

W tego rodzaju obliczeniach maszynowych stosuje się rachunki złożone, a więc mnożenie połączone z dodawaniem lub odejmowaniem<sup>1)</sup>.

3. Obliczenie współrzędnych punktu posiłkowego nie leżącego na boku poligonu.

Odróżniamy tutaj dwa przypadki.

a) W przypadku pierwszym położenie punktu posiłkowego odniesione jest do boku poligonu przy pomocy rzędnej i odciętej (rys. 221, punkt  $Q$  lub  $R$ ). Obliczamy przede wszystkim współrzędne punktu  $Q'$  (rzutu p.  $Q$  na bok  $AB$ ), jak pod 1., a następnie, po zmianie kąta kierunkowego ( $AB$ ) o  $90^\circ$ , współrzędne punktu  $Q$ , a to przez dodanie (z odpowiednim znakiem) do  $y_{Q'}$  wartości

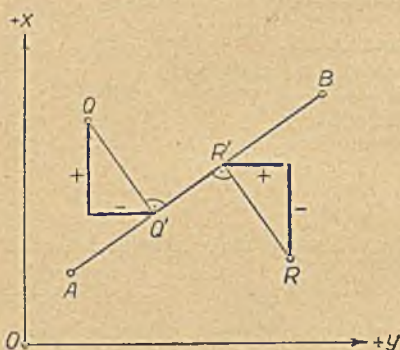
$$\frac{h}{b_{AB}} \Delta x, \text{ zaś do } x_{Q'} \text{ wartości } \frac{h}{b_{AB}} \Delta y.$$

Ogólne wzory są zatem następujące

$$y = y_A + \frac{b}{b_m} \Delta y \mp \frac{h}{b_m} \Delta x \quad (29)$$

$$x = x_A + \frac{b}{b_m} \Delta x \pm \frac{h}{b_m} \Delta y.$$

Jedyną trudność sprawiać może wybór odpowiednich znaków dla ostatnich członów wzorów (29); jednakże trudność ta odpada zupełnie, gdy posłużymy się (odręcznym) szkicem, przedstawiającym właściwe położenie punktu



Rys. 221.

posiłkowego w stosunku do boku  $AB$ , oraz boku  $AB$  do osi układu współrzędnych (p. rys. 221). Weźmy pod uwagę np. punkt  $Q$ . Kreśląc rzuty odcinka  $QQ' = h$  na obie osie, zaznaczamy strzałkami kierunki przejścia z punktu  $Q'$  do  $Q$ . Rzuty, których strzałki są zgodne z kierunkiem osi mają znaki  $+$ , zaś rzuty o strzałkach przeciwnych mają znaki  $-$ .

Przykład.

L. p.	Oznaczenie punktów		Długość $b$	Współrzędne		U w a g i	
	danych	szukanych		$y$	$x$		
3	$A$			+ 25 230,79	- 22 600,70	$b_r - b_m = -3 \text{ cm}$ $\frac{b}{b_m} = 0,514 56$ $\frac{h}{b_m} = 0,058 42.$	
				62,18 <sup>1)</sup>	+ 51,99 <sub>8</sub>		+ 34,07 <sub>4</sub>
				7,06 <sup>2)</sup>	+ 3,86 <sub>9</sub>		- 5,90 <sub>2</sub>
		$R$		+ 25 286,65	- 22 572,53		
	$B$			120,8 <sub>4</sub>	+ 25 331,84		- 22 534,48
				(120,81)	+ 101,05		+ 66,22

<sup>1)</sup> Koll-Eggert, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine. Stuttgart 1927 (str. 36).

<sup>2)</sup> Rzędna  $h$  punktu  $R$ , który znajduje się po prawej stronie boku  $AB$  (p. rys. 221).



b) W drugim przypadku położenie punktu posilkowego  $P$  określone jest przy pomocy tzw. miar poprzecznych, czyli przez pomiar odległości  $b_1$  i  $b_2$  punktu  $P$  od obu końców boku  $AB$  (rys. 222). Zadanie rozwiązujemy najprościej przez wyznaczenie w trójkącie  $ABP$  wysokości  $h$  oraz odcinków  $p$  i  $q$ , na które wysokość  $h$  dzieli podstawę  $AB = b$  (długość  $b$  obliczamy ze współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ ). Mamy tu mianowicie związki:

$$p + q = b, \quad (30a)$$

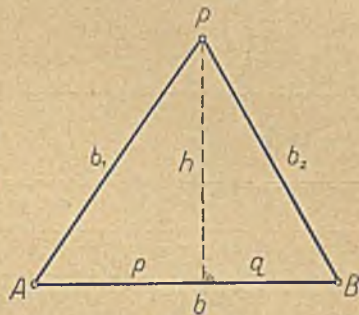
$$h^2 = b_1^2 - p^2 = b_2^2 - q^2, \quad (31)$$

skąd

$$p^2 - q^2 = b_1^2 - b_2^2,$$

czyli

$$p - q = \frac{b_1^2 - b_2^2}{p + q} = \frac{b_1^2 - b_2^2}{b}. \quad (30b)$$



Rys. 222.

Wzory (30a) i (30b) dają  $p$  i  $q$ , zaś  $h$  obliczamy z wzoru (31). Współrzędne punktu  $P$  liczymy jak w a).

4) Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia się dwóch linii pomiarowych.

Dane są współrzędne  $P_1(y_1, x_1)$  i  $P_2(y_2, x_2)$  końców jednej linii oraz  $P_3(y_3, x_3)$  i  $P_4(y_4, x_4)$  końców linii drugiej. Obliczamy tangensy  $t_1$  i  $t_3$  kątów kierunkowych  $(P_1, P_2)$  i  $(P_3, P_4)$ <sup>1)</sup>:

$$t_1 = \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{i} \quad t_3 = \operatorname{tg} \alpha_{3,4} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}. \quad (32)$$

Z równań prostych

$$\begin{aligned} P_1 P_2: & \quad y - t_1 x = y_1 - t_1 x_1 = c_1 \\ \text{i } P_3 P_4: & \quad y - t_3 x = y_3 - t_3 x_3 = c_3, \end{aligned} \quad (33)$$

wynikają dwa związki dla wyznaczenia niewiadomych  $y$  i  $x$ , które są współrzędnymi punktu przecięcia się obu pomiarowych. Otrzymujemy więc

$$x = -\frac{c_3 - c_1}{t_3 - t_1} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{t_3 c_1 - t_1 c_3}{t_3 - t_1}, \quad (34)$$

lub też

$$y = t_1 x + c_1 = t_3 x + c_3.$$

Wzory te nadają się bardzo dobrze do rachunku maszynowego.

Znaczne uproszczenie rachunku otrzymamy w przypadku, gdy  $y_1 = 0$  i  $x_1 = 0$ , czyli  $P_1(0,0)$ . Wówczas

$$t_1 = \frac{y_2}{x_2}, \quad t_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}, \quad c_1 = 0, \quad c_3 = y_3 - t_3 x_3, \quad (32a)$$

<sup>1)</sup> Rozwiązanie to przeprowadzono na podstawie artykułu F. Schulza w czasop. »Allgemeine Vermessungs-Nachrichten«, Nr. 27 z r. 1933.

zatem

$$y = \frac{-t_1 c_3}{t_3 - t_1}, \quad x = \frac{-c_3}{t_3 - t_1} = \frac{y}{t_1}, \quad (34a)$$

albo

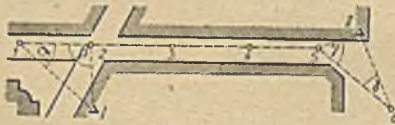
$$x = \frac{-c_3}{t_3 - t_1}, \quad y = t_1 x. \quad (34b)$$

Przykład.

Punkt	y	x	Zredukowane		t <sub>3</sub>	+ 0,661 683
			y'	x'	t <sub>1</sub>	- 0,832 289
P <sub>1</sub>	10 032,56	18 524,67	0,00	0,00	t <sub>3</sub> - t <sub>1</sub>	+ 1,493 972
P <sub>2</sub>	10 587,98	17 857,33	+ 555,42	- 667,34	y <sub>3</sub> '	+ 612,37
P <sub>3</sub>	10 644,93	18 531,59	+ 612,37	+ 6,92	- t <sub>3</sub> x <sub>3</sub> '	- 4,57 <sub>9</sub>
P <sub>1</sub>	9 893,02	17 395,23	- 139,54	- 1 129,44	c <sub>3</sub>	+ 607,79 <sub>1</sub>
			- 751,91	- 1 136,36	x'	- 406,83
P	10 371,16	18 117,84	= y <sub>3</sub> - y <sub>3</sub>	= x <sub>3</sub> - x <sub>3</sub>	y'	+ 338,60

## § 9. Poligony miejskie

Poligonometria odgrywa wielką rolę przy pomiarach miejskich, gdyż związanie poszczególnych elementów pomiarowych, służących do zdjęcia szczegółów miejskich, jest prawie nie do wykonania inną metodą. Zazwyczaj zakładamy w mieście kilka rzędów sieci triangulacyjnej, przy czym punkty najwyższego (III lub IV) rzędu są zwykle umieszczone bardzo wysoko ponad poziomem ulicy (krzyże na wieżach kościołów, sygnaturki itp.). Nawiązanie punktów poligonowych miejskich do tak wysokich punktów jest — szczególnie w ciasnych ulicach miejskich — często bardzo trudne.



Rys. 223.

Rys. 223 przedstawia przypadek nawiązania poligonu do punktów triangulacyjnych na dachach. Poligon 1-2-3-4-5-6 nawiązano tu przez pomiar kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ . Dla zorientowania ciągu do punktów triangulacyjnych I i II najlepiej obliczyć współrzędne punktów poligonu w dowolnym układzie o początku w punkcie I, a po otrzymaniu ze współrzędnych długości I—II', obliczyć współczynnik redukcyjny dla wszystkich długości poligonu:

$$k = \frac{I-II}{I-II'};$$

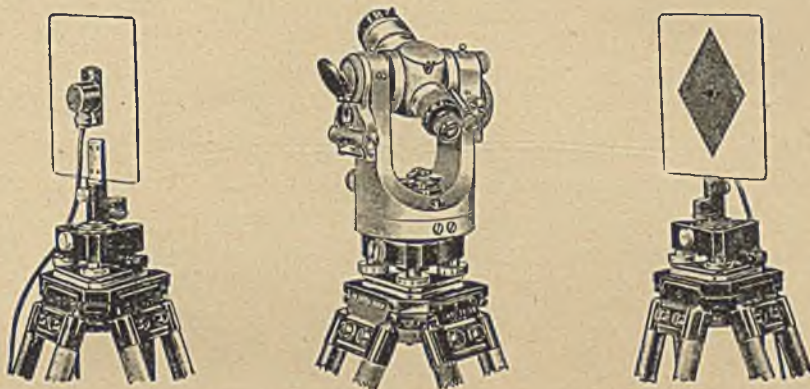
następnie, skręcając zarazem układ o kąt zawarty między kierunkami I—II' i I—II, wprowadza się właściwe współrzędne punktów I i II, a tym samym i wszystkich punktów poligonu.



Aby jednak powyższe nawiązanie kątowe było dokładne, należy bardzo starannie ustawiać oś instrumentu do pionu, zatem specjalną libelą (nasadkową) nakładaną na oś obrotu lunety.

O zabezpieczeniu ciągów poligonowych wspomniano już poprzednio.

W dzisiejszych czasach używa się w większych miastach do poligonometrii teodolitów o trzech statywach (p. rys. 224); urządzenie to w wysokim stopniu zapobiega skutkom niezbyt korzystnego prawa przenoszenia się błędów.



Rys. 224.

Poza tym jesteśmy zmuszeni często w starych partiach miasta zadowalać się bardzo krótkimi bokami, co oczywiście wpływa ujemnie na dokładność ciągów. W tych przypadkach należy bezwarunkowo zastosować pomiar przy pomocy trzech statywów (lub co najmniej dokładne piony optyczne, względnie sztywne). Można również wpływ szkodliwego działania krótkiego boku znacznie osłabić, postępując jak niżej (rys. 225).

Niech  $MN$  będzie stosunkowo bardzo krótkim bokiem w poligonie  $AB$ . Na punktach  $M$  i  $N$  mierzymy kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , zawarte między dłuższymi bokami poligonu i kierunkiem do odległego punktu triangulacyjnego  $R$ . Obliczamy przybliżone współrzędne punktów  $M$  i  $N$ , a to punktu  $M$  od  $p. A$ , zaś punktu  $N$  od  $B$ , po czym możemy dostatecznie dokładnie obliczyć kąt  $\varphi$  z 3-ch boków trójkąta  $MNR$  za pomocą wzoru na  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ . Znając kąt  $\varphi$  przeprowadzamy obliczenie i wyrównanie kątów ciągu od  $A$  przez  $M, R, N$  do  $B$ ; wyrównanie współrzędnych następuje normalnie.

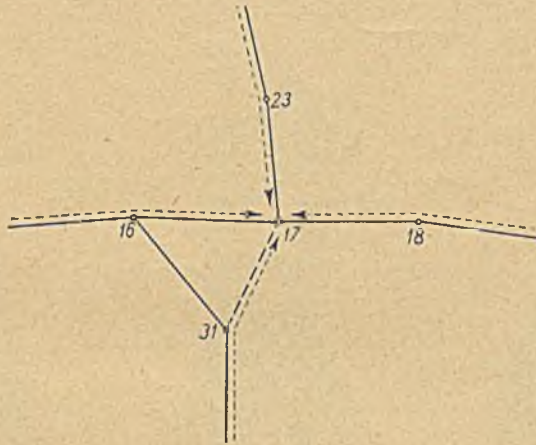


Rys. 225

Jeżeli z punktów  $M$  i  $N$  nie widać żadnego punktu triangulacyjnego, można punkt taki wyznaczyć wcinaniem wstecz i użyć go, jak poprzednio.

Przy wyrównywaniu poligonów miejskich pewne trudności nastęrcza zwykle odpowiedni wybór punktów węzłowych oraz tych ciągów poligonowych, które wybrany punkt węzłowy wyznaczają. Rys. 225 a podaje przypadek, w którym

punkt węzłowy 17 może być bardzo dobrze wyznaczony z 4-ch ciągów, jeżeli do poligonów I-rzędnych włączymy również bok 31-17 i odpowiednie kąty, które obliczymy z trójkąta 31-16-17 (znając dwa boki i kąt przy 16). Bezpośredni pomiar długości i kątów wzdłuż 31-17 jest niemożliwy z powodu przeszkód terenowych (budynek lub tp.).



Rys. 225 a.

#### § 10. Kolejność czynności przy wykonywaniu zdjęć metodą poligonową

Jak wykazała praktyka, jest wskazane (zwłaszcza przy wykonywaniu zdjęć większych obszarów) zachowanie pewnej kolejności prac polowych i biurowych, które o ile możliwości powinny być przeprowadzone w następującym porządku.

##### A. Triangulacja.

- 1) Odszukanie punktów istniejącej na danym obszarze sieci triangulacyjnej (państwowej lub lokalnej),
- 2) sprawdzenie punktów i ustawienie sygnałów,
- 3) zagęszczenie sieci triangulacyjnej punktami IV rzędu (wywiad, stabilizacja, obserwacja i wyrównanie).

##### B. Poligonizacja.

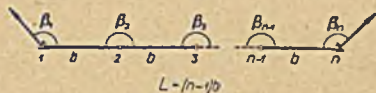
- 1) Wywiad i założenie ciągów głównych (I-rzędnych) w nawiązaniu do punktów triangulacyjnych, oraz założenie punktów węzłowych,
- 2) wywiad i założenie ciągów pobocznych (II i III-rzędnych),
- 3) stabilizacja i sporządzenie opisów topograficznych,
- 4) pomiar boków i kątów,
- 5) założenie linii pomiarowych (punktów posiłkowych),
- 6) pomiar linii pomiarowych,
- 7) wyrównanie ciągów i obliczenie współrzędnych punktów poligonowych,
- 8) obliczenie punktów posiłkowych,
- 9) pomiar szczegółów (szkice polowe),
- 10) sporządzenie odrysów szkiców polowych,
- 11) sporządzenie planów oryginalnych (pierworysów).



12) obliczenie powierzchni kompleksów (grup) i poszczególnych parcel. Sposób wykonania prac rysunkowych, wymienionych w p. 10 i 11, opisano w rozdziale XII.

### § 11. Dokładność ciągów poligonowych

Teoria, którą podamy, odnosi się ściśle do poligonu o bokach równych i wierzchołkach leżących na prostej łączącej punkty nawiązania. Ponieważ staramy się — choć w przybliżeniu — spełnić powyższe warunki, przeto można z dość znacznym przybliżeniem przyjąć, że teoria ta ma znaczenie i dla poligonów, stosowanych w praktyce.



Rys. 226.

Na rys. 226 przyjęto wszystkie boki  $b$  poligonu, składającego się z  $n$  punktów, równe.

Pierwszy i  $n$ -ty punkt są punktami triangulacyjnymi, na których nastąpiło nawiązanie kierunkowe (azymutalne). Oznaczając przez  $L$  długość całkowitą poligonu, otrzymujemy związek

$$L = (n - 1) b.$$

Jeżeli dla uproszczenia wywodów przyjmiemy, że kierunek osi  $x$ -ów pokrywa się z kierunkiem poligonu, to  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , przesunięcia poszczególnych punktów, spowodowane wyrównaniem następują: pierwsze w kierunku podłużnym, drugie w kierunku poprzecznym.

Odchyłki otrzymane przy zamknięciu poligonu oznaczmy przez  $\omega_p$ ,  $\omega_x$  i  $\omega_y$ . Niech  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  oznaczają błędy prawdziwe kątów  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ; jeżeli rozdzielimy odchyłkę  $\omega_p$  równo na poszczególne kąty, wówczas poprawka, o jaką każdy kąt się zmieni, wyniesie

$$\lambda = -\frac{\omega_p}{n}. \quad (35)$$

Ponieważ także i prawdziwe wartości spostrzeżeń spełniają warunek katowy, przeto

$$\omega_p + [\varepsilon]_1^n = 0$$

lub

$$\lambda = \frac{1}{n} [\varepsilon]_1^n. \quad (35a)$$

Warunek rzutów na oś  $x$ -ów jest w naszym przypadku:

$$[b] - (x_n - x_1) = \omega_x,$$

a poprawka każdego boku wyniesie

$$\Delta b = -\frac{\omega_x}{n-1},$$

zaś średni błąd wyrównanego boku będzie (wobec jednakowej długości boków):

$$\mu_b = \frac{\omega_x}{n-1} \sqrt{n-2}.$$

Największy średni błąd po wyrównaniu kątów przypadnie punktowi średniemu  $\frac{n+1}{2}$ ; kwadrat tego błędu wyniesie

$$\frac{n-1}{2} \left( \frac{\omega_x}{n-1} \right)^2 (n-2),$$

zatem wielkość błędu średniego (w kierunku osi  $x$ -ów) będzie

$$\mu_L = \omega_x \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}. \quad (36)$$

Zbadanie dokładności ciągu w kierunku osi  $y$ -ów, tj. w kierunku poprzecznym, wymaga dłuższego wywodu.

Jeżeli  $\varepsilon_{1,2}, \dots, \varepsilon_{i,k}$  oznaczają błędy prawdziwe kątów kierunkowych (azymutów)  $\alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{i,k}$  (obliczonych na podstawie wyrównanych kątów), wówczas istnieją następujące związki

$$\alpha_{1,2} + \varepsilon_{1,2} = \alpha_{0,1} + \beta_1 + \varepsilon_1 - 180^\circ \quad (37)$$

$$\alpha_{2,3} + \varepsilon_{2,3} = \alpha_{0,1} + \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2 \cdot 180^\circ$$

$$\dots$$

$$\alpha_{n-1,n} + \varepsilon_{n-1,n} = \alpha_{0,1} + [\beta]_1^{n-1} + [\varepsilon]_1^{n-1} - (n-1) 180^\circ,$$

oraz

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{0,1} + \beta_1 + \lambda - 180^\circ \quad (38)$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{0,1} + \beta_1 + \beta_2 + 2\lambda - 2 \cdot 180^\circ$$

$$\dots$$

$$\alpha_{n-1,n} = \alpha_{0,1} + [\beta]_1^{n-1} + (n-1)\lambda - (n-1) 180^\circ,$$

z połączenia których otrzymujemy

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_1 - \lambda \quad (39)$$

$$\varepsilon_{2,3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\lambda$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_{n-1,n} = [\varepsilon]_1^{n-1} - (n-1)\lambda.$$

Poza tym należy zauważyć, że błędy  $\varepsilon'_{i,k}$  kierunków  $\alpha_{i,k}$  pochodzące z błędów kątów  $\beta_i$  nie wyrównanych są:

$$\varepsilon'_{1,2} = \varepsilon_1 \quad (40)$$

$$\varepsilon'_{2,3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\dots$$

$$\varepsilon'_{n-1,n} = [\varepsilon]_1^{n-1}$$

Niech  $y_n'$  oznacza rzędną punktu końcowego  $n$  bez uwzględnienia wyrównania, zaś  $\gamma_n$  jej błąd prawdziwy w kierunku osi  $y$ -ów, wówczas

$$y_n' + \gamma_n = y_1 + b \{ \sin(\alpha_{1,2} + \varepsilon_{1,2}) + \dots + \sin(\alpha_{n-1,n} + \varepsilon_{n-1,n}) \} = \quad (41)$$

$$= y_1 + b (\sin \alpha_{1,2} + \dots + \sin \alpha_{n-1,n}) + b (\varepsilon_{1,2} \cos \alpha_{1,2} + \dots + \varepsilon_{n-1,n} \cos \alpha_{n-1,n}).$$



Ponieważ poligon ciągnie się w przybliżeniu w kierunku osi  $x$ -ów, przeto można przyjąć  $\sin \alpha_{i,k} = 0$ ,  $\cos \alpha_{i,k} = 1$ , a że  $\eta_n$  stanowi zarazem  $\omega_y$ , więc

$$\eta_n = b [\varepsilon]_{1,2}^{n-1,n} = \omega_y. \quad (42)$$

Poprawiona rzędna punktu środkowego będzie:

$$y_s = y_1 + b \left( \sin \alpha_{1,2} + \dots + \sin \alpha_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} \right) + \frac{\omega_y}{2}, \quad (43)$$

zaś jej wartość prawdziwą określi wzór:

$$y_s + \eta_s = y_1 + b \left\{ \sin (\alpha_{1,2} + \varepsilon_{1,2}) + \dots + \sin \left( \alpha_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} + \varepsilon_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} \right) \right\}. \quad (44)$$

Zatem, rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymamy na prawdziwy błąd w kierunku osi  $y$ -ów wyrażenie zależne od  $\omega_y$ :

$$\eta_s = b (\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3} + \dots + \varepsilon_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}}) - \frac{\omega_y}{2} \quad (45)$$

lub, wstawiając wartość za  $\omega_y$  z (42):

$$\eta_s = b \left( [\varepsilon]_{1,2}^{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} - \frac{1}{2} [\varepsilon]_{1,2}^{n-1,n} \right) = \frac{b}{2} \left( [\varepsilon]_{1,2}^{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}} - [\varepsilon]_{\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}}^{n-1,n} \right); \quad (46)$$

zaś po wyrugowaniu wartości błędów  $\varepsilon_{i,k}$  przy pomocy związków (39):

$$\begin{aligned} \eta_s = -\frac{b}{2} & \left\{ (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \dots + \frac{n-3}{2} \varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{2} \varepsilon_{\frac{n+1}{2}} + \right. \\ & + \frac{n-3}{2} \varepsilon_{\frac{n+3}{2}} + \dots + \varepsilon_{n-1}) + \lambda \left( 1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{2} - \frac{n+3}{2} - \right. \\ & \left. \left. \dots - (n-1) \right) \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić, współczynnik przy  $\lambda$  jest równy

$$-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Jeżeli wstawimy wartość za  $\lambda$  z wzoru (35 a) i dla uproszczenia oznaczymy

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = N, \quad (48)$$

otrzymamy ostatecznie na  $\eta_s$  wzór symetryczny

$$\begin{aligned} \eta_s = \frac{b}{2} & \left\{ N\varepsilon_1 + (N-1)\varepsilon_2 + (N-2)\varepsilon_3 + \dots + \left(N - \frac{n-3}{2}\right) \varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \right. \\ & \left. + \left(N + \frac{n-1}{2}\right) \varepsilon_{\frac{n+1}{2}} + \left(N - \frac{n-3}{2}\right) \varepsilon_{\frac{n+3}{2}} + \dots + (N-1)\varepsilon_{n-1} + N\varepsilon_n \right\}. \quad (49) \end{aligned}$$

Dla  $n = 7$  otrzymamy, wstawiając do wzoru (49)  $b$  w km,  $\varepsilon$  w minutach,  $\eta_s$  w mm:

$$\eta_s = 10 b (18,6 \varepsilon_1 + 4,2 \varepsilon_2 - 10,3 \varepsilon_3 - 24,6 \varepsilon_4 - 10,3 \varepsilon_5 + 4,2 \varepsilon_6 + 18,6 \varepsilon_7)$$

Jak widać, największy wpływ na  $\eta_s$  mają po błędzie kątowym w punkcie środkowym, błędy kątów nawiązania, zatem przy ciągach poligonowych miejskich należy te trzy kąty pomierzyć większą ilość razy.

Przechodząc do błędów średnich, otrzymamy kładąc zamiast poszczególnych  $\varepsilon$  średni błąd kątowy  $\mu_\beta$ , zaś w miejsce  $\eta_s$  średni błąd  $\mu_s$ , oraz uwzględniając prawo przenoszenia się błędów

$$\mu_s^2 = \frac{b^2}{2} \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^2 \left\{ N^2 + (N-1)^2 + (N-2)^2 + \dots + \left( N - \frac{n-3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( N - \frac{n-1}{2} \right)^2 \right\}, \quad (50)$$

lub, po małej transformacji,

$$\mu_s^2 = \frac{b^2}{2} \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^2 \left\{ \frac{n}{2} N^2 - 2N \left( 1 + 2 + \dots + \frac{n-3}{2} \right) + \left( 1^2 + 2^2 + \dots + \left( \frac{n-3}{2} \right)^2 \right) - \frac{n-1}{2} N + \frac{(n-1)^2}{8} \right\}. \quad (51)$$

Wyraz pierwszego nawiasu ( ) równa się  $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$ , zaś drugiego  $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ , więc ostatecznie będzie

$$\mu_s^2 = b^2 \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^2 \frac{n^4 + 2n^2 - 3}{192n} \quad \text{lub} \quad \mu_s = b \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 - 3}{192n}}. \quad (52)$$

Ponieważ jednak  $L_{1,n} = (n-1)b$ , przeto

$$\mu_s = L_{1,n} \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^2 - 3}{192n(n-1)^2}}. \quad (53)$$

O ile  $n$  wynosi 7 lub więcej, można wzór (53) zastąpić wzorem przybliżonym

$$\mu_s \approx L_{1,n} \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n}{192}} = \frac{L_{1,n}}{14} \cdot \frac{\mu}{\rho} \sqrt{n}, \quad (54)$$

albo (kładąc w przybliżeniu  $n \approx \frac{L_{1,n}}{b}$ )

$$\mu_s \approx \frac{L_{1,n}^{3/2}}{14\sqrt{b}} \frac{\mu}{\rho}. \quad (54a)$$

Wzór ostatni wskazuje dobitnie, że prawo przenoszenia się błędów w poligonach jest dość niekorzystne.

Można też obliczyć  $\mu_s$  w cm z wzoru:

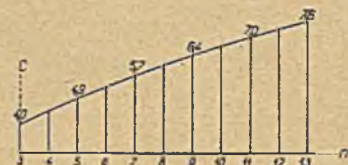
$$\mu_s = \pm L \mu C, \quad (55)$$

przy czym należy wstawić  $L$  w km,  $\mu$  w minutach, zaś  $C$  wziąć z następującego wykresu dla odpowiedniego  $n$  (rys. 227).

Najprostszy wzór przybliżony opiewa

$$\mu_s = \pm L \mu (3,07 + 0,36n) \quad (56)$$

(przy czym  $L$  w km,  $\mu$  w minutach,  $\mu_s$  w cm).



Rys. 227.



Jeżeli poligon nie był nawiązany (zatem bez wyrównania), jak to ma miejsce np. przy pomiarach w tunelach, wówczas wedle wzoru (42):

$$\eta_n = b [\varepsilon]_{1,2}^{n-1,n},$$

a po wstawieniu wartości z (40) otrzymujemy dla błędu poprzecznego końcowego punktu

$$\eta_n = b \{(n-1) \varepsilon_1 + (n-2) \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}\}, \quad (57)$$

zaś średni błąd punktu końcowego w kierunku poprzecznym będzie

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= b^2 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2\} = \\ &= b^2 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \end{aligned} \quad (58)$$

czyli

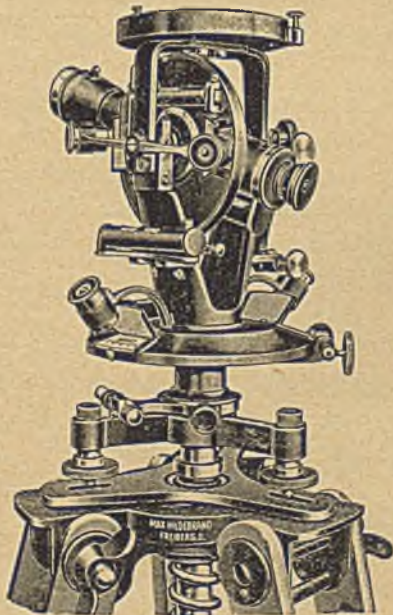
$$\mu_n = \pm b \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} = \pm L_{1,n} \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n(2n-1)}{6(n-1)}}, \quad (59)$$

lub w przybliżeniu

$$\mu_n \approx \pm L_{1,n} \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{n}{3}}. \quad (60)$$

## § 12. Ciągi busolowe

W niektórych przypadkach, głównie przy pomiarach leśnych, używa się zamiast teodolitu instrumentu *busolowego*. Przyrząd ten nadaje się specjalnie do zdjęć terenowych, przeprowadzanych w lesistym terenie, musi jednak wówczas być także i tachimetrem (p. rozdział X, § 2).



Rys. 228.

Instrument busolowy jest zazwyczaj przyrządem uniwersalnym, do którego dodano busolę. Busola ta albo zajmuje miejsce limbusu lub też umieszcza się ją, podobnie jak libelę nasadkową, na przedłużonych w górę dźwigarach lunety. Przyrządy typu drugiego mogą zatem być użyte jako teodolity lub jako instrumenty busolowe.

Rys. 228 przedstawia instrument busolowy drugiego typu.

Warunki, jakim ma odpowiadać ten przyrząd, należy podzielić na dwie grupy. Jedną stanowią warunki dla teodolitu, względnie instrumentu uniwersalnego, zaś grupa druga jest związana z busolą. Po-



nieważ pierwsza grupa warunków była omawiana już poprzednio, przeto zajmujemy się tylko grupą drugą.

W rozdziale IV, § 7 c, opisano busolę stolikową. Busola instrumentu busolowego różni się od poprzedniej przede wszystkim wielkością, gdyż cylindryczna jej oprawa ma średnicę 10 do 15 cm.

Podział kątomierza busoli jest wykonany w działkach odpowiadających  $\frac{1}{3}$  lub  $\frac{1}{2}$  stopnia, tak że odczyt przez ocenianie może być dokonany z błędem 5' - 6'.

Warunki, jakim przyrząd powinien odpowiadać ze względu na busolę, są następujące:

- a) igła magnetyczna busoli musi być dostatecznie czuła,
- b) igła magnetyczna busoli musi być starowana,
- c) przyrząd nie może zawierać części działających na igłę magnetyczną,
- d) ekscentryczność igły magnetycznej musi być wyrugowana,
- e) płaszczyzna osi celowej przyrządu ma przecinać płaszczyznę busoli równoległe do prostej łączącej  $0^{\circ}$ - $180^{\circ}$ .

Sprawdzenie powyższych warunków nie następuje żadnych trudności.

Warunek a) sprawdzamy wychylając igłę z jej położenia za pomocą żelaza, po czym igła ma zająć poprzednie położenie z błędem co najwyżej  $\pm 0,1^{\circ}$ . Sprawdzenie tego rodzaju powinno się przeprowadzać systematycznie dla całego podziału. Dla zmniejszenia błędu podziału, odczytujemy igłę przy największych jej wychyleniach; i tak, jeżeli przy odczycie pierwszym igła wahała między  $o_1$  i  $o_1'$ , przy drugim od  $o_2$  do  $o_2'$ , wówczas przyjmujemy jako średnią:

$$o_s = \frac{o_1 + 2 o_1' + o_2}{4} = \frac{o_1' + 2 o_2 + o_2'}{4}$$

b) Starowanie igły następuje przez odpowiednie przesunięcie malej płytki mosiężnej, ujmującej jedno ramię igły.

d) Ekscentryczność igły rugujemy przez odczytywanie obu jej końców i wzięcie średniej z odczytów.

e) W razie nie zachowania warunku e), powstaje błąd systematyczny, który dla pomiaru kątów nie ma znaczenia. Natomiast jeżeli ma się przyrządem mierzyć azymuty magnetyczne, należy sprawdzić powyższy warunek, zmieniając położenie busoli na diametralnie różne (przez ułożenie jej w pozycji o  $180^{\circ}$  różnej od poprzedniej).

Niektóre teodolity mają zamiast busoli *kompas orientacyjny*, który może być umieszczony na spodarce lub, podobnie jak busola, nałożony na przedłużone w górę dźwigary lunety. Jest to tylko niejako mały wycinek busoli. Odczyty końców igły magnetycznej uskuteczniamy tu przez silne lupy. Zadanie kompasu orientacyjnego polega na tym, że limbus przyrządu (repetycyjnego lub reiteracyjnego) skręcamy na każdym stanowisku tak długo, aż odczyt na kompasie będzie  $0^{\circ}$  -  $180^{\circ}$ . W ten sposób orientujemy zdjęcie do południka magnetycznego.

Ponieważ deklinacja magnetyczna jest dla każdego miejsca zmienna, i posiada trzy okresy: sekularny (wiekowy), roczny i dzienny, przeto chcąc



wykonać bardzo dokładnie zdjęcia busolowe, należałoby mieć dane magnetyczne, odnoszące się do chwili wykonywania pomiaru<sup>1)</sup>). Ponieważ jednak zmiana sekularna deklinacji jest bardzo powolna, roczna zaś nie odgrywa roli przy pomiarze wykonanym w krótkim czasie, przeto największą troskę może spowodować dzienny okres deklinacji. Z doświadczenia wiemy, że zmiana deklinacji nie odbiega zbytnio od swej dziennej średniej wartości w godzinach 10-18-ej; dlatego zaleca się wykonywanie zdjęć busolowych w tym właśnie czasie.

Obecnie zakłada się ciągi busolowe o bokach bardzo krótkich, zazwyczaj 20-metrowych, a najwyżej 50-metrowych, przy czym mierzymy:

a) kąty z omijaniem stanowisk, lub

b) na każdym stanowisku tylko kierunek następnego boku.

(Innych metod dawniej używanych zaniechano).

a) Mierzymy azymuty magnetyczne na co drugim stanowisku, zatem boku poprzedniego i następnego. Metoda ta nie powoduje błędów centrowania.

b) Dogodność i przejrzystość pomiaru na każdym stanowisku tylko jednego azymutu wyklucza prawie zupełnie popełnianie błędów grubych.

Obie metody nadają się do wytyczania prostej przez las lub przy wykonywaniu zdjęć tachimetrycznych w terenie lesistym.

### § 13. Dokładność ciągu busolowego

Magnetyzm ziemski działa na igłę magnetyczną w analogiczny sposób, jak siła ciężkości na pion, przeto prawo przenoszenia się błędów w ciągu busolowym jest tego samego rodzaju (takie samo), jak w ciągu niwelacyjnym.

Biorąc pod uwagę prostoliniowy ciąg busolowy, składający się z  $n$  punktów i  $n - 1$  równych boków  $b$ , otrzymamy przesunięcie poprzeczne ostatniego punktu

$$\eta_n = b \varepsilon_1 + b \varepsilon_2 + \dots + b \varepsilon_{n-1}, \quad (61)$$

zaś średni błąd tego przesunięcia będzie

$$\mu_n = b \frac{\mu}{\rho} \sqrt{n-1}. \quad (62)$$

Ponieważ długość ciągu jest

$$L = (n - 1) b, \quad (63)$$

przeto rugując  $(n - 1)$  we wzorze (62) otrzymamy dla ciągu bez nawiązania, czyli w przypadku a):

$$\mu_n = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{Lb}, \quad (64)$$

lub ostatecznie

$$\mu_n = \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{\sqrt{n-1}}. \quad (65)$$

<sup>1)</sup> Dany magnetyczne można otrzymać dla Polski z obserwatorium magnetycznego w Świdrze.

b) Gdy ciąg jest obustronnie nawiązany, to przesunięcie środkowego punktu będzie takie same, jak przy podwójnym pomiarze połowy ciągu, zatem

$$\mu_s = \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{2\sqrt{n-1}}. \quad (66)$$

Dla ciągów poligonowych mamy w przypadku a) wzór

$$\mu_{n'} = \frac{\mu'}{\rho} L \sqrt{\frac{n'(2n'-1)}{6(n'-1)}}. \quad (67)$$

Porównując dokładność obu metod, otrzymamy w tym przypadku:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n'}} = \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\frac{6(n'-1)}{(n-1)n'(2n'-1)}}. \quad (68)$$

Jeżeli zatem przyjmiemy  $b = 20$  m,  $b' = 200$  m, to  $n - 1 = 10(n' - 1)$ , otrzymamy:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n'}} = \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\frac{0,6}{n'(2n'-1)}}. \quad (69)$$

Dla uzyskania długości ciągu  $L$ , dla której błąd  $\mu_n$  będzie równy  $\mu_{n'}$ , tj.  $\frac{\mu_n}{\mu_{n'}} = 1$ , otrzymamy, kładąc jako przeciętną wartość błędów średnich:  $\mu = \pm 6'$  i  $\mu' = \pm 0,5'$ , związek:

$$1 = \frac{12\sqrt{0,6}}{\sqrt{n'(2n'-1)}}$$

lub

$$2n'^2 - n' - 86,4 = 0, \quad (70)$$

który po rozwiązaniu dostarczy nam

$$n' \approx 7;$$

zatem  $L = (7 - 1) 200 = 1200$  m.

O ile ciąg przekracza długość 1,2 km może się okazać (np. przy wytyczeniu prostej przez las) ciąg busolowy korzystniejszy.

Sprawa przedstawia się jeszcze mniej korzystnie dla ciągów poligonowych, jeżeli porównamy je z ciągami busolowymi, przy których użyto kompasu orientacyjnego, gdyż wtedy możemy przyjąć  $\mu = \pm 2'$ . Wobec tego otrzymamy związek:

$$n' = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 9,6}}{4} = 2,4.$$

Ciąg busolowy zatem, mierzony przy pomocy kompasu orientacyjnego, może być dokładniejszy od poligonowego już wówczas, gdy długość jego wynosi kilkaset metrów.

b) Inaczej przedstawia się sprawa, gdy oba ciągi były obustronnie nawiązane i wyrównane. Biorąc pod uwagę wzór (53):

$$\mu_s' = \frac{\mu'}{\rho} L \sqrt{\frac{n'^4 + 2n'^2 - 3}{192n'(n'-1)^2}}, \quad (71)$$



otrzymujemy dla warunku, jak pod a):

$$\frac{\mu_s}{\mu_s'} = 6 \sqrt{\frac{19,2 n' (n' - 1)}{n'^4 + 2 n'^2 - 3}} = 1. \quad (72)$$

Z rozwiązania powyższego związku otrzymujemy  $n'$  zawarte między 26 i 27. Wobec tego, że  $L = (n' - 1) 200 = 5200$  m, okazuje się, że ciąg busolowy byłby korzystniejszy od poligonowego dopiero przy długości ponad 5200 m. Ponieważ tak długich poligonów nie zakładamy, przeto w tym przypadku, tj. gdy chodzi o zdjęcie szczegółów pewnego obszaru, metoda poligonowa góruje bezsprzecznie nad zdjęciem busolowym. Nieco korzystniej przedstawia się sprawa dla ciągu busolowego przy zastosowaniu kompasu orientacyjnego. Otrzymujemy wówczas na  $n'$  wartość między 9 a 10. Stąd wniosek, że przy użyciu kompasu orientacyjnego można otrzymać lepsze wyniki, niż to ma miejsce przy ciągu poligonowym, gdy długość ciągu jest większa niż 1800 m.

W praktyce tak długich ciągów nie używamy, skracając je przy pomocy punktów węzłowych; zatem i w tym przypadku metoda poligonowa jest korzystniejsza.

#### § 14. Ścisłe wyrównanie poligonu

Jeżeli chcemy, aby dokładność osiągnięta przy wyrównaniu poligonu nie ustępowała zbyt dokładnie osiągalnej przy triangulacji IV rzędu, przeprowadzamy jego wyrównanie metodą ścisłą.

Ponieważ wyrównanie dotyczy w tym przypadku spostrzeżeń niejednorodnych, tj. kątów i długości, przeto w myśl uwag Helmerta<sup>1)</sup> należy w miejsce warunku  $[p \lambda \lambda] = \min.$ , zastosować równoważny z nim warunek:

$$\left[ \frac{\lambda \lambda}{\mu \mu} \right] = \min., \quad (73)$$

przy czym  $\lambda$  są poprawkami, zaś  $\mu$  a priori przyjętymi błędami średnimi spostrzeżeń.

Jeżeli poligon założono między punktami triangulacyjnymi  $A$  i  $B$ , na których nawiązano się kątowno do punktów triangulacyjnych  $C$  i  $D$ , trzy warunki (które należy uwzględnić przy wyrównaniu równocześnie) mają kształt:

$$\left. \begin{aligned} [\beta]_i^n + \alpha_{C,A} - \alpha_{B,D} - n \cdot 180^\circ &= 0 \\ [b \cos \alpha]_i^n - (x_B - x_A) &= 0 \\ [b \sin \alpha]_i^n - (y_B - y_A) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

przy czym  $\beta$  oznaczają kąty wierzchołkowe,  $\alpha$  kąty kierunkowe,  $b$  boki poligonu, a  $x$  i  $y$  współrzędne punktów triangulacyjnych.

Z powodu błędów spostrzeżeń warunki te nie będą spełnione zupełnie ściśle, tak że po ich stronie prawej wystąpią zamiast zer odchyłki  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$ .

<sup>1)</sup> F. R. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (2-gie wydanie Lipsk, Berlin 1907), str. 98, ustęp pt. Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen.

Oznaczmy przez  $\delta\beta$  poprawki kątów wierzchołkowych,  $\delta b$  poprawki boków oraz przez  $\delta\alpha$  poprawki kątów kierunkowych, to, jak łatwo wykazać, będzie

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1 &= \delta\beta_1 \\ \delta\alpha_2 &= \delta\beta_1 + \delta\beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \delta\alpha_{n-1} &= [\delta\beta]_1^{n-1}.\end{aligned}\quad (75)$$

Wobec tego otrzymamy jako równania odchyłek następujące związki:

$$\begin{aligned}\text{I. } & \delta\beta_1 + \delta\beta_2 + \dots + \delta\beta_n + \omega_1 = 0, \\ \text{II. } & (y_1 - y_n) \frac{\delta\beta_1}{\rho} + (y_2 - y_n) \frac{\delta\beta_2}{\rho} + \dots + (y_{n-1} - y_n) \frac{\delta\beta_{n-1}}{\rho} + \cos\alpha_1 \delta b_1 + \\ & + \cos\alpha_2 \delta b_2 + \dots + \cos\alpha_{n-1} \delta b_{n-1} + \omega_2 = 0, \\ \text{III. } & (x_n - x_1) \frac{\delta\beta_1}{\rho} + (x_n - x_2) \frac{\delta\beta_2}{\rho} + \dots + (x_n - x_{n-1}) \frac{\delta\beta_{n-1}}{\rho} + \sin\alpha_1 \delta b_1 + \\ & + \sin\alpha_2 \delta b_2 + \dots + \sin\alpha_{n-1} \delta b_{n-1} + \omega_3 = 0.\end{aligned}\quad (76)$$

Znaczne ułatwienie rachunkowe uzyskujemy przeprowadzając wyrównanie w dwu grupach, przy czym grupę pierwszą stanowi warunek pierwszy, grupę drugą — dwa warunki dalsze (wraz z pierwszym w zmienionej formie).

Wyrównanie pierwszej grupy polega na równomiernym rozdziale odchyłki  $\omega_1 = f_\beta$  na poszczególne kąty, zatem:

$$\delta\beta_1 = -\frac{f_\beta}{n} + \delta\beta_1', \quad \delta\beta_2 = -\frac{f_\beta}{n} + \delta\beta_2', \dots, \delta\beta_n = -\frac{f_\beta}{n} + \delta\beta_n'. \quad (77)$$

Następnie obliczamy, na podstawie poprawionych kątów  $\beta$ , kąty kierunkowe  $\alpha$  i współrzędne punktu  $B: x_B', y_B'$  (w nawiązaniu do punktu  $A$ ).

Jeżeli jeszcze wprowadzimy za Eggertem współrzędne środka ciężkości punktów poligonu:

$$y_o = \frac{[y]_1^n}{n}, \quad x_o = \frac{[x]_1^n}{n}, \quad (78)$$

przekształca się warunki następująco:

$$\begin{aligned}\text{I. } & \delta\beta_1' + \delta\beta_2' + \dots + \delta\beta_n' = 0 \\ \text{II. } & (y_1 - y_o) \frac{\delta\beta_1'}{\rho} + (y_2 - y_o) \frac{\delta\beta_2'}{\rho} + \dots + (y_n - y_o) \frac{\delta\beta_n'}{\rho} + \\ & + \cos\alpha_1 \delta b_1 + \cos\alpha_2 \delta b_2 + \dots + \cos\alpha_{n-1} \delta b_{n-1} + f_x = 0 \\ \text{III. } & -(x_1 - x_o) \frac{\delta\beta_1'}{\rho} - (x_2 - x_o) \frac{\delta\beta_2'}{\rho} - \dots - (x_n - x_o) \frac{\delta\beta_n'}{\rho} + \\ & + \sin\alpha_1 \delta b_1 + \sin\alpha_2 \delta b_2 + \dots + \sin\alpha_{n-1} \delta b_{n-1} + f_y = 0,\end{aligned}\quad (79)$$



przy czym  $f_x$  i  $f_y$  będą nieco różne od  $\omega_2$  i  $\omega_3$  z powodu częściowego wyrównania kątów  $\beta$ .

Wreszcie po podstawieniu:

$$y_i - y_0 = \eta_i, \quad x_i - x_0 = \xi_i,$$

oraz

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{b_1} = \frac{\Delta x_1}{b_1}, \dots \quad \cos \alpha_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{b_i} = \frac{\Delta x_i}{b_i}, \quad (80)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{b_1} = \frac{\Delta y_1}{b_1}, \dots \quad \sin \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{b_i} = \frac{\Delta y_i}{b_i},$$

przemieniamy powyższe związki na:

$$\text{I.} \quad [\delta \beta']_1^n = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{\rho} [\eta \delta \beta']_1^n + \left[ \frac{\Delta x}{b} \delta b \right]_1^{n-1} + f_x = 0 \quad (81)$$

$$\text{III.} \quad \frac{1}{\rho} [\xi \delta \beta']_1^n + \left[ \frac{\Delta y}{b} \delta b \right]_1^{n-1} + f_y = 0.$$

Poprzednio przytoczona zasada wyrównania  $\left[ \frac{\lambda \lambda}{\mu \mu} \right] = \min.$  przybiera w tym przypadku kształt:

$$\left[ \frac{\delta \beta^2}{\mu_\beta^2} \right] + \left[ \frac{\delta b^2}{\mu_b^2} \right] = \min., \quad (82)$$

przy czym dla przyjęcia wartości błędów średnich boków posługujemy się wzorem empirycznym  $\mu_b = v\sqrt{b}$ , zaś błąd  $\mu_\beta$  przyjmuje się normalnie jednakowy dla wszystkich kątów, zależnie od dokładności odczytu na teodolicie i ilości powtarzań pomiaru. Wobec tego będzie:

$$\frac{1}{\mu_\beta^2} [\delta \beta^2] + \frac{1}{v^2} \left[ \frac{\delta b^2}{b} \right] = \min. \quad (83)$$

Po przyjęciu odpowiednich błędów średnich układamy równania korelat, przy czym, ponieważ pierwsza korelata  $K_1 = 0$ , pozostają związki:

$$\left( v^2 \left[ \frac{\Delta x^2}{b} \right] + \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} [\eta^2] \right) K_2 + \left( v^2 \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{b} \right] - \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} [\xi \eta] \right) K_3 + f_x = 0 \quad (84)$$

$$\left( v^2 \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{\rho} \right] - \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} [\xi \eta] \right) K_2 + \left( v^2 \left[ \frac{\Delta y^2}{b} \right] + \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} [\xi^2] \right) K_3 + f_y = 0.$$

Oznaczając

$$v^2 K_2 = k_2, \quad v^2 K_3 = k_3 \quad \text{oraz} \quad \frac{\mu_\beta^2}{\rho v^2} = q,$$

otrzymał prof. Eggert<sup>1)</sup> powyższe związki w jeszcze bardziej uproszczonej formie:

$$\left( \left[ \frac{\Delta x^2}{b} \right] + \frac{q}{\rho} [\eta^2] \right) k_2 + \left( \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{b} \right] - \frac{q}{\rho} [\xi \eta] \right) k_3 + f_x = 0 \quad (84')$$

$$\left( \left[ \frac{\Delta x \Delta y}{b} \right] - \frac{q}{\rho} [\xi \eta] \right) k_2 + \left( \left[ \frac{\Delta y^2}{b} \right] + \frac{q}{\rho} [\xi^2] \right) k_3 + f_y = 0.$$

Po obliczeniu  $k_2$  i  $k_3$  wyznacza się poprawki spostrzeżeń na podstawie związków:

$$\begin{aligned} \delta \beta_i' &= q (\eta_i k_2 - \xi_i k_3) \\ \delta b_i &= \Delta x_i k_2 + \Delta y_i k_3. \end{aligned} \quad (85)$$

Przyjęcie a priori niewłaściwego średniego błędu jednostkowego (a tym samym i wag) nie wpływa ujemnie na wynik wyrównania spostrzeżeń jednorodnych. Ma to miejsce także i przy wyrównaniu spostrzeżeń niejednorodnych, lecz tylko w tym wyjątkowym przypadku, gdy przyjęto średnie błędy wszystkich spostrzeżeń (zatem należących do wszystkich grup) w jednakowym stopniu za duże lub za małe. W każdym innym przypadku otrzymamy, przyjmując nieodpowiednie wielkości średnich błędów spostrzeżeń (różnie dla poszczególnych grup spostrzeżeń), wyniki nieściśle, względnie przy wielkich różnicach nawet zupełnie bezwartościowe.

Aby się zatem przekonać, czy wyniki uzyskane przytoczonym sposobem są rzeczywiście ściśle, ułożył autor kryterium, któremu powinny czynić zadość sumy kwadratów błędów dzielonych przez kwadraty przyjętych błędów średnich każdej grupy spostrzeżeń; a zatem  $\left[ \frac{\lambda' \lambda'}{\mu' \mu'} \right]$ ,  $\left[ \frac{\lambda'' \lambda''}{\mu'' \mu''} \right]$  itd.<sup>2)</sup>

Kryterium to opiera się na następującym rozumowaniu.

Niech  $\varepsilon$  oznaczają prawdziwe błędy spostrzeżeń. Jeżeli błędy średnie obrano zupełnie ściśle, wartości ilorazów  $\frac{\varepsilon_i^2}{\mu_i^2}$  będą przeciętnie, dla  $n$  dążącego do  $\infty$ , równe jedności, zatem gdy ilość spostrzeżeń wynosi  $n$ , będzie:

$$\left[ \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \right] = n. \quad (86)$$

W konsekwencji wyniesie kwadrat średniego błędu jednostkowego:

$$\mu_0^2 = \frac{\left[ \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \right]}{n} = 1. \quad (87)$$

<sup>1)</sup> O. Eggert, Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zeitschrift f. Vermessungswesen 1928, str. 657-675, oraz 1 część II tomu Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart 1931 (9-te wydanie).

<sup>2)</sup> Weigel. Referat na posiedzeniu Towarzystwa Naukowego we Lwowie, pt. »Wyrównanie spostrzeżeń niejednorodnych metodą najmniejszych kwadratów. Kryterium przyjęcia odpowiednich wag«. Sprawozdania Tow. Nauk. we Lwowie, rok 1936.



Ponieważ wzór na  $\mu_o^2$  wyrażony przez błędy pozorne opiewa:

$$\mu_o^2 = \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right]}{n-k} = \frac{\left[ \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right]}{r}, \quad (88)$$

przy czym  $k$  oznacza ilość niewiadomych, zaś  $r$  ilość warunków, przeto

$$\left[ \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right] = n - k = r. \quad (89)$$

Jeżeli błędy wszystkich spostrzeżeń przyjęto  $s$  razy za duże, wówczas powyższa suma kwadratów zmieni się na:

$$\frac{1}{s^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right] = \frac{n-k}{s^2} = \frac{r}{s^2}; \quad (90)$$

natomiast, o ile przyjmiemy je  $s$  razy za małe, będzie

$$s^2 \left[ \frac{\lambda^2}{\mu^2} \right] = s^2 (n-k) = s^2 r. \quad (90')$$

Wyniki wyrównania będą we wszystkich trzech przypadkach jednakowe; natomiast zmieniają się one, gdy na podstawie wzorów empirycznych przyjmiemy dla różnych kategorii spostrzeżeń nieodpowiednie błędy średnie.

Spostrzeżenia, wyrażone w różnych dymensjach, rozpadają się na grupy, zawierające spostrzeżenia o tych samych dymensjach. Niech na ogólną ilość spostrzeżeń  $n$  do grupy pierwszej należy  $n_1$ , do drugiej  $n_2, \dots$ , do ostatniej  $m$ -tej grupy  $n_m$  spostrzeżeń.

Biorąc pod uwagę, że suma wszystkich  $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$  ma być równa  $r$ , powinna suma  $\left[ \frac{\lambda_1^2}{\mu_1^2} \right]$  grupy pierwszej wynosić  $\frac{n_1}{n} r = \frac{n_1}{n} (n-k) = n_1 \left( 1 - \frac{k}{n} \right)$ , suma grupy drugiej  $\left[ \frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2} \right] = \frac{n_2}{n} r = n_2 \left( 1 - \frac{k}{n} \right)$ ; ogólnie zatem suma grupy  $i$ -tej powinna wynosić:

$$\left[ \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} \right] = \frac{n_i}{n} r = n_i \left( 1 - \frac{k}{n} \right). \quad (91)$$

Ostatni związek stanowi kryterium odpowiedniego przyjęcia błędów średnich (wag) dla wyrównania.

O ile posługujemy się przy obiorze błędów średnich wzorami empirycznymi, należy przeprowadzić wyrównanie spostrzeżeń niejednorodnych w sposób następujący. Po uzyskaniu wyników wyrównania na podstawie a priori przyjętych błędów średnich dla każdej grupy spostrzeżeń (jednorodnych), tworzymy ilorazy:

$$\left[ \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} \right] : \frac{n_i}{n} \quad \text{lub} \quad \left[ \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} \right] : n_i \left( 1 - \frac{k}{n} \right). \quad (92)$$

Jeżeli ilorazy te są sobie w przybliżeniu równe i wynoszą średnio  $s^2$ , to obrano a priori wszystkie błędy średnie  $s$  razy za małe. Wyniki wyrównania są jednak w tym przypadku zupełnie dobre, choć właściwe błędy średnie wynoszą  $s\mu$ . Natomiast jeżeli wartości wymienionych ilorazów okażą się dla poszczególnych grup różne:  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_m^2$ , to należy przeprowadzić drugie wyrównanie, przyjmując jako błędy średnie wielkości  $s_1 \mu_1, s_2 \mu_2, \dots, s_m \mu_m$ .

Wyniki drugiego wyrównania będą oczywiście zupełnie ścisłe.

Przy wyrównywaniu poligonów mamy tylko dwie grupy spostrzeżeń  $n_1$  i  $n_2$ , przy czym ilości  $n_1$  odpowiada ilość kątów  $n$ , ilości  $n_2$  — ilość boków  $n-1$ , zaś ilość wszystkich spostrzeżeń wynosi nie  $n$ , ale  $2n-1$ . Wobec tego należy wyznaczyć

$$\frac{1}{\mu_\beta^2} [\delta \beta^2]_1^n : \frac{3n}{2n-1} = s_1^2 = \sigma_1 \quad (93)$$

oraz

$$\frac{1}{\nu^2} \left[ \frac{\delta b^2}{b} \right] : \frac{3(n-1)}{2n-1} = s_2^2 = \sigma_2.$$

Gdy wielkości  $s_1$  i  $s_2$  są sobie w przybliżeniu równe, można przyjąć wyniki wyrównania za ścisłe; natomiast o ile zachodzi między nimi znaczniejsza różnica, należy wyrównanie przeprowadzić ponownie przy użyciu średnich błędów:

$$\begin{aligned} \text{dla kątów } \mu_\beta s_1 &= \mu_\beta \sqrt{\sigma_1}, \\ \text{zaś dla boków } \mu_b s_2 &= \nu s_2 \sqrt{b_i} = \nu \sqrt{\sigma_2} \sqrt{b_i}. \end{aligned} \quad (94)$$

Wyniki wyrównania drugiego będą zupełnie ścisłe.

W końcu należy zaznaczyć, że poprawienie przyjętych a priori błędów średnich może nastąpić tylko w przypadku, gdy przyjęcie to nastąpiło wedle wzorów empirycznych. O ile błędy średnie wyprowadzono dla każdego kąta lub boku na podstawie licznych pomiarów, nie możemy ich poprawiać, mimo nie spełnienia się podanego kryterium, a przyczyny tego faktu należy dopatrywać się w błędach systematycznych<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Weigel. Referat w Tow. Naukowym we Lwowie w maju 1937 r. pt. „Sposób wykrycia błędów systematycznych w wielkich sieciach triangulacyjnych”. Sprawozdanie Tow. Naukowego we Lwowie za rok 1937.



## ROZDZIAŁ X

### TACHIMETRIA

#### § 1. Ogólna zasada odległownic optycznych (dalmierzy)

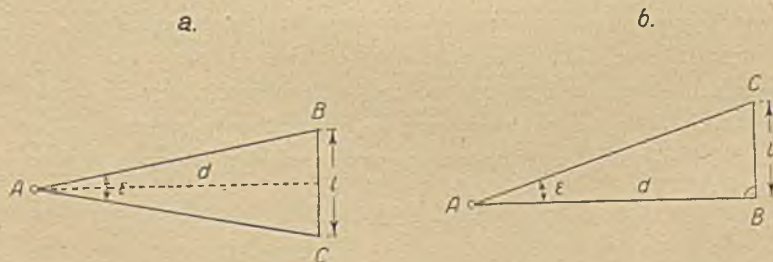
Zasada przyrządów, zwanych odległownicami optycznymi, jest bardzo prosta. Wyobraźmy sobie silnie wydłużony trójkąt równoramienny  $ABC$  (rys. 229a) o podstawie  $BC = l$  i naprzeciw niej leżącym kącie  $\varepsilon$ , tzw. *paralaktycznym*, wówczas  $d$ , wysokość trójkąta, czyli odległość wierzchołka  $A$  od podstawy, będzie określona związkiem:

$$d = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Wzór ten zmienia się nieznacznie w przypadku, gdy nadamy trójkątowi  $ABC$  kształt prostokątny (rys. 229b), gdyż wówczas

$$d = l \operatorname{ctg} \varepsilon. \quad (1a)$$

W przyrządach używanych w geodezji stosunek  $\frac{d}{l}$  wynosi około 100, a tym samym  $\varepsilon$  około  $\frac{1}{100}$ , natomiast w przyrządach używanych w topografii,



Rys. 229.

a szczególnie w odległownicach wojskowych, kąt paralaktyczny jest znacznie mniejszy.

Jeżeli przyjmiemy, że — jak to ma miejsce w odległownicach geodezyjnych —  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ , a  $d$  nie przekracza 300 m, możemy oba przytoczone wzory

zastąpić jednym wspólnym:

$$d = \frac{l}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Różnice, jakie stąd powstają, są — jak się łatwo można przekonać — zupełnie zaniedbywalne, gdyż:

$$\begin{aligned} \Delta d' &= \frac{l}{\varepsilon} - \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{l}{\varepsilon} - \frac{l}{\left(2 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^3}{8} + \dots\right)} = \frac{l}{\varepsilon} - \\ &- \frac{l}{\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{12} + \dots\right)} \approx \frac{l}{\varepsilon} - \frac{l}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{12}\right) = \frac{l\varepsilon}{12}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{dla } \varepsilon = \frac{1}{100}, \quad d = 100 \text{ m, czyli } l = 1 \text{ m, } \Delta d'_{100} = 0,83 \text{ mm,}$$

$$\text{dla } d = 300 \text{ m } \Delta d'_{300} = 2,49 \text{ mm,}$$

$$\text{zaś różnica } \Delta d'' = \frac{l}{\varepsilon} - l \operatorname{ctg} \varepsilon \approx \frac{l}{\varepsilon} - \frac{l}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\right) = \frac{l\varepsilon}{3},$$

choć czterokrotnie większa od poprzedniej (gdyż dla  $d = 100$  m,  $\Delta d''_{100} = 3,32$  mm, a dla  $d = 300$  m,  $\Delta d''_{300} = 9,96$  mm), jest jednak zawsze zaniedbywalna wobec błędów pomiarowych.

Biorąc pod uwagę związek  $d = \frac{l}{\varepsilon}$ , otrzymujemy według prawa przeniesienia się błędów, ze względu na to, że  $\frac{\partial d}{\partial l} = \frac{1}{\varepsilon}$  oraz  $\frac{\partial d}{\partial \varepsilon} = -\frac{l}{\varepsilon^2} = -\frac{d^2}{l}$ , kwadrat średniego błędu:

$$\mu_d^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{d^2}{l}\right)^2 \mu_\varepsilon^2. \quad (4)$$

Zasada niektórych odległownic wojskowych, jak też i odległownic znajdujących się przy przyrządach fotogrametrycznych (fototeodolitach), polega na zastosowaniu stałego, dokładnie znanego, odcinka  $l$  przy zmiennych kątach paralaktycznych  $\varepsilon$ ; w ten sam sposób można mierzyć długości boków poligonów przy użyciu 2-metrowej poziomej łaty inwarowej (patrz § 11). Wówczas jednak błąd odległości  $d$  zależy prawie wyłącznie od błędu  $\mu_\varepsilon$  i wynosi:

$$\mu_d = \frac{d^2}{l} \mu_\varepsilon, \quad (5)$$

jest zatem proporcjonalny do kwadratu odległości  $d$ . Natomiast w odległownicach używanych zazwyczaj w praktyce geodezyjnej ma zastosowanie stały kąt paralaktyczny  $\varepsilon$  przy zmiennym odcinku  $l$ , a wówczas jest:

$$\mu_d = \frac{\mu_l}{\varepsilon} = \frac{d}{l} \mu_l = \frac{d}{M} \mu_{lg l} = 2,3026 d \mu_{lg l}. \quad (6)$$

(przy czym  $M$  jest modulem logarytmicznym, a  $lg$  oznacza logarytm Briggsowski).



Prawo przenoszenia się błędów jest w tym przypadku bardziej korzystne niż poprzednio, gdyż błąd  $\mu_d$  wzrasta proporcjonalnie tylko do samej odległości  $d$ .

## § 2. Odległownice geodezyjne

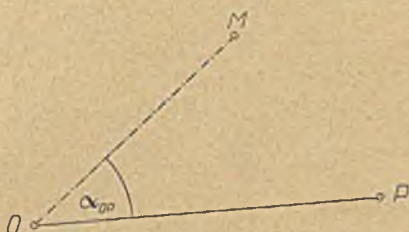
Aby móc przeprowadzić racjonalny podział odległownic, musimy najpierw zdać sobie sprawę, do jakich zdjęć będziemy ich używali.

W praktyce dzisiejszej posługujemy się odległownicami geodezyjnymi głównie:

A) do sporządzania zdjęć terenowych (planów warstwicowych)

B) do pomiaru długości boków poligonu i zdjęcia szczegółów metodą biegunową.

A) Ponieważ zdjęcie konfiguracji terenu może być przeprowadzone ze znacznie mniejszą dokładnością, niż to ma miejsce w metodzie poligonowej, przeto możemy posłużyć się w tym przypadku przyrządami mniej dokładnymi, tzw. *tachimetrami*, przy pomocy których uzyskujemy w zamian zato w szybki sposób trzy współrzędne dla usytuowania każdego punktu w przestrzeni. I tak, wyznaczając położenie punktu  $P$  względem prostej  $OM$ , mierzymy (wykonując pomiar z punktu  $O$ ) kąt  $\alpha_{OP}$ , odległość poziomą  $OP$ , oraz  $h$ , wzniesienie punktu  $P$  nad punktem  $O$  (rys. 230).



Rys. 230.

Tachimetry dzielą się na kilka grup; i tak rozróżniamy tachimetry zwyczajne (typ Reichenbacha), redukcyjne, oraz precyzyjne Tichy'ego.

Tachimetry zwyczajne mają w miejsce zwykłego krzyża nitkowego, krzyż trójramienny, składający się z jednej nitki pionowej i trzech nitek poziomych, przy czym odstęp obu skrajnych nitek od środkowej jest jednakowy. Nitki te wyznaczają na obrazie łaty, ustawionej w punkcie  $P$  (którego odległość od stanowiska przyrządu  $O$  mamy wyznaczyć), poprzednio wspomniany odcinek  $l$ , a tym samym i odległość  $OP$  w linii powietrznej, którą redukujemy się rachunkowo na poziomą, o ile zaobserwujemy jeszcze dodatkowo kąt pionowy prostej  $OP$ .

Tachimetry redukcyjne przeprowadzają wspomnianą redukcję samoczynnie przy pomocy odpowiedniego mechanizmu, względnie odpowiedniej optyki.

Tachimetry precyzyjne Tichy'ego były dwójakiego rodzaju: z łatą logarytmiczną i zwyczajną. Tak jedne, jak i drugie dostarczały odległości i różnice wysokości znacznie dokładniej niż zwyczajne; mimo to przyrządy te nie znalazły w praktyce zastosowania.

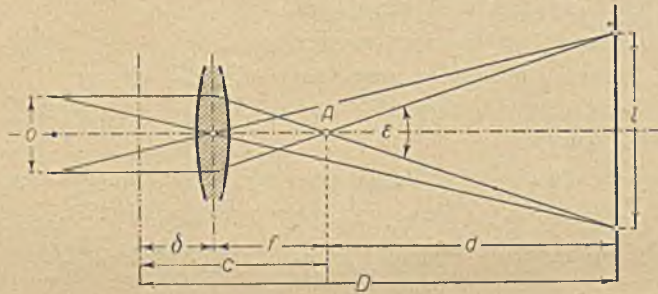
B) Przyrządy, które są dziś używane w praktyce dla dokładnego oznaczenia położenia punktów względem podstawy, czy też podstaw zdjęcia, są *odległownicami dwuobrazowymi*. Kąt paralaktyczny uzyskuje się przez wstawienie przed wylotem obiektywu jednego, względnie dwu klinów optycznych.

Jeżeli jest tylko jeden klin, to jest on ustawiony tylko przed dolną połową obiektywu, podczas gdy górna połowa obiektywu działa normalnie; przy dwu klinach jeden zakrywa dolną, a drugi górną połowę obiektywu, powodując odchylenie promieni przechodzących przez górną, względnie dolną połowę, w dwu przeciwnych kierunkach, a tym samym wzajemne przesunięcie się obrazów łaty, ustawionej poziomo na odpowiednim stojaku. Jest oczywiste, że przy użyciu tylko jednego klina odchyła się tylko ta część promieni, która przezeń przechodzi względem drugiej części. Z wielkości przesunięcia obrazów odczytuje się odległości częściowo na lacie, a częściowo przy pomocy dodatkowego urządzenia. Odległownice te należą do precyzyjnych i są omówione w rozdziale XI, § 2.

### § 3. Teoria optyki tachimetrów zwyczajnych

#### a) Tachimetr z okularzem Ramsdena.

Niech w lunecie o okularze Ramsdena rozstaw skrajnych nitek krzyża nitkowego wynosi  $o$ , zaś ogniskowa obiektywu  $f$ , wówczas patrząc przez tę lunetę na łatę ustawioną pionowo w odległości  $f + d$  od obiektywu przyrządu, zobaczymy obraz  $l$  pewnego odcinka łaty pokrywający się z rozstawem  $o$ .



Rys. 231.

Biorąc pod uwagę trójkąty równoramienne, których wierzchołki schodzą się w punkcie  $A^1$ , jeden o podstawie  $o$  i wysokości  $f$ , zaś drugi o podstawie  $l$  i wysokości  $d$ , otrzymujemy związek:

$$o : f = l : d \quad \text{czyli} \quad d = \frac{f}{o} \cdot l, \quad (7)$$

wobec czego odstęp  $D$  łaty od osi przyrządu wynosi:

$$D = \delta + f + d = \delta + f + \frac{f}{o} l. \quad (8)$$

Oznaczając  $\delta + f = c$  (mała stała tachimetryczna),

oraz  $\frac{f}{o} = k$  (duża stała tachimetryczna), otrzymujemy związek:

$$D = kl + c. \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Punkt  $A$ , od którego począwszy odległość  $D$  od łaty jest wprost proporcjonalna do odcinka  $l$ , nazywamy punktem analaktycznym przyrządu.

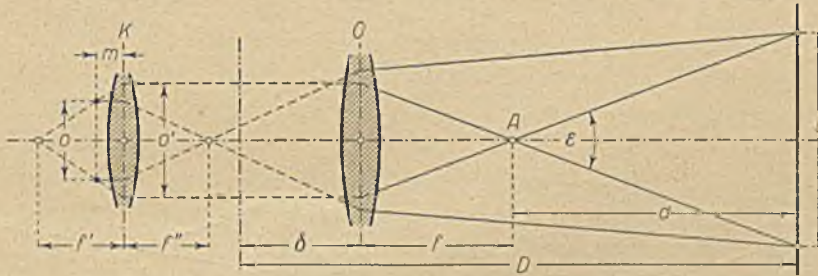


Zarazem widać wprost z rys. 231, że  $k = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}$ , względnie w dostatecznym przybliżeniu  $k = \operatorname{ctg} \varepsilon$  lub  $k = \frac{1}{\varepsilon}$  (p. ustęp 1).

Wielkości  $o$  i  $f$  dobieramy tak, aby stała  $k$  była równa 100; stała  $c$  wynosi w przyrządach typu starszego zwykle około 0,30 m. Przyrządy nowsze mają stałą  $c = 0$  (patrz c).

b) *Tachimetr z okulem Huygensa.*

Okular Huygensa różni się — jak wiadomo — od okularu Ramsdena głównie tym, że między krzyżem nitkowym a obiektywem posiada soczewkę zbierającą  $K$  (kolektyw), która umieszczona w rurze okularu pozostaje przy użyciu wyciągu okularowego w stałej odległości  $m$  od krzyża nitkowego.



Rys. 232.

Biorąc pod uwagę promienie, przechodzące przez ognisko kolektywu i skrajne nitki krzyża nitkowego, otrzymujemy po drugiej stronie kolektywu dwa promienie równoległe do osi optycznej w odstępnie  $o'$  (w miejsce rozstawu nitek strajnych  $o$ ), przy czym

$$o' = o \frac{f'}{f' - m}. \quad (10)$$

Rys. 232 objaśnia nam bieg promieni, wychodzących ze skrajnych punktów odcinka  $l$  łaty pionowej.

Odległość  $D$  otrzymujemy, jak poprzednio, z wzoru (9), przy czym jednak

$$k = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{f}{o'} = \frac{f}{o} \cdot \frac{f' - m}{f'} = \frac{f}{o} \left(1 - \frac{m}{f'}\right). \quad (11)$$

Jak tedy widać, można przez zmianę odległości  $m$  zmienić stałą  $k$  lunety Huygensa, a tym samym zrobić ją równą 100.

c) *Tachimetr analaktyczny systemu prof. Porro.*

W roku 1852 ogłosił prof. Porro z Mediolanu teorię *lunety analaktycznej*, tj. takiej, której punkt analaktyczny znajduje się na osi pionowej odległownicy, a tym samym jej stała  $c = 0$ .

Sprowadzenie punktu analaktycznego z przedniego ogniska obiektywu do osi pionowej przyrządu przeprowadza się przez wstawienie pomiędzy obiek-





Wielkość  $e$  otrzymujemy z porównania związków (13) i (16), skąd

$$e = f_2 \frac{f_{1,2} + \delta}{f_{1,2}}. \quad (18)$$

Konstruktor posługuje się zazwyczaj obiektywem pewnego typu (ma zatem daną ogniskową  $f_1$ ), a ponieważ żądane dla przyrządu powiększenie zależy przy danym typie okularu od  $f_{1,2}$ , przeto należy ustawić związek na  $e$  nie zawierający  $f_2$ . Ponieważ wedle wzoru (16):

$$f_2 = \frac{e - f_1}{f_{1,2} - f_1} f_{1,2},$$

przeto ostatecznie będzie

$$e = f_1 \frac{f_{1,2} + \delta}{f_1 + \delta}. \quad (19)$$

W praktyce uważamy i te lunety za analaktyczne, w których punkt  $A$  jest o kilka centymetrów oddalony od osi pionowej przyrządu.

d) *Tachimetr (odległownica) z lunetą o soczewce ogniskującej* (systemu dra inż. H. Wilda).

W rozdziale III (Optyka) podano zasadę optyki lunet z soczewkami ogniskującymi; w ustępie niniejszym zastanowimy się, pod jakimi warunkami można użyć tego rodzaju lunet jako odległownicy.

Jak z poprzednich wywodów wynika, oba punkty główne soczewki równoważnej znajdują się na osi optycznej przed obiektywem; gdyby zatem osie celowe przechodzące przez skrajne nitki krzyża nitkowego były prostymi, lunety z soczewkami ogniskującymi nie mogłyby być analaktyczne, gdyż punkt analaktyczny znajdowałby się przed ich obiektywem. Celowe te są krzywymi rzędu 4-go (jak to wykazano w § 12, b, rozdz. III), silnie zakrzywionymi dla odległości przedmiotowych  $p_1$  małych (mniejszych od 5 m), zaś dla  $p_1$  większych pokrywają się (praktycznie) ze swymi asymptotami. Można zatem tak lunetę zbudować, aby asymptoty osi celowych przecięły się na osi pionowej odległownicy.

Równanie stycznej do osi celowej jest (por. wzór (70) str. 62):

$$\frac{d \omega_p}{d p_1} = A \frac{\omega_o}{f_1} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2 \right\}, \quad (20)$$

przy czym

$$A = \frac{|f_2|}{|f_2| + d - e_\infty}, \quad \text{zaś } B = \frac{f_1}{f_1 + d - 2e_\infty}. \quad (21)$$

Równanie to zastosujemy do celowych, przechodzących przez skrajne nitki krzyża, zmieniając je tylko o tyle, że  $\omega_p$ , odległość skrajnego punktu przedmiotu od osi optycznej, zastąpimy przez  $l/2$ , a w konsekwencji  $\omega_o$  przez  $o/2$  (tj. połowę rozstawu nitek krzyża nitkowego), tak aby odcinkowi  $l$  na łacie odpowiadał w lunecie obraz  $o$ . Otrzymamy zatem:

$$\frac{dl}{d p_1} = A \frac{o}{f_1} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2 \right\} = \frac{o}{(f_{1,2})_\infty} \left\{ 1 - 2 \left( \frac{B f_1}{p_1 - f_1} \right)^2 \right\}, \quad (22)$$

a jeżeli tak obierzemy stałe lunety, aby dla najmniejszego  $p_1$ , wynoszącego w praktyce 10 m, wyrażenie  $2 \left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2$  było zaniedbywalne wobec jedności, otrzymamy ostatecznie;

$$\frac{dl}{dp_1} = \frac{o}{(f_{1,2})_\infty} = 2 \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \approx \varepsilon. \quad (22a)$$

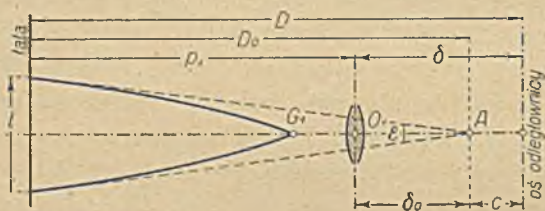
Ponieważ średni błąd odczytu odcinka  $l$  wynosi w odległości  $p_1 = 10$  m co najmniej 0,5 mm, przeto należy przy budowie tachimetrów zwyczajnych tak dobrać stałe  $B$  i  $f_1$ , aby wyrażenie  $\frac{o}{(f_{1,2})_\infty} 2 \left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2$  było mniejsze niż  $\frac{0,5}{10000}$ , a wobec tego, że  $\frac{(f_{1,2})_\infty}{o} = 100$ , wzór (22 a) jest ważny, gdy (dla  $p_1 = 10$  m):

$$2 \left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2 < 0,005. \quad (23)$$

Odległość punktu  $A$  od obiektywu jest (wedle rys. 234)

$$\delta_o = D_o - p_1, \text{ a ponieważ } D_o = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{lf_1}{Ao} = \frac{l(f_{1,2})_\infty}{o}, \quad (24)$$

przeto 
$$\delta_o = \frac{lf_1}{Ao} - p_1 = \frac{l(f_{1,2})_\infty}{o} - p_1. \quad (25)$$



Rys. 234.

Związek na  $\omega_p$  jest wedle równania (66) na str. 61:

$$\omega_p = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{|f_2| \omega_o}{|f_2| + d - e},$$

zatem w naszym przypadku jest

$$\begin{aligned} l &= \frac{p_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{|f_2| o}{|f_2| + d - e} = \frac{p_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{|f_2| o}{|f_2| + d - e_\infty - \Delta e} = \\ &= \frac{p_1 - f_1}{f_1} Ao \left( 1 + \frac{\Delta e}{|f_2| + d - e_\infty} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

a po wstawieniu wartości  $\Delta e = e - e_\infty = \frac{B}{A} \cdot \frac{|f_2| f_1}{p_1 - f_1}$  (p. str. 62) otrzymujemy, z zaniedbaniem wyrazów tego samego rzędu co  $2 \left( \frac{Bf_1}{p_1 - f_1} \right)^2$ :

$$l = \frac{p_1 - f_1}{f_1} Ao + ABo = \frac{p_1 - f_1}{(f_{1,2})_\infty} o + \frac{f_1}{(f_{1,2})_\infty} Bo. \quad (27)$$

<sup>1)</sup> K. Weigel, Teoria optyczna lunety z soczewką ogniskującą jako odległownicy. Przegląd Mierniczy, 1933.



Po wstawieniu wartości  $l$  do związku na  $\delta_0$  będzie:

$$\delta_0 = p_1 - f_1 + B f_1 - p_1 = (B - 1) f_1. \quad (28)$$

Jeżeli luneta ma być — jak to obecnie dla odległownic żądamy — analaktyczna, musi być stała  $c = 0$ , zatem

$$0 = \delta - \delta_0 \text{ lub } \delta = (B - 1) f_1. \quad (29)$$

Odstęp osi pionowej odległownicy od obiektywu bywa obecnie zazwyczaj nieco mniejszy niż połowa długości lunety; położymy zatem ogólnie  $\delta = m d$ , przy czym  $m$  jest nieco mniejsze niż 0,5, zaś  $d$  jest odstępem płaszczyzny krzyża nitkowego od obiektywu. Ponieważ  $B = \frac{f_1}{f_1 + d - 2 e_\infty}$ , przeto wstawiając te wartości do związku (29) otrzymamy:

$$m d = f_1 \frac{2 e_\infty - d}{f_1 + d - 2 e_\infty},$$

$$e_\infty = \frac{(1 + m) f_1 + m d}{2 (f_1 + m d)} d. \quad (30)$$

skąd

Przy budowie odległownicy konstruktor posługuje się pewnym typem obiektywu, ma zatem daną wartość  $f_1$ , zaś ze względu na powiększenie musi (przy danym typie okularu) obrac odpowiednią ogniskową  $(f_{1.2})_\infty$  soczewki równoważnej. Te dwa przyjęcia, jak też  $m$ , wystarczą do obliczenia reszty stałych lunety, tj.  $d$ ,  $|f_2|$  i  $e_\infty$ .

Ze związku  $(f_{1.2})_\infty = \frac{f_1 |f_2|}{|f_2| - f_1 + e_\infty}$  wyznaczamy  $e_\infty$ , a porównując wynik z poprzednio otrzymanym związkiem, otrzymujemy relację

$$|f_2| = \left( f_1 - \frac{(1 + m) f_1 + m d}{2 (f_1 + m d)} d \right) \frac{(f_{1.2})_\infty}{(f_{1.2})_\infty - f_1}. \quad (31)$$

Ogniskową  $|f_2|$  można otrzymać również ze związków  $\frac{|f_2| + d - e_\infty}{|f_2|} = \frac{d - e_\infty}{f_1 - e_\infty}$  i  $(f_{1.2})_\infty = \frac{f_1 |f_2|}{|f_2| - f_1 + e_\infty}$ , przy czym okazuje się, że:

$$|f_2| = (d - f_1) \frac{f_1 (f_{1.2})_\infty}{\{(f_{1.2})_\infty - f_1\}^2}. \quad (32)$$

Porównując oba wyniki na  $|f_2|$  otrzymujemy związek

$$(d - f_1) \frac{f_1 (f_{1.2})_\infty}{\{(f_{1.2})_\infty - f_1\}^2} = \left( f_1 - d \frac{(1 + m) f_1 + m d}{2 (f_1 + m d)} \right) \frac{(f_{1.2})_\infty}{(f_{1.2})_\infty - f_1},$$

lub

$$(d - f_1) \frac{f_1}{(f_{1.2})_\infty - f_1} = f_1 - d \frac{(1 + m) f_1 + m d}{2 (f_1 + m d)}.$$

a po uporządkowaniu wedle  $d^2$  i  $d$ :

$$d^2 m (1 + F) + d f_1 (1 - m) (1 + F) = f_1^2 (2 + F), \quad (33)$$

przy czym  $F = \frac{2 f_1}{(f_{1.2})_\infty - f_1}$ ; ostatecznie będzie:

$$d = -\frac{f_1}{2 m} (1 - m) + \frac{f_1}{2 m} \sqrt{(1 - m)^2 + 4 m \frac{2 + F}{1 + F}}$$

lub

$$d = -\frac{f_1}{2 m} (1 - m) + \frac{f_1}{2 m} \sqrt{(1 - m)^2 + 8 m \frac{(f_{1.2})_\infty}{(f_{1.2})_\infty + f_1}}. \quad (34)$$

Na podstawie obranych  $f_1$  i  $(f_{1.2})_\infty$  obliczamy  $d$ , a następnie  $|f_2|$  i  $e_\infty$  jednym z wzorów poprzednio podanych, kontrolując czy  $2\left(\frac{B f_1}{p_1 - f_1}\right)^2$  jest mniejsze niż 0,005. Przy budowie odległownic dwuobrazowych Wilda i Zeissa, których dokładność jest około 10 razy większa niż tachimetrów zwyczajnych, należy przyjąć  $2\left(\frac{B f_1}{p_1 - f_1}\right)^2 < 0,0005$ . (Por. końcowy ustęp § 2, rozdz. XI).

Oczywiście, że obliczenia te należy uważać za orientacyjne, gdyż często trzeba będzie ich wyniki nieco zmienić z innych, nie wspomnianych tu powodów (np.  $d$  lub  $|f_2|$  wypadną nieodpowiednie ze względów technicznych itp.). W tych przypadkach należy rachunek przeprowadzić ponownie, po uwzględnieniu poprawek.

Aby stała  $k$  lunety wynosiła 100 musi być

$$2 \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{100} = \frac{A}{f_1} o = \frac{o}{(f_{1.2})_\infty}, \quad (35)$$

czyli rozstaw nitek

$$o = \frac{f_1}{100 A} = \frac{f_1 (|f_2| + d - e_\infty)}{100 |f_2|} = \frac{(f_{1.2})_\infty}{100}. \quad (36)$$

#### § 4. Wyznaczenie stałych odległownicy

Wprawdzie fabryki instrumentów geodezyjnych podają przy dostarczaniu odległownic ich stałe, mimo to każdy, kto zamierza używać odległownic przy pomiarach, powinien umieć wyznaczyć stałe swego przyrządu drogą empiryczną.

W tym celu obieramy w terenie zupełnie płaskim stanowisko przyrządu (tachimetru) i po doprowadzeniu jego osi do pionu wytyczamy prostą, odmierając na niej bardzo dokładnie od punktu początkowego kilka odległości  $D$ , np. 50, 100 i 150 m. Aby błędy pomiaru tych odległości mogły być w dalszych wywodach pominięte, należy je mierzyć najmniej dwa razy łątami lub pięć (wzgl. sześć) razy taśmą (łąta i taśma muszą być skomparowane).



Po doprowadzeniu osi celowej przyrządu do poziomu (przy czym postępowanie zależy, jak przy przyrządach niwelacyjnych, od jego konstrukcji), odczytuje się na latach, ustawionych ściśle pionowo na palikach wbitych w poprzecznie wspomnianych odległościach od instrumentu, wszystkie trzy (lub co najmniej dwie skrajne) nitki. Dla powiększenia dokładności w ten sposób otrzymywanych odcinków  $l$ , można położenie osi celowej odchylić od poziomu o bardzo nieznaczny kąt w kierunku dodatnim i ujemnym (przy pomocy śruby do ruchu leniwego) i w tych jej położeniach dokonać również odczytów na lacie, tworząc następnie średnią. Dokładność odczytów odcinków  $l$  można także zwiększyć przez dobranie takich odległości  $D$ , dla których obie skrajne nitki wypadają na środek pół centymetrowych. Osiąga się to przez odpowiednie zbliżenie, względnie oddaleniełaty i nieznaczne pochylenie osi celowej.

Gdyby odcinki  $l$  były bezbłędne, zasadnicze równanie na odległośćłaty od przyrządu byłoby  $D = kl + c$ ; ponieważ jednak poszczególne  $l$  są błędne, przeto równanie to musi opiewać:

$$D = k(l + \lambda) + c, \quad (37)$$

przy czym, jak to wynika z doświadczeń, błąd odcinka  $l$  można przyjąć proporcjonalny do odległości  $D$ , względnie do samego odcinka  $l$ , a w konsekwencji wagi poszczególnych spostrzeżeń odwrotnie proporcjonalne do  $l^2$ .

Po odpowiednim uporządkowaniu równania błędów będą miały kształt następujący:

$$\lambda_i = \frac{D_i - c}{k} - l_i \quad \text{z wagami } p_i = \frac{1}{l_i^2}, \quad (38)$$

zaś po pomnożeniu przez  $k$  zmienia się na:

$$\lambda'_i = D_i - c - kl_i \quad \text{z wagami } p'_i = \frac{1}{k^2 l_i^2}, \quad (39)$$

względnie wobec tego, że  $k = \text{const.}$ ,

$$p'_i = \frac{1}{l_i^2}. \quad (40)$$

Aby wagi poszczególnych spostrzeżeń stały się jednakowe, należy każdy związek podzielić przez odpowiednie  $l_i$  otrzymując

$$\frac{\lambda'_i}{l_i} = \frac{D_i}{l_i} - \frac{c}{l_i} - k, \quad (41)$$

lub

$$\lambda''_i = k + \frac{c}{l_i} - \frac{D_i}{l_i} \quad \text{o wagach równych } (p'' = 1). \quad (42)$$

Na podstawie wyprowadzonych równań błędów możemy albo wyznaczyć obie stałe (jako niewiadome), lub też po bezpośrednim wyznaczeniu stałej  $c$ , obliczyć z równań błędów tylko stałą  $k$ . Ten drugi sposób jest jednak tylko wówczas możliwy, gdy między obiektywem a okularzem lunety nie ma żadnej soczewki.

a) *Bezpośrednie wyznaczenie stałej c.*

O ile jesteśmy pewni, że pomiędzy obiektywem a okularum lunety odległownicy nie ma żadnej soczewki, możemy wyznaczyć małą stałą  $c$  w sposób następujący.

Obieramy jako cel dowolny przedmiot w znaczniejszej odległości (około 1 km lub więcej) i nastawiamy nań lunetę odległownicy. Aby ów przedmiot ujrzeć jak najwyraźniej, usuwamy paralaksę przy pomocy śruby wyciągu okularowego. Ponieważ odległość celu jest bardzo daleka, przeto płaszczyzna obrazu, a zarazem i krzyża nitkowego, znajdzie się w wielkim przybliżeniu w  $f$  (odległości ogniskowej obiektywu). Odmierzamy ją zatem podziałką jako odstęp obiektywu od śrubek krzyża nitkowego. Ponieważ  $\delta$ , tj. odstęp obiektywu od osi pionowej przyrządu, da się również łatwo wymierzyć, przeto sumując w ten sposób otrzymane wielkości  $f$  i  $\delta$ , otrzymujemy stałą  $c$  z błędem około  $\pm 1$  cm, zatem bardzo dokładnie.

b) *Wyznaczenie dużej stałej k w przypadku, gdy stała c jest znana.*

Jak wynika z kształtu równań błędów (42), wyznacza się dużą stałą  $k$ , gdy wartość stałej  $c$  jest znana, jako zwykłą średnią arytmetyczną:

$$k = \frac{\left[ \frac{D - c}{l} \right]}{n}, \quad (43)$$

jeśli ilość spostrzeżeń (pomiarów) jest  $n$ .

Średni błąd w ten sposób wyznaczonej stałej  $k$  wynosi przy przyjęciu, że stała  $c$  jest bezbłędna:

$$\mu_k = \sqrt{\frac{[\lambda'' \lambda'']}{n(n-1)}}. \quad (44)$$

c) *Równoczesne wyznaczenie obu stałych k i c.*

Posługując się równaniami błędów (42), otrzymujemy dla wyznaczenia obu stałych dwa równania normalne; natomiast ze względu na to, że współczynnik przy niewiadomej  $k$  równa się jedności, nie będziemy posługiwali się przy ich rozwiązywaniu sposobem Gaussa, lecz wyrugujemy niewiadomą  $k$  z równań błędów, odejmując od każdego z nich sumę wszystkich równań błędów podzieloną przez ich ilość  $n$ .

Równania błędów:

$$\begin{aligned} \lambda_1'' &= k + \frac{c}{l_1} - \frac{D_1}{l_1}, \\ \lambda_2'' &= k + \frac{c}{l_2} - \frac{D_2}{l_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_n'' &= k + \frac{c}{l_n} - \frac{D_n}{l_n}; \end{aligned} \quad (45)$$

$$\text{suma:} \quad [\lambda'''] = nk + c \left[ \frac{1}{l} \right] - \left[ \frac{D}{l} \right] = 0.$$



Po przekształceniu otrzymamy poszczególne równania w formie następującej:

$$\lambda_i'' = c \left( \frac{1}{l_i} - \frac{\left[ \frac{1}{l} \right]}{n} \right) - \left( \frac{D_i}{l_i} - \frac{\left[ \frac{D}{l} \right]}{n} \right) = c A_i - L_i, \quad (46)$$

a po wyznaczeniu  $c$  przy pomocy wzoru (drugiego równania normalnego):

$$c = \frac{[AL]}{[AA]}, \quad (47)$$

uzyskujemy z sumy równań błędów (pierwszego równania normalnego) stałą  $k$ :

$$k = \frac{1}{n} \left( \left[ \frac{D}{l} \right] - \frac{[AL]}{[AA]} \left[ \frac{1}{l} \right] \right), \quad (48)$$

przy czym

$$A_i = \frac{1}{l_i} - \frac{\left[ \frac{1}{l} \right]}{n}, \quad L_i = \frac{D_i}{l_i} - \frac{\left[ \frac{D}{l} \right]}{n}.$$

Dla wyznaczenia średnich błędów obu stałych oblicza się nasamprzód średni błąd (jednostkowy):

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda''\lambda'']}{n-2}}, \quad (49)$$

a następnie ustawia się równania wag, które przy normalnym toku postępowania (algorytm Gaussa) przedstawiają się:

$$\left. \begin{aligned} n Q_{1.1} + \left[ \frac{1}{l} \right] Q_{1.2} &= 1, & n Q_{1.2} + \left[ \frac{1}{l} \right] Q_{2.2} &= 0, \\ \left[ \frac{1}{l} \right] Q_{1.1} + \left[ \frac{1}{l^2} \right] Q_{1.2} &= 0, & \left[ \frac{1}{l} \right] Q_{1.2} + \left[ \frac{1}{l^2} \right] Q_{2.2} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Równanie ostatnie w formie zredukowanej

$$\left( \left[ \frac{1}{l^2} \right] - \frac{\left[ \frac{1}{l} \right]^2}{n} \right) Q_{2.2} = 1,$$

jest identyczne z równaniem:  $[AA] Q_{2.2} = 1$ , (51)

które otrzymuje się wprost z drugiego równania normalnego, użytego do wyznaczenia niewiadomej  $c$ , a ponieważ z porównania związków pierwszego i czwartego wzoru (50) wynika, że:

$$Q_{1.1} = \frac{\left[ \frac{1}{l^2} \right]}{n} Q_{2.2},$$

$$\text{przeto } \mu_c^2 = \frac{\mu^2}{[AA]}, \quad \text{zaś } \mu_k^2 = \frac{\left[ \frac{1}{l^2} \right] \mu^2}{n [AA]}. \quad (52)$$

Współczynnik  $Q_{1,2}$ , potrzebny dla ewentualnego wyznaczenia średnich błędów odległości pewną odległością, jest — jak łatwo stwierdzić — równy:

$$-\frac{\left[\frac{1}{l}\right]}{n[AA]}$$

Oczywiście, że wyznaczenie stałych należy przeprowadzić w warunkach korzystnych, tj. nie podczas silnego wiatru (który mógłby powodować nieznaczne poruszenie się laty podczas odczytów), ani też podczas silnej wibracji powietrza itp.

Przykład. Dla wyznaczenia stałych tachimetrycznych małego instrumentu noniuszowego f-my Starke-Kammerer Nr. 8224, pomierzono w pięciu znanych dokładnie odległościach  $D$  odcinki  $l$  na lacie pionowej. Odczyty laty wykonywano każdorazowo trzykrotnie. Obie stałe wyznaczono równocześnie. Poniżej zestawiono obserwacje oraz obliczenie współczynników równań normalnych.

L. p.	$D$	$l$		$\frac{1}{l}$	$A$	$\frac{D}{l}$	$L$
		odczyty	średnia				
1	5,00	0,047	0,0463	21,598	+ 16,222	107,99	+ 5,414
		0,046					
		0,046					
2	40,00	0,392	0,3927	2,546	— 2,830	101,86	— 0,716
		0,396					
		0,390					
3	80,00	0,790	0,7920	1,263	— 4,113	101,01	— 1,566
		0,792					
		0,794					
4	120,00	1,190	1,1893	0,841	— 4,535	100,90	— 1,676
		1,190					
		1,188					
5	160,00	1,582	1,5823	0,632	— 4,744	101,12	— 1,456
		1,584					
		1,581					
Suma :				26,880	0,000	512,88	0,000
				$\frac{1}{n} \left[ \frac{1}{l} \right] = 5,376$	$\frac{1}{n} \left[ \frac{D}{l} \right] = 102,576$		

$$[AA] = 331,151, \quad [AL] = 110,801, \quad [LL] = 37,2053; \quad \left[ \frac{1}{l^2} \right] = 475,8.$$



Dalsze obliczenia przeprowadzamy według wzorów (47) do (52):

$$c = \frac{110,801}{331,151} = 0,334\,594, \quad k = 102,576 - 0,3346 \cdot 5,376 = 100,777.$$

$$\lambda_1'' = +0,014, \quad \lambda_2'' = -0,231, \quad \lambda_3'' = +0,190, \quad \lambda_4'' = +0,159, \quad \lambda_5'' = -0,131:$$

$$[\lambda'' \lambda''] = 0,1321. \quad \text{Kontrola: } [\lambda'' \lambda''] = [L L] - c [A L] = 37,2053 - 37,0733 = \\ = 0,1320.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0,1321}{3}} = \pm 0,210; \quad \mu_c = \frac{0,210}{\sqrt{331,2}} = \pm 0,012 \text{ m};$$

$$\mu_k = 0,012 \sqrt{\frac{475,8}{5}} = \pm 0,12.$$

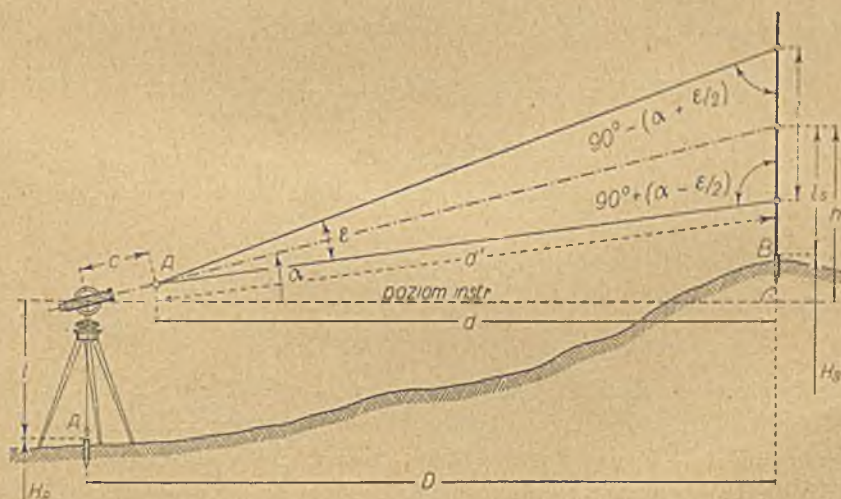
Stałe tachimetryczne badanej lunety są więc następujące:

$$k = 100,78 \pm 0,12$$

$$c = 0,33 \pm 0,01 \text{ m}.$$

### § 5. Uogólnienie wzorów na odległość

Dotychczas omawialiśmy specjalny przypadek tachimetrii, gdy oś celowa lunety była pozioma. Przejdźmy teraz do ustawienia wzorów na odległość



Rys. 235.

w przypadku, gdy oś celowa jest nachylona do poziomu pod pewnym kątem  $\alpha$ , przy czym założymy, że kąt  $\alpha$  ze względów konstrukcyjnych nie przekracza  $45^\circ$ .

Ponieważ przy zwyczajnej tachimetrii ustawiamy łąty pionowo, przeto łatwo wykazać — jak to uwidoczniło na rys. 235 — że kąty trójkąta paralaktycznego będą  $\epsilon$ ,  $90^\circ - (\alpha + \epsilon/2)$  oraz  $90^\circ + (\alpha - \epsilon/2)$ . Wobec tego:

$$d = d' \cos(\alpha - \varepsilon/2) = l \frac{\cos(\alpha + \varepsilon/2) \cos(\alpha - \varepsilon/2)}{\sin \varepsilon} = l \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \varepsilon/2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varepsilon/2}{2 \sin \varepsilon/2 \cos \varepsilon/2} = l \cos^2 \alpha \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - l \frac{\sin^2 \alpha}{2 \operatorname{ctg} \varepsilon/2}, \quad (53)$$

a ponieważ  $1/2 \operatorname{ctg} \varepsilon/2 = k$ , przeto

$$d = kl \cos^2 \alpha - \frac{l}{4k} \sin^2 \alpha, \quad (54)$$

zaś odległość od środka przyrządu będzie:

$$D = kl \cos^2 \alpha + c \cos \alpha - \frac{l}{4k} \sin^2 \alpha. \quad (55)$$

Dla  $k = 100$ ,  $\alpha = 45^\circ$  oraz  $l = 1$  m wartość ostatniego wyrazu wynosi zaledwie 1,25 mm, jest przeto praktycznie zupełnie zaniedbywalna.

Ale nie tylko na tym polega uproszczenie wzoru na odległość. Ponieważ nawet dla  $c = 0,50$  m i dla wyjątkowo tylko mającego zastosowanie kąta  $\alpha = 45^\circ$  różnica  $c \cos \alpha - c \cos^2 \alpha = c \cos \alpha (1 - \cos \alpha) = 2c \cos \alpha \sin^2 \alpha/2$  wynosi 10 cm, zaś dla  $\alpha = 15^\circ$  zaledwie tylko 2 cm, przeto w praktyce stosuje się wzór:

$$D = (kl + c) \cos^2 \alpha. \quad (56)$$

Mając odległość  $D$ , wyznaczmy łatwo różnicę wysokości  $h$  między poziomem osi obrotu lunety a punktem, odpowiadającym środkowemu odczytowi na lacie, gdyż

$$h = D \operatorname{tg} \alpha. \quad (57)$$

Biorąc pod uwagę ścisły wzór na  $D$  otrzymamy:

$$h = kl \sin \alpha \cos \alpha + c \sin \alpha - \frac{l}{4k} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha. \quad (58)$$

Ostatnie wyrażenie wynosi dla  $k = 100$ ,  $\alpha = 45^\circ$  również, jak i poprzednio, zaledwie 1, 25 mm, malejąc dla mniejszych  $\alpha$  bardzo szybko, jest zatem zupełnie zaniedbywalne.

Wzór używany w praktyce opiewa więc:

$$h = (kl + c) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (kl + c) \sin 2\alpha, \quad (59)$$

z zaniedbaniem wyrażenia  $c \sin \alpha - c \sin \alpha \cos \alpha = 2c \sin \alpha \sin^2 \alpha/2$ , które dla  $c = 0,50$  m i dla wyjątkowo tylko używanego kąta  $\alpha = 45^\circ$  wynosi 10 cm, zaś dla  $\alpha = 30^\circ$  — 7 cm, dla  $\alpha = 25^\circ$  — 4 cm, dla  $\alpha = 20^\circ$  — 2 cm, a dla  $\alpha = 15^\circ$  nie osiąga nawet 1 cm.

Z powyższego zestawienia można się zorientować, w jakich przypadkach i z jakim zaniedbaniem można używać wzorów uproszczonych dla wyznaczenia różnicy wysokości.

Zarazem możemy łatwo ustalić związek, przy pomocy którego wyznaczmy różnicę wysokości między punktem  $B$ , na którym ustawiono latę a punktem  $A$ , nad którym znajduje się tachimetr:

$$H_B - H_A = i_A + h - l_s \quad \text{lub} \quad H_B = H_A + i_A + h - l_s, \quad (60)$$



przy czym  $i_A$  oznacza wysokość osi obrotu lunety nad punktem  $A$ ,  $h = (kl + c) \sin \alpha \cos \alpha$  (ze znakiem, zależnym od znaku kąta  $\alpha$ ),  $l_s$  jest odczytem nitki środkowej (odpowiadającym odległości punktu, zaznaczonego na lacie przez środkową nitkę celową, od punktu  $B$ ), zaś  $H_A$  i  $H_B$  są wysokościami punktów  $A$  i  $B$  ponad przyjętym poziomem porównawczym.

### § 6. Obliczenie $D$ i $h$

Środki pomocnicze do obliczenia odległości  $D$  oraz różnicy wysokości  $h$  są zazwyczaj trojakięgo rodzaju:

a) tablice, b) nomogramy i c) suwaki logarytmiczne.

a) Z tablic zasługują na wyróżnienie tablice prof. W. Jordana, podające (w założeniu, że  $k = 100$  a  $c = 0$ ) wartości  $D$  i  $h$  wedle wzorów:

$$D = 100 l \cos^2 \alpha, \quad h = 100 l \sin \alpha \cos \alpha \quad (61)$$

dla argumentów  $100l$  i  $\alpha$ .

Przykład:  $kl + c = 112,4$  i  $\alpha = 7^\circ 15'$ . Z tablic Jordana (wyd. 5 z 1912 r.) na str. 104 i 105, w kolumnie o nagłówku  $112 \cos^2 \alpha$  oraz  $113 \cos^2 \alpha$  wyjmujemy:

	112	113
$7^\circ 0'$	110,3	111,3
$7^\circ 30'$	110,1	111,1
	110,2	111,2

(wartości interpolowane dla  $7^\circ 15'$ )

odległość: 110,6 m (wartość interpolowana dla 112,4).

Dla obliczenia wysokości korzystamy z kolumn o nagłówkach  $112 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)$

oraz  $113 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)$ , z których wyjmujemy:

	112	113
$7^\circ 14'$	13,99	14,12
$7^\circ 16'$	14,05	14,18
	14,02	14,15

(z interpolacji dla  $7^\circ 15'$ )

wysokość: 14,07 m (z interpolacji dla 112,4).

(Por. dziennik tachymetryczny na str. 312, obliczenie punktu 4).

Powyższy przykład poucza, że przy użyciu tablic Jordana musimy z reguły wykonać podwójną interpolację (raz w kolumnach pionowych na każdej stronie i drugi raz między obiema stronicami). Są to jednak rachunki drobne i łatwe, wykonywane najczęściej pamięciowo.

b) Zamiast tablic można posłużyć się do obliczenia  $D$  i  $h$  specjalnymi nomogramami, których ilość jest dość znaczna. Nomogramy podają  $D$  i  $h$  również w założeniu, że stała  $k = 100$ , zaś  $c = 0$ .

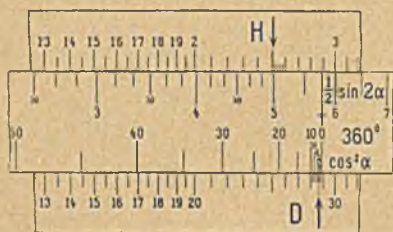
Szczegółowe opisywanie poszczególnych nomogramów zajęło by zbyt wiele czasu, dlatego je pominiemy, zaznaczając, że uznanie w praktyce zdobyły

sobie nomogramy W e n n e r a (Darmstadt 1905) oraz W e r k m e i s t r a (Z. f. Verm. 1908), pierwsze sporządzone wedle zasady podanej przez Voglera, drugie wedle metody d'Ocagne'a.

c) Trzeci sposób obliczenia  $D$  i  $h$  polega na użyciu tachimetrycznego suwaka logarytmicznego, który sporządzony w odpowiednio większych rozmiarach niż zwykle suwaki logarytmiczne, podaje na skali dolnej odległości poziome  $D$ , zaś na skali górnej  $H$  różnice wysokości punktów  $h$ . Obie te skale (nieruchome) są zwykłymi skalami (drabinkami) logarytmicznymi<sup>1)</sup> sporządzonymi dla przyjętej jednostki (modulu) 200 mm (niektóre suwaki mają modul 300 mm), przy czym obie skale zawierają dwie takie jednostki, a więc całkowita długość (użyteczna) suwaka jest 40 cm (wzgl. 60 cm). Obie skale są identyczne i różnią się od siebie tylko liczbowaniem, czyli wartością poszczególnych kresek (rys. 236); mianowicie na skali  $D$  lewa skrajna kreska ma wartość 10 m (odległości poniżej 10 m nie tachimetrujemy), zaś na skali  $H$  kreska ta ma wartość 1 m (gdyż wysokości są zawsze mniejsze od odległości). Część ruchoma (język) suwaka posiada również dwie skale (drabinki) funkcyjne, skalę dolną, tzw. kosinusową, dla funkcji

$\log \cos^2 \alpha$  i górną, tzw. sinusową, dla funkcji  $\log \left( \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = \log \sin \alpha \cos \alpha$ .

Skala sinusowa ma liczbowanie kresek zgodne z liczbowaniem skali  $H$ , zaś skala kosinusowa przeciwne (gdyż ze wzrostem kąta  $\alpha$  wartość  $\log \cos^2 \alpha$  maleje). Ponieważ przy pewnym nastawieniu języka odczytujemy obie skale  $D$  i  $H$ , przeto skala



Rys. 236.

sinusowa musi mieć odpowiednie położenie w stosunku do skali kosinusowej. Mianowicie w miejscu zerowym skali kosinusowej, któremu odpowiada logarytm równy 0, czyli 10,000 0000 — 10, musi na skali sinusowej logarytm ten wynosić — 1, czyli

$$\log \left( \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -1 = 9,000\ 0000 - 10, \text{ skąd } \alpha = 5^\circ 46' 6,5'';$$

temu zatem odczytowi skali sinusowej musi odpowiadać kreska zerowa skali kosinusowej.

Użycie suwaka jest bardzo proste. Przypuśćmy, że stała  $h$  wynosi dokładnie 100; wówczas nastawiamy kreskę zerową skali kosinusowej na tę kreskę skali  $D$ , która odpowiada wartości 100  $l$  ( $l$  — odcinek łąty w metrach). Następnie na skali  $D$  odczytujemy długość (w metrach) w miejscu, wskazanym przez kreskę kąta pionowego  $\alpha$  (na skali kosinusowej). Odczyt ten poprawiamy jeszcze o małą stałą  $c$ . Nie zmieniając położenia języka w suwaku, odczytujemy na skali  $H$  wysokość punktu (w metrach) w miejscu, wskazanym przez

<sup>1)</sup> Por. np. inż. K o n o r s k i, Nomografia. Warszawa 1937.



kreskę kąta pionowego  $\alpha$  na skali sinusowej. Poprawniejsze wyniki, zgodne z wzorami (56) i (59), otrzymamy nastawiając kreskę zerową skali kosinusowej na tę kreskę skali  $D$ , która odpowiada obliczonej wartości  $(kl + c)$ .

Przykład:  $k = 100$ ,  $c = 0,3$  m,  $\alpha = 5^\circ$  i  $l = 0,286$  m; obliczono  $(kl + c) = 28,9$  m, na suwaku odczytano (p. rys. 236)  $D = 28,7$  m,  $h = 2,51$  m.

Jeżeli stała  $k$  jest różna od 100, czyli  $k = 100 - \Delta$ , wówczas

$$D = kl \cos^2 \alpha = (100 - \Delta) l \cos^2 \alpha = \frac{100 - \Delta}{100} 100 l \cos^2 \alpha.$$

Logarytmując prawą stronę tego równania otrzymamy

$$\log (100 - \Delta) - \log 100 + \log (100 l \cos^2 \alpha),$$

widzimy więc, że do  $\log (100 l \cos^2 \alpha)$  należy dodać jeszcze stały odcinek  $\log (100 - \Delta) - \log 100$ , który możemy nanieść na skali kosinusowej, uzyskując w ten sposób nową kreskę zerową, czyli tzw. markę dla danej stałej  $k$ . W tym celu nastawiamy kreskę zerową skali kosinusowej na tę kreskę skali  $D$ , która odpowiada rzeczywistej wartości stałej  $k$ , zaś przy kresce oznaczonej liczbą 100 kreślimy na języku markę.

Użycie suwaka tachimetrycznego jest bardzo szybkie i wygodne, choć może nieco mniej dokładne, jednak polecenia godne przy obliczaniu rozległych zdjęć terenowych<sup>1)</sup>.

d) Poprawki przy obliczaniu odległości i wysokości dla stałej  $k$  różnej od 100 i stałej  $c$  różnej od zera.

Tablice, nomogramy oraz suwaki tachimetryczne dostarczają nam wyników zasadniczo dla  $k = 100$  i  $c = 0$ . Jeżeli stałe te mają wartości inne, należy tę okoliczność w rachunku uwzględnić (o ile różnice te są tego rodzaju, że wywołują, praktycznie biorąc, zmianę obliczonych odległości i wysokości)<sup>2)</sup>.

Uwzględnienie różnic  $k$ -i  $c$  przeprowadzamy najprościej następującym sposobem.

Aby móc zastosować przy obliczeniach  $D$  i  $h$  wzory typu (61):  $100 l \cos^2 \alpha$  i  $100 l \sin \alpha \cos \alpha$  zamiast  $(kl + c) \cos^2 \alpha$  i  $(kl + c) \sin \alpha \cos \alpha$ , należy położyć

$$kl + c = 100 l', \quad (62)$$

a uwzględniając dalej, że  $100 = k + \Delta k$ ,  $l' = l + \Delta l$ , otrzymamy

$$100 l - l \Delta k + c = 100 l + 100 \Delta l,$$

z czego wynika:

$$100 \Delta l = - l \Delta k + c. \quad (63)$$

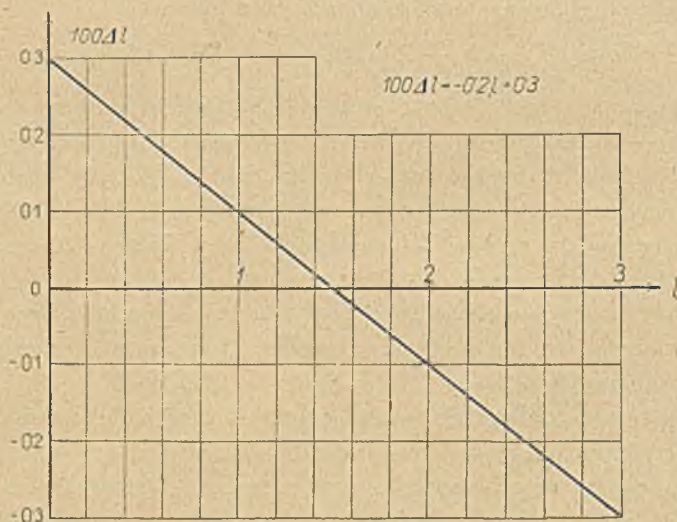
<sup>1)</sup> Ostatnio pojawiły się w handlu japońskie suwaki uniwersalne «Sun» (przedstawiciel f-ma Gerlach w Warszawie) z dodatkowymi skalami tachimetrycznymi dla  $D$  i  $h$ . Suwaki te są również bardzo wygodne w praktyce.

<sup>2)</sup> W § 3b) podano, w jaki sposób można zmienić stałą  $k$  lunety z okularem Huygensa na 100, natomiast w innych typach lunet zmiana stałej  $k$  na inną może być przeprowadzona (przy zachowaniu systemu optycznego) tylko przez zmianę odstępów skrajnych nitek krzyża nitkowego lub zmianę podziału łąty, co oczywiście nie da się doraźnie przeprowadzić.

Jest to równanie prostej, które można przedstawić wykreślnie (rys. 237).

Rozpoczynając obliczenia należy tylko dorzucić (z odpowiednim znakiem)  $100 \Delta l$  do  $100 l$  i dla tak poprawionego stukrotnego odcinka wyznaczyć tablicami, nomogramem lub suwakiem  $D$ , względnie  $h$ .

Na rys. 237 przedstawiono przypadek, gdy  $k = 99,8$ , zaś  $c = 0,3$  m. Ponieważ nie warto uwzględniać zmian  $100 \Delta l$  mniejszych niż decymetr (gdyż 1 dm odpowiada 1 mm odczytu), przeto można na rysunku znaleźć łatwo granice, do jakich wielkości  $100 l$  należy dorzucić 0,3 m, 0,2 m itd., zapisać (względnie zapamiętać) sobie tych kilka cyfr i uwzględnić je przy obliczeniach.



Rys. 237.

Rachunkowe obliczenie owych granicznych  $l$ , względnie  $100l$ , przedstawia się następująco. Z wzoru

$$l = \frac{c - 100 \Delta l}{\Delta k} \quad (63 a)$$

obliczamy graniczne wartości  $l$ , wstawiając kolejno za  $100 \Delta l$  wartości podzielne przez 5, zatem np. 0,25, 0,15, 0,05,  $-0,05$ ,  $-0,15$ ,  $-0,25$  itd.

Otrzymamy w naszym przypadku:

$100 \Delta l$	$l$	$100 l$
0,25 m	0,25 m	25 m
0,15	0,75	75
0,05	1,25	125
$-0,05$	1,75	175
$-0,15$	2,25	225
$-0,25$	2,75	275
...	...	...



Uwzględniamy zatem przy wielkościach 100 l

od 0	do 25 m	poprawkę	+ 0,3 m
„ 25	„ 75	„	+ 0,2
„ 75	„ 125	„	+ 0,1
„ 125	„ 175	„	0,0
„ 175	„ 225	„	— 0,1
„ 225	„ 275	„	— 0,2
„ 275	„ 325	„	— 0,3

Obliczenie to jest tak długo ważne, jak długo stałe nie zmieniły się. W przypadku, gdy  $\Delta k$  ma znak —, należy obliczyć l, względnie 100 l, dla wartości  $100 \Delta l > c$ .

Jak tedy widać, zastosowanie tego sposobu w praktyce jest nadzwyczaj proste i łatwe.

Inny sposób polega na uwzględnieniu zmiany odcinka na samej lacie. Jedną z nitki, dolną lub górną, nastawia się zawsze na ten sam odczyt na lacie. W przypadku, gdy zdecydujemy się nastawiać nitkę dolną na ten sam odczyt, należy jako stały odczyt na lacie obrać kreskę, zaznaczoną na niej od jej spodu w odstępnie jednego metra. Jeżeli stała  $k$  jest różna od 100, wówczas podział jednostek łaty od 1 metra począwszy powinien być przeprowadzony w jednostkach  $\frac{100}{k}$  razy większych od normalnych. Jeżeli jednak istnieje i mała stała ( $c$ ) różna od zera, należy dodatkowo pierwszy interwał decymetrowy ponad 1 m (nie używany praktycznie przy pomiarach) zmniejszyć o  $\frac{c}{k}$ , przesuwając kreskę początkową z 1 m o  $\frac{c}{k}$  ku górze. Sposób ten był dawniej chętnie używany, wymaga jednak dla przyrządów o różnych stałych różnych lat, bezużytecznych dla innych pomiarów.

Inne sposoby są podane w licznych wydaniach dzieła W. Jordana: »Handbuch der Vermessungskunde«, tom II.

### § 7. Dokładność zdjęć tachimetrycznych

Dokładność optycznego pomiaru odległości, a tym samym i wysokości, zależy w pierwszym rzędzie od dobroci lunety przyrządu i ścisłego podziału łaty użytej przy pomiarze; poza tym ważną rolę odgrywa także ruchliwość warstw powietrza, zawartego pomiędzy przyrządem a łatą; dlatego też trudno jest omawiać tę kwestię ogólnie, natomiast można wypowiedzieć się o dokładności pomiaru pewnego typu tachimetru w pewnych średnich warunkach atmosferycznych.

a) *Wzory na dokładność utworzone na podstawie doświadczeń.*

Biorąc pod uwagę przybliżony wzór na odległość pozioma:  $D = (kl + c) \cos^2 \alpha$ , otrzymujemy jako średni błąd funkcji (o ile  $k$  i  $c$  były wyznaczone niezależnie):

$$\mu_D^2 = (l \cos^2 \alpha)^2 \mu_k^2 + (k \cos^2 \alpha)^2 \mu_l^2 + (\cos^2 \alpha)^2 \mu_c^2 + \{(kl + c) \sin 2\alpha\}^2 \left(\frac{\mu_\alpha}{\rho}\right)^2, \quad (64)$$

względnie z wystarczającą dokładnością:

$$\mu_D^2 = \left(\frac{D}{k}\right)^2 \mu_k^2 + \left(\frac{D}{l}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{D}{kl}\right)^2 \mu_c^2 + (2h)^2 \left(\frac{\mu_\alpha}{\rho}\right)^2. \quad (64a)$$

Ze związku tego wynika, że wpływ błędów  $\mu_c$  i  $\mu_\alpha$  na błąd  $\mu_D$  jest bardzo mały, zaś wpływ błędu  $\mu_k$  także niezbyt wielki. I tak przyjmując:

$$k = 100 \pm 0,10, \quad \mu_c = \pm 0,01 \text{ m}, \quad h = \frac{D}{4} \text{ i } \mu_\alpha = \pm 1', \text{ otrzymujemy dla}$$

$$D = 100 \text{ m}: \quad \frac{D}{k} \mu_k = \pm 0,10 \text{ m}, \quad \frac{D}{kl} \mu_c = \pm 0,01 \text{ m}, \quad 2h \frac{\mu_\alpha}{\rho} = \pm 0,015 \text{ m}.$$

Na dokładność odległości  $D$  wpływa głównie dokładność wyznaczenia odcinka  $l$ . W dalszych wywodach uwzględnimy zatem wpływ błędu odcinka  $l$ , oraz wpływ błędu stałej  $k$ , który z trzech wyżej wymienionych błędów ma stosunkowo największe znaczenie.

Jak wynika z licznych doświadczeń Helmerta, Stambacha, Jordana i innych istnieje liniowy związek między błędem względnym  $\frac{\mu_D}{D}$  wyrażonym w %, a odległością  $D$ .

I tak Jordan podaje dla  $k = 100$  następujące wyniki:

$D = 10$	50	100	200	300 m
$\frac{\mu_D}{D} = 0,15$	0,19	0,23	0,31	0,40 %.

(65)

Przyjmując, że stała  $k$  jest bezbłędna, a celowa jest pozioma lub mało odbiegająca od poziomu, ustaliliśmy przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, opierając się na przytoczonych wynikach, następujący wzór na  $\mu_D$ :

$$\mu_D = \pm D (0,00144 + 0,00085 l). \quad (66)$$

Wzór ten uwzględnia tak wpływ błędu celowej, jak i błędu odczytu odcinka  $l$ .

Możemy zatem położyć (uwzględniając we wzorze (64a) tylko wpływ błędu  $\mu_l$ ):

$$\mu_l = \frac{l}{D} \mu_D = \pm l (0,00144 + 0,00085 l). \quad (67)$$

<sup>1)</sup> Związek ten otrzymano wyznaczając zawarte w nim współczynniki z następujących równań błędów (p. tabelka (65)):

$$\begin{aligned} \lambda_1 = x + 0,1y - 0,15, & \quad \lambda_2 = x + 0,5y - 0,19, & \quad \lambda_3 = x + 1,0y - 0,23, \\ \lambda_4 = x + 2,0y - 0,31, & \quad \lambda_5 = x + 3,0y - 0,40. \end{aligned}$$

Wartości liczebne współczynników są:  $x = 0,144$ ,  $y = 0,085$ .



Uproszczony wzór, uwzględniający tylko błędy  $\mu_l$  i  $\mu_k$ , będzie zatem:

$$\mu_D^2 = \left(\frac{D}{k}\right)^2 \mu_k^2 + D^2 (0,00144 + 0,00085 l)^2$$

lub

$$\pm \mu_D = D \sqrt{\left(\frac{\mu_k}{k}\right)^2 + (0,00144 + 0,00085 l)^2}; \quad (68)$$

zaś dla  $k = 100$ :

$$\pm \mu_D = l \sqrt{\mu_k^2 + (0,144 + 0,085 l)^2} \quad (69)$$

(przy czym  $l$  należy przyjąć w metrach).

Wzór jeszcze bardziej uproszczony otrzymamy, stosując następujące przybliżenie:

$$\pm \mu_D = l (0,144 + 0,085 l) + \frac{l}{2} \frac{\mu_k^2}{0,144 + 0,085 l}. \quad (70)$$

Kładąc w mianowniku wyrazu drugiego za  $l$  jego wartość przeciętną równą 1 m, przekształcamy go ostatecznie na następujący:

$$\pm \mu_D = l (0,144 + 0,085 l) + 2,18 l \mu_k^2, \quad (71)$$

zatem dla  $D = 100$  m (czyli  $l = 1$  m) oraz  $\mu_k = \pm 0,10$  wynosi  $\mu_D = \pm 0,25$  m.

Postępując analogicznie utworzymy dla błędu wysokości  $\mu_h$  wzór:

$$\begin{aligned} \mu_h^2 = & \left(\frac{l \sin 2\alpha}{2}\right)^2 \mu_k^2 + \left(\frac{k \sin 2\alpha}{2}\right)^2 \mu_l^2 + \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 \mu_c^2 + \\ & + \{(kl + c) \cos 2\alpha\}^2 \frac{\mu_\alpha^2}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (72)$$

Wpływ wyrazu trzeciego jako bardzo mały można pominąć, zaś wartość  $(kl + c) \cos 2\alpha$  przyjąć w przybliżeniu równą  $D$ ; będzie zatem dalej:

$$\mu_h^2 = \left(\frac{h}{k}\right)^2 \mu_k^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \mu_l^2 + D^2 \left(\frac{\mu_\alpha}{\rho}\right)^2; \quad (73)$$

dla  $k = 100$  otrzymamy, po odpowiednim przekształceniu:

$$\pm \mu_h = \frac{h}{100} \sqrt{(0,144 + 0,085 l)^2 + \mu_k^2 + (0,029 \frac{D}{h} \mu_\alpha)^2} \quad (74)$$

( $D, h$  i  $l$  w metrach,  $\mu_\alpha$  w minutach kątowych).

Dla  $h = 25$  m, przy odcinku na łać  $l = 1,00$  m wypada błąd:

$$\mu_h = \pm 0,07 \text{ m.}$$

*b) Wpływ ruchliwości oraz różnej gęstości powietrza na dokładność pomiarów.*

Promień, zdążający od łąty do przyrządu, przechodzi przez warstwy powietrza, nie pozostające z reguły w spoczynku. Okoliczność ta utrudnia w wysokim stopniu odczytywanie łąty, mogąc je uczynić w pewnych wypadkach nawet wprost niemożliwym. Z licznych doświadczeń, dokonanych w tym kie-

runku przez Sewala Smitha wynika, że największe ruchy powietrza przypadają w lecie około godz. 11-ej, jak też, choć w znacznie mniejszym stopniu i krócej, tuż po wschodzie słońca. Przyczynę tego zjawiska należy upatrywać w różnicy temperatury ziemi nagrzewanej przez słońce i powietrza, którego warstwy ocieplają się stopniowo dopływem ciepła od ziemi. Zarazem występuje tzw. *refrakcja różniczkowa*, powodująca odchylenie się promieni dolnej celowej przechodzących w tym czasie przez rzadsze medium ku górze, a w konsekwencji uzyskanie za małych odcinków  $l$ .

Wedle Smitha refrakcja ta zanika w odległości około 1 m od ziemi, natomiast wedle późniejszych doświadczeń zakres jej jest nieco większy.

c) *Wpływ pochylenia łąty na dokładność pomiarów.*

Wpływ ten badany teoretycznie przez Jordana daje się określić wzorem przybliżonym:

$$\Delta = D \delta \operatorname{tg} \alpha, \quad (75)$$

przy czym  $\delta$  jest kątem odchylenia łąty od pionu.

Przy użyciu do ustawienia łąty libeli pudełkowej (wzgl. dwu libelek krzyżowych) i ustalenia jej położenia przy pomocy odpowiednich zastrzałów można przyjąć, że — praktycznie biorąc — niema błędu pochylenia łąty. Zastosowanie

samej libeli pudełkowej powoduje wedle Jordana w przybliżeniu błąd  $\delta = \frac{1}{100}$

lub  $\delta \rho = 0^{\circ}34'$ , użycie pionu zwisającego wzdłuż łąty powoduje  $\delta$  około  $\frac{1}{50}$ , wzgl.

$\delta \rho = 1^{\circ}9'$ , zaś łąta ustawiona do pionu od oka powoduje  $\delta$  około  $\frac{1}{25}$ , wzgl.

$\delta \rho = 2^{\circ}18'$ .

Błąd  $\Delta$ , spowodowany pochyleniem łąty, zależy w dużym stopniu od kąta wysokości  $\alpha$ , wzgl. różnicy wysokości  $h$  i osiąga wedle powyższych danych dla  $D = 100$  m i  $h = 25$  m:

przy użyciu libeli około 0,25 m,  
 „ „ „ pionu „ 0,50 m,  
 zaś dla łąty ustawionej od oka „ 1,00 m.

Błędy te, podane przez Jordana, wydają mi się nieco za duże.

d) *Wpływ uderzeń wiatru na dokładność pomiarów.*

Utrzymanie łąty (zwłaszcza 4-metrowej) w położeniu pionowym jest przy silnych uderzeniach wiatru rzeczą bardzo trudną. Jeżeli wskutek tego między odczytaniem nitki dolnej a górnej położenie łąty uległo zmianie, wypadnie oczywiście odczytany odcinek błędnie. Należy zatem odczytywać obie skrajne nitki możliwie równocześnie, co uskuteczniamy nastawiając jedną ze skrajnych celowych na równy odczyt (np. górną na 3 m lub 4 m, lub ewentualnie dolną na 1 m) i konstatując szybko milimetry i centymetry odczytu drugiego, po czym dopiero uzupełniamy jego metry i decymetry. W praktyce nabieramy szybko odpowiedniej wprawy w tego rodzaju odczytach, wolnych od chwilowych zmian położenia łąty.



e) *Wskazówki dla osiągnięcia najkorzystniejszych wyników.*

Chcąc przy pomiarach tachimetrycznych uzyskać stosunkowo najlepsze wyniki, powinniśmy starać się wpływ wymienionych wyżej błędów zredukować do minimum, co da się skutecznie przy zachowaniu następujących wskazówek. Należy się starać, aby dolna celowa przebiegała powyżej jednego metra nad terenem; górną celową zaś nastawiać na odczyt 3, wzgl. 4 m, dokonując równocześnie odczytu nitki dolnej (szczególnie milimetry i centymetry), albo też nastawiać dolną celową na odczyt jednego metra, a odczytywać równocześnie górną (co ułatwi zarazem obliczanie odcinków *l*). W dniach słonecznych (szczególniej gdy była obfita rosa) przerywać pomiary na pewien czas (godzinę) około godz. 11-ej, a nie rozpoczynać ich bezpośrednio po wschodzie słońca. Ustawiać łąty przy pomocy libelek pudełkowych, względnie przynajmniej odpowiednio zawieszonych pionów, a w czasie silnych wiatrów przerywać pomiary. (W razie bezwzględnej konieczności ich przeprowadzenia, używać lekkich 3-metrowych łąt).

Poza tym musi być przyrząd sprawdzony (zrektyfikowany), tak jak instrument uniwersalny. To samo dotyczy łąt, których podział powinien być tak dokładny, aby odczytane milimetry były pewne.

### § 8. Tachimetry redukcyjne

Obliczenia redukcyjne, które przy wielkiej ilości punktów zabierają dużo czasu, mogą być przeprowadzone w sposób automatyczny przy pomocy pewnych dodatkowych urządzeń, zastosowanych w tachimetrah. Przyrządy w ten sposób skonstruowane nazywamy tachimetrami redukcyjnymi. Pierwsza myśl, jaka się konstruktorom nasunęła, polegała na zastosowaniu mechanizmu, związanego odpowiednio odstęp nitek przy pochylaniu lunety. Przyrządy tego rodzaju budowano swego czasu przede wszystkim we Włoszech. Inną konstrukcję miały tzw. tachimetry suwakowe, kontaktowe, względnie opatrzone mikrometryczną śrubą elewacyjną (np. tachimetry Wagnera, Kreutera Meissnera, Sangueta, Voglera, Kerna i innych).

Przyrządy te nie znalazły w praktyce szerszego zastosowania, bądź to z powodu zawitych urządzeń mechanicznych, powodujących utrudnienie ich sprawdzenie i podnoszących cenę przyrządu, bądź też z tego powodu, że skrócenie pracy domowej wymagało z reguły zwiększenia pracy polowej, co jest nieekonomiczne ze względu na większe koszty tej ostatniej.

Stosunkowo najlepiej rozwiązał tę kwestję prof. Hammer w swoich przyrządach autoredukcyjnych (rys. 238a), wykonanych przez firmę Fennel w Kassel (Niemcy).

Redukcja tych przyrządów polega na następującym urządzeniu.

Na osi obrotu lunety jest osadzona pionowo cienka płytką szklana, na której drogą mikrograficzną utrwalono odpowiedni diagram. Przy pochylaniu lunety płytką pozostaje nieruchoma, a przez odpowiedni otwór w rurze lunety dostają się do jej wnętrza promienie z coraz to innych części diagramu.



Promienie te za pomocą odpowiedniego systemu optycznego zostają skierowane do pryzmatu  $P_2$  (rys. 238b), a po załamaniu się w nim, tworzą obraz na jego czolowej ścianie, zajmującej połowę pola widzenia lunety. Krawędź pryzmatu  $P_2$  zastępuje pionową nitkę krzyża nitkowego; patrząc więc do lunety, widzimy obok obrazu łąty przylegający doń obraz odpowiednich części krzywych diagramu, wyznaczających na łacie odcinki  $l_d$  i  $l_h$ . Odcinki te dostarczają nam odległość poziomą i różnicę wysokości przy pomocy wzorów:

$$D = 100 l_d \text{ oraz } h = 20 l_h. \quad (76)$$

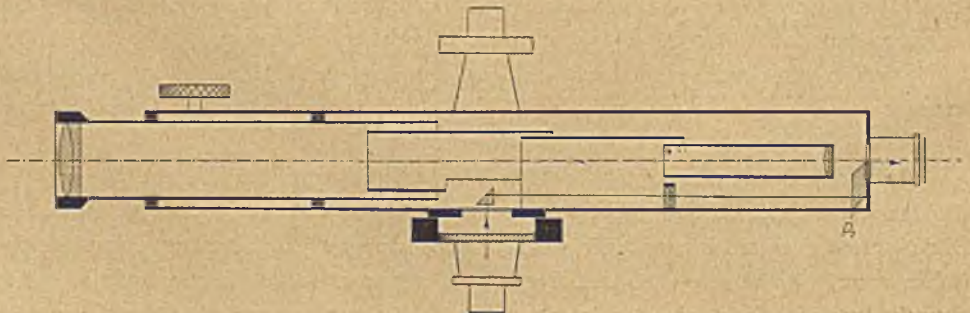
Pierwotne przyrządy Hammera posiadały lunety o wyciągach obiektywowych (rys. 238 a, b); obecnie buduje się je z lunetami (znacznie krótszymi) o soczewkach ogniskujących.

Zasada optycznego pomiaru przy pomocy diagramu jest następująca.

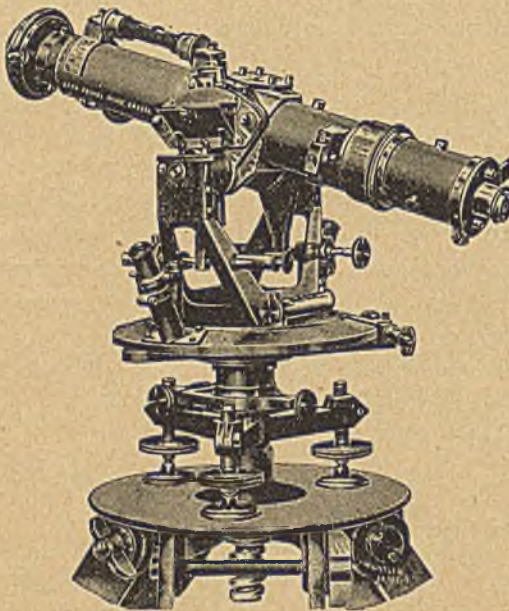
Diagram składa się z trzech krzywych, z których jedną jest tzw. koło podstawowe; środek tego koła powinien się znajdować

na przedłużeniu osi obrotu. Drugą krzywą jest »krzywa odległości«, zaś trzecią »krzywa wysokości«. Odstępy tych krzywych od użytecznej części koła mierzone w kierunku promienia nazwijmy  $\rho_d$  oraz  $\rho_h$ . Przy pochylaniu lunety o kąt  $\alpha$  powstają na krawędzi pryzmatu  $P_2$  obrazy  $o_d$  i  $o_h$  odcinków  $\rho_d$  i  $\rho_h$  znajdujących się w diagramie na promieniu odchylnym od pionu również o kąt  $\alpha$ .

Przyrząd jako analaktyczny ma dostarczyć odległość poziomą  $D = k_d l_d$  oraz różnicę wysokości  $h = k_h l_h$ , przy czym  $l$  są odcinkami na łacie, zaś  $k$  — odpowiednimi stałymi.



Rys. 238b.



Rys. 238a.



Przyjmując kąt  $\alpha$  dodatni (celowe ku górze) widzimy z rys. 239a, że

$$d = l_d \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_d)}{\sin \varepsilon_d} = l_h \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_h)}{\sin \varepsilon_h}, \quad D = d \cos \alpha = l_d \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_d) \cos \alpha}{\sin \varepsilon_d}, \quad (77)$$

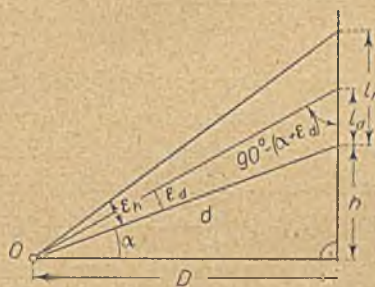
$$D = (\cos \alpha \operatorname{ctg} \varepsilon_d - \sin \alpha) \cos \alpha \cdot l_d;$$

zatem

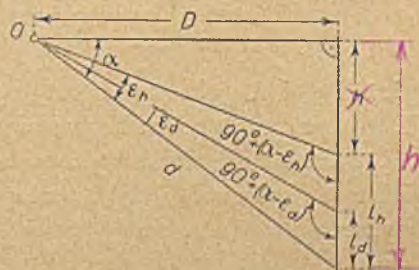
$$k_d = (\cos \alpha \operatorname{ctg} \varepsilon_d - \sin \alpha) \cos \alpha = \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \varepsilon_d - \sin \alpha \cos \alpha,$$

skąd

$$\operatorname{tg} \varepsilon_d = \frac{\cos^2 \alpha}{k_d + \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (78)$$



Rys. 239 a.



Rys. 239 b.

Analogicznie otrzymujemy ze względu na to, że

$$h = d \sin \alpha, \quad \text{a } k_h = \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_h) \sin \alpha}{\sin \varepsilon_h} = \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \varepsilon_h - \sin^2 \alpha, \quad (79)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_h = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_h + \sin^2 \alpha}. \quad (80)$$

Jeżeli ogniskowa soczewki diagramu wynosi  $f'$ , to kąty paralaktyczne  $\varepsilon_d$  i  $\varepsilon_h$  są określone związkami:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_d}{2} = \frac{\rho_d}{2f'}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_h}{2} = \frac{\rho_h}{2f'},$$

lub w dostatecznym przybliżeniu

$$\operatorname{tg} \varepsilon_d = \frac{\rho_d}{f'} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \varepsilon_h = \frac{\rho_h}{f'}. \quad (81)$$

Wstawiając te wartości do wzorów (78) i (80) otrzymujemy:

$$\rho_d = f' \frac{\cos^2 \alpha}{k_d + \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \rho_h = f' \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_h + \sin^2 \alpha}, \quad (82)$$

względnie dla  $k_d = 100$ , zaś  $k_h = 20$ :

$$\rho_d = f' \frac{\cos^2 \alpha}{100 + \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \rho_h = f' \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{20 + \sin^2 \alpha}. \quad (83)$$



Jeżeli  $\alpha$  ma wartość ujemną (celowa w dół) wówczas — jak to widać (rys. 239 b) — należy wstawić w poprzednich wzorach za  $d$  wartość:

$$d = l_d \frac{\cos(\alpha - \varepsilon_d)}{\sin \varepsilon_d} = l_h \frac{\cos(\alpha - \varepsilon_h)}{\sin \varepsilon_h}, \quad (84)$$

a tym samym zmieniają się wzory na następujące:

$$\lg \varepsilon_d = \frac{\cos^2 \alpha}{k_d - \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \lg \varepsilon_h = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_h - \sin^2 \alpha}, \quad (85)$$

względnie:

$$\rho_d = f' \frac{\cos^2 \alpha}{k_d - \sin \alpha \cos \alpha}; \quad \rho_h = f' \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_h - \sin^2 \alpha}. \quad (86)$$

Jeżeli  $\rho_d$  i  $\rho_h$  (jako przedmioty) są od soczewki diagramu oddalone o odstęp  $2f'$ , to wytworzą one na krawędzi pryzmatu  $P_2$  obrazy  $o_d$  i  $o_h$  tej samej wielkości. Soczewkę tę można przesunąć nieco w kierunku podłużnym osi lunety, zwiększając lub zmniejszając przez to obrazy  $o_d$  i  $o_h$ , tak aby czyniły zadość powyższemu warunkowi. Wyprowadzone wzory służą do konstrukcji diagramu.



kąt  $\alpha$  dodatni

celowa pozioma

kąt  $\alpha$  ujemny

Rys. 240.

Prócz warunków, wymaganych od zwyczajnych tachimetrów, przyrząd Hammera musi spełniać jeszcze następujące:

Luneta analaktyczna przyrządu ma mieć stale  $k_d = 100$ ,  $k_h = 20$ ; krawędź pryzmatu (widziana w polu widzenia) musi być prostopadła do nitki poziomej okularu (rys. 240) i przy dowolnym pochyleniu lunety prostopadłą do jej osi obrotu; środek koła podstawowego (diagramu) powinien znajdować się na osi obrotu lunety, zaś obraz koła zajmować przy pochylaniu lunety położenie styczne do nitki poziomej okularu; wreszcie punkt przecięcia się obrazu krzywych wysokościowych powinien przy poziomej osi celowej pokrywać się z punktem skrzyżowania się krawędzi pryzmatu i nitki poziomej okularu.

Powyższe warunki uzyskujemy dzięki możliwości skutecznego drobnych przesunięć, wzgl. skrętów diagramu i okularu, oraz przesunięcia soczewki diagramu.

Dokładność wyników uzyskiwanych przyrządem Hammera jest nieco mniejsza niż omawiana w § 7.

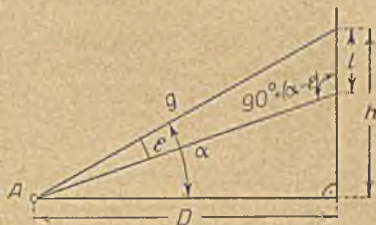


## § 9. Tachimetria precyzyjna Tichy'ego

Zasada tachimetrii precyzyjnej Tichy'ego jest następująca. Luneta analaktyczna posiada specjalny okular z dolną nitką stałą, zaznaczającą na łacie górny koniec odcinka  $l$ , zaś górną nitkę ruchomą przy użyciu śruby mikrometrycznej. Pięciu obrotom śruby mikrometrycznej odpowiada odstęp nitek  $o$ , związany z normalnym kątem paralaktycznym  $\epsilon$ .

Z rys. 241 widzimy, że  $g = l \frac{\cos(\alpha - \epsilon)}{\sin \epsilon}$ , a stąd:

$$D = l \frac{\cos(\alpha - \epsilon)}{\sin \epsilon} \cos \alpha, \quad h = l \frac{\cos(\alpha - \epsilon)}{\sin \epsilon} \sin \alpha. \quad (87)$$



Rys. 241.

Poza tym jest  $\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{o}{2f}$ , względnie w dostatecznym przybliżeniu  $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{o}{f}$ .

Ponieważ rozstaw nitek uzyskujemy przy pomocy śruby mikrometrycznej, przeto

$$o = i \cdot s, \quad (88)$$

przy czym  $s$  jest krokiem śruby, zaś  $i$  ilością jej obrotów. Przekształcając związki na  $D$  i  $h$  otrzymujemy:

$$D = l \left( \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \epsilon} + \sin \alpha \right) \cos \alpha, \quad h = l \left( \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \epsilon} + \sin \alpha \right) \sin \alpha, \quad (89)$$

a po wstawieniu wartości za  $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{o}{f} = \frac{is}{f}$

$$D = l \left( \frac{\cos \alpha}{i} \frac{f}{s} + \sin \alpha \right) \cos \alpha, \quad h = l \left( \frac{\cos \alpha}{i} \frac{f}{s} + \sin \alpha \right) \sin \alpha. \quad (90)$$

Oznaczając  $\frac{f}{s} = C$  (wielkość stała) zmieniamy powyższe związki ostatecznie na następujące:

$$D = Cl \left( \frac{\cos^2 \alpha}{i} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{C} \right), \quad h = Cl \left( \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{i} + \frac{\sin^2 \alpha}{C} \right). \quad (91)$$

Tichy zastosował dwie metody pomiaru, jedną przy użyciu łąty logarytmicznej dla stałej ilości  $i$  i zmiennego odpowiednio odcinka  $l$ , oraz druga przy użyciu łąty zwyczajnej dla zmiennych  $i$  i  $l$ .

Przyjmując  $C = 500$  oraz  $i = 5$  otrzymujemy związki:

$$D = 100l \left( \cos^2 \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{100} \right) \quad \text{oraz} \quad h = 100l \left( \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{100} \right), \quad (92)$$

względnie

$$\log D = \log 100l + A, \quad \log h = \log 100l + B, \quad (93)$$

przy czym

$$A = \log \left( \cos^2 \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{100} \right), \quad B = \log \left( \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{100} \right), \quad (94)$$

Używając do pomiaru łąty logarytmicznej (rys. 242) odczytujemy na niej bezpośrednio dwa miejsca dziesiętne wielkości  $\log 100l$ , uzyskując dwa dalsze



miejsca na odpowiednio zaadoptowanym bębenu śruby mikrometrycznej (p. niżej); do tak uzyskanego logarytmu należy dodać  $A$ , względnie  $B$ , wielkości podane w specjalnych tablicach Jordana (»Tachymetrische Hilfstafeln«) dla argumentu  $\pm \alpha - \varepsilon/2$ , gdyż Jordan obliczył tablice dla nitki środkowej jako stałej (zatem kąty  $\alpha$  trzeba poprawić o  $-\varepsilon/2$  i dopiero dla tak otrzymanego argumentu wyszukać  $A$  lub  $B$ ).

Druga metoda Tichy'ego nie wymaga użycia łąty logarytmicznej. Dla  $C = 500$  jest:

$$D = 100 l \left( \frac{5 \cos^2 \alpha}{i} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{100} \right) \text{ oraz } h = 100 l \left( \frac{5 \sin \alpha \cos \alpha}{i} + \frac{\sin^2 \alpha}{100} \right), \quad (95)$$

zatem jeżeli dla pewnego  $\alpha$  obierzemy takie ilości obrotów  $i_d$  i  $i_h$ , aby wyrazy w nawiasach były równe jedności, wówczas związki powyższe przekształcą się na:

$$D = 100 l_d, \text{ względnie } h = 100 l_h. \quad (96)$$

Po odczytaniu kąta  $\alpha$  należy przeto wyszukać w (dla tego celu sporządzonych) tablicach prof. Schella<sup>1)</sup> wielkości

$$i_d = \frac{5 \cos^2 \alpha}{1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{100}} \text{ oraz } i_h = \frac{5 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{100}}; \quad (97)$$

po dokonaniu  $i_d$  obrotów śruby mikrometrycznej otrzymujemy odcinek  $l_d$ , zaś analogicznie dla ilości obrotów  $i_h$  odcinek  $l_h$ .

Żadna z wymienionych metod Tichy'ego nie znalazła szerszego zastosowania w praktyce; pierwsza ze względu na użycie łąty logarytmicznej, druga z powodu zwiększenia pracy polowej. Zaznaczyć jednak należy, że obie metody dostarczają wyników z nie mniejszą dokładnością, jak obecnie używane precyzyjne odległownice dwuobrazowe.

Jak już wspomniano, otrzymuje się na łącie logarytmicznej bezpośrednio dwa miejsca dziesiętne wielkości  $\log 100 l$ ; dalsze dwa miejsca uzyskuje się na następującej zasadzie.

Jeżeli odcinkowi  $l_i$  na łącie odpowiada kreska podziału logarytmicznego łąty o indeksie  $i$ , to  $\log 100 l_i = i$ , względnie  $10^i = 100 l_i$ . (98)

Wobec tego, że podział łąty dostarcza bezpośrednio dwu miejsc dziesiętnych, indeks kreski poprzedzającej jest  $i - 0,01$ , więc analogicznie:

$$10^{i-0,01} = 100 l_{i-0,01}, \quad (99)$$

a długość interwału badanego  $\Delta l$  określa związek:

$$\Delta l = l_i - l_{i-0,01} = \frac{1}{100} (10^i - 10^{i-0,01}) = \frac{10^i}{100} \left( 1 - \frac{1}{10^{0,01}} \right). \quad (100)$$

<sup>1)</sup> A. Schell. Die Terrainaufnahme mit d. tachym. Kippregel von Tichy u. Starke. (Seidel u. Sohn, Wiedeń 1881).



Ponieważ  $\log \frac{1}{10^{0,01}} = 0,99 - 1$ , przeto  $\frac{1}{10^{0,01}} = 0,97724$ ,

$$a \quad \Delta l = \frac{10^l}{100} (1 - 0,97724) = 0,02276 l. \quad (101)$$

Związek (101) poucza nas, że pozorna wielkość interwału  $\Delta l$  jest stała, a tym samym stała jest również i zmiana kąta paralaktycznego:

$$\Delta \varepsilon'' = \frac{\Delta l}{D} \rho'' = 0,02276 \frac{l_l}{D} \rho'' = 0,0002276 \rho'' = 46,95'', \quad (102)$$

odpowiadająca przesunięciu nitki ruchomej (przy zachowaniu pewnej odległości  $D$ ) o jedną kreskę podziału. Jeżeli obrót bębna śruby mikrometrycznej podzielimy na 100  $p$  (100 równych części), to kątowi paralaktycznemu  $\varepsilon = \frac{l_l}{D} = 0,01$  (dla 5 obrotów śruby) odpowiada 500  $p$ ; zaś ze względu na to, że  $\Delta \varepsilon = 0,02276 \frac{l_l}{D} = 0,0002276$ , odpowie kątowi  $\Delta \varepsilon = 0,2276 \varepsilon$  tylko  $500 \times 0,02276 p = 11,38 p$ .

Dodając przy bębnie śruby noniusz na długości 11,38  $p$  podzielony na dziesięć części, możemy po nastawieniu nitki na najbliższą kreskę podziału (za pomocą śruby) odczytać (jako 3 miejsce log.) ilość kresek przesunięcia się zera bębna od zera noniusza, zaś czwarte miejsce dzies. uzyskać drogą ocenienia.



Rys. 242.

### § 10. Wykonanie zdjęć tachimetrycznych

Zdjęcia tachimetryczne odnoszą się z reguły do rzeźby terenu. Na odpowiednio dobranych stanowiskach, stanowiących podkład geodezyjny zdjęcia, ustawiamy przyrząd, a odczytując na latach ustawianych pionowo na charakterystycznych punktach terenu odcinki  $l$ , kąty pionowe  $\alpha$ , kąty poziome (zawarte między kierunkami do sąsiednich stanowisk i lat) oraz wysokość przyrządu, otrzymujemy wszelkie dane do określenia stanowiska lat względem stanowiska przyrządu. Jest to zatem metoda biegunowa w połączeniu z pomiarem wysokości.

Zdjęcia te łączymy bardzo często ze zdjęciami poligonowymi (zdjęcia poligonowo-tachimetryczne), przy czym wierzchołki poligonów są z reguły (choć niekoniecznie) stanowiskami tachimetrycznymi. W ten sposób jedna metoda pomiaru uzupełnia drugą; teren zdejmuje się tachimetrycznie, zaś granice własności, domy itp. metodą poligonową.

Czynności połączone ze zdjęciami tachimetrycznymi są polowe i biurowe.

#### a) Praca polowa.

Do pracy polowej należy: 1) wybór i oznaczenie stanowisk, 2) wyznaczenie ich wzajemnego położenia i wysokości, oraz 3) wyznaczenie sytuacji poziomej i wysokości punktów zdejmowanych z poszczególnych stanowisk.



1. Dla wyboru stanowisk przeprowadzamy dokładny rekonesans obszaru zdjęcia, zakładając stanowiska w miejscach, z których widać dobrze teren (jeśli możliwe do około 200 m). Jeżeli obszar zdjęcia nie ma specjalnie w jednym kierunku wydłużonego kształtu, obieramy jako podkład geodezyjny najodpowiedniej sieć triangulacyjną, nawiązaną w razie potrzeby do punktów sieci państwowej. Sieci te powinny być tak założone, aby przy małej stosunkowo ilości punktów, obejmowały całokształt zdejmowanego obszaru; nadają się tu zatem czworoboki z przekątniami lub sieci promieniste. Natomiast dla zdjęcia długich pasów terenu (np. w celach trasowniczych) posługujemy się łańcuchem trójkątów lub poligonami (najczęściej dwa mniej więcej równolegle założone poligony, łączone w pewnych odstępach kontrolnymi bokami poprzecznymi).

Stanowiska nie będące punktami sieci wiążemy z nią, bądź wcinając niektóre z nich (najczęściej wstecz), bądź też poligonowo; można je także włączyć do sieci głównej przy pomocy sieci podrzędnej. Stanowiska o bardzo podrzędnym znaczeniu, tzw. pomocnicze, łączymy z innymi punktami poligonami tachimetrycznymi (boki mierzone tachimetrycznie).

Wszystkie w ten sposób obrane punkty zaznaczamy trwale w terenie, najczęściej palami drewnianymi z wbitymi w czoło gwoździami, sporządzając ponadto ogólnikowy szkic ich sytuacji (w małej skali), oraz ich opisy topograficzne. Na szkicu powinny być uwidocznione celowe, służące do wyznaczenia poszczególnych punktów. Stanowiska oznaczamy bieżącymi numerami, odróżniając je od innych punktów kółeczkami z punktem  $\odot$ .

2. Jeżeli dla zdjęć okazała się potrzebna triangulacja, należy pomiary triangulacyjne sieci głównej przeprowadzić oddzielnie od innych; to samo odnosi się do pomiaru długości boków poligonów oraz do pomiarów katowych na wierzchołkach poligonów, które nie są stanowiskami. Natomiast można mierzyć kąty na wierzchołkach polig. będących równocześnie stanowiskami przy wykonywaniu pomiarów tachimetrycznych. W tym przypadku musi się jednak nasamprzód wykonać pomiar kąta poligonu (w obu położeniach lunety); to samo dotyczy pomiarów katowych sieci podrzędnej, którą z reguły konstruujemy wykreślnie. Odległość między podrzędniejszymi stanowiskami wyznaczamy tachimetrycznie; dla zwiększenia dokładności, względnie uzyskania kontroli, ustawia się między stanowiskami  $A$  i  $B$  laty na prostej  $AB$  w dwu punktach  $C$  i  $D$  (p. rys. 250), których odległość  $d$  (1 — 2 m) mierzy się bardzo dokładnie. Mierząc z p.  $A$  tachimetrycznie odległość  $AC$  i  $AD$  oraz z p.  $B$  odległość  $BC$  i  $BD$  otrzymujemy równania kontrolne:

$$d = AD - AC \text{ oraz } d = BC - BD.$$

Poza tym należy jeszcze wyznaczyć wysokości wszystkich stanowisk, z reguły przy pomocy niwelacji, którą można w bardzo trudnych warunkach zastąpić dla niektórych punktów trygonometrycznym pomiarem wysokości (ze środka między dwoma stanowiskami), a nawet wyjątkowo można użyć sposobu tachimetrycznego.



3) Pomiary na poszczególnych stanowiskach mają przebieg następujący.

Po ustawieniu przyrządu na stanowisku, należy przede wszystkim zmierzyć wysokość przyrządu nad punktem terenowym (odstęp między osią obrotu przyrządu a głową pała); można to uczynić rzutując wspomnianą wysokość na łatę, przystawioną do przyrządu lub bezpieczniej (zazwyczaj dostatecznie dokładnie) przy użyciu sprawdzonej taśmy parcianej. Następnie mierzy się w dwu położeniach lunety kąt (wzgl. kąty), zawarty między kierunkami do sąsiednich stanowisk (z reguły poprzedniego i następnego). Przy większych zdjęciach tachimetrycznych powinny być zatrudnione conajmniej dwie siły techniczne. Kierujący pomiarem wybiera miejsca charakterystyczne pod łatę i prowadzi szkice położenia wyznaczanych punktów, drugi odczytuje kolejno na latach odstęp skrajnych nitek  $l$ , kierunki poziome oraz kąty pionowe, zapisując wyniki w specjalnych dziennikach tachimetrycznych. Numeracja poszczególnych punktów powinna być przez szereg stanowisk bieżąca, tak aby dopiero w znacznej odległości od siebie znajdowały się punkty o tych samych numerach, które muszą się zgadzać w dzienniku i szkicu; dlatego też należy zgodność każdego piątego punktu sprawdzać, dając poprzednio umówiony znak gwizdkiem lub ręką.

Dla uniknięcia nieporozumień podajemy następujący przykład: ze stanowiska  $B$  wykonano pomiary tachimetryczne do szeregu punktów terenowych 1, 2, 3, 4, ..., w nawiązaniu do punktów  $A$  i  $C$ ; wyniki pomiarów wpisano do dziennika polowego w sposób podany na str. 312.

*b) Praca biurowa.*

Na prace biurowe składają się:  $\alpha$ ) prace rachunkowe (obliczeniowe) i  $\beta$ ) prace rysunkowe.

$\alpha$ ) Prace rachunkowe obejmują następujące czynności:

- 1) obliczenie wartości elementów potrzebnych do usytuowania stanowisk,
- 2) obliczenie i zestawienie elementów, potrzebnych do usytuowania poszczególnych punktów terenowych względem stanowisk.

Ad. 1) Obliczenie położenia (pod względem poziomym i pionowym) poszczególnych stanowisk podano w rozdziałach dotyczących triangulacji, poligonometrii i niwelacji.

Ad. 2) Przed rozpoczęciem obliczenia sytuacji poziomej i pionowej poszczególnych punktów terenowych, należy z reguły sprawdzić wartości stałych tachimetru, użytego w polu. W razie, gdy  $k \geq 100$  a  $c \geq 0$ , najlepiej zastosować sposób, podany w § 6 d (poprawki przy obliczeniu odległości i wysokości dla stałej  $k \geq 100$  i  $c \geq 0$ ).

Z wzoru (63) mamy  $100 \Delta l = (k - 100) l + c$ , zatem w naszym przypadku  $100 \Delta l = 0,78 l + 0,33$ . Wartości  $100 \Delta l$  należy wziąć z wykresu, sporządzonego wedle rys. 237, lub postąpić według końcowych uwag § 6 (wzór 63a).

Następnie przeprowadza się obliczenie  $D$  i  $h$  przy pomocy tablic (Jordana lub innych), nomogramów lub suwaka tachimetrycznego.

Obliczenie odległości i wysokości na podstawie wyników, otrzymanych



Dziennik tachimetryczny.

Stanowisko. Wysokość instrumentu (i)	Punkt	Odczyt na kole		Odczyt na łancie średkowy (s)	górnym (g) dolnym (d)	Różnica odczytów $l = g - d$	Odległość		$h = \frac{1}{s}(kl+c) \sin 2\alpha$	A - s		Wysokość celowej H <sub>st</sub> + i m	Wysokość punktu m	Punkt	U W A G I
		pozio- mym	pieno- wym				$100 \cdot l +$ $+ 100 \Delta l =$ $+ kl + c$	$D =$ $(kl + c) \cdot$ $\cos^2 \alpha$		+	-				
B 411	A	299	35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	H <sub>st</sub> = H <sub>B</sub> = 285,33
	C	34	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	l = 1,11
	1	278	40	7	13	2868	3735	1,735	175,2	172,4	+ 21,83	18,96	285,44	301,40	H <sub>c</sub> = 285,44
	2	278	55	7	28	2710	3418	1,418	143,6	140,8	+ 18,45	15,74	301,18	305,05	k = 100,78
	3	261	19	10	05	2640	3278	1,278	129,1	125,1	+ 22,25	19,61	305,05	305,05	k = 100,78
	4	261	20	7	15	1555	2112	1,112	112,4	110,6	+ 14,07	12,51	297,95	297,95	c = 0,33
	5	248	53	3	30	1485	1971	0,971	98,2	97,8	+ 5,98	4,50	289,94	289,94	
	6	286	07	1	06	1545	2090	1,090	110,1	110,1	+ 2,11	0,57	286,01	286,01	
	7	289	50	3	56	2375	2750	0,750	75,9	75,9	- 0,09	2,47	282,97	282,97	
	8	277	01	3	35	2338	2678	0,678	68,6	68,4	- 4,08	6,42	279,02	279,02	
9	265	53	3	59	2378	2752	0,752	76,1	76,1	- 1,04	3,42	282,02	282,02		
10	209	07	3	04	2182	2365	0,365	37,1	37,0	+ 1,98	0,20	285,24	285,24		

wypełnia się w polu

oblicza się w biurze



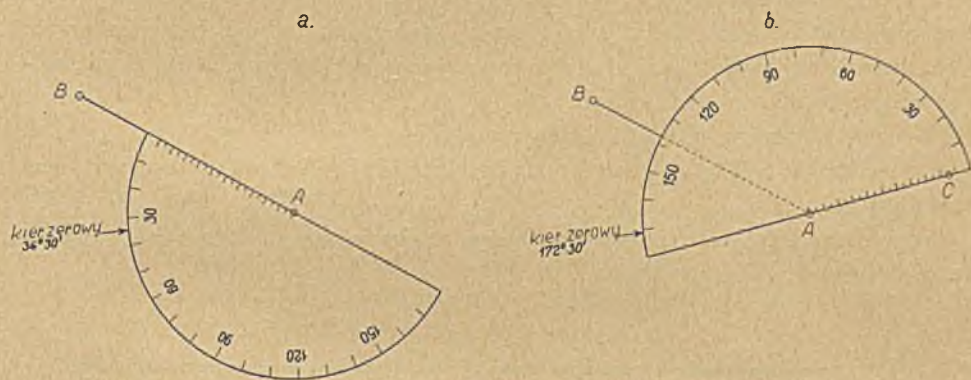
w polu i uwidocznionych w pierwszej części dziennika tachimetrycznego wykonano dla  $k = 100,78$  oraz  $c = 0,33$  m, jak to przedstawiono w drugiej części tego dziennika.

β) Prace rysunkowe dzielą się na:

- 1) nanoszenie stanowisk,
- 2) nanoszenie poszczególnych punktów,
- 3) konstrukcja warstwicy.

Ad. 1) Sposób, jaki należy zastosować przy nanoszeniu stanowisk zależy od tego, czy mamy przedstawić zdjęcie na poszczególnych arkuszach sekcyjnych, czy też na rolach podklejanych płótnem (przy zdjęciach tras). Szczegóły nanoszenia punktów na planach znajdzie czytelnik w osobnym rozdziale (XII), traktującym o nanoszeniu zdjęć (kartowaniu).

Ad. 2) Nanoszenia poszczególnych punktów zdjętych tachimetrycznie dokonujemy najprędzej i z dokładnością wystarczającą przy użyciu kątomierzy papierowych półkolistych. Poszczególne kreski podziału kąтового są liczbo-



Rys. 243.

wane podwójnie czarno i czerwono, przy czym liczby czerwone są o  $180^{\circ}$  większe od liczb czarnych. Kierunek liczbowania jest przeciwny kierunkowi ruchu wskazówek zegara.

Użycie tego rodzaju kątomierzy jest nadzwyczaj proste (p. rys. 243 a i b). Jeżeli mamy nanieść punkty na stanowisku A, układamy na tym punkcie kątomierz centrycznie, ustawiając otworek w płytce celuloidowej, stanowiący środek kątomierza, nad punktem A, po czym wbijamy węł szpilkę, tak aby można było obracać kątomierz dookoła punktu A. Aby wyznaczyć na planie kierunek zerowy, należy ułożyć brzeg podziałki kątomierza w kierunku do sąsiedniego stanowiska B: jeżeli kąt kierunkowy wynosi mniej niż  $180^{\circ}$ , należy użyć w tym celu podziałki oznaczonej czarno, w przeciwnym przypadku oznaczonej czerwono.

Niech odczyt do B wynosi  $34^{\circ}30'$ ; po obrocie kątomierza tak, aby brzeg czarnej podziałki zgadzał się z kierunkiem do B, należy w miejscu, gdzie kątomierz wskazuje  $34^{\circ}30'$  zaznaczyć kreskę, odpowiadającą kierunkowi zero-



wemu (rys. 234 a). Gdy tedy chcemy wyznaczyć kierunek do punktu terenowego  $C$ , skręcamy tak kątomierz, by odczyt na nim przy kresce kierunku zerowego wynosił tyle, ile kąt kierunkowy do  $C$  (np.  $172^{\circ}30'$ , rys. 243 b). Mając kierunek do  $C$  odcinamy na nim odległość  $AC$  w odpowiedniej skali.

Zamiast kątomierzy papierowych można użyć kątomierzy metalowych różnych konstrukcyj. Zdaniem moim są to przyrządy zazwyczaj zbyt precyzyjne do tego celu (pomijając już i kwestię ich kosztów).

Ad. 3) Konstrukcja warstwic była omówiona zasadniczo przy omawianiu profilów poprzecznych.

### § 11. Optyczny pomiar odległości przy zmiennym kącie paralaktycznym

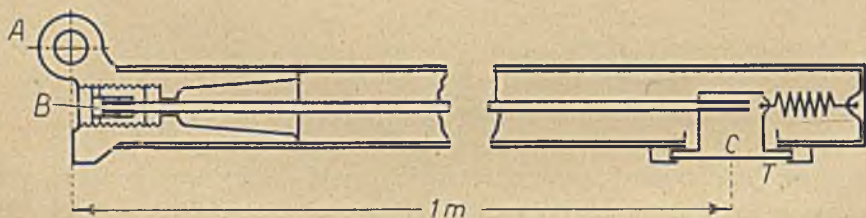
Jak już wspomniano w § 1, optyczny pomiar odległości polega na rozwiązaniu tzw. trójkąta paralaktycznego (p. rys. 229).

W poprzednich paragrafach omówiliśmy szczegółowo sposób, stosowany w tachimetrii, polegający na wyznaczeniu odcinka na łące  $l$  (podstawy trójkąta paralaktycznego) przy zachowaniu stałego kąta paralaktycznego  $\epsilon$ . W przeciwieństwie do tego sposobu można mierzyć kąt paralaktyczny  $\epsilon$ , odpowiadający stałemu odcinkowi  $l$ .

W praktyce mogą tu zajść dwa przypadki:

a) podstawa trójkąta paralaktycznego znajduje się poza obserwatorem i stanowi cel,

b) podstawa trójkąta paralaktycznego znajduje się na stanowisku obserwatora (odległownice wojskowe).



Rys. 244.

a) Podstawą (trójk. par.) jest w tym przypadku *łata pozioma* z zaznaczonymi na jej końcach wskaźnikami (markami), do których celujemy bardzo dokładnym teodolitem.

Pomiar tą metodą można najdokładniej przeprowadzić przy użyciu sprzętu pomiarowego, dostarczanego przez znaną firmę H. Wild; sprzęt ten składa się z dwumetrowejłaty i teodolitu. Dla ułatwienia transportu łąta składa się z dwu jednometrowych odcinków, zawiasowo ze sobą połączonych. Prostopadle ustawieniełaty do mierzonej długości uzyskujemy przy pomocy odpowiedniego celownika.

Na rys. 244 widzimy prawy odcinekłaty w przekroju (poziomym). Punkt  $A$  przedstawia oś obrotu zawiasowego połączenia obu odcinków. W punkcie  $B$



jest zakotwiony koniec drutu inwarowego, którego koniec drugi jest złączony z tarczą  $T$  oraz, za pomocą odpowiednio napiętej sprężyny, z końcem łąty. Urządzenie to przeciwdziała zmianie długości łąty przy zmianie temperatury. Na obu tarczach znajdują się wskaźniki  $C$ , do których celujemy teodolitem.

Długość  $d$  obliczamy z wzoru (1):

$$d = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2},$$

przy czym  $l$  jest odległością między wskaźnikami obu tarcz.

Odległość ta wynosi dwa metry (z dokładnością do kilku mikronów), przeto w praktyce można ją uważać za bezbłędną; wobec tego przyjmujemy, że błąd  $\Delta d$  mierzonej długości  $d$  zależy tylko od błędu  $\Delta \varepsilon$ :

$$\Delta d = -\frac{l}{2} \frac{\Delta \varepsilon}{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} = -\frac{l}{4} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2}\right) \Delta \varepsilon = -\frac{l}{4} \left(1 + \frac{4d^2}{l^2}\right) \Delta \varepsilon.$$

Przechodząc do błędów średnich  $\mu_d$  i  $\mu_\varepsilon$  otrzymamy (pomijając 1 wobec  $\frac{4d^2}{l^2}$ ):

$$\pm \mu_d = \frac{d^2}{l\rho} \mu_\varepsilon. \quad (102)$$

Przyjmując  $\mu_\varepsilon = \pm 1''$ , otrzymamy dla  $l = 2$  m następujące wartości  $\mu_d$ :

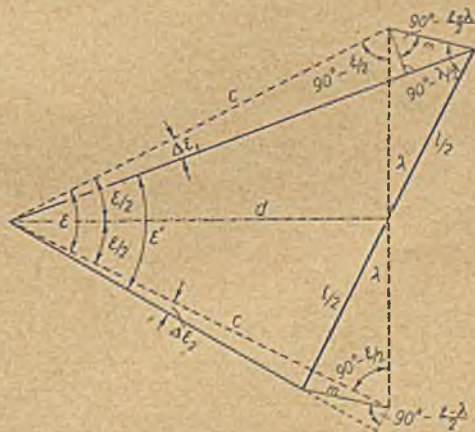
$d =$	20	50	100	200	300	350 m
$\mu_d =$	0,001	0,006	0,024	0,097	0,219	0,297 m.

Prócz tego należy jeszcze uwzględnić dwa źródła błędów, mianowicie niecentryczne ustawienie teodolitu i łąty oraz niezupełnie prostopadle położenie łąty do kierunku mierzonej prostej.

Wpływ błędu powstałego z powodu niedokładnego scentrowania przyrządów jest — o ile posłużymy się przy pomiarze pionami optycznymi — bardzo mały; poza tym maleje on wraz z odległością.

Wpływ błędu spowodowanego nieprostopadłością łąty do kierunku mierzonej prostej rozpatrzmy bliżej.

Jeżeli łąta jest odchylona od jej właściwego położenia o kąt  $\lambda$  — tak jak to uwidoczniło na rys. 245 — to przy pomocy teodolitu odczytamy zamiast kąta  $\varepsilon$  kąt  $\varepsilon'$ .



Rys. 245.



Ponieważ cięciwa  $m$ , odpowiadająca kątowi  $\lambda$ , jest określona wzorem:

$$m = l \sin \frac{\lambda}{2}, \text{ a } \operatorname{tg} \Delta \varepsilon_1 = \frac{m \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \lambda)}{c},$$

przeto, po wyrugowaniu z ostatniego wzoru  $m$  i  $c$ , otrzymamy

$$\operatorname{tg} \Delta \varepsilon_1 = \frac{l}{d} \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon + \lambda}{2},$$

a analogicznie

$$\operatorname{tg} \Delta \varepsilon_2 = \frac{l}{d} \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon - \lambda}{2}.$$

Według wyników pomiaru otrzymujemy zatem

$$d' = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon'}{2}, \quad (103)$$

przy czym

$$\varepsilon' = \varepsilon - \Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 = \varepsilon - \Delta \varepsilon,$$

podczas gdy odległość właściwą obliczamy z wzoru (1).

Rozwijając  $\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon'}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon - \Delta \varepsilon}{2}$  w szereg, z pominięciem wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy, otrzymujemy

$$d' = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{l}{2} \frac{\Delta \varepsilon}{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (104)$$

Przyjmując  $\operatorname{tg} \Delta \varepsilon_1 \approx \Delta \varepsilon_1$ ,  $\operatorname{tg} \Delta \varepsilon_2 \approx \Delta \varepsilon_2$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} -\Delta \varepsilon = -\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 &= \frac{l \sin \frac{1}{2} \lambda \cos \frac{1}{2} \varepsilon}{d} \left( \sin \frac{\varepsilon - \lambda}{2} - \sin \frac{\varepsilon + \lambda}{2} \right) = \\ &= -2 \frac{l}{d} \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

zaś

$$d' = d + \frac{l^2}{2d} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} = d + 2d \sin^2 \frac{\lambda}{2}. \quad (105)$$

Błąd

$$\Delta d \approx 2d \frac{\lambda^2}{4\rho^2} = \frac{d}{2} \frac{\lambda^2}{\rho^2}$$

nie ma zatem poważniejszego znaczenia, o ile kąt  $\lambda$  jest nieznaczny.

O ile kąt  $\varepsilon$  pomierzono dwa razy (w obu położeniach lunety) teodolitem Wilda i poprawiono wyniki uwzględniając systematyczne błędy mikrometru i podziału limbusu, można przyjąć (na podstawie doświadczeń) dla odległości  $d$  nie przekraczających 350 m, wzór następujący:

$$\pm \mu_d = 7,0 - 0,15d + 0,0026d^2, \quad (106)$$

przy czym dla uzyskania  $\mu_d$  w mm,  $d$  należy wstawić w metrach.



Wartości  $\mu_d$  obliczone tym wzorem są:

dla	$d = 20$	$50$	$100$	$200$	$300$	$350$ m
	$\mu_d = 0,005$	$0,007$	$0,018$	$0,081$	$0,196$	$0,273$ m.

Nasuwa się pytanie, czy można użyć tego sposobu do pomiaru boków ciągu poligonowego.

Aby na to pytanie odpowiedzieć, trzeba znaleźć związek między średnimi błędami  $\mu_d$ , a średnimi różnicami  $\Delta$ , jakieby powstały między dwoma pomiarami odległości  $d$ . Ponieważ  $\mu_d$  należy uważać za średni błąd wyrównanej wielkości  $d$ , przeto (wedle drugiego wzoru (97) rozdz. II):

$$\mu_d = \frac{\Delta}{2}, \text{ zaś } \Delta = 2 \mu_d. \quad (107)$$

Wielkość  $2 \mu_d$  nie powinna przekraczać dopuszczalnej różnicy, normowanej odpowiednią instrukcją pomiarową.

I tak, biorąc pod uwagę instrukcję I (p. str. 243) obliczamy maksymalną odległość  $d_m$ , którą jeszcze tą metodą można wyznaczyć — z równania:

$$0,2 \sqrt{d^2 + 1000 d} = 14 - 0,3 d + 0,0052 d^2, \text{ otrzymując } d_m \approx 147 \text{ m.}$$

W podobny sposób otrzymamy dla instrukcji II i V (dla b. zaboru austr.)  $d_m \approx 163$  m po rozwiązaniu równania

$$0,15 d + 5 \sqrt{d} + 15 = 14 - 0,3 d + 0,0052 d.$$

Postępując analogicznie wyznaczamy

dla instrukcji III (dla b. zaboru pruskiego):	$d_m \approx 350$ m,
„ „ IV (Min. Roln.): . . . . .	$d_m \approx 335$ m.

Z powyższego wynika, że metody tej można użyć do pomiaru boków poligonów, o ile tylko nie przekroczymy podanych wyżej wartości  $d_m$ . Zarazem należy zaznaczyć, że przy ustawieniu laty w środku mierzonej odległości, bok poligonu może być około dwa razy dłuższy, niż odpowiednie odległości  $d_m$ <sup>1)</sup>.

b) Ponieważ odległownice z podstawą przy obserwatorze należą do odległownic wojskowych, nie używanych przy pomiarach geodezyjnych, przeto zadowolimy się tylko krótkim opisem dwu najbardziej charakterystycznych odległownic (dalmierzy) tego typu.

1. Odległownica koincydencyjna firmy Barr i Stroud.

W roku 1888 ukazała się pierwsza odległownica, zbudowana przez angielską firmę »Barr and Stroud« na zasadzie koincydencji dwu obrazów, utworzonych przez obiektywy, umieszczone na końcach podstawy (bazy) przyrządu.

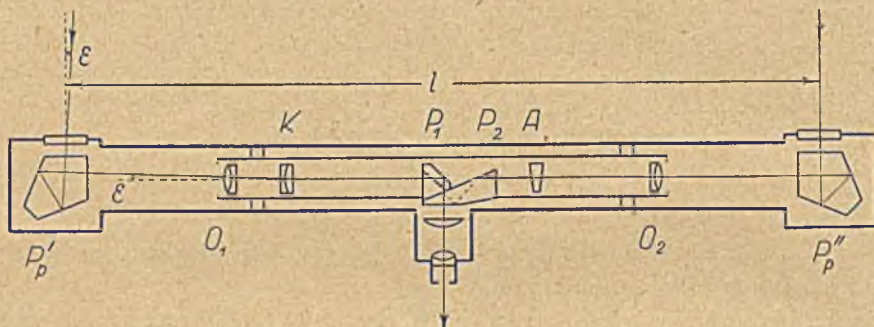
Na rys. 246a uwidoczono odległownicę Barr i Stroud w liniach schematycznych (według konstrukcji z czasów późniejszych).

<sup>1)</sup> O ile nie poprawiono wyników pomiaru kąta  $\epsilon$  (przez usunięcie wspomnianych błędów systematycznych) należy ostatni człon wzoru (106) przyjąć równy  $0,005 d^2$ , przez co zmniejszą się odpowiednio wymienione wyżej odległości  $d_m$ .



Najgłówniejszą część składową tego przyrządu stanowi achromatyczny klin Abata  $K$ . Przesuwając klin  $K$  (wzdłuż osi przyrządu) zmieniamy jego grubość, powodując tym samym odchylenie promieni świetlnych pod odpowiednim kątem (rys. 246b).

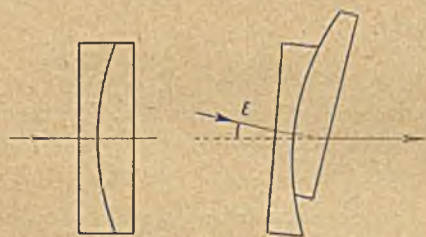
Promienie, zdążające od pewnego przedmiotu, padają na płaszczyzny przyrządu pentagonalnych  $P_p$  i załamują się pod kątem  $90^\circ$ . Podczas gdy



Rys. 246 a.

promienie strony prawej po przejściu przez obiektyw  $O_2$  i pryzmat  $P_2$  zdążają przez okular do oka, promienie z lewej strony po przejściu przez obiektyw  $O_1$  trafiają na klin Abata  $K$ .

Przesuwając klin  $K$  między obiektywem  $O_1$  a pryzmatem  $P_1$ , możemy uzyskać takie położenie obu obrazów, wytworzonych przez obiektywy, że obraz jeden znajdzie się ściśle ponad drugim. O ile przyrząd jest zrektyfikowany, to dla otrzymania odległości  $d$  należy odczytać w tym stanie położenie wskaźnika, złączonego z klinem  $K$ , na odpowiednio sporządzonej podziałce odległościowej.



Rys. 246 b.

Dla uzyskania dokładniejszej koincydencji obu obrazów jeden z nich jest odwrócony; ponadto przy pomiarze odległości do punktów (świecących) posługujemy się soczewką cylindryczną  $A$  (tzw. anastygmatyzatorem). Pomijając dalsze szczegóły, należy jeszcze wspomnieć,

że część przyrządu stanowiąca lunetę jest umieszczona wewnątrz rury ochronnej, w której znajdują się okienka o szklach płasko-równoległych. W niektórych typach tej odległownicy jedno z tych szkieł jest częściowo płasko-równoległe, a częściowo klinowate; szkło to można nieznacznie przesunąć, regulując przez to bieg promieni (rektyfikacja).

Obecnie prócz wspomnianej firmy, wyrabiają odległownice koincydencyjne firmy: Zeissa i Görza (w Niemczech), zaś O. S. M. (Schneider) i Levaloid (we Francji).

Przechodząc z kolei do omówienia dokładności odległownicy koincydencyjnych, należy zaznaczyć, że średni błąd odległości  $\mu_d$  jest określony wzorem (102),



tj. tym samym, co w odległościach typu a). Różnica, wpływająca na ostateczny wynik  $\mu_d$ , jest spowodowana innym wyznaczeniem kąta paralaktycznego  $\varepsilon$ .

Błąd kątowy, jaki popełniamy przy zastosowaniu koincydencji dwu odpowiednio cienkich kresek, wynosi — według uwag § 8, rozdz. III — około  $3,4''$ . Błąd ten zmniejsza się przy użyciu lunety o powiększeniu  $P$  (przy zachowaniu pewnych granic) do  $\frac{3,4''}{P}$ .

Wartość tę możnaby przyjąć przy idealnych warunkach obserwacji, gdyby nie istniały pewne przyczyny, powiększające błąd  $\mu_\varepsilon$ . Najważniejsze z nich są następujące.

Wskutek jednostronnego ogrzania się wewnętrznej rury przyrządu z obiektami następuje jej wygięcie oraz zmiana grubości achromatycznego klina Abata. Uzyskanie grubości klina zupełnie odpowiedniej do odległości jest rzeczą niezwykle trudną. Powierzchnie przyrządów muszą być stosunkowo bardzo wielkie ze względu na silną absorpcję światła (spowodowaną bardzo długą drogą promieni w szkle); dokładne wykonanie większych powierzchni szklanych natrafia również na wielkie trudności. Poza tym wielkość  $3,4''$  odnosi się do przypadku odpowiednio cienkich kresek, podczas gdy obrazy spostrzeganego przedmiotu mają z reguły grubość znacznie większą. Dodać wreszcie należy, że tak warunki atmosferyczne, jak i błędy mechanizmu, wpływają ujemnie na wyznaczenie kąta paralaktycznego.

Przyczyny te powodują (mimo urządzeń kompensacyjnych) około trzykrotne zwiększenie się błędu  $\mu_\varepsilon$ , tak że nawet w nowszych typach tego przyrządu przyjmujemy

$$\mu_\varepsilon = \frac{10''}{P}$$

Wstawiając tę wartość do ogólnego wzoru na  $\mu_d$  otrzymujemy:

$$\mu_d = \frac{d^2 \cdot 10''}{Pl\rho''} \approx \frac{d^2}{20600 Pl} \quad (108)$$

Dla lepszej orientacji podajemy tabelę, w której zestawiono  $\mu_d$  dla różnych podstaw i powiększeń:

Podstawa $l =$	0,5 m	1 m	3 m
Powiększenie $P =$	8	11	28
$d$	$\mu_d$		
500 m	3 m	—	—
1000	12	4 m	—
3000	109	39	5 m
9000	—	360	47
15000	—	—	130



Prócz odległownice koincydencyjnych są w użyciu, głównie w marynarce, odległownice stereoskopowe, zbudowane po raz pierwszy w roku 1906 przez firmę Zeissa.

Zasada tych odległownic polega na własności naszych oczu widzenia stereoskopowego. Gdybyśmy ustawili przed sobą w odległości dobrego widzenia  $w$  dwa wskaźniki, których wzajemny odstęp byłby równy  $o$ , rozstawowi naszych oczu, osie optyczne naszych oczu byłyby nastawione na jakiś punkt, znajdujący się w nieskończoności. Chcąc je nastawić na pewien punkt w odległości  $d$ , należy jeden ze wskaźników tak długo przesuwając w bok aż oba wskaźniki (widoczne jako jeden wspólny) pokryją się z tym punktem. Jeżeli przesunięcie wskaźnika wynosi  $a$ , wówczas otrzymamy na podstawie proporcji

$$d : w = o : a \quad \text{lub} \quad d = \frac{o w}{a}. \quad (109)$$

Jeżeli do wyznaczenia odległości  $d$  użyjemy lunety stereoskopowej o ogniskowej  $f$  i wylotach odległych od siebie o  $l$  (baza odległownicy), wówczas wzór ostatni zmieni się na

$$d = \frac{f l}{a}, \quad (110)$$

przy czym wielkość  $a$ , zwana *paralakcją stereoskopową*, wymierza się śrubą mikrometryczną (patrz rozdział XV, § 4 i § 5 ustęp 3).

W drugim typie odległownicy stereoskopowej można zauważyć szereg wskaźników (jak gdyby zawieszonych w przestworzach), odpowiadających różnym odległościom. Po skierowaniu lunety stereoskopowej na pewien punkt  $M$ , zobaczymy (po usunięciu zwyczajnej paralaksy) obraz tego punktu, umieszczony między dwoma wskaźnikami; ponieważ wskaźnikom tym odpowiadają pewne ściśle określone odległości, przeto można drogą interpolacji wyznaczyć szukaną odległość do wspomnianego punktu  $M$ .

Dokładność odległownic stereoskopowych jest mniejsza niż odległownic koincydencyjnych. Np. odległownica stereoskopowa, w której  $l = 87$  cm, o powiększeniu 14-krotnym, daje następujące błędy:

$d =$	500	1000	2000	3000	4000	8000 m
$\pm a =$	3	12	50	110	300	800 m.



## ROZDZIAŁ XI

# ZDJĘCIA METODĄ BIEGUNOWĄ Z ZASTOSOWANIEM ODLEGŁOWNIC (DALMIERZY) PRECYZYJNYCH

### § 1. Porównanie metody biegunowej z metodą rzędnych i odciętych

Przeprowadzenie zdjęć poligonowych, tak jak je przedstawiliśmy w rozdziale IX, było uważane przez czas dłuższy za najodpowiedniejszy sposób zdjęć. Ponieważ jednak metoda ta okazała się dość kosztowna w krajach górzystych (np. w Szwajcarii), przeto starano się ją zastąpić inną, tak samo dokładną, lecz mniej kosztowną. Dlatego też od czasu ukazania się w handlu odległownic precyzyjnych, powstała w Szwajcarii myśl zastosowania zamiast metody rzędnych i odciętych (rzuty na boki poligonów i linie pomiarowe) metody biegunowej.

Jak łatwo zauważyć, metoda rzędnych i odciętych nie jest korzystna w terenie górzystym i mało przejrzystym, gdyż wymaga wówczas zazwyczaj założenia prócz poligonów głównych, także i poligonów dalszych rzędów oraz wielkiej ilości pomiarowych. Natomiast przy użyciu odległownic precyzyjnych jesteśmy w możności na stosownie wybranych wierzchołkach poligonu wykonać szybko pomiary szczegółowe metodą biegunową. Jak więc widać, głównym warunkiem udanego zastosowania metody biegunowej jest odpowiedni wybór miejsc pod wierzchołki poligonu. Należy zatem tak obierać punkty poligonowe, aby przy ich minimalnej ilości można było wszystkie szczegóły zdjąć jak najwygodniej, bez stosowania specjalnych i mozolnych konstrukcyj pomocniczych.

Już z powyższego wynika, że obieranie bardzo długich boków poligonów jest przy zastosowaniu metody biegunowej nie wskazane, a to tym bardziej, że zasięg odległownicy precyzyjnej wynosi około 130 m (najwyżej 150 m), a nie jest ekonomicznie mierzyć długości boków partiami. Przeciętna długość boku poligonu wynosić będzie około 90-110 m, oczywiście w założeniu, że przejrzystość terenu na to pozwala. Poza tym można, że względu na bardzo dokładny pomiar długości, obierać graniczne punkty obszarów zdejmowanych jako punkty poligonowe, nawet nieco kosztem właściwego kształtu ciągu poligonowego, co przyczynia się również do zmniejszenia kosztów zdjęć.

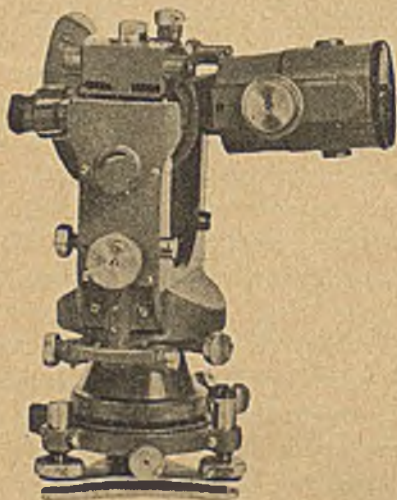


Przytoczone zalety metody biegunowej występują tym silniej, im trudniejszy teren wchodzi w grę. W terenie płaskim nie wykazuje metoda biegunowa z reguły prawie żadnej przewagi ponad metodą rzędnych i odciętych.

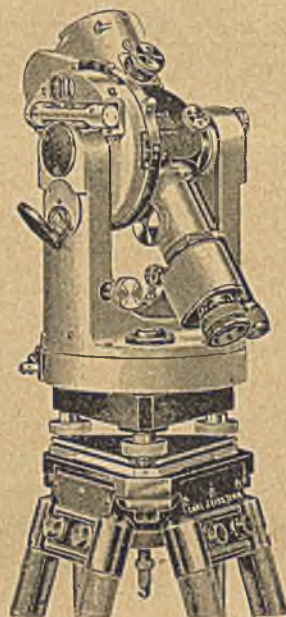
## § 2. Odległownice precyzyjne

Metoda biegunowa zawdzięcza zastosowanie w praktyce odległownicom precyzyjnym, dlatego należy zapoznać się z tymi typami przyrządów.

Zasadę, na której opierają się odległownice precyzyjne, zwane także dwuobrazowymi, wprowadził pierwszy do praktyki amerykańsin *Richard s*, nieco przed początkiem obecnego stulecia. Przed jedną połową obiektywu lunety umieścił on klin szklany, odchylający promienie o kąt paralaktyczny  $\epsilon$ , któ-



Rys. 247a.



Rys. 248a.

rego tangens wynosił  $\frac{1}{100}$ . Z biegiem czasu powstawały inne przyrządy, z których na miano precyzyjnych zasłużyły odległownice Wilda, Bossharda, Areggera, Fennela i Breithaupta.

Najbardziej z nich rozpowszechnione są odległownice Wilda i Bossharda, ostatnia znana pod nazwą Bossharda - Zeissa.

### a) Odległownica Wilda.

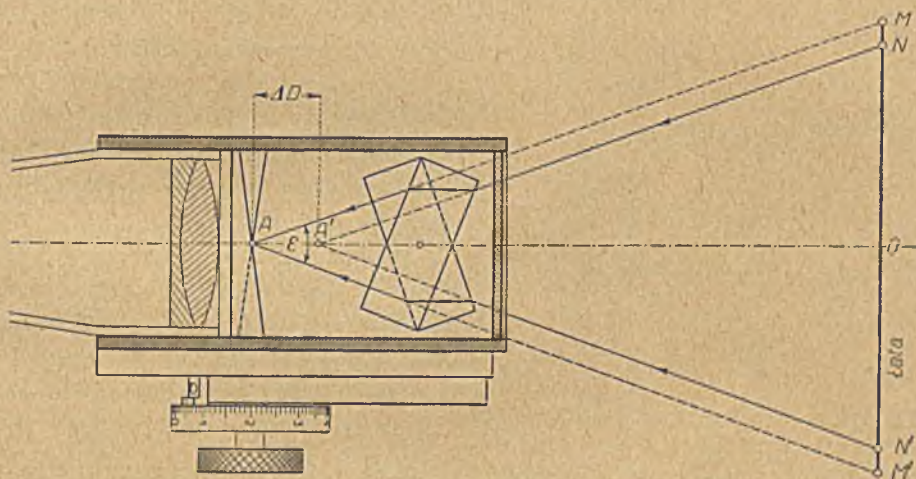
Zasada przedstawionej na rys. 247a odległownicy Wilda jest bardzo prosta. Jak to widać na rys. 247 a i b, na przednią część lunety można założyć cylindryczną nasadkę, w której są umieszczone dwa achromatyczne klipy optyczne, z których jeden przykrywa górną, a drugi dolną połowę obiektywu.

Każdy z tych klinów załamuje promienie pod kątem  $\frac{\epsilon}{2}$ , czyli równym połowie



kąta paralaktycznego w stronę przeciwną. Patrząc przez lunetę, widzi się równocześnie dwa obrazy łąty, przesunięte w kierunku poziomym o wielkość, odpowiadającą odległości mierzonej, pomnożonej przez kąt paralaktyczny  $\varepsilon$ , którego tangens wynosi  $1/100$ .

Przed klinami umieszczone są w wspomnianej nasadce dwie grube płytki szklane płasko-równoległe, obracające się dokola osi (prostopadłej do rysunku) w dwie przeciwne strony przy pomocy śruby tangencjalnej. Gdyby nie było płytek, to obrazy dwu dowolnych punktów  $M$  i  $M'$  (rys. 247b), leżących po przeciwnych stronach punktu zerowego poziomej łąty, znalazłyby się w pozycji, wymagającej oceny ich odległości od najbliższych kresek podziału łąty, co byłoby zbyt mało dokładne. Dlatego doprowadzamy do pokrycia się obrazów dwu najbliższych kresek podziału  $N$  i  $N'$  przy pomocy wspomnianej śruby



Rys. 247b.

tangencjalnej, działającej na położenie płytek, odczytując na bębenu powstały przez to odstęp  $\Delta D$  w centymetrach. Odczyt na łącie dostarcza nam odległość w całkowitych metrach, do której należy jeszcze dodać  $\Delta D$ . Ze względu na to, że obrazy różnych części łąty pokrywają się z sobą przy odczycie, podziały prawej i lewej części łąty są przesunięte w kierunku pionowym, a pozostałe jej partie zaczerwone. Przed dokonaniem odczytu należy nasadkę tak skrócić, aby obrazy podziałów stykały się wzdłuż jednej poziomej linii; w przeciwnym razie powstać mogą znaczne błędy.

Ponieważ odległownica Wilda dostarcza nam odległości powietrznych (nie zredukowanych na poziom), należy odczytać jeszcze kąt pionowy, aby móc przeprowadzić redukcję mierzonej odległości na poziom.

Zaletą przyrządu Wilda jest okoliczność, że odczyt można dokonać przy pomocy dowolnej kreski decymetrowej, zatem i wtedy, gdy zero podziału jest



zasłonięte przeszkodą. Natomiast wadę jego stanowi pewne zamglenie obrazów (spowodowane ich pokrywaniem się), oraz konieczność przeprowadzania redukcji na poziom.

Zaznaczyć jeszcze należy, że punkt analaktyczny znajduje się w przyrządzie Wilda, ze względów konstrukcyjnych, nie w miejscu klinów (jak dla uproszczenia podano na rys. 247b), lecz 0,428 m poza oś obrotu lunety, przez

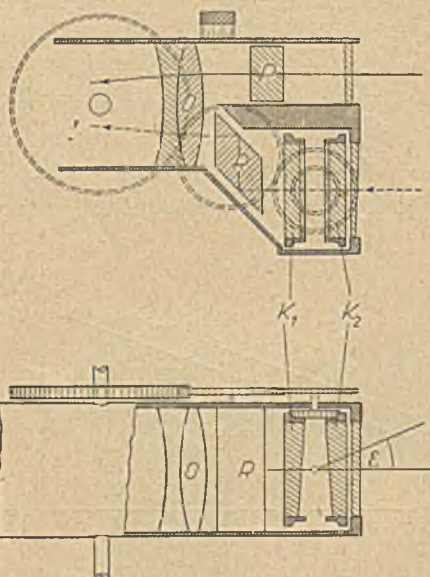
co odczytywaloby się właściwie odległości o tę wielkość za duże. Wild zapobiegł temu, przesuując odpowiednio punkt zerowy podziału decymetrowego łąty tak, że niewłaściwe położenie punktu analaktycznego  $A$  nie ma znaczenia dla wyznaczenia odległości.

#### b) Odległownica Bosshardta.

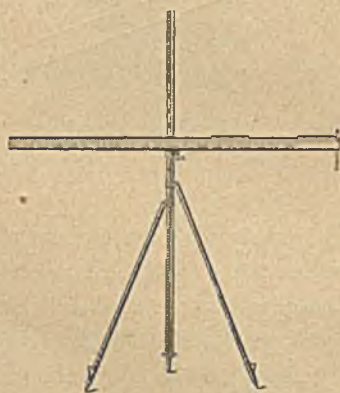
Odległownica ta powstała w Zakładach optycznych Zeissa nieco później od poprzedniej, tak że konstruktor miał możliwość poczynienia pewnych korzystnych dla praktyki zmian.

Na rys. 248a przedstawiono odległownicę Bosshardta w widoku. Natomiast na rys. 248b widzimy w dwu rzutach wylot jej lunety (w przekroju), którego konstrukcja stanowi najistotniejszą część przyrządu.

Jak tedy widać, luneta dzieli się poza obiektywem na dwie części: górną, w której znajduje się płytka płasko-równoległa  $P$  i dolną, którą zajmuje pryzmat rombowy  $R$ , a następnie dwa ruchome kliny  $K_1$  i  $K_2$ . Kliny te podczas pochylania lunety obracają się dookoła osi, która jest równoległa do osi optycznej (rys. 248b); oś ta znajduje się na przedłużeniu promienia, uwidocznionego w dolnej części wylotu lunety. Obrót ten skutecznia się automatycznie przy pomocy



Rys. 248b.



Rys. 248c.

kół ząbionych, zaznaczonych na rysunkach. Jeżeli oś odległownicy jest pozioma, wówczas kliny odchylają przebiegające przez dolną część lunety promienie pod kątem  $\varepsilon$ , którego tangens równa się  $1/100$ . Przy pochyleniu lunety o kąt  $\alpha$  kliny przyjmują takie położenie, że wytworzony przez nie kąt paralaktyczny  $\varepsilon'$ , mniejszy od  $\varepsilon$ , dostarcza nam przy odczycie zredukowanej na poziom odległości łąty od przyrządu.







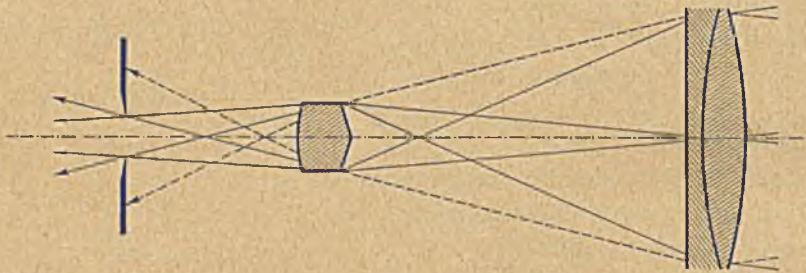
łyby zamglenie obrazów, jak to ma miejsce u Wilda (na rys. 249 promienie te zaznaczono kreskami). W wyniku zastosowania tego urządzenia, widzimy w lunecie Bossharda obrazy jasne i zupełnie przejrzyste.

Odległownicą Bossharda można odczytywać także kąty pionowe, albo naturalne wartości ich tangensów (do 3 miejsc dzies.), co służy do obliczenia różnic wysokości mierzonych punktów terenowych (dla ewent. planu warstwicowego).

Sprawdzenie odległownicy Bossharda jako przyrządu uniwersalnego, polega na czynnościach, które powinny być wykonane w następującej kolejności<sup>1)</sup>: 1) zbadanie osi celowej i libeli rewersyjnej na lunecie, 2) zbadanie indeksu koła pionowego i 3) zbadanie libeli kolimacyjnej (czyli koła pionowego).

Warunek 1) sprawdzamy, dokonując na lacie pionowej odczyty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  w dwu położeniach lunety przy osi libeli poziomej, po czym nastawiamy oś celową na odczyt średni  $\alpha_s$  i poprawiamy libelę.

Warunek 2). Przy osi celowej poziomej nastawiamy śrubą alhidadową (działającą na libelę kolimacyjną) odczyt koła pionowego na  $90^\circ$ .



Rys. 249.

Warunek 3). Równocześnie badamy, czy oś libeli kolimacyjnej jest pozioma. Poprawkę uskuteczniamy śrubką korekcyjną libeli. Dla kontroli mierzymy kąt pionowy pewnego punktu w dwu położeniach lunety przy poziomej osi libeli kolimacyjnej. Suma odczytów powinna dać  $360^\circ$ .

Następnie należy przystąpić do sprawdzenia łaty poziomej i urządzenia redukcyjnego. Ponieważ podział łaty jest z reguły dostosowany do przyrządu i bardzo starannie wykonany, przeto ta część rektyfikacji odpada, natomiast łaty mogły się w czasie transportu wygiąć, należy więc sprawdzić czy są proste.

Sprawdzenie urządzenia redukcyjnego polega na pomiarze pewnej długości w silnym spadzie z obu jej końców. Jeżeli wyniki są zgodne, urządzenie działa normalnie; w przeciwnym razie należy utworzyć z obu pomiarów średnią, a następnie przesunąć urządzenie redukcyjne śrubkami, znajdującymi się na pochwie ochronnej koła pionowego tak, aby wynik pomiaru był zgodny z poprzednio wyznaczoną średnią (w ten sposób można zmienić położenie urządzenia redukcyjnego, bez zmiany położenia libeli kolimacyjnej).

<sup>1)</sup> Dokładny opis wszystkich rodzajów błędów znajdujemy w książce: R. Bosshardt, *Optische Distanzmessung und Polarkoordinatenmethode*. Stuttgart, 1930.



Sprawdzenie stałej  $k$  odległownicy można przeprowadzić, mierząc bardzo dokładnie (np. drutem inwarowym lub taśmą inwarową) obraną odległość (najlepiej pozioma), a następnie pomierzyć ją przy pomocy odległownicy. W razie niezgodności, zwalnia się lekko śrubki, przytrzymujące pierścień zamykający wyłot dolnej części lunety, po czym zakłada się specjalny klucz w otwórki pierścienia i skręca go w prawo lub lewo tak długo, aż odczyty na łacie będą odpowiadały wynikowi poprzednio otrzymanemu.

Należy wreszcie zauważyć, że — podobnie jak w odległownicach Wilda — punkt analaktyczny  $A$  nie znajduje się i w przyrządzie Bossharda na osi obrotu lunety, lecz o 88 mm przed nią (między klinami). Poza tym łąta jest wysunięta przed drążek ją podtrzymujący o 36 mm. Powstała w ten sposób stała  $c = 124$  mm usuwa Bosshardt częściowo (24 mm) przez przesunięcie noniusza łąty, zaś pozostała część (100 mm) przez skręt płytki  $P$ , wywołujący przesunięcie promieni o 1 mm<sup>1)</sup>.

### § 3. Dokładność odległownic precyzyjnych

Dokładność, jaką można uzyskać odległownicami precyzyjnymi, jest bardzo znaczna.

Opierając się na bardzo starannych doświadczeniach Walthera, który porównał długości mierzone optycznie z wynikami otrzymanymi z triangulacji, ustaliliśmy — na podstawie wykreślnego wyrównania — następujący wzór dla określenia średniego błędu (w metrach) długości  $D$ , mierzonej odległownicą Bossharda:

$$\mu_D = 0,015 + 0,00007 D. \quad (2)$$

Błąd ten składa się z dwu części, z których pierwsza pochodzi z działalności błędów systematycznych, druga zaś jest właściwym błędem odczytu, proporcjonalnym do odległości  $D$ .

Błąd odczytu  $o$  jest spowodowany niezupełnie ścisłą koincydencją odpowiednich kresek i możemy go wyrazić następującym wzorem (z powołaniem się na optykę):

$$o = \frac{3,4''}{P \rho''} D k, \quad (3)$$

przy czym  $P$  oznacza powiększenie lunety, zaś  $k$  stałą odległownicy (równą 100).

Ponieważ  $P = 24$ , przeto:

$$o = \frac{3,4'' \cdot 100}{24 \cdot 206\,265''} D = 0,00007 D,$$

zgodnie z wzorem (2).

Inne doświadczenia, np. Ackerla i Schneidra, pozostają również w zgodzie z wzorem (2). Mierząc odległownicą Bossharda odległość 100 m, można spodziewać się wyniku z błędem około 2 cm (2,2 cm).

Odległownica Wilda daje wyniki nieco gorsze.

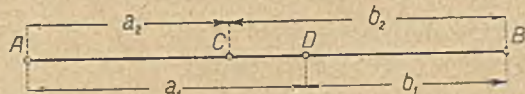
<sup>1)</sup> Na zasadzie precyzyjnych odległownic dwuobrazowych zbudowała firma Zeissa przyrząd »Lodis« (nowszy typ »Kipp-Lodis«), służący do pomiaru rzędnych i odciętych (do 60 m) w miastach o silnym ruchu (p. czasop. Allg. Vermessungs-Nachrichten, r. 1937, oraz Przegląd Mierniczy, Warszawa 1938, Nr. 1).



#### § 4. Uwagi dotyczące wykonania zdjęć metodą biegunową

Jak już wspomniano, odpowiedni wybór miejsc pod punkty poligonowe jest rzeczą pierwszorzędną wagi. W tym celu należy, gdy się wybrało stanowisko (punkt poligonowy), sporządzić szkic (krokowy), na którym będą zaznaczone strzałkami punkty zdjęte z tego stanowiska. Jest to ważne szczególnie tam, gdzie napotykamy liczne przeszkody w celowaniu (np. grupy drzew lub nawet pojedyncze drzewa itp.)

Kąty mierzy się metodą kierunkową, najpierw kąt poligonowy w dwu położeniach lunety, a następnie tylko w jednym położeniu kierunku do poszczególnych punktów. Odległości (boki poligony) większe niż 130 m rozkładamy na dwie części w ten sposób, że łatę ustawiamy mniej więcej w środku boku na dwóch bliskich punktach (w odstępie



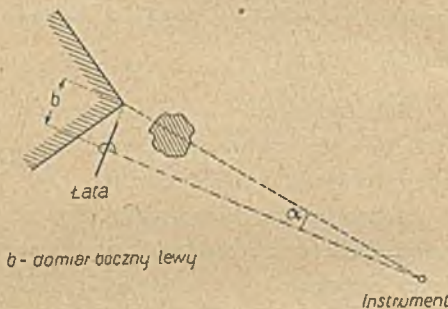
Rys. 250.



Rys. 251 a.

1 — 2 metrów) dokładnie na boku poligonowym i powstałe cztery odcinki mierzymy z obu punktów poligonowych A i B (rys. 250). Wówczas  $AB = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ . Dla kontroli mierzymy jeszcze bezpośrednio krótki odcinek  $CD = d$  małą taśmą, którą należy zawsze posługiwać się, wykonując małe pomiary przy zdejmowaniu szczegółów (por. rozdział X, § 10, a, 2).

W przypadku, gdy nie można ustawić łatę na właściwym punkcie, stawiamy ją w jego pobliżu, jak to uwidocz-



Rys. 251 b.

niono na rys. 251 a i b. Jak z tego widać, jest tu konieczny odpowiednio wyszkolony pomocnik.

Domiar, wynikające z tego rodzaju postępowania, zapisuje się w dzienniku pomiarowym z odpowiednim uwidocznieniem na szkicu.

Zdjęcia metodą biegunową mają wielkie znaczenie dla pomiarów miejskich. I tak można punkty poligonowe zakładać, zależnie od potrzeby, w różnych miejscach i poziomach, np. przechodząc z punktów, założonych w poziomie ulicy na punkty, założone na tarasach dachowych, wieżach itp. Ułatwia to w wysokim stopniu zdjęcie szczegółów miejskich.

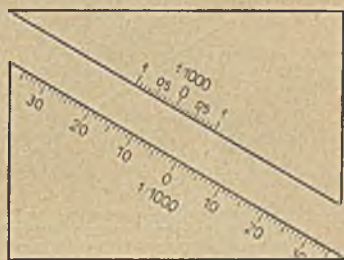


## ROZDZIAŁ XII

### NANOSZENIE ZDJĘĆ (KARTOWANIE)

#### § 1. Nanoszenie zdjęć małych obszarów

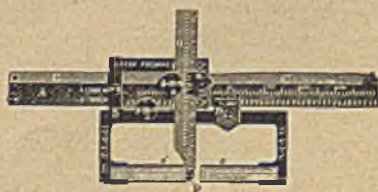
Sposób, w jaki dokonane zdjęcie nanosimy na papier, sporządzając tym samym plan, zależy od wielkości zasadniczego kształtu obszaru, a także i od zastosowania sposobu zdjęcia w polu. Dla naniesienia zdjęć małych obszarów wystarczają zazwyczaj najwyklesze przyrządy rysownicze, używane powszechnie; zatem liniał drewniany lub żelazny, małe trójkąty z twardej gumy lub celulozy (ostatnie bardzo wygodne ze względu na przejrzystość) i dokładne podziałki w odpowiednich skalach, a to z tego powodu, że zazwyczaj będziemy mieli do naniesienia odcięte nawet dość długie, natomiast bardzo krótkie rzędne. Lepsze wyniki uzyskujemy, używając małych ortografów różnych konstrukcyj. Do nich należą m. in. trójkąty Engla przedstawione na rys. 252, nanośnik uwidoczniony na rys. 253, przy pomocy którego można wygodnie i szybko nanieść tak odcięte jak i rzędne, jak to wynika z konstrukcji suwaka, wreszcie nanośnik Čemus (firmy Neuhöfer we Wiedniu), którego widok z góry przedstawia rys. 254. Przyrząd ten należy do precyzyjniejszych nanośników, tak że można go uważać za mały koordynatograf. Po liniale z wrytym podziałem dla odciętych poruszamy śrubą do ruchu leniwego drugi poprzeczny liniał z podziałem dla rzędnych. Podczas użycia ustawia się przyrząd tak, aby kreski, uwidocznione na płytkach szklanych (widocznych u dołu przyrządu), leżały na osi zdjęcia.



Rys. 252.



Rys. 253.



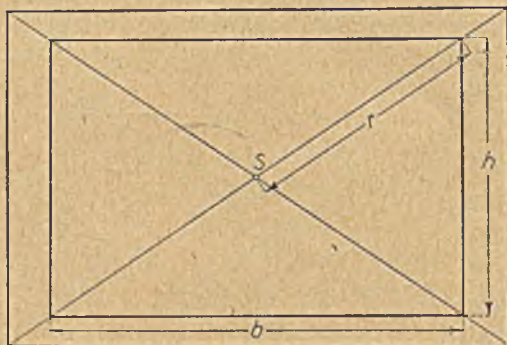
Rys. 254.



## § 2. Nanoszenie zdjęć większych obszarów

Sposób nanoszenia zależy w tym przypadku od zasadniczego kształtu obszaru, który może stanowić a) kompleks zwarty lub b) stosunkowo wąski pas, jak to ma miejsce przy zdjęciach pod trasę, względnie od sposobu, zastosowanego przy wykonaniu zdjęcia w polu.

a) Ponieważ obszar zdjęcia jest, jak założono, dość duży, wyniki zdjęcia są w takich przypadkach obliczone jako współrzędne układu prostokątnego. Prócz tego należy zauważyć, że z powodu wielkiego obszaru zdjęcia nie jest możliwe przedstawić go na jednym arkuszu; trzeba zatem posłużyć się arkuszami sekcijnymi o odpowiednich wymiarach (zależnie od wymogów przepisanej w danym wypadku instrukcji pomiarowej). Sporządzenie prostokąta, stanowiącego powierzchnię arkusza sekcyjnego, którego wymiary, zależnie od obowiązującej instrukcji pomiarowej, wynoszą około  $50 \times 60$  cm, można dokonać przy pomocy specjalnej mosiężnej ramy sekcyjnej, przez odklucie czterech wierzchołków prostokąta sekcyjnego, lub przez naniesienie go przy pomocy



Rys. 255.

przekątnei, jak to uwidoczniiono na rys. 255. Na arkuszu nieco większym niż prostokąt sekcyjny wykreślamy jego środek  $S$ , po czym odcinamy na przekątniach długość  $r$ , obliczoną z wzoru:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}, \quad (1)$$

przy czym  $b$  i  $h$  oznaczają szerokość i wysokość sekcji. Następnie sporządza się w jednym i drugim przypadku sieć hektarową, lub,

gdyby ta w skali rysunku wypadła zbyt gęsta, sieć kwadratów o innych wymiarach (czasami wypadnie prócz kwadratów jeszcze i jeden rząd prostokątów).

Do sporządzenia dokładnej sieci kwadratów można użyć także specjalnych przyrządów, np. firmy Dennert i Pape. Do nanoszenia bardzo dużych zdjęć oplaci się użyć wielkich koordynatografów, z których do najbardziej precyzyjnych należy koordynatograf firmy Coradi w Zurychu.

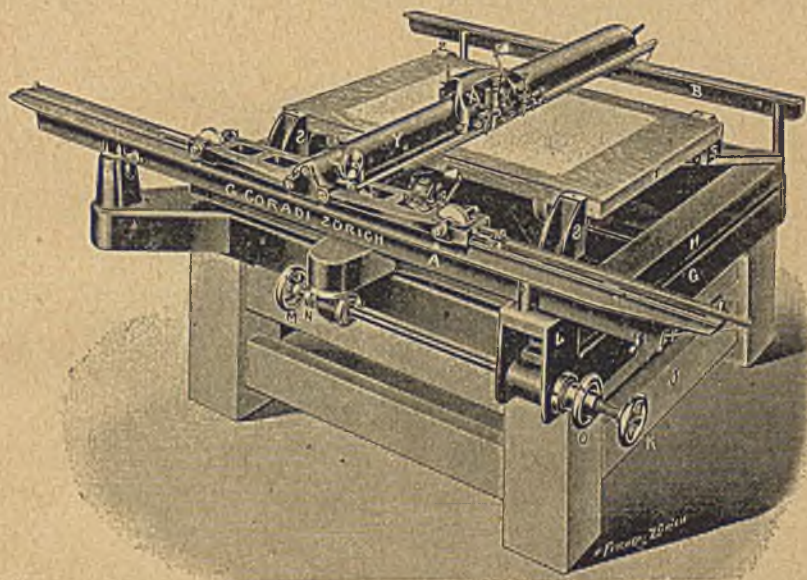
Główną część tego przyrządu stanowią dwa wózki, z których większy porusza się po liniale i równolegle doń biegnącej szynie w kierunku osi odciętych, drugi po szynach, umieszczonych na pierwszym wózku, w kierunku prostopadłym. Wszystkie ruchy mogą być sprecyzowane przy pomocy śrub do ruchów leniwych. Na rys. 256 przedstawiono koordynatograf Coradięgo w widoku.

Jak wspomniano, sposób nanoszenia jest uzależniony także od sposobu zdjęcia. I tak, gdy zastosowano w polu metodę biegunową, można albo przerachować współrzędne biegunowe na prostokątne przy pomocy odpowiednich



tablic, lub lepiej użyć specjalnego koordynatografu biegunowego. Najlepszym tego rodzaju koordynatografem okazał się przyrząd wspomnianej firmy Coradi.

Rys. 257 przedstawia koordynatograf Coradiego. Głównymi elementami tego przyrządu są: podstawa w kształcie pierścienia, stanowiąca niejako limbus z podziałem stopniowym, rama obracalna dookoła środka kątomierza, umieszczonego na górnej części podstawy i wózek, poruszający się wzdłuż ramy, którego odstęp od środka kątomierza odczytujemy na podziałce ramy. Przy obrocie ramy dookoła środka kątomierza następuje odpowiednie odwiniecie kółeczka (znajdującego się pod ramą) po obwodzie podstawy; na podstawie tego odwinęcia można ocenić odczyt kierunku na 12". Wszystkie ruchy mogą być wykonane precyzyjnie przy pomocy śrub do ruchu leniwego.



Rys. 256.

Dla mniej dokładnych zdjęć nadaje się również dobrze znacznie mniejszy koordynatograf biegunowy firmy Ott, który dostarcza kierunków na tej samej zasadzie, co poprzedni koordynatograf.

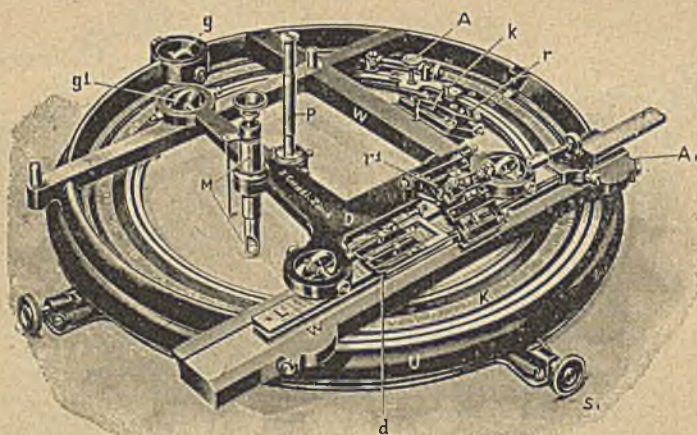
b) Do nanoszenia zdjęć, mających kształt wybitnie wydłużony w jednym kierunku, mogą być użyte wszystkie poprzednio omówione przyrządy, natomiast prace, poprzedzające nanoszenie szczegółów będą tu z reguły inne. Zdjęć tego rodzaju nie nanosi się na arkuszach sekcyjnych, lecz najczęściej na rolach, podklejonych płótnem. Rolę taką, o długości 10 m i wysokości 2 m, przecinamy na pół, uzyskując dwie role 1 m wysokie.

Ponieważ zdjęcie obejmuje stosunkowo wąski pas, 300 m do 600 m szeroki, przeto przy obliczeniu współrzędnych, o ile nie było nawiązań do punktów triangulacyjnych (jak to zwykle bywa przy zdjęciach pod trasę), nie mu-



simy stosować żadnego specjalnego odwzorowania, lecz liczyć całość w współrzędnych prostokątnych. (Gdyby od zdjęcia szły odnogi poprzeczne, sprawa przedstawiałaby się inaczej).

Należy zatem wyznaczyć taki układ poszczególnych rol, aby ich ilość wypadła jak najmniejsza, przy możliwie największym ich wyzyskaniu. W tym celu nanosimy współrzędne najskrajniejszych punktów zdjęcia, znajdujących się na brzegach zdejmowanego pasa terenu, na papier milimetrowy w skali bardzo małej, np. 1 : 10 000, po czym układamy na w ten sposób uzyskanym planie skrawki kalki, wycięte w kształcie długich prostokątów, przedstawiające powierzchnie rol papieru w tej samej skali. Poszczególne role układamy tak, aby skrajne punkty zdjęcia nie wychodziły poza nie, a na sąsiednich rolach znajdowały się co najmniej po dwa wspólne punkty (triangulacyjne lub poligonowe). Otrzymujemy zatem dla każdej roli po cztery punkty



Rys. 257.

(pary współrzędnych), na podstawie których można obliczyć kąty  $\varphi$ , jakie mają zawierać krawędzie poszczególnych rol papierowych z osią  $x$ -ów.

Po naniesieniu na pierwszej roli pierwszego punktu i wyznaczeniu przy pomocy kąta  $\varphi_1$  kierunków osi współrzędnych, dochodzimy do końcowego, względnie końcowych punktów na tej roli, zawartych równocześnie na roli następnej, na której, po obraniu położenia punktu (wspólnego obu rolom), wyznaczamy kierunek współrzędnych przy pomocy kąta  $\varphi_2$ , itd. Następnie zakładamy na każdej roli odpowiednią sieć kwadratów, najlepiej o bokach decymetrowych, po czym następuje właściwe naniesienie zdjęcia.

### § 3. Pantograf. Cyrkiel redukcyjny

Chcąc na podstawie pewnego planu (rysunku) uzyskać plan (rysunek) w skali zmienionej (mniejszej lub większej) posługujemy się przyrządem, zwanym *pantografem*.



Rys. 258 przedstawia w sposób schematyczny pantograf, który składa się zasadniczo z czterech ramion, połączonych przegibnie ze sobą. Punkt  $B$  jest biegunem przyrządu, w punktach  $A$ ,  $C$  i  $D$  znajdują się przeguby, w punkcie  $O$  ołówek, zaś w punkcie  $W$  wodzik. (W razie powiększania planu przestawia się ołówek w miejsce wodzika i odwrotnie). Ramię  $CD$ , równe ramieniom  $BA$  i  $AW = l$ , można przesuwac równoległe do ramienia  $BA$ .

Jeżeli skale planów wynoszą  $\frac{1}{m_w}$  i  $\frac{1}{m_0}$ ,

to

$$\frac{m_w}{m_0} = \frac{l}{o},$$

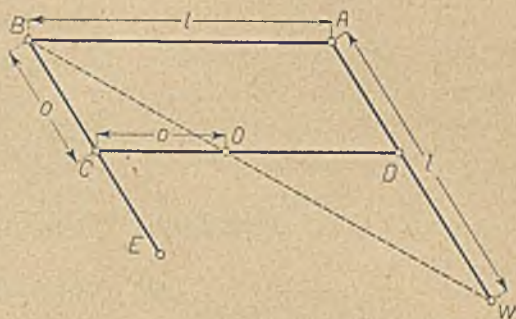
zatem

$$o = \frac{m_0}{m_w} l.$$

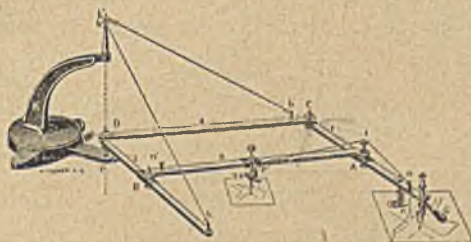
Ponieważ ramiona  $BE$ ,  $AD$  i  $CD$  posiadają odpowiedni podział, przeto możemy przy użyciu noniuszów ustawić, zgodnie z tą relacją, ramię  $CD$ , oraz na nim punkt  $O$  bardzo dokładnie.

Rys. 259 przedstawia pantograf firmy Coradi.

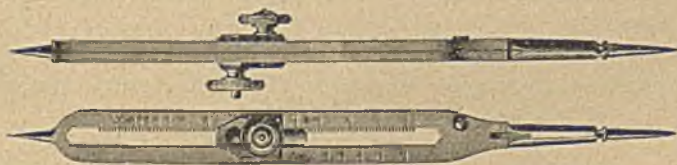
Do tego samego celu służy *cyrkiel redukcyjny* (rys. 260), który nadaje się jednak raczej tylko do pomniejszania planów, zawierających niezbyt wielką ilość szczegółów.



Rys. 258.



Rys. 259.



Rys. 260.

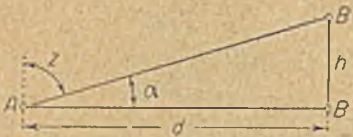


## ROZDZIAŁ XIII

# TRYGONOMETRYCZNY POMIAR WYSOKOŚCI

### § 1. Uwagi wstępne

Aczkolwiek wyznaczenie wzniesień (różnic wysokości) uzyskuje się z reguły za pomocą niwelacji geometrycznej, zachodzą w praktyce przypadki, w których posługiwanie się niwelacją byłoby zbyt uciążliwe, a nawet czasem niewykonalne. Mamy tu na myśli np. wyznaczenie wysokości wierzchołków



Rys. 261.

sieci triangulacyjnych, odległych od siebie nierzadko o dziesiątki kilometrów, które założone na wzgórzach są przedzielone głębokimi dolinami, lub wyznaczenie wysokości wysokich wież, kominów fabrycznych itp.

W tych i podobnych im przypadkach stosujemy inną metodę pomiaru, mianowicie trygonometryczny pomiar wysokości, otrzymując różnicę wysokości między dwoma punktami  $A$  i  $B$  zasadniczo na podstawie znanej odległości poziomej  $d$  i kąta, jaki tworzy prosta, łącząca oba punkty, z pionem (kąta zenitalnego  $z$ ) lub z poziomem (kąta wysokości  $\alpha$ ) (rys. 261).

Wzór na wzniesienie punktu  $B$  nad punktem  $A$  ma w tym przypadku kształt:

$$h = d \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{ctg} z. \quad (1)$$

Zaznaczyć jednak należy, że jest on ważny tylko dla stosunkowo nieznacznych odległości  $d$  (por. § 4 a i b).

### § 2. Pomiar kątów zenitalnych, wzgl. wysokościowych

Kąty pionowe mierzymy przy pomocy koła pionowego instrumentu uniwersalnego. Zauważyć jednak należy, że między pomiarem kąta pionowego, a poziomego istnieje zasadnicza różnica, głównie z dwóch powodów. Z powodu połączenia koła pionowego (spełniającego rolę limbusu) z lunetą, koło pionowe bierze udział w ruchach lunety, podczas gdy noniusze, wzgl. mikroskopy (alhidada), stoją na miejscu; ponadto jedno ramię mierzonych kątów stanowi poziom, przeto konieczną jest libela, umieszczona na instrumencie w kierunku celowej.



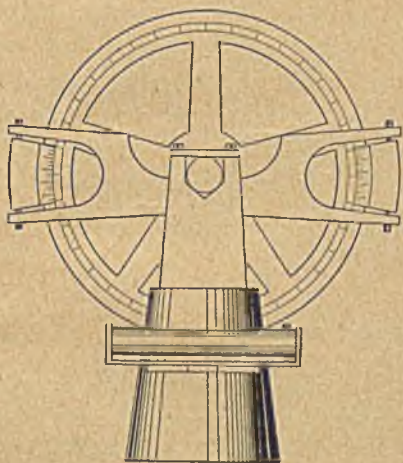
Ze względu na błędy instrumentalne wykonujemy dokładny pomiar kąta pionowego w d w u położeniach lunety.

Umieszczenie libeli w kierunku celowej może być zasadniczo przeprowadzone w trojaki sposób, powodując w konsekwencji zmianę postępowania przy pomiarze.

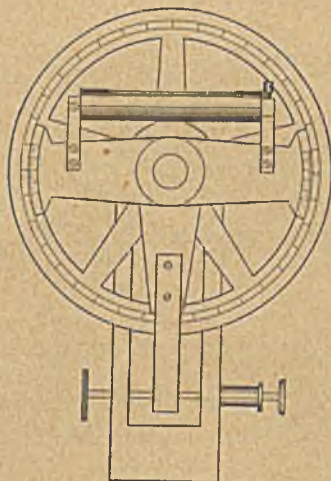
a) *Libela na dźwigarze lunety.*

Urządzenie to, przedstawione na rys. 262a, nie należy do najlepszych.

Przed użyciem przyrządu należy przeprowadzić jego rektyfikację, której wynikiem ma być uzyskanie przy poziomych osiach libeli i celowej odczytu  $0^{\circ}$  —  $180^{\circ}$  na kole pionowym. Wadę tego urządzenia stanowi okoliczność, że, o ile oś wspomnianej libeli wyszła podczas pomiaru z poziomu (co się często zdarza, np. z powodu osiadania przyrządu), sprowadza się ją do poziomu śru-



Rys. 262a.



Rys. 262b.

Koło pionowe z libelą na dźwigarze lunety. Koło pionowe z libelą kolimacyjną.

bami ustawczymi, która to czynność powoduje pewien nieznaczny (lecz dokładny dla pomiaru kątów poziomych) ruch limbusu. Dlatego też urządzenie to nie nadaje się do równoczesnego pomiaru kątów pionowych i poziomych (metodą kierunkową).

b) *Libela na lunecie.*

I to urządzenie nie nadaje się do pomiarów na większą skalę, a to z tego powodu, że trzeba przy każdym pomiarze kąta pionowego wykonać odczyty obu jego ramion (zatem nie tylko po nastawieniu na cel, ale także przy poziomej osi libeli).

c) *Libela kolimacyjna, czyli libela koła pionowego.*

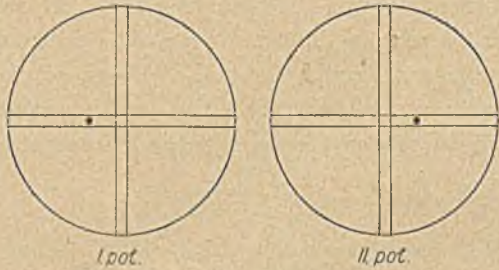
Trzecie, najważniejsze (i jedynie nadające się do dokładnych pomiarów) urządzenie polega na dodatkowej libeli, umieszczonej na ramionach alhidady, zawierającej noniusze lub mikroskopy koła pionowego (rys. 262b).

Jak to widać na tym rysunku, oś obrotu lunety jest zarazem osią obrotu



alhidady, którą wraz z noniuszami (mikroskopami) można (niezależnie od położenia lunety) tak nastawić, aby przy poziomej osi celowej lunety odczyty na kole pionowym były  $0^{\circ} - 180^{\circ}$ ; nastawienie to uskutecznia się specjalną śrubą do ruchu leniwego (na rys. 262b u dołu), którą zwać będziemy alhidadową, po czym sprowadza się oś libeli kolimacyjnej do poziomu.

Po nastawieniu lunety na cel, należy przed odczytem sprawdzić, czy oś libeli pozostała pozioma i w razie przeciwnym sprowadzić ją do poziomu



Rys. 263.

śrubą alhidadową, uzyskując przez to właściwy odczyt na kole pionowym.

Należy przy tym podkreślić, że podczas pomiaru kątów poziomych metodą kierunkową, można równocześnie mierzyć kąty pionowe, gdyż użycie śrub ustawczych nie jest potrzebne.

Mierząc w dwu położeniach lunety, nastawiamy na sygnał z reguły nie środek krzyża nitkowego, ale punkty nitki poprzecznej (poziomej), położone symetrycznie względem środka (rys. 263); w ten sposób eliminujemy wpływ niepoziomości nitki poprzecznej siatki.

### § 3. Obliczenie kątów wysokościowych i zenitalnych

Obliczenie kąta wysokościowego lub zenitalnego z wyników uzyskanych przy pomiarze, zależy przede wszystkim od sposobu oznaczenia podziału koła pionowego, przy czym nieco inaczej oblicza się kąty wysokościowe, a inaczej kąty zenitalne.

Aby wyeliminować większość błędów instrumentalnych, do których dołącza się jeszcze tzw. błąd indeksu  $i$ , mierzymy kąty pionowe — mimo uprzednio przeprowadzonej rektyfikacji — w dwu położeniach lunety.

Przy poziomej osi celowej powinien odczyt na kole pionowym przy pomiarze kątów wysokości (które mogą być dodatnie lub ujemne) wynosić  $0^{\circ} - 180^{\circ}$ , a  $90^{\circ} - 270^{\circ}$  przy pomiarze kątów zenitalnych. Różnica od wymienionych wartości stanowi wielkość błędu indeksu.

Wzory niżej zestawione są ważne w przypadku, gdy oś libeli, użytej do pomiaru, była w chwili nastawienia celowej na sygnał pozioma.

a) *Kąty wysokości.*

$\alpha$ ) Podział koła pionowego bieżący (od  $0^{\circ}$  do  $360^{\circ}$ ).

Dla odczytania kątów wysokościowych nadaje się podział w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara.

Jeżeli kąt wysokości wynosi  $\alpha$ , otrzymamy — uwzględniając warunki uwidocznione na rys. 264 — w pierwszym położeniu lunety odczyt:

$$I = \alpha + i, \text{ zatem } \alpha = I - i, \quad (2)$$



zaś w drugim położeniu lunety:

$$II = 180^\circ + i - \alpha, \text{ zatem } \alpha = 180^\circ + i - II, \quad (3)$$

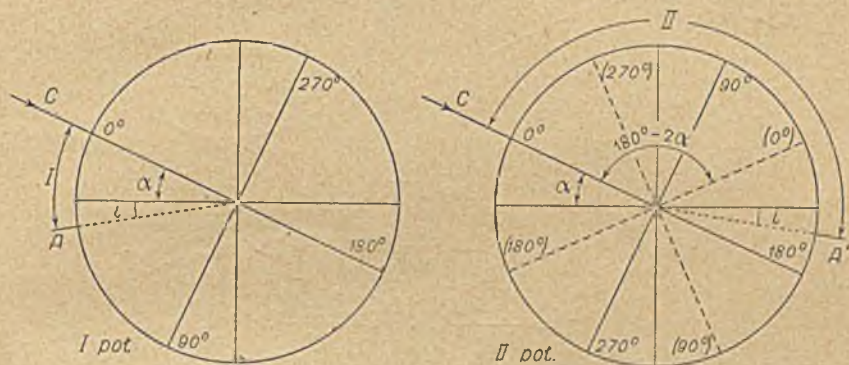
a w następnym

$$\alpha = 90^\circ - \frac{II - I}{2}, \quad i = \frac{I + II}{2} - 90^\circ. \quad (4)$$

Kontrola:

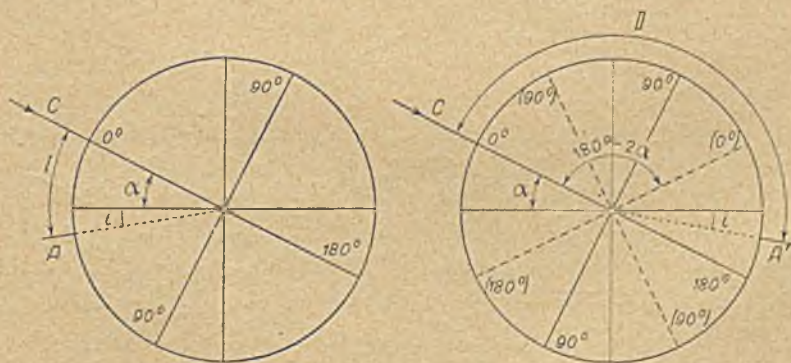
$$\alpha = I - i = I - \frac{I + II}{2} + 90^\circ = 90^\circ - \frac{II - I}{2}. \quad (5)$$

Kreski przy punktach  $A$  i  $A'$  oznaczają kreski zerowe noniusza pierwszego.



Rys. 264.

Dla uzyskania odczytu w 2-gim położeniu lunety, obracamy lunetę wraz z kołem pionowym o  $180^\circ$  dookoła osi pionowej (położenie podziału zaznaczone liniami kreskowanymi), a następnie przierzucamy lunetę o kąt  $180^\circ - 2\alpha$ , nastawiając ją na cel. Kąty depresyjne (ujemne) otrzymujemy, odejmując wynik pomiaru od  $360^\circ$ .



Rys. 265.

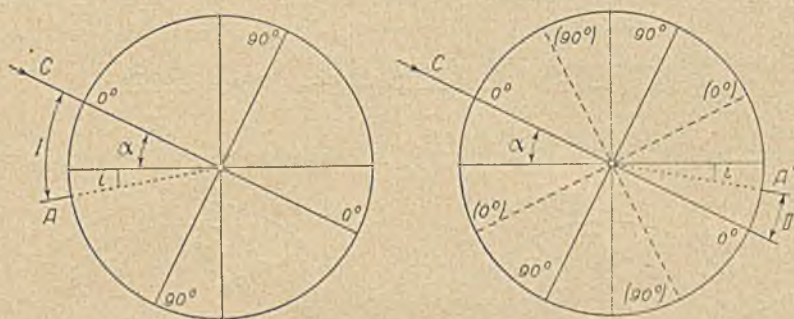
$\beta$ ) Podział koła pionowego dwukierunkowy (od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ ) (rys. 265).

W tym przypadku oblicza się kąt pionowy, jak poprzednio z tą różnicą, że kąty depresyjne otrzymuje się bezpośrednio, kładąc przed nie znak ujemny; przy pomiarze bardzo małych kątów, mogą z tego powodu łatwo powstać omyłki.



γ) Podział koła pionowego kwadrantowy.

Podział ten, uwidoczniiony na rys. 266, dostarcza nam w każdym położeniu bezpośrednio kąt wysokości; wadą jego jest natomiast możliwość omyłki przy bardzo małych kątach.



Rys. 266.

Ponieważ

$$\alpha = I - i = II + i, \quad (6)$$

przeto

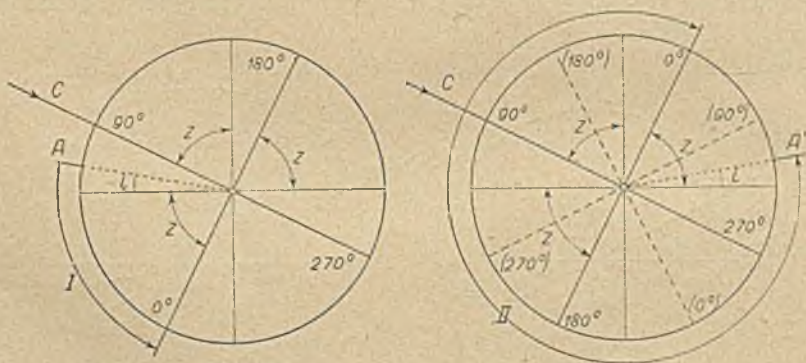
$$\alpha = \frac{I + II}{2}, \quad i = \frac{I - II}{2}. \quad (7)$$

Kontrola:

$$\alpha = I - i = I - \frac{I - II}{2} = \frac{I + II}{2}. \quad (8)$$

b) Kąty zenitalne.

α) Podział koła pionowego bieżący (od 0° do 360° w kierunku posuwania się wskazówek zegara).



Rys. 267.

Jak widać z sytuacji, przedstawionej na rys. 267, otrzymujemy w pierwszym położeniu lunety  $I = z + i$ , a tym samym  $z = I - i$ , (9)

w drugim zaś położeniu lunety:

$$II = 360^\circ - z + i, \text{ względnie } z = 360^\circ - II + i, \quad (10)$$

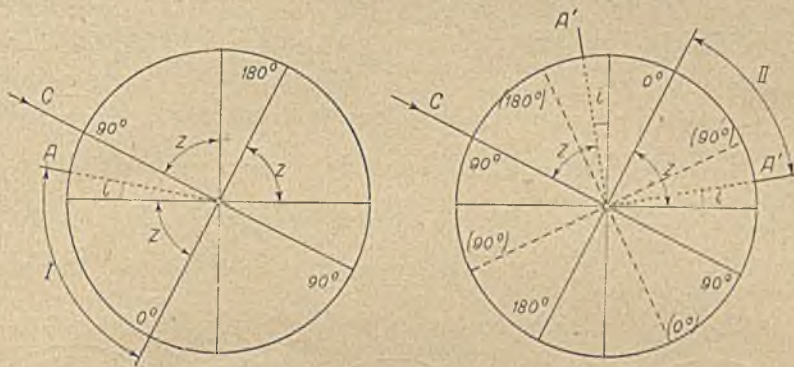


zatem

$$z = 180^\circ - \frac{II - I}{2}, \quad i = \frac{II + I}{2} - 180^\circ. \quad (11)$$

Kontrola:

$$z = I - i = I - \frac{I + II}{2} + 180^\circ = 180^\circ - \frac{II - I}{2}. \quad (12)$$



Rys. 268.

β) Podział koła pionowego dwustronny (od 0° do 180°).

Podział ten nadaje się specjalnie do odczytywania kątów zenitalnych, gdyż kąt  $z$  (wolny od błędu indeksu) otrzymujemy jako średnią z odczytów w dwu położeniach lunety:

$$I = z + i, \quad II = z - i, \quad (13)$$

zatem

$$z = \frac{I + II}{2}, \quad i = \frac{I - II}{2}. \quad (14)$$

Kontrola:

$$z = I - i = I - \frac{I - II}{2} = \frac{I + II}{2}. \quad (15)$$

c) Usunięcie błędu indeksu.

Aczkolwiek błąd indeksu nie ma znaczenia, o ile mierzymy kąty w dwu położeniach lunety, staramy się go przed pomiarem, jeżeli nie zupełnie wyeliminować, to przynajmniej wydatnie zmniejszyć.

Jeżeli na przyrządzie nie ma libeli koła pionowego, usuwamy błąd indeksu po pomiarze kąta pionowego w dwu położeniach lunety, przez nastawienie celowej na (użyty podczas pomiaru) sygnał i takie przesunięcie alhidady, aby odczyt w pierwszym położeniu wynosił  $\alpha$ , względnie  $z$  (por. a i b).

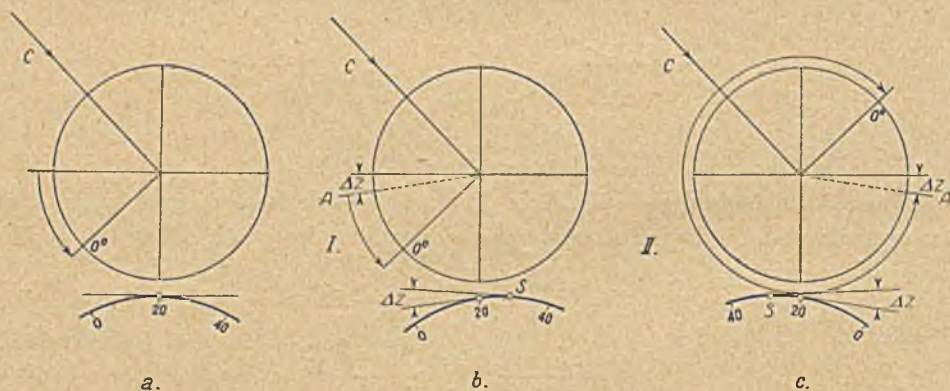
W przypadku, gdy przyrząd posiada libelę koła pionowego, przeprowadzamy rektyfikację przyrządu uniwersalnego jako niwelacyjnego (zależnie od typu), po czym nastawiamy śrubą alhidadową koło pionowe na odczyt 0°—180° (por. § 2c, str. 335). W razie, gdy odczytowi 0° nie odpowiada na drugim noniuszu (mikroskopie) odczyt 180°, można przesunąć odpowiednio noniusz, względnie indeks mikroskopu.



#### § 4. Pomiar i obliczenie kątów pionowych z uwzględnieniem korekcji libeli

Zamiast sprowadzać oś libeli podczas pomiaru ściśle do poziomu, można (o ile na przyrządzie jest libela odpowiednio oskalowana) odczytywać wychylenie środka bańki z punktu głównego i (jak przy niektórych metodach niwelacji precyzyjnej) odczyty odpowiednio poprawiać. Aby przy tej sposobności nie popełnić błędu znaku tej poprawki, omówimy krótko tę metodę pomiaru.

Przypuśćmy, że mierzymy kąty zenitalne i mamy na kole pionowym podział bieżący (§ 2, b,  $\alpha$ ). Rys. 269 a przedstawia sytuację, gdy oś libeli koła pionowego znajduje się w poziomie, tj. gdy środek bańki  $s = \frac{l+p}{2}$  przypada na kreskę środkową podziału, oznaczoną na rysunku cyfrą 20. Na rys. 269 b widzimy, że  $s = \frac{l+p}{2} > 20$ , tj. że styczna w punkcie 20 jest pochyłona o mały kąt  $\Delta z = (s - 20) \omega''$ , przy czym  $\omega''$  oznacza wartość kątową libeli.



Rys. 269.

Zatem, jeżeli kierunek liczbowania skali libeli jest w pierwszym położeniu lunety jak na rys. 269 b, otrzymujemy za mały kąt zenitalny, czyli że do odczytu  $I$  należy dodać  $\Delta z = (s - 20) \omega''$  (jeżeli  $s < 20$  wypadnie znak poprawki ujemny). To samo odnosi się do odczytu  $II$  w drugim położeniu lunety, jak to widać na rys. 269 c. Odczyty kątów wysokościowych otrzymałyby przy tym samym położeniu libeli i podziale koła jak w § 2 a,  $\alpha$ , poprawki o znakach przeciwnych.

Libele nowszych przyrządów (Wild) nie posiadają podziału, przeto nie można zastosować wyżej podanego sposobu, który i tak w tym przypadku nie miałby racji, ze względu na bardzo znaczną dokładność poziomowania libeli, uzyskaną przy pomocy koincydencji obrazów obu końców bańki.

#### § 5. Przybliżona teoria trygonometrycznego pomiaru wysokości

a) *Odległość sygnału nie przekracza 300 m.*

Przeprowadzając trygonometryczny pomiar wysokości na nieznaną odległość  $d$ , możemy uważać niewielki element ziemi, nad którym będzie ce-



lowa, za płaski; wobec czego możemy w tych przypadkach zastosować wzór (1), podany w § 1:

$$h = d \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{ctg} z.$$

Dla wyznaczenia  $d_{\max}$ , tj. możliwie największej odległości  $d$ , dla której wzór powyższy będzie praktycznie wystarczający, postąpimy w sposób następujący.

Przyjmijmy, że błąd pomiaru kąta wysokości, wzgl. kąta zenitalnego, wynosi  $\Delta \alpha$ . Jeżeli błąd ten zastosujemy do pomiaru w poziomie, otrzymamy w odległości  $d$  błąd wysokościowy

$$\Delta h = d \frac{\Delta \alpha}{\rho}. \quad (16)$$

Z drugiej strony, różnica spowodowana zakrzywieniem ziemi wynosi, jak to wynika z rys. 270, w przybliżeniu:

$$\Delta h = \frac{d^2}{2r}, \quad (17)$$

przy czym  $r$  jest średnim promieniem ziemskim. Z porównania wzorów (16) i (17) otrzymujemy

$$d \frac{\Delta \alpha}{\rho} = \frac{d^2}{2r}, \quad \text{skąd } d = 2r \frac{\Delta \alpha}{\rho}. \quad (18)$$

Przyjmując błąd  $\Delta \alpha = \pm 5''$  otrzymamy:

$$d = 320 \text{ m},$$

którą to odległość należy jeszcze nieco zmniejszyć (około 13%) ze względu na refrakcję.

Z wywodów tych i założeń wynika, że wzoru (1) można używać dla odległości  $d_{\max}$  wynoszących okragło 300 m. Błąd  $\Delta h$  będzie dla  $d = 300$  m nieco mniejszy niż 1 cm (7,5 mm).

Zwiększając wielkość błędu  $\Delta \alpha$ , otrzymaloby się na  $d_{\max}$  wartość większą.

*b) Odległość sygnału wynosi ponad 300 m.*

W tym przypadku należy przy obliczeniu wysokości  $h$  uwzględnić tak wpływ kulistości ziemi, jak i refrakcji ziemskiej, która powstaje wskutek różnej gęstości poszczególnych warstw atmosfery. Promień, zdążający od sygnału  $B$ , znajdującego się ponad instrumentem  $A$  w wysokości  $h$ , przechodzi przez warstwy coraz to bardziej gęstego powietrza, a załamując się ustawicznie ku prostopadłej padania, zmienia kierunek prosty na zakrzywiony (wypukły ku górze); krzywą w ten sposób powstałą nazywamy *krzywą refrakcyjną*.

Na rys. 271 przedstawiono bieg promienia z punktu  $B$  do punktu  $A$ .

Biorąc pod uwagę trójkąt  $AB'B$ , otrzymujemy (przyjmując łuk  $AB'$  równy jego cięciwie):

$$h = d \frac{\sin \left( \alpha' + \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin \beta}, \quad (19)$$



Rys. 270.



a uwzględniając, że  $\beta = 90^\circ - (\alpha' + \gamma)$ :

$$h = d \frac{\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos(\alpha' + \gamma)}. \quad (20)$$

Ze względu na to, że kąt  $\gamma$  jest stosunkowo bardzo mały, a kąt  $\alpha'$  niewielki, można napisać:

$$h = d \frac{\sin \alpha' + \frac{\gamma}{2} \cos \alpha'}{\cos \alpha'} = d \operatorname{tg} \alpha' + d \frac{\gamma}{2}, \quad (21)$$

a następnie

$$h = d \operatorname{tg} \alpha' + \frac{d^2}{2r}. \quad (22)$$

Ponieważ nie mierzymy kąta  $\alpha'$ , lecz kąt  $\alpha = \alpha' + \delta$ , gdyż do lunety dostają się promienie (zdażające z p.  $B$ ) w kierunku stycznej krzywej refrakcyjnej w punkcie  $A$ , przeto należy we wzorze (22) położyć w miejsce  $\operatorname{tg} \alpha'$  wyrażenie

$$\operatorname{tg}(\alpha - \delta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta}, \quad (23)$$

które ze względu na bardzo mały kąt  $\delta$  możemy zmienić na:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \delta) \approx \operatorname{tg} \alpha - \delta. \quad (24)$$

Najprostsze założenie krzywej refrakcyjnej polega na przyjęciu jej jako koła o promieniu  $r'$ , stojącym w pewnym stosunku do promienia ziemskiego, czyli że  $r' = \frac{r}{k}$ , przy czym  $k$  nazywamy *współczynnikiem refrakcji*. Przy tym przyjęciu kąt środkowy, odpowiadający łukowi  $AB$ , jest równy  $2\delta$ , a tym samym:

$$2\delta = \frac{d'}{r'}, \text{ więc } \delta = \frac{d'}{2r'}; \quad (25)$$

ponieważ jednak ograniczyliśmy pomiary do stosunkowo niewielkich kątów wysokości  $\alpha$ , przeto kładąc w przybliżeniu

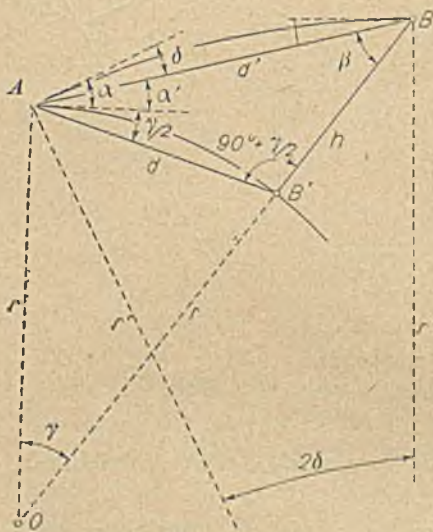
$$d \approx d',$$

otrzymujemy

$$\delta \approx \frac{d}{2r'} = \frac{d}{2r} k, \quad (26)$$

a po wstawieniu do wzoru (24):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \delta) \approx \operatorname{tg} \alpha - \frac{d}{2r} k. \quad (27)$$



Rys. 271.



Ostateczne równanie wynika z połączenia wzorów (22) i (27):

$$h = d \operatorname{tg} \alpha + \frac{d^2}{2r} (1 - k). \quad (28)$$

(W przypadku, gdy kąt  $\alpha$  jest ujemny, czyli depresyjny, zmienia się znak pierwszego wyrazu na ujemny, wyraz drugi pozostaje niezmienny).

Wzór (28) wystarcza w zupełności w praktyce. Dokładniejsze wyniki osiąga się, stosując wzory (29) i (30), wyprowadzone w 2 części II tomu dzieła Jordan-Eggert »Handbuch der Vermessungskunde« (str. 140 i dalsze). Wzór (29) przedstawia się następująco:

$$h = \left(1 + \frac{H_s}{r}\right) d \operatorname{tg} \alpha + \frac{1 - k}{2r} \frac{d^2}{\cos^2 \alpha}, \quad (29)$$

przy czym  $H_s$  oznacza średnią arytmetyczną wysokości stanowiska i (w przybliżeniu) celu nad poziomem morza.

Jeszcze większą dokładność możnaby uzyskać przez synchroniczny pomiar wzajemny z punktów (1) i (2); ze względu jednak na trudności, jakie ten sposób pomiaru pociąga za sobą, stosuje się go w praktyce tylko w wyjątkowych przypadkach.

Przy założeniu, że kąty zawarte w punktach (1) i (2) między krzywą refrakcyjną a cięciwą (1) — (2) są sobie równe, otrzymujemy

$$h = H_2 - H_1 = \left(1 + \frac{H_s}{r}\right) d \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2}, \quad (30)$$

przy czym  $z_1$  i  $z_2$  są kątami zenitalnymi w (1) i (2).

c) Wyznaczenie współczynnika refrakcji  $k$ .

Współczynnik  $k$  wynosi wedle wzoru (28):

$$k = 1 - \frac{2r}{d^2} (h - d \operatorname{tg} \alpha); \quad (31)$$

jeżeli zatem znamy  $d$ ,  $\alpha$  i z niwelacji  $h$ , możemy dla danego przypadku obliczyć  $k$ .

Inny sposób wyznaczenia  $k$  polega na równoczesnym pomiarze kątów pionowych na obu stanowiskach ( $A$  i  $B$  na rys. 272).

Kąty trójkąta płaskiego  $ABO$  wynoszą:

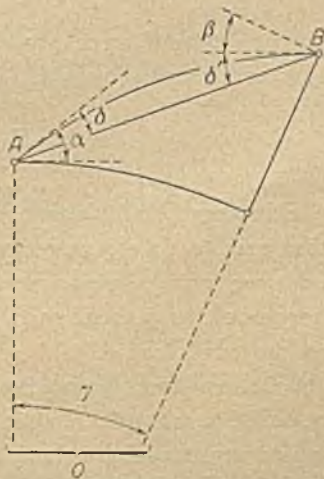
$$90^\circ + \alpha - \delta + 90^\circ - \beta - \delta' + \gamma = 180^\circ, \quad (32)$$

zatem

$$\delta + \delta' = \alpha - \beta + \gamma. \quad (33)$$

Przyjmując  $\delta = \delta'$ , otrzymujemy

$$2\delta = \frac{d}{r} k = \alpha - \beta + \gamma = \alpha - \beta + \frac{d}{r}, \quad (34)$$



Rys. 272.



zatem

$$k = 1 - \frac{r}{d} \frac{\beta - \alpha}{\rho}. \quad (35)$$

Przytoczonymi sposobami wielu znanych geodetów i astronomów wyznaczyło współczynnik refrakcji ziemskiej, który średnio można przyjąć

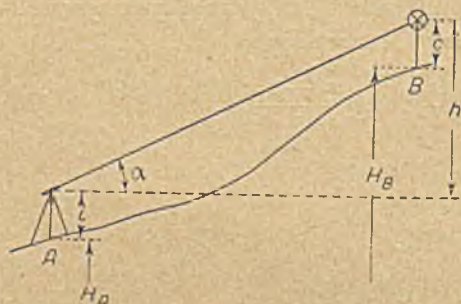
$$\text{dla pomiaru nad lądami } k = 0,13$$

$$\text{,, ,, nad morzami } k = 0,16.$$

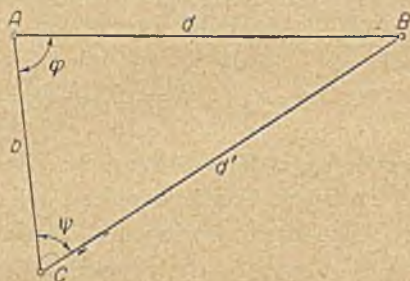
Współczynnik refrakcji  $k$  jest wielkością, która ulega dość silnym zmianom, osiągając graniczne wartości 0 i 0,25, co wpływa ujemnie na dokładność trygonometrycznego pomiaru wysokości (szczególnie dla większych odległości  $d$ ).

### § 6. Uwagi dotyczące wykonania pomiaru w praktyce

Wzór (28) dostarcza nam różnicę wysokości  $h$  między celem a wysokością instrumentu (osi obrotu lunety). Ponieważ instrument znajduje się na statywie (rys. 273), zatem w pewnej wysokości  $i$  nad punktem  $A$  (stanowiskiem), a często celujemy do tarczy, umieszczonej na wysokości  $c$  ponad wyznacza-



Rys. 273.



Rys. 274.

nym punktem  $B$ , przeto wzór na wyznaczenie  $H_B$ , wysokości punktu  $B$  ponad poziomem morza (o ile  $H_A$  jest znana), przedstawia się:

$$H_B = H_A + i + d \operatorname{tg} \alpha + (1 - k) \frac{d^2}{2r} - c. \quad (36)$$

Bliższego omówienia wymaga także sprawa wyznaczenia odległości  $d$ , która rzadko da się zmierzyć bezpośrednio. W takich wypadkach zakładamy podstawę (bazę), którą mierzymy dokładnie. Z końców tej bazy  $A$  i  $C$  weinamy punkt wyznaczany  $B$ , jak to uwidoczniło na rys. 274, otrzymując pośrednio odległość  $d$ .

Jeżeli w tym przypadku zaniwelujemy, lub w inny sposób wyznaczymy wysokość punktu  $C$ , to możemy wykonać z obu końców bazy trygonometryczny pomiar wysokości i z dwóch otrzymanych wyników na  $H_B$  wziąć średnią.

Czasami nie można założyć bazy tak, aby kąt weinający przy  $B$  był nie-



zbyt ostry, wówczas obieramy punkty  $A$  i  $C$  na jednej prostej z punktem  $B$ . (Na rys. 275 oznaczono punkty  $A$  i  $C$  liczbami (1) i (2)).

Najpierw mierzymy na punkcie (1) kąt  $\alpha_1$  i wysokość instrumentu  $i_1$ . Po opuszczeniu punktu (1), umieszczamy na nim tarczę w wysokości  $i_1$ , zaś instrument przenosimy na punkt (2) (drugi koniec bazy  $b$ ). Z punktu (2) mierzymy kąty  $\alpha_2$  i  $\alpha_2'$ .

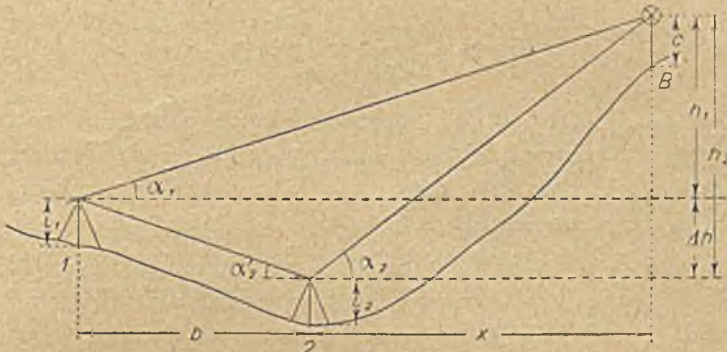
Ponieważ sposobu tego można używać tylko dla małych odległości, przeto przeprowadzamy obliczenie bez uwzględnienia zakrzywienia ziemi i refrakcji.

Z rysunku widzimy, że:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = x \operatorname{tg} \alpha_2 - (b + x) \operatorname{tg} \alpha_1 = x (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) - b \operatorname{tg} \alpha_1 = b \operatorname{tg} \alpha_2', \quad (37)$$

wobec czego

$$x = \frac{\Delta h + b \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = b \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2'}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}, \quad (38)$$



Rys. 275.

zaś

$$h_2 = b \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2'}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (39)$$

Jeśli tedy znamy wysokość  $H_2$ , obliczymy  $H_B$  z wzoru:

$$H_B = H_2 + i_2 + b \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2'}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_2 - c. \quad (40)$$

### § 7. Dokładność trygonometrycznego pomiaru wysokości

Biorąc pod uwagę zasadniczy wzór (28), używany w praktyce:

$$h = d \operatorname{tg} \alpha + (1 - k) \frac{d^2}{2r},$$

możemy na podstawie prawa przenoszenia się błędów utworzyć następujący wzór na średni błąd wysokości  $h$ :

$$\mu_h^2 = \left\{ \operatorname{tg} \alpha + 2(1 - k) \frac{d}{2r} \right\}^2 \mu_d^2 + \left( \frac{d}{\cos^2 \alpha} \right)^2 \left( \frac{\mu_\alpha}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{d^2}{2r} \right)^2 \mu_k^2, \quad (41)$$



przy czym  $\mu$  z odpowiednimi wskaźnikami oznaczają błędy średnie zawartych we wzorze (28) wielkości. Ponieważ  $d$  znamy przy większych pomiarach najczęściej z triangulacji, z dokładnością kilkunastu cm, zaś  $\alpha$  jest zazwyczaj kątem nieznacznym, przeto pierwsze wyrażenie wzoru (41):

$$\left\{ \operatorname{tg} \alpha + (1 - k) \frac{d}{r} \right\} \mu_d$$

wynosi zazwyczaj kilka cm i może być wobec innych błędów pominięte.

W wyrażeniu drugim:

$$\frac{d}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\mu_\alpha}{\rho}$$

możemy z tych samych powodów położyć  $\cos^2 \alpha = 1$ , zamieniając je na  $d \frac{\mu_\alpha}{\rho}$ .

Pozostawiając wyraz trzeci wzoru (41) bez zmiany, otrzymujemy wzór przybliżony:

$$\mu_h^2 = d^2 \left( \frac{\mu_\alpha}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{d^2}{2r} \right)^2 \mu_k^2. \quad (42)$$

Błąd średni  $\mu_\alpha$  można przyjąć przy dokładnych pomiarach równy  $\pm 5''$ . Sprawa przyjęcia odpowiedniej wartości na  $\mu_k$  przedstawia się znacznie trudniej. Wartość współczynnika  $k$  może w ogóle wahać w granicach od 0,00 do 0,25. Z drugiej strony trzeba zaznaczyć, że wartości poniżej 0,10 i powyżej 0,20 zdarzają się tylko wyjątkowo. Poza tym liczne doświadczenia wykazały, że najmniejsza wartość  $k$  przypada na południe, podczas gdy wartości największe skonstatowano rano i wieczorem.

Uwzględnienie wszystkich wartości  $k$  od 0 do 0,25 powodowałoby w rezultacie  $\mu_k = \pm 0,08$ , natomiast ograniczenie ich do wartości od 0,10 do 0,20 dałoby  $\mu_k = \pm 0,03$ . Zazwyczaj obiera się dla celów praktycznych wartość pośrednią, mianowicie  $\pm 0,05$ .

Jeżeli przyjmiemy  $r$  wartość średniego promienia ziemskiego dla szerokości geograficznej  $50^\circ$  otrzymamy, przy założeniach, uczynionych poprzednio, następujący wzór na błąd średni wysokości  $h$ :

$$\mu_h^2 = 0,000\,5876\, d^2 + 0,000\,015\,35\, d^4 \quad (43)$$

lub ogólnie

$$\mu_h^2 = (1) d^2 + (2) d^4;$$

błąd  $\mu_h$  otrzymujemy w metrach, o ile odległość  $d$  wstawimy w km.

Z wzoru (43) przejdziemy łatwo do wzoru, określającego nam wagi, potrzebne do wyrównania sieci wysokościowych, mierzonych trygonometrycznie, pamiętając, że  $\mu_d = \frac{\mu_o^2}{\mu_d^2}$ .

Za  $\mu_o^2$  należy najstosowniej przyjąć kwadrat błędu średniego dla odległości średniej  $d_o$  danej sieci.

Np. dla sieci, założonych na większych obszarach można przyjąć  $d_o = 10$  km, a wówczas otrzymamy:



$$p_d = \frac{0,05876 + 0,1535}{(1) d^2 + (2) d^4} = \frac{1}{d^2} \cdot \frac{0,21226}{0,0005876 + 0,00001535 d^2}. \quad (44)$$

Dla zredukowania błędu  $\mu_h$  obieramy stanowisko nie na punkcie nawiązania, lecz możliwie na osi symetrii między nim a sygnałem. Oczywiście, najkorzystniej będzie, gdy uda się obrać stanowisko w punkcie środkowym prostej, łączącej punkt nawiązania z sygnałem; i tak przyjmując, że odległość  $d$  między punktem nawiązania a sygnałem wynosi 20 km, otrzymamy wedle wzoru (43) błąd  $\mu_h = \pm 0,46$  m, gdy tymczasem w odległości 5 km błąd ten wynosi  $\pm 0,16$  m. Obierając przeto stanowisko w punkcie środkowym w odległości  $d$ , otrzymamy dla różnicy wysokości między punktem nawiązania a sygnałem błąd  $\pm 0,16\sqrt{2} = \pm 0,22$  m, zatem mniejszy o połowę niż poprzednio.

Dla tego rodzaju pomiarów, wykonanych (bezpośrednio jeden po drugim) w równych odległościach  $\frac{d}{2}$ , przyjmowano nawet dawniej (Jordan), że wpływ błędu  $k$  odpada; miałyby to jednak miejsce tylko wówczas, gdyby istotnie błąd przyjęcia  $k$  w obu kierunkach pomiaru był ten sam, co — jak poucza praktyka — prawie nigdy nie zachodzi. Natomiast ustawienie się z instrumentem na osi symetrii między punktem nawiązania a punktem wyznaczanym (podobnie, jak to ma miejsce przy niwelacji) jest korzystne. Jordan nazwał różnice wysokości, otrzymane w ten sposób, *przekątniami wysokościowymi*.

Kwadraty średnich błędów przekątnei wysokościowych (różnic wysokości)  $\mu_{i,k}^2$  są oczywiście równe  $\mu_i^2 + \mu_k^2$ , tj. sumie kwadratów średnich błędów wysokości  $h_i$  i  $h_k$ , wyznaczonych dla w grę wchodzących odległości  $d_i$  i  $d_k$ ; zatem wagi, odpowiadające przekątniom określa związek:

$$p_{i,k} = \frac{C}{\mu_i^2 + \mu_k^2}, \quad (45)$$

przy czym za  $C$  można przyjąć np. średni błąd średniej przekątnei.

### § 8. Sieci wysokościowe i ich wyrównanie

Pomiary wysokościowe mogą polegać nie tylko na wyznaczeniu wzniesień między dwoma punktami, lecz, podobnie jak w niwelacji, tworzyć zamknięte ciągi, a nawet zespoły ciągów. W tym ostatnim przypadku powstaje, analogicznie jak przy niwelacji, *siec wysokościowa*.

Jako jeden z najprostszych typów sieci należy uważać sieć, składającą się z kilku punktów  $A, B, \dots$ , których wysokości wyznaczamy ze stanowiska  $S$ , znajdującego się mniej więcej w środku pomiędzy punktami  $A, B, \dots$ , i punktem nawiązania  $N$ , jak to uwidoczniono na rys. 276.

Wykonując na stanowisku  $S$  pomiar kierunków celem wyznaczenia współrzędnych tego punktu, mierzymy równocześnie i kąty pionowe (zatem do  $N$  na początku i końcu serii). Ilość warunków  $r$  określa związek następujący:

$$r = n - p + p', \quad (46)$$



przy czym  $n$  jest ilością spostrzeżeń,  $p$  ilością wszystkich punktów sieci, zaś  $p'$  ilością punktów o znanej wysokości (reperów).

W naszym przypadku jest

$$n = 6$$

$$p = 6$$

$$p' = 1$$

zatem

$$r = 6 - 6 + 1 = 1.$$

(Wysokości między punktami oznaczono liniami kreskowanymi, dla  $SN$  wykonano dwa pomiary, przy czym kierunek 6 pokrywa się z kier. 1, p. rys. 276).

Warunkiem tym jest zamknięcie się ciągu  $N, A, B, C, D, N$ , zaznaczonego na rys. 276 pełnymi liniami, przedstawiającymi przekątnie  $h_{1,2}, h_{2,3}$ , itd.

Przyjęcie wag poszczególnych przekątni następuje wedle wzoru (45). Ilość warunków, ale i dokładność wyników, wzrasta znacznie przez przyjęcie drugiego stanowiska. Rys. 277 przedstawia sieć o dwu stanowiskach  $S_1$  i  $S_2$ , z których dokonano pomiary do poszczególnych punktów i punktu nawiązania  $N$ , przy czym wzdłuż kierunków  $S_1 N$  i  $S_2 N$  mierzono tylko raz.

Ilość warunków jest tutaj

$$r = 10 - 7 + 1 = 4.$$

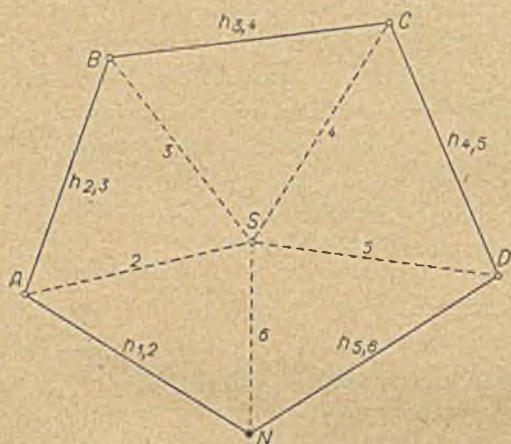
Z kilku kombinacji warunków przyjmujemy następujące o kształcie najprostszym:

$$(2) - (1) - (7) + (6) = 0 \quad (47)$$

$$(3) - (1) - (8) + (6) = 0$$

$$(4) - (1) - (9) + (6) = 0$$

$$(5) - (1) - (10) + (6) = 0.$$



Rys. 276.

Przy większej ilości warunków, jak to ma miejsce w naszym

przykładzie, można zastosować z korzyścią wyrównanie spostrzeżeń z warunkowanych z niewiadomymi.

W tym celu dzielimy celowe na kilka grup, o przypuszczalnie mniej więcej takich samych współczynnikach  $k$ , wprowadzając ostatnie jako niewiadome, przy czym ilość niewiadomych musi być oczywiście mniejsza, niż ilość warunków. W naszym przypadku na cztery warunki można wprowadzić np. dwie niewiadome  $k_1$  i  $k_2$ ;  $k_1$  dla celowych o kątach depresyjnych (tj. wysokościowych ujemnych), zaś  $k_2$  dla celowych o kątach wysokościowych, wychodząc z założenia, że (pomijając inne okoliczności, jakie zaszły podczas pomiaru) krzywe refrakcyjne skierowane od punktu  $S$  ku górze będą inne, niż skierowane od nich w dół. Przyjmijmy, że punkty  $A, B, C$  i  $D$  leżą wyżej niż stanowiska  $S_1$  i  $S_2$ , zaś punkt nawiązania  $N$  leży od nich niżej. Wobec tego



warunki (47) przekształca się (ze względu na to, że kąty wysokościowe  $\alpha_1$  i  $\alpha_6$  są ujemne) na:

$$d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{d_2^2}{2r} - k_2 \frac{d_2^2}{2r} + d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{d_1^2}{2r} + k_1 \frac{d_1^2}{2r} - d_7 \operatorname{tg} \alpha_7 - \frac{d_7^2}{2r} + k_2 \frac{d_7^2}{2r} - \\ - d_6 \operatorname{tg} \alpha_6 + \frac{d_6^2}{2r} - k_1 \frac{d_6^2}{2r} = 0, \quad \text{itd.} \quad (48)$$

Wstawiając za  $\alpha$  wartości spostrzegane  $\alpha'$ , oraz za  $k_1$  i  $k_2$  wartość przybliżoną 0,13, otrzymamy pierwszy związek równań (48), odnoszący się do poprawek  $\lambda_\alpha$  i niewiadomych  $\Delta k_1$  i  $\Delta k_2$ :

$$\frac{d_1}{\cos^2 \alpha_1} \lambda_1 + \frac{d_2}{\cos^2 \alpha_2} \lambda_2 - \frac{d_6}{\cos^2 \alpha_6} \lambda_6 - \frac{d_7}{\cos^2 \alpha_7} \lambda_7 + \frac{d_1^2 - d_6^2}{2r} \Delta k_1 - \\ - \frac{d_2^2 - d_7^2}{2r} \Delta k_2 + \omega_1 = 0, \quad (49)$$



Rys. 277.

przy czym

$$\omega_1 = d_1 \operatorname{tg} \alpha_1' + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2' - d_6 \operatorname{tg} \alpha_6' - d_7 \operatorname{tg} \alpha_7' + \\ + \frac{0,87}{2r} (-d_1^2 + d_2^2 + d_6^2 - d_7^2). \quad (50)$$

Dalsze warunki przekształcamy w analogiczny sposób. Następnie rugujemy przy pomocy dwu warunków niewiadome  $\Delta k_1$  i  $\Delta k_2$ , redukując ilość warunków w tym przypadku z czterech do dwóch i przeprowadzamy wyrównanie z uwzględnieniem wag, podanych wzorami (44), wzgl. (45). Po wyznaczeniu poszczególnych  $\lambda$ , wyznaczamy  $\Delta k_1$  i  $\Delta k_2$  ze związków, które poprzednio służyły do ich wyrugowania.



## § 9. Zastosowanie do nautyki. Głębokość i odległość horyzontu

W nautyce mają pojęcia głębokości i odległości horyzontu wielkie znaczenie. Głębokość horyzontu jest to kąt depresyjny  $\tau_0$ , pod jakim z pewnej wysokości nad poziomem morza widzimy horyzont;  $d_0$  odległość horyzontu lub odległość widzenia nie wymaga bliższych objaśnień.

Krzywa refrakcyjna, poprowadzona z punktu  $A$  (rys. 278), wzniesionego o  $h$  nad poziomem morza, stycznie do jego powierzchni (uważanej jako powierzchnia kuli) wyznacza nam  $d_0$ , tj. odległość horyzontu lub odległość widzenia. Jest to zatem najdalszy punkt  $B$ , widoczny w danym kierunku. Odległości tej odpowiada głębokość horyzontu  $\tau_0$ . Odległość  $d_0$  oraz kąt  $\tau_0$  wyznaczamy łatwo z dwu związków; jeden otrzymujemy dla wysokości —  $h$  (z  $A$  do  $B$ ), zaś drugi dla wysokości  $h$ , którą otrzymalibyśmy, celując z  $B$  do  $A$ . Zatem

$$-h = -d_0 \operatorname{tg} \tau_0 + \frac{1-k}{2r} d_0^2, \quad (51)$$

$$h = d_0 \operatorname{tg} 0^\circ + \frac{1-k}{2r} d_0^2. \quad (52)$$

Związek (52) dostarcza:

$$d_0 = \sqrt{\frac{2r}{1-k}} h = C \sqrt{h}. \quad (53)$$

Ze względu na to, że  $k$  waha się w granicach od 0 do 0,25,  $d_0$  zmienia się od  $3\,569,3 \sqrt{h}$  do  $4\,121,5 \sqrt{h}$ , zatem średnio:

$$d_0 = 3\,826,7 \sqrt{h}. \quad (54)$$

Ze związków (51) i (52) otrzymujemy dalej przez odjęcie (51) od (52):

$$2h = d_0 \operatorname{tg} \tau_0, \quad \text{skąd } \operatorname{tg} \tau_0 = 2 \frac{h}{d_0}, \quad (55)$$

a w połączeniu ze związkiem (53):

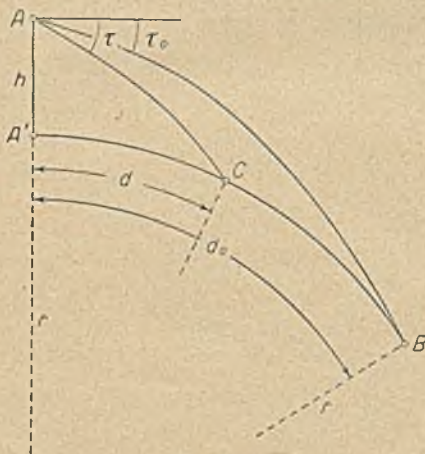
$$1-k = \frac{r}{2h} \operatorname{tg}^2 \tau_0, \quad k = 1 - \frac{r}{2h} \operatorname{tg}^2 \tau_0, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg} \tau_0 = 2 \sqrt{\frac{1-k}{2r}} h. \quad (57)$$

Wzory (53) do (57) podają nam wzajemną zależność wielkości  $h$ ,  $d_0$  i  $\tau_0$ .

Przechodząc do dowolnie mniejszej odległości  $d$ , otrzymamy na podstawie związku (51):

$$-h = -d \operatorname{tg} \tau + \frac{1-k}{2r} d^2. \quad (58)$$



Rys. 278.



Z dwu, dostarczonych nam przez związek (58) wartości na  $d$ , odpada odległość większa niż  $d_0$ , pozostaje przeto po rozwiązaniu i uwzględnieniu, że

$$\frac{1-k}{2r} = \frac{\operatorname{tg}^2 \tau_0}{4h}.$$

$$d = \frac{r \operatorname{tg} \tau}{1-k} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2h \operatorname{ctg}^2 \tau (1-k)}{r}} \right), \quad (59)$$

czyli

$$d = \frac{2h}{\operatorname{tg} \tau_0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \tau_0} \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\operatorname{tg} \tau_0}{\operatorname{tg} \tau} \right)^2} \right). \quad (60)$$

Głębokość horyzontu  $\tau_0$  obserwuje się ustawicznie w portach morskich, zatem dla w danej chwili zmierzonego kąta depresyjnego  $\tau$  otrzymuje się łatwo odległość  $d$ .



## ROZDZIAŁ XIV

# BAROMETRYCZNY POMIAR WYSOKOŚCI

### § 1. Wyprowadzenie ścisłej formuły barometrycznej

Stosunek prężności  $p$  pewnego gazu do jego gęstości  $\rho$  z uwzględnieniem temperatury określa nam prawo Gay-Lussaca.

I tak, jeżeli pewien gaz przy temperaturze  $t_i$  posiada prężność  $p_i$  i gęstość  $\rho_i$ , zaś przy temperaturze  $t_k$  — prężność  $p_k$  i gęstość  $\rho_k$ , wówczas wedle wspomnianego prawa istnieje związek:

$$\frac{p_i}{\rho_i} : \frac{p_k}{\rho_k} = \frac{273^0 + t_i}{273^0 + t_k}, \quad (1)$$

który można przedstawić w zmienionym kształcie:

$$\frac{p_i}{\rho_i} \left( 1 + \frac{t_k}{273^0} \right) = \frac{p_k}{\rho_k} \left( 1 + \frac{t_i}{273^0} \right). \quad (2)$$

Przyjmując  $t_k = 0^0$ , oraz odpowiednio  $p_k = p_o$  i  $\rho_k = \rho_o$ , otrzymujemy w następstwie:

$$\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{p_o}{\rho_o} \left( 1 + \frac{t_i}{273^0} \right) = \frac{p_o}{\rho_o} (1 + \alpha t_i),$$

względnie

$$\rho_i = \frac{\rho_o p_i}{p_o (1 + \alpha t_i)}, \quad (3)$$

o ile współczynnik  $\frac{1}{273}$  oznaczmy przez  $\alpha$ . (Wartość liczbowa tego współczynnika wynosi 0,003 665).

Nim przystąpimy do dalszej części wywodu, należy przypomnieć, że w powietrzu atmosferycznym znajduje się prócz powietrza suchego para wodna oraz pewne gazy, z których to ostatnich należy wziąć pod uwagę dwutlenek węgla. Ponadto, ponieważ prężność, względnie ciśnienie, będziemy mierzyli przy pomocy słupa rtęci o pewnej wysokości, którego ciężar zależy od przyspieszenia ziemskiego  $g$  (zmiennego z szerokością geograficzną) i od wysokości ponad poziomem morza, należy oba wymienione czynniki uwzględnić w dalszym rozumowaniu.

Jeżeli powietrze suche w szerokości geograficznej  $45^0$  i w poziomie morza wywiera przy temperaturze  $0^0$  ciśnienie  $p_o$  (przyjęte jako normalne, odpowia-



dające ciężarowi słupa rtęci o wysokości 760 mm), wówczas jego gęstość wynosi  $\rho_o = 0,00129277$ . Natomiast gęstość pary wodnej w tych samych warunkach wynosi  $\rho_o' = 0,623 \rho_o$ , zaś dwutlenku węgla  $\rho_o'' = 1,529 \rho_o$ .

Ponieważ  $\rho_i$  odnosi się do powietrza mieszanego (wraz z parą wodną i dwutlenkiem węgla), przeto  $P_i$  — ciężar jednostki objętości samego powietrza suchego otrzymamy, o ile prężność pary wodnej oznaczymy przez  $e$ , zaś dwutlenku węgla przez  $e'$ :

$$P_i = \rho_i g = \frac{p_i - e - e'}{\rho_o} \frac{\rho_o}{1 + \alpha t} g. \quad (4)$$

Ciężar jednostki objętości powietrza mieszanego  $P$  uzyskamy, dodając do  $P_i$  ciężary jednostek objętości pary wodnej:

$$\frac{e}{\rho_o} \cdot \frac{0,623 \rho_o}{1 + \alpha t} g$$

i dwutlenku węgla:

$$\frac{e'}{\rho_o} \cdot \frac{1,529 \rho_o}{1 + \alpha t} g.$$

W ten sposób otrzymamy ostatecznie:

$$P = \frac{\rho_o}{1 + \alpha t} \frac{g}{\rho_o} (p_i - e - e' + 0,623 e + 1,529 e') \quad (5)$$

lub

$$P = \frac{\rho_o g}{1 + \alpha t} \frac{p_i}{\rho_o} \left( 1 - \frac{0,377 e}{p_i} + \frac{0,529 e'}{p_i} \right). \quad (6)$$

Zawartość dwutlenku węgla w powietrzu atmosferycznym jest niezmiernie mała, wobec czego możemy stosunek  $\frac{e'}{p_i}$  zastąpić jego wartością przeciętną, wynoszącą 0,0004, a wówczas wobec tego, że  $\frac{0,529 e'}{p_i} = 0,00021$ , otrzymujemy wzór na  $P$  w postaci:

$$P = \frac{\rho_o g}{1 + \alpha t} \frac{p_i}{\rho_o} \left( 1,00021 - \frac{0,377 e}{p_i} \right). \quad (7)$$

Ponieważ przeciętną wartość stosunku  $\frac{e'}{p_i}$  można przyjąć równą około  $\frac{1}{100}$ , przeto wyrażenie ostatnie w nawiasie wyniesie przeciętnie 0,00377, a tym samym zmienia się, gdy je podzielimy przez 1,00021, zaledwie na szóstym miejscu dziesiętnym. Dlatego biorąc 1,00021 przed nawias, możemy współczynnik 0,377 pozostawić bez zmiany, otrzymując ostatecznie:

$$P = 1,00021 \frac{\rho_o g}{1 + \alpha t} \frac{p_i}{\rho_o} \left( 1 - 0,377 \frac{e}{p_i} \right). \quad (8)$$



Ciśnienie  $p_0$  odpowiada ciężarowi słupa rtęci o wysokości  $760 \text{ mm} = 0,76 \text{ m}$ , w szerokości geogr.  $\varphi = 45^\circ$ , w poziomie morza przy temperaturze  $t_0 = 0^\circ$ .

Oznaczając przyspieszenie ziemskie dla tej szerokości w poziomie morza przez  $G$ , otrzymujemy związek (wobec ciężaru gatunkowego rtęci 13,59593)

$$p_0 = 0,76 \times 13,59593 G,$$

a dalej

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{0,76 \times 13,59593}{0,00129277} G = k G. \quad (9)$$

Przyjmijmy, że ciśnienie w wysokości  $H$  nad poziomem morza wynosi  $p$ . Wznosząc się o  $dH$  uzyskujemy zmniejszenie ciśnienia, zatem wysokości  $H + dH$  będzie odpowiadało ciśnienie  $p - dp$ .

Zmniejszenie ciśnienia  $dp$  zostało wywołane zmniejszeniem górnego słupa powietrza, spoczywającego na pewnej jednostce powierzchni, o wysokość  $dH$ , względnie zwiększeniem dolnego słupa powietrza o tę samą wysokość  $dH$ .

Objętość warstwy  $dH$ , wynosząca  $1 \times 1 \times dH$ , pomnożona przez ciężar jednostkowy  $P$ , odpowiada zatem ubytkowi ciśnienia, co upoważnia nas do ułożenia związku

$$- dp = P dH.$$

Wstawiając wyrażenie na  $P$  otrzymujemy dalej

$$- dp = \frac{p_0}{p_0} \frac{p g}{1 + \alpha t} 1,00021 \left( 1 - 0,377 \frac{e}{p} \right) dH \quad (10)$$

lub

$$- dp = 1,00021 \frac{P}{1 + \alpha t} \frac{g}{k G} \left( 1 - 0,377 \frac{e}{p} \right) dH, \quad (11)$$

a mnożąc obustronnie przez  $\frac{k}{1,00021 p}$  oraz kładąc  $\frac{k}{1,00021} = K$  i  $0,377 = \beta$ , uzyskujemy związek różniczkowy w następującej postaci:

$$-\frac{dp}{p} K = \frac{1 - \beta \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} \frac{g}{G} dH, \quad (12)$$

który przy zastosowaniu całkowania przekształca się na:

$$- K \lg p + C = \int \frac{1 - \beta \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} \frac{g}{G} dH \quad (13)$$

(przy czym  $C$  jest stałą całkowania, zaś  $\lg$  oznacza logarytm naturalny).

Prawa strona ostatniego równania zawiera wielkości zależne od wysokości, przy czym jednak zależności tej nie znamy dokładnie. Aby tedy móc skorzystać z podanego związku, przyjmujemy dwie stacje obserwacyjne ponad sobą,



przy czym pierwszej (niższej) niech odpowiada wysokość  $H_1$ , ciśnienie  $p_1$ , temperatura  $t_1$ , oraz  $\frac{e_1}{p_1}$ , zaś drugiej  $H_2$ ,  $p_2$ ,  $t_2$  i  $\frac{e_2}{p_2}$ .

W tym przypadku otrzymamy całkę określoną kształtu:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{1 - \beta \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} \frac{g}{G} dH = -K (\lg p_2 - \lg p_1) = K \lg \frac{p_1}{p_2}. \quad (14)$$

Polóżmy następnie

$$t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2), \quad \frac{e}{p} = \frac{1}{2} \left( \frac{e_1}{p_1} + \frac{e_2}{p_2} \right) \quad (15)$$

oraz wedle Helmherta

$$g = G \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) (1 - \gamma \cos 2\varphi), \quad (16)$$

przy czym  $H$  oznacza średnią  $\frac{1}{2} (H_1 + H_2)$ ,  $R$  średni promień ziemski, zaś  $\gamma = 0,002644$  (współczynnik zależny od spłaszczenia ziemi).

Po wyjęciu wyrażen niezależnionych w ten sposób od  $H$  przed całkę, użyjemy wzór:

$$K \lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \beta \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} (1 - \gamma \cos 2\varphi) \int_{H_1}^{H_2} \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) dH. \quad (17)$$

Ze względu na to, że

$$\int_{H_1}^{H_2} \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) dH = H_2 - \frac{H_2^2}{R} - H_1 + \frac{H_1^2}{R} = (H_2 - H_1) \left( 1 - \frac{H_1 + H_2}{R} \right),$$

otrzymujemy, oznaczając  $H_2 - H_1 = h$ :

$$K \lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \beta \frac{e}{p}}{1 + \alpha t} (1 - \gamma \cos 2\varphi) \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) h. \quad (18)$$

Ponieważ  $\frac{2H}{R}$  wpływa na wynik nieznacznie, określa się  $H$  ilością kilometrów, przemieniając  $\frac{2}{R}$  na  $\frac{2000}{R} = 0,000314 = \delta$ .

Jeżeli jeszcze zamienimy logarytm naturalny na Briggsowski, otrzymamy z pominięciem wyrazów rzędów wyższych następujący wzór:

$$h = \frac{K}{0,4342945} (1 + \alpha t) \left( 1 + \beta \frac{e}{p} \right) (1 + \gamma \cos 2\varphi) (1 + \delta H) \log \frac{p_1}{p_2}; \quad (19)$$

a ponieważ

$$\frac{K}{0,4342945} = \frac{0,76 \times 13,59593}{0,4342945 \times 0,00129277 \times 1,00021} = 18400,35,$$



przeto ostateczny wzór na różnicę wysokości opiewa (po odrzuceniu setnych stałej):

$$h = 18400 (1 + \alpha t) \left(1 + \beta \frac{e}{p}\right) (1 + \gamma \cos 2\varphi) (1 + \delta H) \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (20)$$

przy czym  $h$  otrzymujemy w metrach, o ile  $H$  wstawimy do wzoru w km. Wartość współczynników w nim zawartych jest następująca:

$$\alpha = 0,003665, \quad \beta = 0,377, \quad \gamma = 0,002644, \quad \delta = 0,000314.$$

Wzór (20) został wyprowadzony przez Laplace'a.

## § 2. Sposoby obliczenia formułą ścisłą

a) *Zastosowanie przybliżonych wysokości nad poziomem morza.*

Formuła ścisła, zawierająca iloczyn, nadaje się do obliczenia logarytmicznego. Ujemną stroną tego sposobu jest praca przygotowawcza, polegająca na tworzeniu wyrazów kształtu:  $1 + \alpha t$ ,  $1 + \beta \frac{e}{p}$  itd., które muszą być przed użyciem logarytmów obliczone. Dlatego można z pominięciem wyrazów rzędów wyższych niż pierwszy przedstawić wzór (20) następująco:

$$h = h_0 + h_0 \alpha t + h_0 \beta \frac{e}{p} + h_0 \gamma \cos 2\varphi + h_0 \delta H,$$

przy czym  $h_0$  oznacza przybliżoną różnicę wysokości pomiędzy obu stacjami, obliczoną bez uwzględnienia wpływu temperatury, prężności pary wodnej itd.

Wyznaczenie  $h_0$  uskutecznia się najprościej przy użyciu tablic, zawierających przybliżone wysokości nad poziomem morza  $\chi$ .

Ponieważ średni stan barometryczny w poziomie morza wynosi dla Europy środkowej około 762 mm, przeto położymy:

$$\chi_1 = 18400 \log \frac{762}{p_1}, \quad \chi_2 = 18400 \log \frac{762}{p_2},$$

a odejmując  $\chi_1$  od  $\chi_2$  otrzymamy:  $h_0 = \chi_2 - \chi_1$ .

b) *Zastosowanie temperatury zredukowanej.*

Dla ułatwienia obliczeń Angot połączył trzy czynniki

$$(1 + \alpha t) \left(1 + \beta \frac{e}{p}\right) (1 + \gamma \cos 2\varphi)$$

w jeden wyraz

$$(1 + \alpha \vartheta),$$

nazywając  $\vartheta$  temperaturą zredukowaną, którą można otrzymać z tablic, przez niego ułożonych («Annales du Bureau central météorologique de France, Mémoires 1896, Paris 1898»).

Jeszcze dalej posunął się Grossman («Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1905»), który włączył do temperatury zredukowanej także i wpływ przedostatniego czynnika  $(1 + \delta H)$  formuły (20).



I tak, jeżeli wzór (20) przedstawimy w formie nieznacznie uproszczonej:

$$h = 18400 \left( 1 + \alpha t + \beta \frac{e}{p} + \gamma \cos 2\varphi + \delta H \right) \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (21)$$

można wyraz w nawiasie zastąpić wyrażeniem:

$$1 + \alpha \left( t + \frac{\beta}{\alpha} \frac{e}{p} + \frac{\gamma}{\alpha} \cos 2\varphi + \frac{\delta}{\alpha} H \right) = 1 + \alpha \vartheta,$$

otrzymując w konsekwencji wzór:

$$h = 18400 (1 + \alpha \vartheta) \log \frac{p_1}{p_2}. \quad (22)$$

Wielkości  $\frac{\beta}{\alpha} \frac{e}{p}$ ,  $\frac{\gamma}{\alpha} \cos 2\varphi$  i  $\frac{\delta}{\alpha} H$  dają się łatwo obliczyć suwakiem lub wyznaczyć z odpowiednio skonstruowanych diagramów.

### § 3. Uproszczone formuły barometryczne

Dwa ostatnie wyrazy formuły ściślej (20) mają tak mały wpływ na wysokość, że możemy je, o ile wykonujemy pomiary na niezbyt wielkim obszarze (co ma miejsce przy pomiarach o typie inżynierskim), uważać za wielkości stałe.

Ale nawet i wpływ prężności pary wodnej nie jest tak znaczny, aby nie można było bez uszczerbku dokładności zastosować pewnych uproszczeń w związku z wyrazem  $\beta \frac{e}{p}$ .

a) *Uproszczona formuła Hanna.*

Na podstawie pomiarów, przeprowadzonych głównie w Alpach, ułożył Hanna formułę empiryczną dla wartości  $\beta \frac{e}{p}$ :

$$\beta \frac{e}{p} = a + b t \quad (23)$$

o współczynnikach  $a = 0,00154$   $b = 0,000341$ .

Zatem

$$(1 + \alpha t) \left( 1 + \beta \frac{e}{p} \right) = (1 + \alpha t) (1 + a + b t);$$

po przemnożeniu i pominięciu wyrazów rzędu drugiego otrzymamy:

$$1 + a + \alpha t + b t = (1 + a) \left( 1 + t \frac{a + b}{1 + a} \right) = 1,00154 \left( 1 + t \frac{a + b}{1 + a} \right). \quad (24)$$

Ponieważ

$$\frac{a + b}{1 + a} = \frac{0,004006}{1,00154} = 0,004,$$

zaś

$$18400 \times 1,00154 = 18428,3,$$



przeto

$$18400 (1 + \alpha t) \left( 1 + \beta \frac{e}{p} \right) = 18428,3 (1 + 0,004 t). \quad (25)$$

Uproszczona formuła ma zatem kształt:

$$h = 18428,3 (1 + \gamma \cos 2 \varphi) (1 + \delta H) (1 + 0,004 t) \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (26)$$

który przez połączenie trzech pierwszych czynników zmienia się na:

$$h = K' (1 + 0,004 t) \log \frac{p_1}{p_2}. \quad (27)$$

Aby można było zastosować powyższą formułę dla warunków istniejących w Polsce, ustalił autor na podstawie 10-letnich wyników obserwacji meteorologicznych na 7-miu pierwszorzędnych stacjach meteorolog. Polski współczynniki  $a$  i  $b$ , przy czym okazało się, że:

$$\beta \frac{e}{p} = 0,00133 + 0,000225 t.$$

Wobec tego wzór (26) dla warunków w Polsce opiewa:

$$h = 18424,5 (1 + \gamma \cos 2 \varphi) (1 + \delta H) (1 + 0,0039 t) \log \frac{p_1}{p_2} \quad (28)$$

lub

$$h = K (1 + 0,0039 t) \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (28 a)$$

przy czym:

$$K = 18424,5 (1 + \gamma \cos 2 \varphi) (1 + \delta H).$$

Poniżej zestawiono w tabeli wartości współczynnika  $K$  dla różnych wysokości i szerokości geograficznych.

$\varphi =$ $h$	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
0 m								18 407,96	18 406,38
100			18 416,74	18 415,06	18 413,40	18 411,76	18 410,14	18 408,53	18 406,95
300	18 421,43	18 419,56	18 417,90	18 416,22	18 414,56	18 412,92	18 411,30	18 409,69	18 408,11
500	18 422,59	18 420,72	18 419,05	18 417,38	18 415,72	18 414,08	18 412,46	18 410,85	18 409,27
700	18 423,75	18 421,88	18 420,21	18 418,54	18 416,88				
900	18 424,92	18 423,05	18 421,38	18 419,70					
1000	18 425,49	18 423,62	18 421,94						
1200	18 426,64	18 424,78	18 423,10						
1400	18 427,80	18 425,94	18 424,26						
1600	18 428,94	18 427,08	18 425,40						
1800	18 430,10	18 428,24	18 426,56						



b) *Uproszczona formuła Jordana.*

Jordana przyjął, opierając się na danych meteorologicznych Niemiec, stosunek  $\frac{e}{p} = \frac{1}{100}$ ; uwzględniając przeto średnią szerokość geograficzną Niemiec  $\varphi = 50^\circ$  i wysokość  $H = 500$  m, otrzymał przez połączenie stałej oraz trzech czynników formuły (20) wzór następujący:

$$h = 18464 (1 + \alpha t) \log \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{przy czym } \alpha = 0,003665). \quad (29)$$

(Obliczenia ułatwiają tablice, np. Jordana »Barometrische Höhentafeln«, Stuttgart 1917).

c) *Stopnie barometryczne.*

Tak zwane *stopnie barometryczne* wprowadził Babinet przez odpowiednie przekształcenie wyrażenia  $\log \frac{p_1}{p_2}$ .

$\alpha$ ) Przekształcenie Babinet'a opiera się na relacji:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(p_1 + p_2) + (p_1 - p_2)}{(p_1 + p_2) - (p_1 - p_2)} = \frac{1 + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}} = \frac{1 + m}{1 - m}; \quad (30)$$

wobec tego

$$\log \frac{p_1}{p_2} = \log p_1 - \log p_2 = \log (1 + m) - \log (1 - m).$$

Dla  $m < 1$  przedstawiają się logarytmy dwu ostatnich wyrażeń:

$$\begin{aligned} \log (1 + m) &= M \left( m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{3} m^3 - \dots \right), \\ -\log (1 - m) &= M \left( m + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \dots \right), \end{aligned} \quad (31)$$

przy czym  $M = 0,43429$  (moduł log.).

$$\begin{aligned} \text{Zatem} \quad \log \frac{p_1}{p_2} &= \log p_1 - \log p_2 = 2M \left( m + \frac{1}{3} m^3 + \dots \right) = \\ &= 2M \left\{ \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3} \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Po wstawieniu tej wartości do wzoru (27) otrzymamy:

$$h = K' (1 + 0,004 t) 2M \left\{ \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3} \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^3 + \dots \right\}. \quad (33)$$

Dla  $h = 500$  m i  $t = 0^\circ$  wartość ostatniego wyrazu wynosi 0,16 m, zaś dla  $h = 1000$  m i  $t = 0^\circ$  około 1,3 m.

Ograniczając pomiary do różnicy wysokości  $h = 1000$  m, możemy wobec błędów pomiaru (o czym później) zaniedbać ostatni wyraz w nawiasie wzoru (33) otrzymując:



$$h = \frac{2 K' M (1 + 0,004 t)}{p_1 + p_2} (p_1 - p_2) = \frac{K'' (1 + 0,004 t)}{p} (p_1 - p_2), \quad (34)$$

przy czym

$$p = \frac{1}{2} (p_1 + p_2), \text{ zaś } K'' = K' M.$$

Położmy  $\frac{K'' (1 + 0,004 t)}{p} = \Delta h$ , nazywając tę wielkość stopniem barometrycznym, a otrzymamy prosty wzór:

$$h = (p_1 - p_2) \Delta h. \quad (35)$$

Wzór (35) ma tylko wówczas znaczenie praktyczne, gdy rozporządzamy tablicami, względnie nomogramami, dostarczającymi nam dla argumentów  $K''$ ,  $t$  i  $p$  wartości  $\Delta h$ .

β) Stopnie barometryczne, otrzymane z wzoru Jordana.

Zastosowując do wzoru (29) sposób rozwinięcia  $\log \frac{p_1}{p_2}$ , podany przez Babineta, otrzymał Jordan następującą formułę:

$$h = 18464 (1 + \alpha t) \log \frac{p_1}{p_2} = \frac{18400 M (1 + \alpha t)}{p} (p_1 - p_2) \quad (36)$$

lub

$$h = \frac{8019}{p} (1 + \alpha t) (p_1 - p_2) = \Delta h (p_1 - p_2). \quad (37)$$

Tablice, zawierające stopnie barometryczne  $\Delta h$  znajdzie czytelnik w jednym z licznych wydań dzieła Jordana »Handbuch der Vermessungskunde«, Band II, Anhang. Należy jednak pamiętać, że wzór (37) jest ułożony w założeniu, że  $\varphi = 50^\circ$  i  $H = 0,5$  km. O ile zatem istotne warunki pomiaru różnią się znacznie od powyższego założenia, wartości na  $h$ , otrzymane przy pomocy tablic Jordana, są obarczone błędami i to tym większymi im większa jest wartość  $(p_1 - p_2)$  (tj. im większa jest różnica wysokości między obu stacjami obserwacyjnymi).

γ) Stopnie barometryczne, otrzymane z wzoru autora.

Zamiast posługiwać się wzorem Babineta, można  $\log \frac{p_1}{p_2}$  przedstawić w formie następującej:

$$\log p_1 - \log p_2 = (p_1 - p_2) \Delta \log p, \quad (38)$$

przy czym okazało się korzystnym jako  $\Delta \log p$  uważać różnicę między  $\log \frac{p_1 + p_2}{2}$  a  $\log \left( \frac{p_1 + p_2}{2} - 1 \right)$  i korzystać z siedmiocyfrowych logarytmów. Formuła (38) daje — jak się można łatwo przekonać — lepsze wyniki niż formuła Babineta.



Wstawiając do wzoru (28) wartość wyrażenia  $\log \frac{p_1}{p_2}$  podaną przez autora, otrzymuje się:

$$h = 18424,5 (1 + \gamma \cos 2\varphi) (1 + \delta H) (1 + 0,0039 t) (p_1 - p_2) \Delta \log p. \quad (39)$$

#### § 4. Przyrządy do barometrycznego pomiaru wysokości

Ciśnienie powietrza atmosferycznego  $p$  mierzymy, posługując się a) barometrami rtęciowymi, b) przyrządami, podającymi temperaturę wrzenia wody, c) aneroidami, czyli tzw. barometrami metalowymi. Dwa pierwsze przyrządy nadają się do wykonywania pomiarów dla celów ekspedycyj naukowych, przyrządu trzeciego używa się z reguły dla pomiarów inżynierskich (wstępne projekty itp.).

Temperaturę powietrza  $t$  wyznaczamy termometrami wirującymi.

Prężność pary wodnej  $e$  wyznacza się (dla użytku formuły ścisłej) najprościej wedle sposobu, podanego przez Augusta. Po wyznaczeniu temperatury powietrza  $t$ , owijamy luźno kulkę termometru materiałem bawełnianym, po czym zwilżamy go obficie wodą. Po kilku minutach nastąpi parowanie wody, a termometr wykaże temperaturę niższą  $t'$ . Regnault ułożył tablicę<sup>1)</sup>, w której dla różnych temperatur znajdujemy prężności nasyconej pary wodnej  $e'$ . Temperatura  $t'$  nie jest jednak temperaturą nasyconej pary wodnej, lecz nieco od niej wyższą z powodu dopływu ciepła z powietrza, otaczającego termometr; zatem jeżeli temperaturze  $t'$  odpowiada w tablicach prężność  $e'$ , należy dla uzyskania właściwej prężności pary wodnej  $e$  poprawić  $e'$  wedle następującego wzoru:

$$e = e' - \frac{0,48 (t - t')}{610 - t} p \quad (40)'$$

(przy czym  $p$  oznacza ciśnienie powietrza).

##### a) Barometry rtęciowe. Poprawki odczytów.

Barometry rtęciowe, znajdujące się na stacjach meteorologicznych, są często umocowane na stałe (rys. 279) (zazwyczaj zawieszono przy ścianach). Szczegółów konstrukcyjnych tych barometrów nie będziemy podawali, zadowolając się krótkim opisem przenośnych barometrów rtęciowych, a więc przydatnych do użytku polowego.

Najchętniej do tego celu używamy barometru rtęciowego Fortin'a (rys. 280). Zasadniczym elementem przyrządu jest rurka szklana (6 do 10 mm średnicy, a około 80 cm długości), wypełniona częściowo rtęcią i zanurzona swym otwartym końcem w małym naczyniu szklanym, które nazywać będziemy zbiornikiem.

Rtęć, która przed zanurzeniem rurki wypełniała ją całkowicie, opada po jej zanurzeniu do stanu równoważającego ciśnienie powietrza, przy czym zbior-

<sup>1)</sup> Travaux et mémoires du bureau intern. des poids et mesures.



nik wypełnia się częściowo rtęcią, zaś w górnej części rurki powstaje próżnia (tzw. Torricellego).

Opisana rurka szklana znajduje się w ochraniającej ją rurce metalowej (mosiężnej), obustronnie (wzdłuż) rozciętej, aby można było odczytać stan barometru. Podziałka milimetrowa, przy pomocy której uskuteczniamy odczyty, jest zaznaczona na rurce metalowej, zaś jej punkt zerowy stanowi ostrze sztyftu z kości słoniowej, przymocowanego u dołu rurki. Tak sztyft, jak też i powierzchnia rtęci są widoczne przez ościenie szklane zbiornika. Przez podniesienie lub obniżenie zbiornika (względnie jego części ruchomej) przy pomocy odpowiedniej śruby doprowadza się ostrze sztyftu do styku z powierzchnią rtęci bezpośrednio przed dokonaniem odczytu stanu barometru.

Rurkę metalową obejmuje pierścień, przesuwalny wzdłuż jej całej długości, na którym są umieszczone dwie krótkie płytki metalowe, dostosowane do szpary (powstałej wskutek rozcięcia rurki). Na jednej z nich umieszczony jest noniusz.

Cheąc dokonać odczytu przesuwamy pierścień, a tym samym i wspomniane płytki, do takiego położenia, aby można było ujrzeć przez mały otwór, znajdujący się między pierścieniem a dolną płaszczyzną płytek, powierzchnię rtęci; następnie skręcamy tak długo ze-



Rys. 279.



Rys. 280.

wnętrzną część pierścienia, stanowiącą śrubę do ruchu leniwego noniusza, aż dolne powierzchnie obu płytek zajmą położenie styczne do powierzchni rtęci.

Do szklanej rurki barometru przylega termometr, którego stan należy odczytać bezpośrednio przed przystąpieniem do pomiaru ciśnienia (pierwsza czynność obserwatora; odczytywanie temperatury w czasie późniejszym daje wynik skażony ciepłotą ciała obserwatora).

Jako jedne z najlepszych barometrów rtęciowych należy wymienić lewarowe barometry systemu Wild-Fuess, które posiadają urządzenia umożliwiające odczytywanie stanów barometrycz-

nych w różnych miejscach rurki szklanej, a tym samym i skonstatowanie, czy w zamkniętej przestrzeni ponad tręcią jest istotna próżnia.

Przyrządy te nadają się doskonale do kontroli barometrów stacyjnych, jako tzw. barometry normalne.

Odczyty dokonane na barometrach muszą być uzupełnione pewnymi poprawkami, jeśli mają służyć do pomiarów.



Najważniejsze z nich są następujące:

- α) poprawka ze względu na temperaturę przyrządu (redukcja na  $0^{\circ} C$ ),
- β) poprawka ze względu na depresję kapilarna, czyli działanie sił włoskowatych,
- γ) poprawka ze względu na przyspieszenie ziemskie,
- δ) poprawka ze względu na zawartość powietrza w »próżni«,
- ε) poprawka dodatkowa stanu barometru jako suma pozostałych poprawek stałych.

α) Redukcja odczytu na  $0^{\circ} C$ .

Ponieważ przyrząd wraz z zawartą w nim rtęcią posiada podczas dokonywania pomiaru temperaturę  $t_b$  (odezycaną na termometrze przyrządu), otrzymujemy, przyjmując liniowy wpływ temperatury, następujący związek między odczytem na barometrze  $B$  a stanem barometru  $B_o$  (przy temperaturze  $0^{\circ}$ ) ze względu na zmianę słupa rtęci:

$$\begin{aligned} B &= B_o (1 + \alpha t_b) \\ \text{lub} \quad B_o &= B (1 - \alpha t_b), \end{aligned} \quad (41)$$

przy czym  $\alpha$  wynosi 0,0001801.

Poprawka —  $B \alpha t_b$  byłaby zupełną, gdyby podziałka nie ulegała wpływowi temperatury; ponieważ jednak pod wpływem tej samej temperatury i podziałka użyta do odczytu zmieniła swą długość, należy wprowadzić także i korekcję jej długości. Jeżeli zatem podział jej jest ścisły przy temperaturze  $t'$  (która powinna być równa  $0^{\circ}$ ), wówczas otrzymamy, na podstawie analogicznego rozumowania jak poprzednio, poprawkę odczytu ze względu na zmianę długości podziałki równą  $+ B \beta (t_b - t')$ , przy czym współczynnik  $\beta$  wynosi dla mosiądzu 0,000018.

Całkowita poprawka ze względu na temperaturę wynosi zatem:

$$\Delta_t = - B t_b (\alpha - \beta) - B \beta t', \quad (42)$$

przy czym dla  $t' = 0^{\circ}$  wyraz drugi poprawki odpada.

β) Wpływ sił włoskowatych.

Z powodu działania sił włoskowatych rtęć w rurce obniża się, tworząc u szczytu kopolkę, tzw. menisk; należy zatem uwzględnić różnicę pomiędzy szczytem menisku a tym stanem, jaki by istniał, gdyby siły włoskowate nie działały. Poprawka odczytu ze względu na depresję ma znak dodatni i jest zależna od wielkości średnicy  $D$  rurki szklanej barometru i wysokości  $\gamma$  menisku:

$$+ \Delta_d = f(D \gamma).$$

Wartości  $\Delta_d$  można dla  $D$  i  $\gamma$  znaleźć w tablicy Mendelejewa i Gutkowskiego, podanej przez F. Kohlrauscha w »Lehrbuch der praktischen Physik« (Lipsk 1935), zawierającej następujące wartości:



Średnica rurki w mm	Wysokość menisku w mm								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
7	0,17	0,34	0,49	0,62	0,74	0,85	0,95	1,04	1,12
8	0,13	0,27	0,39	0,49	0,59	0,68	0,76	0,82	0,87
9	0,10	0,21	0,30	0,38	0,46	0,54	0,60	0,65	0,70
10	0,08	0,16	0,23	0,30	0,36	0,42	0,47	0,52	0,57
11	0,06	0,11	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,41	0,45
12	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,34
13	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,22	0,25
14	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,16	0,18	0,21
15	0,02	0,04	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17

Wielkość menisku odczytuje się przy użyciu śruby pierścienia barometru, zaś wewnętrzną średnicę rurki, o ile nie jest znana, wyznacza się przy pomocy małego prostokątnego trójkąta równoramiennego.

γ) Poprawka ze względu na przyspieszenie ziemskie.

Wyniki, otrzymane barometrem rtęciowym muszą być tak przekształcone, jakby były wykonane w poziomie morza i w szerokości geograficznej  $\varphi = 45^\circ$ .

Niech  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie w wysokości  $H$  nad poziomem morza, zaś  $g_0$  przyspieszenie ziemskie w poziomie morza w szerokości geograficznej  $\varphi$ , wówczas istnieje związek:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+H)^2} = \frac{1}{1 + 2\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2}},$$

zatem z pominięciem wyrazów rzędu drugiego:

$$g = g_0 \left( 1 - 2\frac{H}{R} \right) \quad (43)$$

( $R$  oznacza średni promień ziemski).

Jeżeli  $G$  jest przyspieszeniem ziemskim w poziomie morza, w szerokości geogr.  $\varphi = 45^\circ$ , to wedle wzoru Helmherta:

$$g_0 = G(1 - \gamma \cos 2\varphi),$$

zatem

$$g = G \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) (1 - \gamma \cos 2\varphi),$$

a z pominięciem (jak wyżej) wyrazów rzędu drugiego:

$$g = G \left( 1 - \frac{2H}{R} - \gamma \cos 2\varphi \right). \quad (44)$$



Ciśnienie powietrza  $P$  w punkcie obserwacji jest zrównoważone ciężarem słupa rtęci o wysokości  $B$  (odczytany stan barometru) i o masie  $m$ :

$$P = m g.$$

To samo ciśnienie  $P$  przy innym przyspieszeniu ziemskim  $G$  byłoby zrównoważone słupem rtęci o innej masie  $M$ , a co za tym idzie, i innej wysokości ( $B$ )

$$P = M G;$$

możemy więc napisać:

$$m g = M G.$$

Ponieważ jednak masa słupa rtęci jest przy stałej temperaturze proporcjonalna do jego wysokości, przeto zachodzi także równanie:

$$B g = (B) G.$$

Jeżeli przez  $G$  będziemy oznaczali przyspieszenie ziemskie w szerokości geogr.  $\varphi = 45^\circ$  i w poziomie morza,  $(B)$  będzie stanem barometru, zredukowanym do poziomu morza w szer. geogr.  $\varphi = 45^\circ$ ; zatem

$$(B) = B \frac{g}{G} = B \left( 1 - \frac{2H}{R} - \gamma \cos 2\varphi \right), \quad (45)$$

czyli

$$(B) = B - B \left( \frac{2H}{R} + \gamma \cos 2\varphi \right) = B - B \left( \frac{2H}{R} + 0,002644 \cos 2\varphi \right). \quad (46)$$

Poprawka ze względu na siłę ciężkości ma zatem znak ujemny i równa się:

$$\Delta_3 = - B \left( \frac{2H}{R} + 0,002644 \cos 2\varphi \right). \quad (47)$$

δ) Uwzględnienie zawartości powietrza w »próżni«.

Nachylając ostrożnie rurkę barometru, wypełniamy ją równocześnie rtęcią. Zazwyczaj rtęć nie wypełni jednak całkowicie rurki barometru, gdyż obok rtęci powstanie w rurce jeszcze kulka powietrza. Jeżeli jej średnica nie przekracza 2 mm, można przyjąć, że błąd systematyczny powstały przez to w odczycie będzie miał (dla ciśnień spotykanych w praktyce) wielkość stałą; natomiast o ile się okaże, że średnica kulki powietrznej przekracza 2 mm, będzie on zmienny i należy go wyznaczyć przez porównanie z normalnym barometrem przy różnych temperaturach i różnych ciśnieniach.

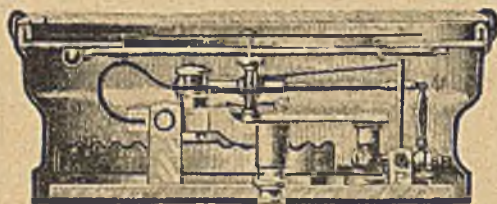
ε) Dodatkową poprawkę barometru przeprowadza się przez porównanie z barometrem normalnym. Celem jej jest usunięcie wpływów pozostałych błędów stałych.

b) *Przyrządy oznaczające temperaturę wrzenia.*

Ze względu na to, że przyrządy te nadają się raczej do pomiarów przeprowadzanych podczas ekspedycji naukowych, a nie pomiarów, o charakterze inżynierskim, omówimy je tylko krótko.

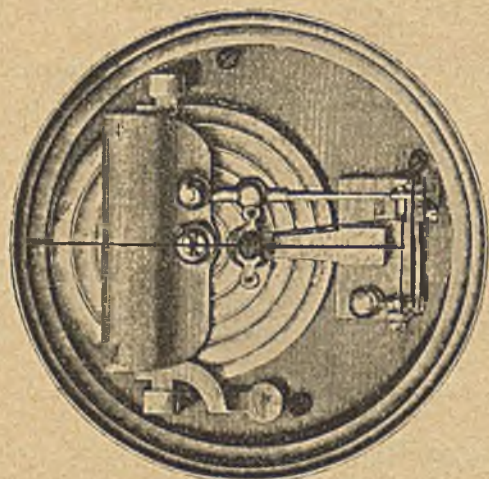


Jak wiadomo, temperatura wrzenia wody jest zależna od ciśnienia, mianowicie zmianie ciśnienia o 2,7 mm odpowiada zmiana temperatury wrzenia o około  $\frac{1}{10}$  stopnia. Jeżeli zatem potrafimy zmierzyć temperaturę wrzenia z dokładnością  $\frac{1}{100}$  stopnia, będziemy mogli wyznaczyć ciśnienie z błędem nieprzekraczającym 0,3 mm. Na tej zasadzie skonstruowano specjalne aparaty, których termometry



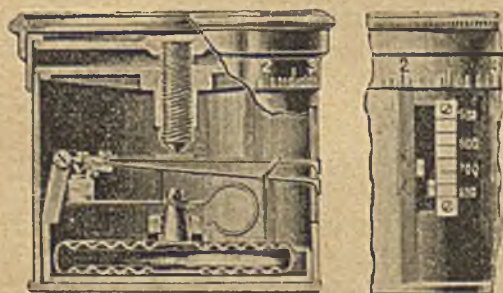
podają nam albo temperaturę na  $\frac{1}{100}$  stopnia lub wprost ciśnienie (przez oszacowanie) na 0,2 mm. W najnowszych czasach aparaty tego rodzaju — wykonane przez firmę Fuess przy użyciu borosilikatowego szkła — okazały się w praktyce bardzo dokładne.

c) *Aneroidy.*



Rys. 281.

W roku 1847 skonstruował Lucjan Vidi przyrząd, mierzący ciśnienie powietrza na innej zasadzie. Przyrządy tego rodzaju, zwane aneroidami, znalazły wielkie zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Główną część składową aneroidów stanowi puszka metalowa, z której wnętrza wypompowano powietrze. Pokrywą puszek jest bardzo cienka blacha falista, która wraz ze zmianą ciśnienia zmienia bardzo nieznacznie swe położenie względem sztywnego dna puszek. Zmianie ciśnienia powietrza o 100 mm odpowiada ruch pokrywy o około 0,5 do 1,0 mm. Chcąc zatem zmierzyć ciśnienie z dokładnością 0,1 mm (a tym samym wysokość na metry), należy mieć możliwość pomiaru ruchu pokrywy, wynoszącego około 0,5  $\mu$ . Ruch ten przenosi się przy pomocy odpowiednich dźwigni na wskazówkę, która pozwala na odczytanie na tarczy przyrządu ciśnienia powietrza w mm. Rys. 281 przedstawia przekrój aneroidu oraz widok mechanizmu (z góry).



Rys. 282.

Na tej zasadzie są skonstruowane aneroidy Naudeta i Bohnego.

Poza wspomnianymi przyrządami, istnieją jeszcze aneroidy ze śrubą mikrometryczną systemu Goldschmida (obecnie wyrabiane przez szwajcarską firmę Usteri - Reinacher). Przekrój tego rodzaju aneroidu widzimy na rys. 282.



W nowszych czasach ukazały się aneroidy szwedzkie, systemu Paulin Aktiebolag (Stokholm), uważane obecnie za najlepsze (rys. 283).

Odczyty, dokonywane na aneroidach, dostarczają nam tylko przybliżonych wartości ciśnienia powietrza i dlatego należy je odpowiednio poprawić.

Poprawki, które należy zastosować, są zazwyczaj trojakiego rodzaju:

- $x$  poprawka stanu wskazówki (stała),
- $yt$  poprawka ze względu na temperaturę przyrządu  $t$ ,
- $z(760 - A)$  poprawka ze względu na nieodpowiednie przesuwanie się wskazówki,

przy czym  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są współczynnikami charakteryzującymi przyrząd,  $t$  oznacza temperaturę, zaś  $A$  odczyt na podziale tarczy aneroidu.



Rys. 283.

Choć z reguły wystarcza zastosowanie wymienionych trzech poprawek, może się okazać potrzeba wprowadzenia dla pewnych aneroidów i poprawek drugiego rzędu:

$$y' t (760 - A), \quad z' (760 - A)^2 \quad \text{oraz} \quad y'' t^2.$$

W wyniku uskutecznienia powyższych poprawek uzyskujemy zredukowany stan aneroidu, równy odczytowi na barometrze rtęciowym, zredukowanemu na  $0^\circ \text{C}$ :

$$B_0 = A + x + yt + z(760 - A), \quad (48)$$



względnie:

$$B_o = A + x + y t + z (760 - A) + y' t (760 - A) + z' (760 - A)^2 + y'' t^2, \quad (49)$$

przy czym jednak nawet i w tym drugim przypadku wyrażenie  $y' t (760 - A)$  jest z reguły zaniedbywalne.

W powyższych wzorach można wprowadzić (zamiast ciśnienia normalnego 760 mm) ciśnienie w przybliżeniu średnie na obszarze objętym pomiarem; i tak jeżeli ciśnienie to wynosi w przybliżeniu 740 mm wzór (48) zmieni się na:

$$B_o = A + (x + 20 z) + y t + z (740 - A)$$

lub

$$B_o = A + x' + y t + z (740 - A). \quad (50)$$

Wyznaczenie stałych  $x, y, z, \dots$  aneroidu przeprowadza się przez porównanie wyników na nim odczytanych z wynikami, otrzymanymi na barometrze rteciovym. Porównanie to może być przeprowadzone w trojaki sposób:

- a) na jednym stanowisku przez dłuższy okres czasu (np. rok),
- b) na szeregu stanowisk w różnych wysokościach,
- c) laboratoryjnie, przy użyciu pompy rozrzedzającej powietrze.

W tym ostatnim przypadku wyznacza się zazwyczaj wartości przybliżone współczynników, zaczynając od wartości  $z'$ , z dwu pomiarów, dokonanych przy stałej temperaturze a zmiennym ciśnieniu:

$$\begin{aligned} B_o' &= A' + x + y t + z (760 - A') \\ B_o'' &= A'' + x + y t + z (760 - A'') \\ B_o' - B_o'' &= A' - A'' - z (A' - A''), \\ \Delta B &= \Delta A - z \Delta A, \end{aligned}$$

skąd

$$z' = \frac{\Delta A - \Delta B}{\Delta A}. \quad (51)$$

Następnie przystępuje się do wyznaczenia wartości przybliżonej  $y'$  przy stałym ciśnieniu a zmiennej temperaturze:

$$\begin{aligned} B_o &= A_1 + x + y t_1 + z' (760 - A_1) \\ B_o &= A_2 + x + y t_2 + z' (760 - A_2) \end{aligned}$$

$$0 = A_1 - A_2 + y (t_1 - t_2) - z' (A_1 - A_2) = y (t_1 - t_2) + (1 - z') (A_1 - A_2),$$

więc

$$y' = \frac{(z' - 1)(A_1 - A_2)}{t_1 - t_2} = (z' - 1) \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (51 a)$$

Mając przybliżone wartości współczynników, otrzymujemy i przybliżoną wartość poprawki  $x'$  przez porównanie odczytu na aneroidzie, uzupełnionego poprawkami  $y' t$  i  $z' (760 - A)$ :

$$x' = B_o - A - y' t - z' (760 - A). \quad (52)$$



Wyniki dokładniejsze współczynników  $x, y, z, \dots$  otrzymujemy na podstawie szeregu spostrzeżeń przy użyciu rachunku wyrównawczego.

Przy stosowaniu sposobu trzeciego c) należy zwrócić uwagę na to, aby zmiany ciśnienia nie wywoływać zbyt nagle, gdyż przez to można spowodować stałą deformację ruchomej pokrywy puszkii. Zazwyczaj zmieniamy ciśnienie o 1 mm w przeciągu 4-5 min.

### § 5. Wykonanie pomiaru barometrycznego

Barometryczny pomiar wysokości może być przeprowadzony przy pomocy dwu przyrządów lub tylko jednego przyrządu.

a) *Pomiar przy pomocy dwu przyrządów.*

Mając do dyspozycji dwa przyrządy możemy pomiar przeprowadzić:

α) używając jednego przyrządu jako stacyjnego, a drugiego jako polowego, lub

β) metodą schodkową.

α) Sposób ten nadaje się w przypadkach, gdy na obszarze zdjęcia znajduje się tylko jeden, lub (w stosunku do wielkości obszaru) bardzo mała ilość punktów o znanej wysokości.

Jeden z przyrządów, barometr lub dokładniejszy aneroid, umieszczamy na odpowiednio obranej stacji. W stałych odstępach czasu, np. co 15 lub 20 minut, obserwujemy na stacji temperaturę powietrza  $t_p$  (termometrem wirującym), temperaturę barometru  $t_B$  (względnie  $t_A$ , temperaturę aneroidu stacyjnego) oraz ciśnienie, które należy zredukować do  $B_0$  (ciśnienie przy temperaturze  $0^0$ ). W ten sposób można za pomocą interpolacji znać w każdej chwili pomiaru tak  $t_p$  temperaturę powietrza, jak i odpowiednie ciśnienie  $B_0$ .

W międzyczasie następują obserwacje na punktach, których wysokości mamy wyznaczyć. Składają się na nie: temperatura powietrza  $t_p$ , aneroidu  $t_A$ , stan aneroidu  $A$  oraz czas jego obserwacji.

Ze względu na możliwość czasowej deformacji puszkii aneroidu, należy zawsze po przybyciu na punkt przeczekać kilka minut i przed dokonaniem odczytu  $A$  lekko zapukać w pokrywę przyrządu. Najlepiej zrobimy postępując następująco. Po przybyciu na punkt mierzy się temperaturę aneroidu  $t_A$  oraz temperaturę powietrza  $t_p$ , a po kilku minutach stan aneroidu  $A$ , po czym mierzy się po raz drugi temperaturę powietrza  $t_p$ . Z obu pomiarów  $t_p$  należy wziąć średnią. Temperatury  $t_A$  nie mierzy się po raz drugi, gdyż w międzyczasie, w trakcie innych odczytów, temperatura  $t_A$  może wzrosnąć (skutkiem dopływu ciepła od obserwatora). Przed rozpoczęciem oraz po zakończeniu pomiarów należy aneroid polowy porównać z barometrem stacyjnym, a to celem uzyskania wartości poprawki stanu wskazówki  $x$  aneroidu polowego. Jeżeli uzyskane przed i po pomiarze wartości wymienionej poprawki różnią się nieznacznie między sobą (kilka dziesiątych mm), można wziąć wartość średnią jako poprawkę  $x$ . Jeśli na stacji znajduje się tylko aneroid, musi być jego korekcja  $x$  zupełnie pewna.







## Obliczenie wysokości:

Stanowisko	Aneroid		$A_0 + A_0'$	$A_0 - A_0'$	Temperatura		$t + t'$	Stopień barometryczny	Różnica wysokości		Wysokość punktu	Uwagi
	Nr 64	Nr 98			$t$	$t'$			2	$\Delta H$		
	$A_0$	$A_0'$	2									
S XIII	727,42	727,42	727,42	0,00	19,7	19,1	19,4				331,4	
458	727,46	729,04	728,25	-1,58	18,3	5,0	11,7	11,49	-18,2	-17,6	313,8	
368	727,46	728,71	728,08	-1,25	17,9	3,9	10,9	11,46	-14,3	-15,3	316,1	
368	727,46	728,88	728,17	-1,42	17,9	3,8	10,9	11,46	-16,3			
458	727,43	728,91	728,17	-1,48	17,7	4,2	11,0	11,46	-17,0			
S XIII	727,38	727,38	727,38	0,00	17,6	18,0	17,8					

## β) Pomiar metodą schodkową.

Metoda ta polega na równoczesnej obserwacji ciśnienia w dwu punktach, których różnicę wysokości chcemy wyznaczyć; wymaga zatem dwu obserwatorów i użycia dwu przyrządów (aneroidów).

Podczas gdy obserwator pierwszy mierzy na stanowisku 1 temperaturę powietrza, przyrządu i ciśnienie, obserwator drugi dokonuje równocześnie



Rys. 284.

analogiczne pomiary na stanowisku 2, po czym następują synchroniczne pomiary na stanowiskach 2-3, 3-4, itd.

Jeżeli oba aneroidy poprzednio porównano i uzgodniono ich poprawkę  $x$ , obliczenie różnic wysokości poszczególnych punktów nie przedstawia żadnej trudności. O ile nawiązanie nastąpiło do więcej niż jednego punktu, końcową odchyłkę rozdzielamy proporcjonalnie do czasu.

## b) Pomiar jednym przyrządem.

Pomiar jednym aneroidem przeprowadzamy tylko w nawiązaniu do dwu punktów o znanej wysokości; wykonujemy go w tym przypadku metodą tzw. interpolacyjną.

Przeprowadzając pomiar w przeciągu stosunkowo krótkiego czasu (kilku godzin), możemy założyć, że ciśnienie  $p$  i temperatura  $t$  zmienia się w czasie pomiaru liniowo. Możemy zatem, oznaczając wysokości poszczególnych punktów przez  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n$ , napisać równanie:

$$H_i - H_0 = C_1 (p_i' - p_0') + C_2 (T_i' - T_0'), \quad (53)$$

przy czym  $p'$  i  $T'$  oznaczają ciśnienia i momenty czasu.

Otrzymamy zatem postępując od reperu o wysokości  $H_0$  do reperu o wysokości  $H_n$  i po powrocie do reperu początkowego następujące związki:



$$\begin{aligned}
 H_1 - H_0 &= C_1 (p_1' - p_0') + C_2 (T_1' - T_0') \\
 H_2 - H_0 &= C_1 (p_2' - p_0') + C_2 (T_2' - T_0') \\
 &\dots\dots\dots \\
 H_n - H_0 &= C_1 (p_n' - p_0') + C_2 (T_n' - T_0') = \Delta H \\
 \underline{H_o - H_o} &= \underline{C_1 (p_o'' - p_0') + C_2 (T_o'' - T_0') = 0.}
 \end{aligned} \tag{53a}$$

Dwa ostatnie równania dostarczają nam wartości obu stałych  $C_1$  i  $C_2$ . Jeżeli za wartości  $p$  wstawimy odpowiednie odczyty zredukowane aneroidów  $A$ , nawet bez uwzględnienia poprawek stanu wskazówki, otrzymamy na  $C_1$  i  $C_2$  następujące wartości:

$$C_1 = \frac{\Delta H (T_o'' - T_o')}{(A_n' - A_o') (T_o'' - T_o') - (A_o'' - A_o') (T_n' - T_o')}, \tag{54}$$

$$C_2 = \frac{-\Delta H (A_o'' - A_o')}{(A_n' - A_o') (T_o'' - T_o') - (A_o'' - A_o') (T_n' - T_o')} = -C_1 \frac{A_o'' - A_o'}{T_o'' - T_o'}. \tag{55}$$

Po wyznaczeniu wartości  $C_1$  i  $C_2$  obliczamy z równań poprzednich wznie-sienia poszczególnych punktów nad punktem o wysokości  $H_0$ .

Metoda ta nadaje się w przypadkach, gdy rozporządzamy na niewielkim obszarze stosunkowo dość znaczną ilością reperów. Przykład szczegółowy po-dany jest na str. 373.

### § 6. Dokładność pomiarów barometrycznych

Biorąc pod uwagę jakąkolwiek uproszczoną formułę barometryczną, otrzy-mamy na kwadrat średniego błędu wysokości  $h$  wzór następujący:

$$\mu_h^2 = h^2 \left\{ \frac{\mu_K^2}{K^2} + \frac{\alpha^2 \mu_t^2}{(1 + \alpha t)^2} + \left( \frac{M}{\log \frac{p_1}{p_2}} \right)^2 \left( \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \right) \mu_p^2 \right\} \tag{56}$$

lub

$$\mu_h^2 = h^2 \left\{ \frac{\mu_K^2}{K^2} + \frac{\alpha^2 \mu_t^2}{(1 + \alpha t)^2} + \left( \frac{KM}{h} \right)^2 \left( \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} \right) \mu_p^2 \right\}. \tag{57}$$

We wzorze tym  $K$  oznacza stałą barom.,  $t$  — średnią temperaturę po-wietrza,  $M$  — zamiennik logarytmiczny,  $p_1$  i  $p_2$  — ciśnienie na stacjach dolnej i górnej, zaś  $\mu$  z odpowiednimi wskaźnikami — błędy średnie odpowiednich wielkości.

Aby się przekonać, jak wielki wpływ mają poszczególne wyrazy wzoru ostatniego na błąd wysokości, omówimy je po kolei.

Wyraz pierwszy  $h \frac{\mu_K}{K}$  ma wpływ stosunkowo niewielki, gdyż myląc się przy obiorze stałej  $K$  nawet o 20 jednostek, otrzymamy dla  $K = 18460$  błąd  $\pm 0,0011 h$ .

Wpływ błędu temperatury jest znaczniejszy, i tak przyjmując  $\mu_t = \pm 0,5^\circ$ , otrzymujemy błąd  $\pm 0,002 h$ .



Metoda b.

Pomiar barometryczny między dwoma punktami o znanej wysokości.

Równanie aneroidu Nr. 64:  $A_o = A + x - 0,057 t_A - 0,0673 (740 - A) + 0,005 (740 - A)^2$

Stanowisko	Czas $T$	Ane- roid Nr 64 $A$	$t_A$	$P_t$	$A'_i$ $A''_i$	$A'_i - A'_o$	$A''_i - A''_o$	$T'_i - T'_o$ min.	$T''_i - T''_o$ min.	$C_1(A'_i - A'_o)$ $C_1(A''_i - A''_o)$	$C_2(T'_i - T'_o)$ $C_2(T''_i - T''_o)$	Różnica wysokości		Wyso- kość p-ktu	P-kt	U w a g i
												$H_i - H_o$	$(H_i - H_o)_{sr}$			
Bolec Nr 458	957	736,6	18,3	-1,04	735,56									312,64	458	
„ „ 290	1005	736,8	17,7	-1,01	735,79	+0,23		8		-1,96	-0,42	-2,4	-2,3	310,3	290	Kierunek główny
„ „ 368	1019	736,1	17,1	-0,97	735,13	-0,43		22		+3,66	-1,14	+2,5		315,14	368	
„ „ 290	1040	736,5	16,7	-0,95	735,55		-0,01		43	+0,09	-2,24	-2,2				Kierunek powrotny
„ „ 458	1046	736,2	16,5	-0,94	735,26		-0,30		49	+2,55	-2,55	-				

$$H_o = H_{458} = 312,64 \text{ m}$$

$$H_n = H_{368} = 315,15$$

$$\Delta H = +2,51 \text{ m}$$

$$C_1 = \frac{\Delta H (T''_o - T'_o)}{(A'_n - A'_o) (T''_o - T'_o) - (A''_n - A''_o) (T'_n - T'_o)} = \frac{2,51 \times 49}{-0,43 \times 49 + 0,30 \times 22} = -8,5$$

$$C_2 = -C_1 \frac{A''_o - A'_o}{T''_o - T'_o} = 8,5 \frac{-0,30}{49} = -0,052$$



Wyznaczenie ciśnień na stacjach dolnej i górnej z błędami  $\mu_p = \pm 0,1$  mm powoduje przy pomiarze wysokości, odpowiadających ciśnieniom od 760 mm do 700 mm, błędy od  $\pm 1,00$  m do  $\pm 1,30$  m. Przyjmując średnio, że błąd na jednej stacji wynosi  $\pm 1,15$  m, otrzymamy dla różnicy wysokości obu stacji błąd  $\pm 1,15\sqrt{2} = \pm 1,6$  m.

Dla stosunkowo niewielkich  $h$  całkowity błąd średni wynosi około  $\pm 2,00$  m.

Wyniki te są wyprowadzone w założeniu, że powierzchnie równego ciśnienia są równoległe do powierzchni morza i że temperatura między stacją dolną i górną zmienia się liniowo. Założenia te odpowiadają tylko w przybliżeniu rzeczywistości, powodując nieznaczne zwiększenie błędu średniego  $\mu_h$ .

Metoda interpolacyjna dostarcza oczywiście nieco dokładniejszych wyników. Wyprowadzone wzory na błąd średni stosują się także w przybliżeniu i do aneroidów, a to tym bardziej, im dokładniej wyznaczono ich stałe.

W końcu zaznaczyć należy, że najlepsze wyniki osiągamy przeprowadzając pomiary około godz. 10-ej i 16-ej.

---



## ROZDZIAŁ XV

# FOTOGRAMETRIA

### § 1. Krótki rys historyczny

Pierwszym, który zapoczątkował zdjęcia fotogrametryczne był Laussedat, zastosowując tę nową metodę pomiarową w roku 1852 do sporządzenia planów w wielkiej podziałce. W latach następnych niejednokrotnie oddziały wojskowej służby wywiadowczej posługiwały się zdjęciami fotograficznymi, wykonanymi z powietrza lub z ziemi, dla celów sporządzenia planów. W Niemczech w roku 1865 Meydenbauer wykonuje pierwsze plany architektoniczne przy użyciu zdjęć fotograficznych. W roku 1901 Pulfrich opracował naukową metodę stereofotogrametryczną (opartą na dwu stereoskopowo obserwowanych zdjęciach fotograficznych), zaś v. Hübel przyczynił się do rozwoju i rozpowszechnienia fotogrametrii dla opracowania planów terenów górzystych. Do roku 1909 konstruowano plany na podstawie pomiarów poszczególnych klisz, dopiero w tymże roku v. Orel sporządza przyrząd, na którym można opracować mechanicznie plany sytuacyjno-warstwicowe.

Olbrzymi postęp lotnictwa w czasie wojny światowej, spowodował również rozwój zdjęć fotogrametrycznych. Powstaje w tym czasie cały szereg przyrządów do mechanicznego opracowania zdjęć fotogrametrycznych oraz szereg kamer lotniczych i fototeodolitów. Do wybitnych wynalazców i konstruktorów należy zaliczyć Hegershoffa, Wilda, Gassera, Bauersfeunda, Roussilha, Poivilliers'a, Santoniego i Nistriego. W ostatnich czasach poczyniono szereg udanych prób wykonania triangulacji na podstawie zdjęć lotniczych, konstruując w tym celu odpowiednie przyrządy i opracowując metody postępowania. W dziale tym pracują Finsterwalder, Hegershoff, Gruber, Buchholz i inni.

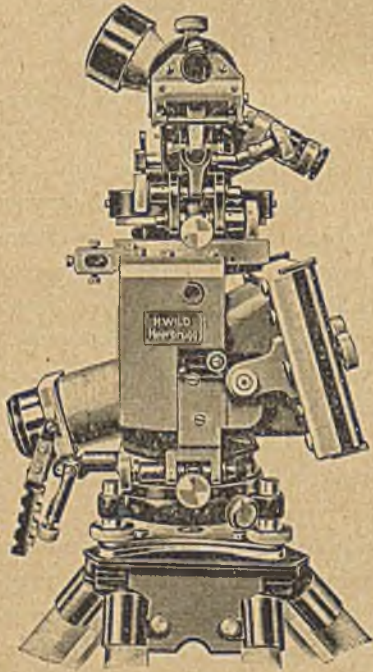
### § 2. Wyposażenie fotogrametryczne polowe

Zdjęcia fotogrametryczne wykonujemy na ziemi przy pomocy *fototeodolitów*, zaś w powietrzu przy pomocy *kamer lotniczych*.

Fototeodolit składa się z teodolitu, w którego alhidadę wbudowana jest kamera fotograficzna, przy czym kamera może być przymocowana do alhidady



trwale lub luźnie. W przyrządach nowszej konstrukcji (np. firmy Zeissa) teodolit oddzielony jest od kamery. Odległość obrazu od obiektywu jest dla kamer wartością stałą, równą ogniskowej obiektywu, a tylko w wyjątkowych przypadkach da się zmieniać, gdy kamera ma służyć do zdjęć architektonicznych. Ramka, do której przylega klisza w chwili wyświetlenia zdjęcia, jest dokładnie szlifowana, i zaopatrzona w otworki tak umieszczone, aby połączone ze sobą tworzyły prostokątny układ osi, tzw. *osi tlowych*, którego początek powinien się znajdować w punkcie, w którym oś kamery przebija płaszczyznę styku płyty światłoczułej, tzw. *punkcie głównym*. Ponieważ klisze przy ich opracowaniu wymierzamy względem tych osi, przeto otworki na ramce są bardzo delikatne i powinny być chronione przed uszkodzeniem w czasie wykonywania zdjęć. Podczas zdjęcia płyta światłoczuła (klisza)



Rys. 285.

musi bardzo dokładnie przylegać do ramki styku, co uskutecznia się za pomocą odpowiedniego urządzenia. Fototeodolit ustawiamy na statywie, zaopatrzonym w spodarkę. Do kompletu wyposażenia polowego należą zwykle trzy statywy, których spodarki są identycznie zbudowane.

Od dobrze wykonanej kamery żądamy, aby:

- 1) oś obiektywu była prostopadła do płaszczyzny styku płyty fotograficznej,
- 2) płaszczyzna ramki (styku) leżała w odległości ogniskowej od wewnętrznego punktu głównego obiektywu,
- 3) otworki, wyznaczające osie tlowe, miały kształt nieskomplikowany i ostro rysujący się na kliszy,
- 4) emulsja światłoczuła w czasie naświetlania przylegała dokładnie do płaszczyzny styku.

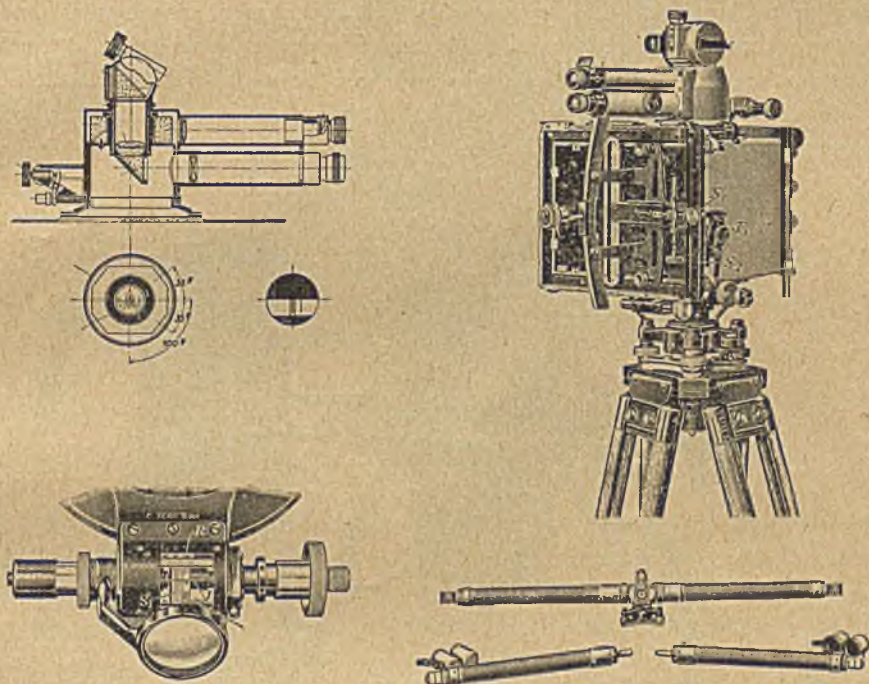
Kamery posiadają zwykle migawkę centralną. Niezbędny jest filtr żółty, który nakładamy na obiektyw. Dla ułatwienia późniejszego odszukania zdjęć sobie odpowiadających, umieszczony jest w kamerze bębenek z cyframi, które kolejno przesuwane odfotografowują się na kliszach.

Fototeodolitów o luźnie umocowanej kamerze posiadamy kilka konstrukcyj (Breithaupt, Hegershoffa-Heydego, Wilda). Na specjalną uwagę zasługuje aparatura polowa Wilda. Fototeodolit Wilda o doskonałej optyce, wyposażony jest w dwie kamery o ogniskowej 165 i 240 mm, którymi mogą być wykonywane zdjęcia pionowe i pochylone o ściśle określonych kątach pochylecia. Obiektywy posiadają stałą przysłonę i żółty filtr. W pokrywie kamery znajduje się sprężyna, przyciskająca płytę do ramki ze stałą siłą. Wy-



miary płyty są  $100 \times 150$  mm. Teodolit, umieszczony ponad kamerą, opisano w rozdziale VII (rys. 285).

Fototeodolity o trwale wbudowanej kamerze konstruowane były głównie przez firmę Zeiss a (rys. 286). Najnowsze modele tej firmy składają się z dwu oddzielnych części: teodolitu i kamery pomiarowej. Kamera posiada trzy obiektywy »ortoprotary« o ogniskowej  $f = 190$  mm, ułożone ponad sobą i w jednakowej odległości od płaszczyzny styku płyty. Wymiar kliszy wynosi  $130 \times 180$  mm. Nad kamerą umieszczony jest przyrząd do orientowania,



Rys. 286.

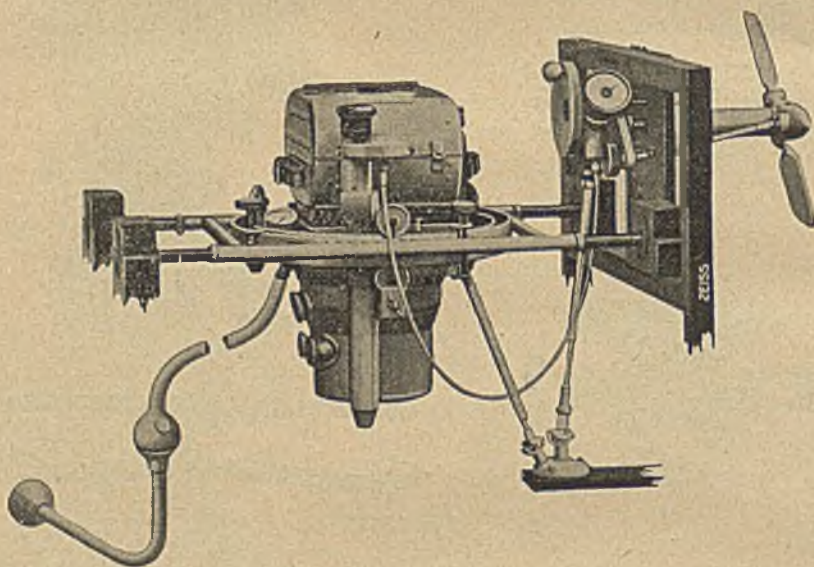
składający się z pryzmatu ośmiobocznego oraz dwu lunet; górną lunetę nastawiamy na kreski, skierowując równocześnie oś celową dolnej lunety równolegle do osi optycznej kamery, albo też pod kątem  $31,5^\circ$  lub  $90^\circ$  względem niej. Urządzenie to pozwala na ustawienie kamery w kierunku dokładnie prostopadłym do podstawy, ewentualnie skręconym o  $31,5^\circ$  w lewo lub w prawo.

Komplet połowy Wilda i Zeissa zawiera latę jedno lub dwumetrową, przy pomocy której mierzymy długość podstawy; a to u Wilda na podstawie pomiaru kąta (paralaktycznego), u Zeissa zaś przy pomocy odpowiedniej śruby mikrometrycznej.

Do zdjęć wykonywanych z powietrza używamy kamer lotniczych, przymocowanych do samolotu lub sterowca na specjalnym podwieszeniu, które zezwala na wykonanie zdjęć pionowych lub pochyłonych. Kamery lotnicze mogą być pojedyncze lub wielokrotne, dostosowane do zdjęć na płytach lub filmach. Zdjęcia są wykonywane w szeregach oddzielnie (ręcznie), lub automatycznie.



Kamery pojedyncze mogą być przymocowane do podwieszenia sztywnie tak, że zezwalają tylko na wykonanie zdjęć pionowych lub pochyłonych pod pewnym stałym kątem, albo też umocowanie kamery jest tego rodzaju, że możemy ją skręcać, wykonywując zdjęcia pionowe i pochyłone. To drugie umocowanie ma tę zaletę, że przez wykonanie zdjęć zbieżnych, zwiększamy kąt przecięcia się promieni wiązek, a tym samym uzyskujemy większą dokładność planu. Wadą kamer pojedynczych nieautomatycznych jest trudność w ich obsłudze; szczególnie wykonanie zdjęć zbieżnych (na zmianę pionowych i pochyłonych) wymaga wielkiej wprawy. Dlatego kamerę pojedynczą zaopatrzone w automatyczne ładowniki na klisze (filmy), tak połączone z kamerą, że obserwator śledzi tylko dobre ułożenie osi tłowych względem kierunku lotu i reguluje odstęp kolejnych naświetleń, a automat sam zmienia kliszę (przesuwa film) i uruchamia migawkę (rys. 287). Uzyskany w ten sposób ma-



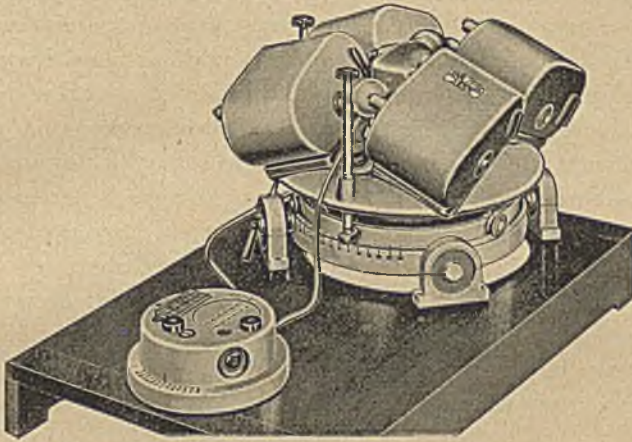
Rys. 287.

terial fotograficzny ma wzajemne pokrycie zdjęć wymagane i wystarczające do opracowania planów.

Kamery lotnicze wielokrotne składają się z dwu, czterech (rys. 288), a nawet dziewięciu kamer, połączonych na stałe ze sobą pod pewnymi, z góry określonymi, kątami. I tak, dla zdjęć stereoskopowych używamy kamery podwójnej o kącie nachylenia  $36^{\circ}$ , który wynika z najkorzystniejszego stosunku podstawy zdjęcia stereoskopowego do wysokości lotu. Ponieważ każdy lot jest bardzo kosztowny, a na jego wykonanie musimy nieraz czekać całymi tygodniami, przeto dla najekonomiczniejszego wykorzystania poszczególnych lotów istnieje tendencja do budowania kamer poczwórnych, które powiększają obszar objęty w jednym położeniu samolotu nie tylko w kierunku lotu, ale też



i w kierunku poprzecznym. Osobną grupę kamer lotniczych stanowią kamery panoramowe (Aschenbrennera), składające się z dziewięciu kamer. Zadaniem tych kamer jest objęcie w jednej chwili jak największego obszaru w czasie lotów bardzo trudnych lub przeznaczonych do sporządzenia planów o małej podziałce i niezbyt wielkiej dokładności.



Rys. 288.

### § 3. Orientacja wewnętrzna i zewnętrzna

Orientacja wewnętrzna polega na znajomości położenia środka perspektywy w układzie przestrzennym, związanym osiami tłowymi kamery fotograficznej. Wyznaczając orientację wewnętrzną, szukamy współrzędnych przestrzennych wewnętrznego punktu głównego obiektywu kamery w układzie, którego dwie osie tworzą osie tłowe, a trzecia przechodzi przez punkt przecięcia się tych osi i jest do nich prostopadła. Prostą, przechodzącą przez wewnętrzny punkt główny obiektywu, prostopadle do płaszczyzny styku kliszy nazywamy osią kamery; prosta ta powinna przechodzić przez punkt początkowy układu osi tłowych i być identyczna z osią optyczną obiektywu kamery.

Orientację wewnętrzną wyznaczamy w ten sposób, że na pewnym stanowisku wykonujemy zdjęcie przy poziomej osi tłowej i pionowym położeniu płaszczyzny styku płyty. Następnie z tego samego stanowiska mierzymy kąty poziome i pionowe do najmniej trzech punktów, odfotografowanych na płycie światłoczułej. Mierząc współrzędne tłowe punktów, do których pomierzono kąty, obliczamy wcinaniem wstecz współrzędne środka perspektywy  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  i  $f'$  (długość ogniskowej). Przy większej ilości punktów, do których pomierzono kąty, stosujemy rachunek wyrównawczy, podobnie jak przy wcinaniu wstecz z wyrównaniem.

Orientację zewnętrzną tworzy wzajemne położenie układu przestrzennego orientacji wewnętrznej w układzie przestrzennym punktów terenu w chwili wykonania zdjęcia fotograficznego. Orientacja zewnętrzna jednego zdjęcia



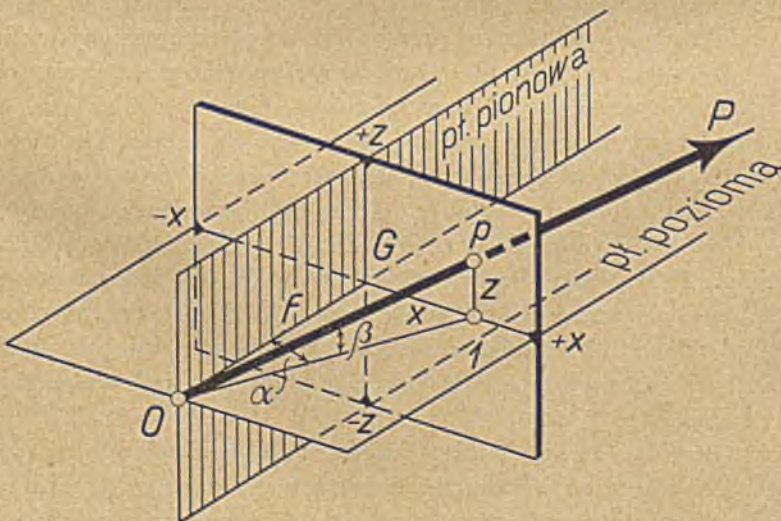
jest podana przez sześć elementów, którymi są trzy współrzędne środka perspektywy, kąt nachylenia do poziomu jednej z osi tłowych, kąt pochylenia osi kamery i kąt kierunkowy (azymut) rzutu osi kamery na płaszczyznę poziomą (tzw. kierunek zdjęcia). Przy zdjęciach terrofotogrametrycznych, tj. dokonanych ze stanowisk terenowych, oś tłowa  $x$ -ów sprowadzana jest przy użyciu libeli stale do poziomu, zaś oś kamery jest pozioma lub pochylona pod znanym kątem.

Elementy orientacji zewnętrznej ustalamy w czasie pomiarów przez nawiązanie położenia środka obiektywu i osi kamery do sytuacji i wysokości punktów triangulacyjnych lub poligonowych, specjalnie w tym celu założonych. Przy zdjęciach lotniczych nie jesteśmy w możności wykonania takich pomiarów, to też elementy te obliczamy na podstawie danych współrzędnych przestrzennych najmniej trzech punktów terenu oraz kątów, zawartych między promieniami do tychże punktów; kąty te uzyskujemy przez pomiar ich na kliszy przy pomocy odpowiednich przyrządów lub przez obliczenie ze współrzędnych tłowych wspomnianych trzech punktów i znanej orientacji wewnętrznej kamery. Przybliżone wartości elementów orientacji zewnętrznej uzyskujemy graficznie. Rachunkowe wyznaczenie elementów jest bardzo żmudne, toteż stosujemy je tylko w wyjątkowych wypadkach.

#### § 4. Wyznaczenie współrzędnych punktów

Znając orientację wewnętrzną i zewnętrzną, możemy przystąpić do obliczenia lub wykreślenia kątów, jakie tworzą promienie z osią kamery lub z osiami układu przestrzennego (terenowego). W przypadku, gdy oś kamery i oś tłowa  $x$ -ów jest pozioma, obliczamy kąt poziomy  $\alpha$  i pionowy  $\beta$  (rys. 289) przy pomocy wzorów:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{z}{f \cos \alpha} = \frac{z}{\sqrt{f^2 + x^2}}. \quad (1)$$



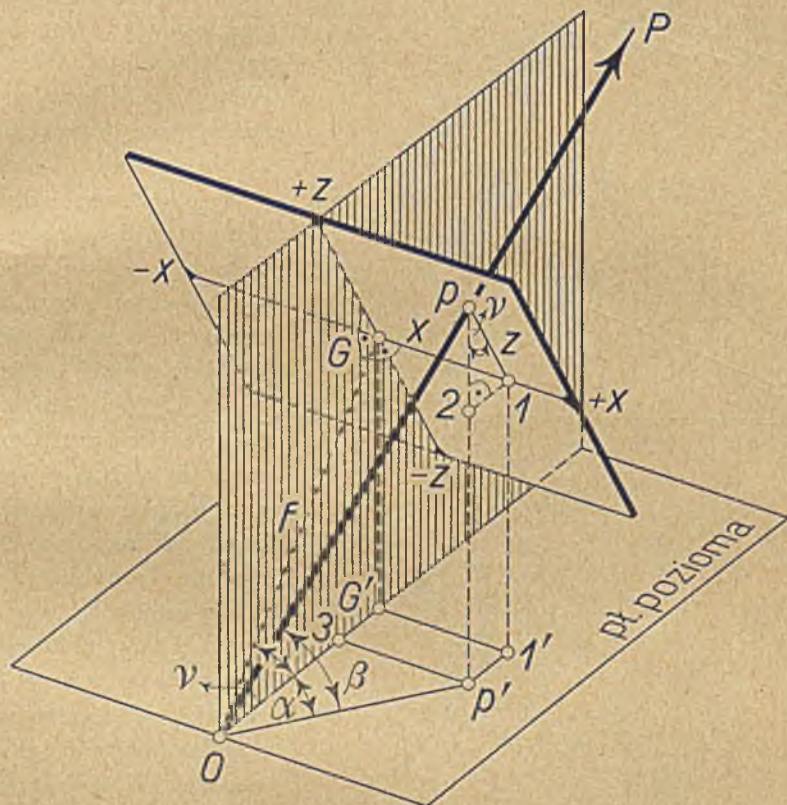
Rys. 289.



Gdy oś kamery jest nachylona do poziomu pod kątem  $\nu$ , a oś tłowa  $x$ -ów jest pozioma (rys. 290), stosujemy wzory<sup>1)</sup>:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f \cos \nu - z \sin \nu}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{f \sin \nu + z \cos \nu}{f \cos \nu - z \sin \nu} \cos \alpha. \quad (2)$$

Zamiast obliczać wartości kątów, możemy je mierzyć wprost na kliszy przy pomocy odpowiednich przyrządów (p. § 5).



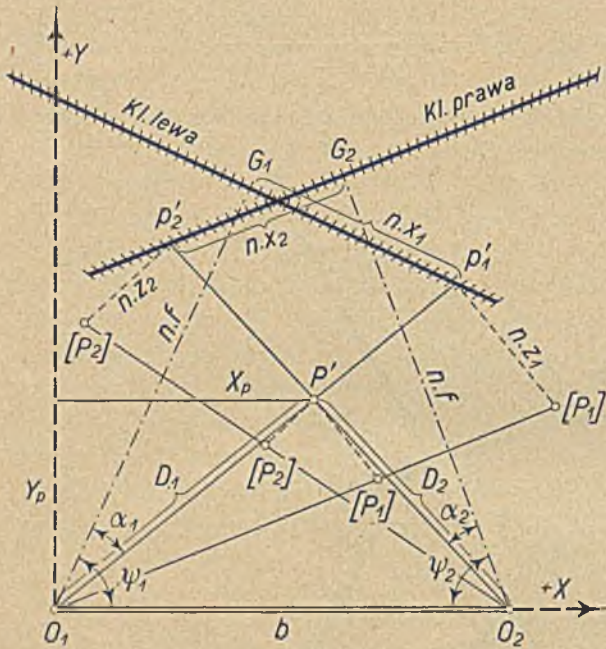
Rys. 290.

Na podstawie obliczonych (lub pomierzonych) kątów, możemy wykreślić plan odfotografowanego przedmiotu (terenu), jeżeli został zdjęty z dwóch stanowisk, których dokładnie pomierzona odległość stanowi tzw. *podstawę (bazę)* zdjęcia. Znając orientację zewnętrzną obu zdjęć kreślimy podstawę oraz rzuty poziome osi kamer (rys. 291), a odmierzając z punktów  $O_1$  i  $O_2$  pomierzone kierunki i przedłużając je do przecięcia się, otrzymujemy sytuację szukanego punktu. Wysokość punktu dostaniemy z kładu promienia na płaszczyznę poziomą. Ponieważ wysokość punktu możemy wyznaczyć ze względu

<sup>1)</sup> Szczegółowe wyprowadzenie tych i następnych wzorów znaleźć można w książce: Inż. E. Wilczkiewicz, *Zasady zdjęć fotogrametrycznych*, Lwów 1930.



na oba stanowiska fotogrametryczne, przeto otrzymujemy na każdym z nich kontrolę, gdyż różnica obu wysokości powinna się równać różnicy wysokości stanowisk.



Rys. 291.

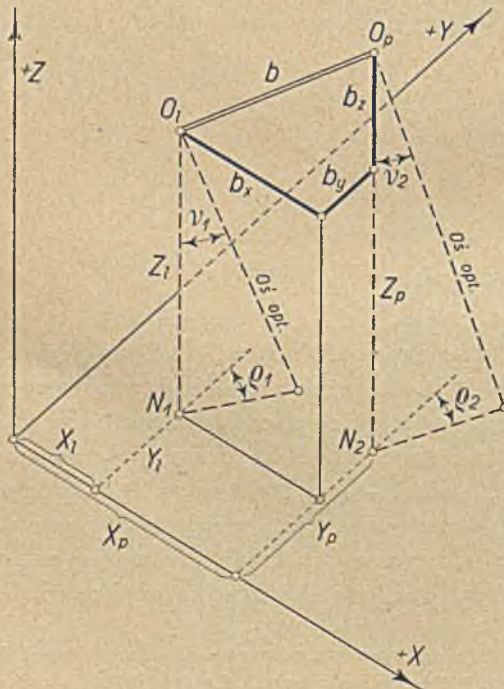
Ze znanej orientacji zewnętrznej obu zdjęć oraz pomierzonych współrzędnych tlowych odpowiadających sobie punktów, możemy również obliczyć współrzędne przestrzenne tych punktów. W tym celu przyjmujemy następujące oznaczenia:

$f$  ogniskowa kamery,  
 $b$  podstawa, wzgl. jej rzuty  $b_x$ ,  $b_y$  i  $b_z$  (p. rys. 292),  
 $\varepsilon$  kąt pochylenia podstawy do poziomu o znaku dodatnim, jeśli prawe stanowisko jest wyższe od lewego,  
 $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) kąt poziomy, zawarty między prostą prostopadłą do podstawy i rzutem poziomym lewej (prawej) osi kamery, liczony jako dodatni zgodnie z ruchem wskazówki zegara,

$\nu_1$  ( $\nu_2$ ) kąt pionowy, jaki tworzy lewa (prawa) oś kamery z płaszczyzną poziomą, o znaku dodatnim, jeśli oś kamery odchylona jest do góry,

$\gamma$  kąt, utworzony przez rzuty poziome osi kamer (znak dodatni przy osiach zbieżnych).

Współrzędne przestrzenne punktu  $P(X, Y, Z)$  odnoszą się do układu prostokątnego, którego początek leży w środku perspektywy lewego stanowiska. Płaszczyzna  $XY$  jest pozioma,  $YZ$  pionowa i przechodzi przez lewą oś kamery. Ostateczne wzory są następujące:

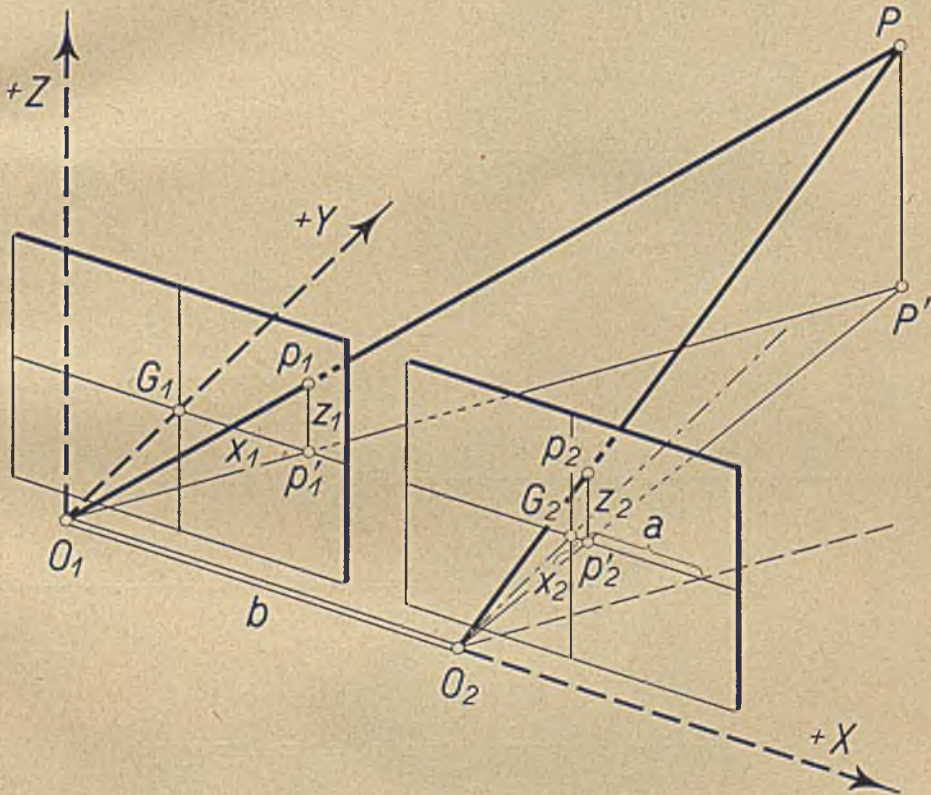


Rys. 292.



$$Y = \frac{b \left\{ \begin{array}{l} x_2 f \cos \varepsilon \sin (\rho_1 + \gamma) \cos \nu_1 - x_2 z_1 \cos \varepsilon \sin (\rho_1 + \gamma) \sin \nu_1 - \\ - z_1 f \cos \varepsilon \cos (\rho_1 + \gamma) \cos \nu_2 \sin \nu_1 + z_1 z_2 \cos \varepsilon \cos (\rho_1 + \gamma) \sin \nu_2 \sin \nu_1 - \\ - z_2 f \cos \varepsilon \cos (\rho_1 + \gamma) \sin \nu_2 \cos \nu_1 + f^2 \cos \varepsilon \cos (\rho_1 + \gamma) \cos \nu_2 \cos \nu_1 \end{array} \right.}{\begin{array}{l} x_1 x_2 \sin \gamma + x_1 f \cos \gamma \cos \nu_2 + x_2 z_1 \cos \gamma \sin \nu_1 - x_1 z_2 \cos \gamma \sin \nu_2 - \\ - x_2 f \cos \gamma \cos \nu_1 - z_1 f \sin \gamma \sin \nu_1 \cos \nu_2 + z_1 z_2 \sin \nu_1 \sin \nu_2 \sin \gamma - \\ - z_2 f \sin \gamma \cos \nu_1 \sin \nu_2 + f^2 \sin \gamma \cos \nu_1 \cos \nu_2 \end{array}},$$

$$X = Y \frac{x_1}{f \cos \nu_1 - z_1 \sin \nu_1}, \quad Z = Y \frac{f \sin \nu_1 + z_1 \cos \nu_1}{f \cos \nu_1 - z_1 \sin \nu_1}. \quad (3)$$



Rys. 293.

Podstawiając w powyższych wzorach  $\nu = \nu' = \gamma = \rho_1 = 0$ ,  $b \cos \varepsilon = b'$ , otrzymamy wzory dla tzw. normalnego przypadku zdjęć stereofotogrametrycznych (najczęściej stosowanego w terrofotogrametrii):

$$Y = \frac{b'}{a} f, \quad X = \frac{b'}{a} x_1, \quad Z = \frac{b'}{a} z_1, \quad (4)$$

przy czym  $a = x_1 - x_2$  nazywamy *paralaksą poziomą*. Wzory te można również wprowadzić bezpośrednio z rys. 293 i 294.

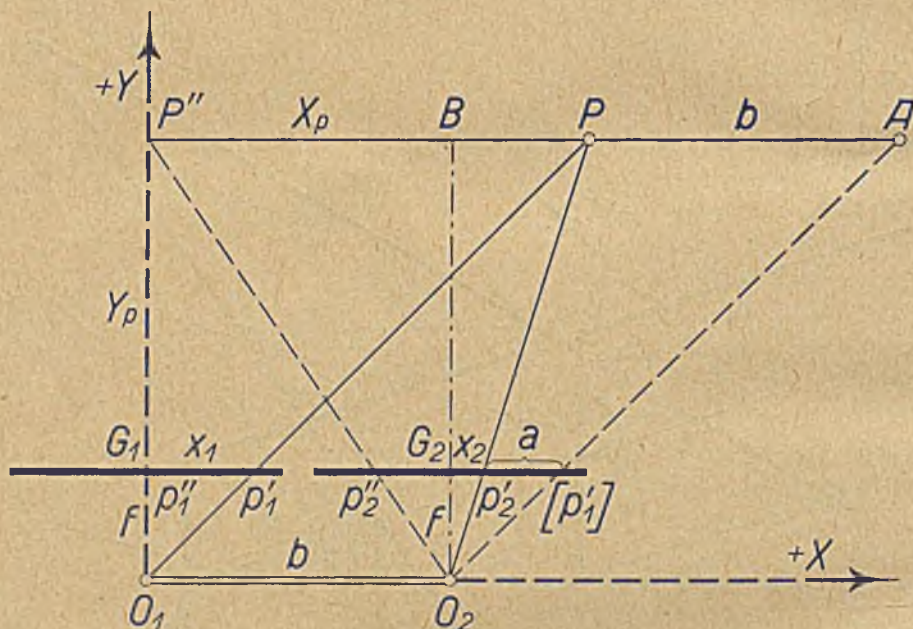


Wszystkie punkty o stałej wartości paralaksy  $a$  leżą, w tym przypadku w płaszczyźnie pionowej, równoległej do podstawy.

Dla zdjęć lewo lub prawozwrotnych, dla których  $\nu = \nu' = \gamma = 0$ , otrzymujemy:

$$Y = \frac{b \cos \varepsilon (f \cos \rho + x_2 \sin \rho)}{a}, \quad X = Y \frac{x_1}{f}, \quad Z = Y \frac{z_1}{f}. \quad (5)$$

Przyjmując na  $a$  wartość stałą, przekonamy się, że wszystkie punkty leżą na powierzchni, której kierownicą w płaszczyźnie poziomej jest parabola. Dla zdjęć zbieżnych kierownicą powierzchni równej paralaksy będzie elipsa, przechodząca przez oba stanowiska fotogrametryczne.



Rys. 294.

## § 5. Przyrządy do opracowania zdjęć fotogrametrycznych

### 1. Komparator.

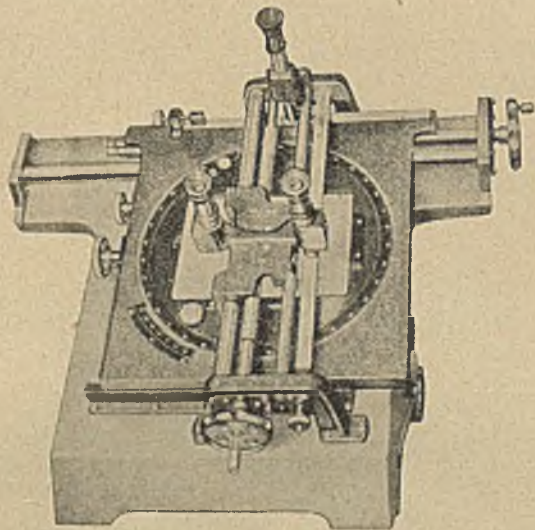
Do wymierzania współrzędnych tłowych posługujemy się komparatorem (rys. 295). Posiada on trzy mikroskopy, z których dwa przeznaczone są do wykonywania odczytów na podziałkach z dokładnością 0,01—0,02 mm, zaś trzeci, o 6-krotnym powiększeniu, służy do nastawienia na punkt, którego współrzędne mierzymy. Dla zorientowania kliszy umieszczamy ją w ramkach, które skręcamy tak, aby oś tłowa kliszy była równoległa do osi przyrządu.

### 2. Teodolit do wymierzania klisz.

Przyrząd ten służy do bezpośredniego pomiaru kątów z kliszy. Składa się on z dwu części: kamery zastępczej i teodolitu (rys. 296). Kamery zastępczą, podobnie zbudowaną jak kamera fotograficzna, można pochylić dookoła osi

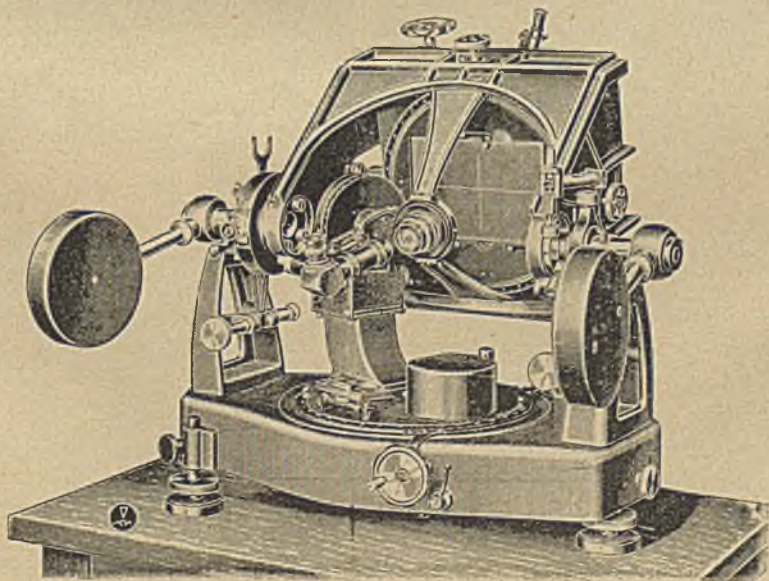


poziomej (zaznaczyć jednak należy, że kamery zastępcze nie nadają się do wykonywania zdjęć). Przed kamerą umieszczony jest teodolit w ten sposób, że przedni punkt główny obiektywu lunety znajduje się na przecięciu osi poziomej i pionowej, a zarazem schodzi się z punktem głównym obiektywu kamery zastępczej. Przyrządem tym mierzymy kąty poziome i pionowe (odczyty na odpowiednich kołach), oraz kąty, zawarte między promieniami do dwu dowolnych punktów kliszy (o czym wspomniano przy orientacji zewnętrznej). W przypadku pierwszym należy kliszę ułożyć w takim położeniu, jakie miała w chwili wykonania zdjęcia, a więc jedną z osi tłowych sprowadzić do poziomu, skrecając ją w ramach kliszy (przy nastawieniu na znaczki tej osi)



Rys. 295.

tak długo, aż odczyt na kole pionowym będzie  $0^{\circ}$ . Następnie ustawiamy lunetę pod kątem pochylenia kamery w chwili zdjęcia, nadając kamerze zastępczej takie położenie, aby krzyż nitkowy pokrył się z punktem głównym kliszy. Przy mierzeniu kątów między dwoma kierunkami skrecaemy kliszę tak, aby odpo-



Rys. 296.

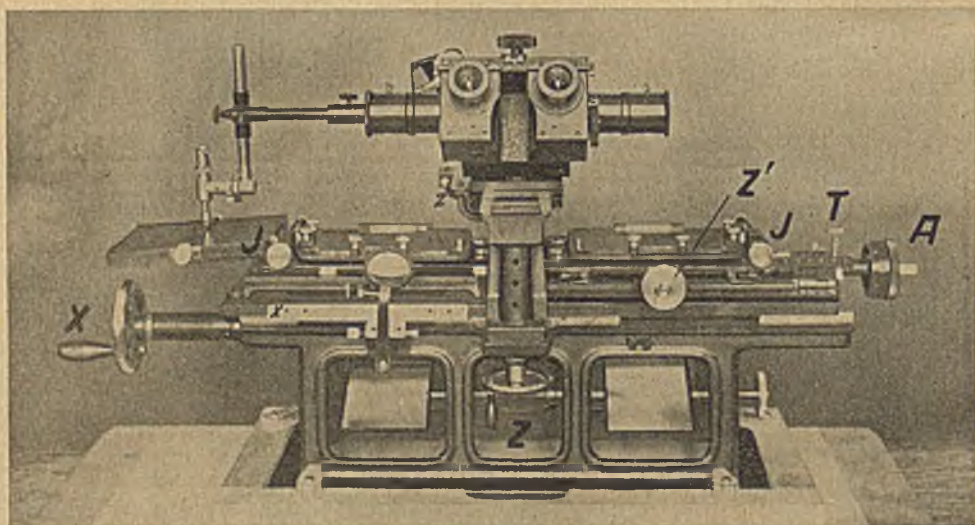


wiadające tym promieniom punkty znalazły się w płaszczyźnie pionowej; różnica odczytów na kole pionowym daje wówczas omawiany kąt.

### 3. Stereokomparator.

Do równoczesnego wymierzania dwu klisz służy przyrząd, zwany stereokomparatorem, zbudowany na zasadzie stereoskopu. Składa się on z trzech zasadniczych części: z podstawy, wózka i mikroskopów. Wózek przesuwamy względem podstawy śrubą  $X$  w kierunku osi  $x$ -ów, mikroskopy w kierunku osi  $z$ -ów śrubą  $Z$ , wreszcie śrubą paralaktyczną  $A$  (rys. 297) kliszę prawą względem lewej. Wszystkie przesunięcia odczytujemy na podziałkach z dokładnością od 0,02 do 0,01 mm. Przy zdjęciach stereofotogrametrycznych, wykonanych na stanowiskach o różnej wysokości, powstaje paralaksa pionowa, którą usuwamy przy pomocy śruby  $Z'$ .

Wymierzanie klisz rozpoczynamy od dostrojenia okularów do oczu obserwatora i bardzo dokładnego zorientowania klisz w stereokomparatorze,



Rys. 297.

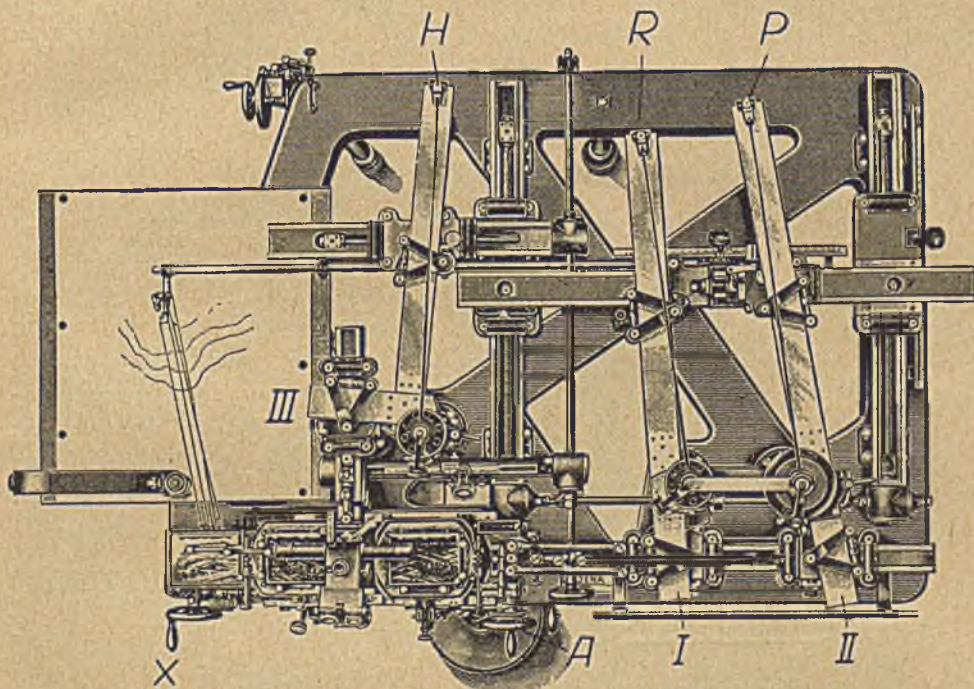
które polega na równoległym ułożeniu osi tłowych obu klisz do kierunku posuwania się wózka i mikroskopów oraz na takim ich wzajemnym usytuowaniu, aby celowe przeszły równocześnie przez odpowiednie punkty głównie klisz. W położeniu tym, tzw. normalnym, notujemy odczyty na podziałkach  $X$ ,  $Z$  i  $A$  lub sprowadzamy noniusze na odczyty zerowe (wzgl. całkowite mm). Teraz możemy przystąpić do nastawiania stereokomparatora na punkty terenu, których położenie (współrzędne) mamy wyznaczyć. Czynimy to w ten sposób, że początkowo obieramy punkt na lewej kliszy, a następnie podsuwamy prawą kliszę śrubami  $A$  i  $Z'$  tak długo, aż zobaczymy plastyczny obraz krzyża mikroskopów oparty o plastycznie widziany pozorny model terenu w wyznaczonym punkcie. Przy następnych punktach postępowanie jest uproszczone, gdyż mamy już utworzony model stereoskopowy, na którym opieramy tylko plastyczny obraz krzyża. Przy pomocy wykonanych na przyrządzie odczytów



współrzędnych łowych punktów lewej kliszy i odpowiadającej im paralaksy poziomej wykreślamy (lub obliczamy) położenie punktów w obranym układzie.

#### 4. Stereoautograf.

Wykreślanie planów na podstawie pomiarów na stereokomparatorze jest nader mozolne. Dlatego to stereokomparator uzupełniony został przez Orela szeregiem dźwigni, przenoszących ruchy śrub  $X$ ,  $Z$ , i  $A$  na ołówek, który kreśli plan. Tak ulepszony przyrząd został nazwany stereoautografem; po przeprowadzeniu przez firmę Zeissa niektórych ulepszeń konstrukcyjnych, jest on obecnie jednym z najlepszych przyrządów do mechanicznego opracowania zdjęć terrofotogrametrycznych normalnych, lewo i prawozwrotnych, oraz zbieżnych.

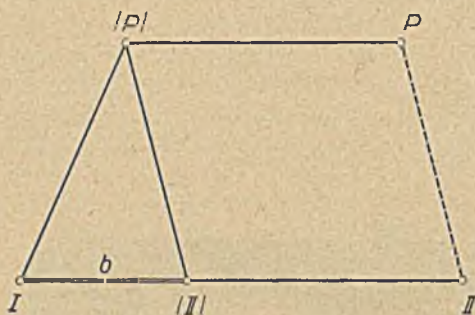


Rys. 298.

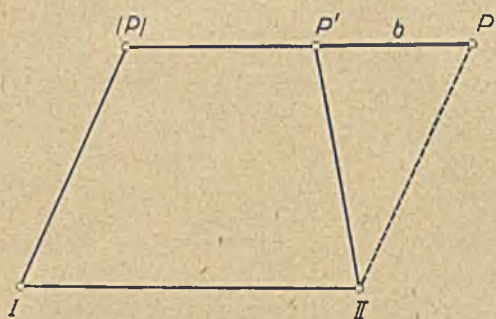
Rys. 298 przedstawia stereoautograf z 1914 r., na którym widzimy połączenie stereokomparatora z systemem nanoszącym, składającym się z czterech liniałów. Liniał I  $R$ , kierunkowy, połączony jest z wózką lewej kliszy. Ruchem korby  $X$  nadajemy mu kierunek do wyznaczanego punktu. Liniał II  $P$ , paralaksy, połączony jest z kliszą prawą i podaje kierunek do wyznaczanego punktu, ale dla zdjęcia prawego. Liniał III  $H$ , wysokościowy, połączony jest z mikroskopami i wyznacza wysokość punktu. Wszystkie liniały mają przeguby, umieszczone w odległości ogniskowej od ramion, którymi połączone są z kliszami, wzgl. mikroskopami. Drugi punkt obrotu każdego z liniałów połączony jest z liniałem odległościowym, który przy pomocy korby  $A$  i dwu gwintownic porusza się równolegle w kierunku stereokomparatora. Przeguby, łączące liniał kierunkowy i paralaksy z liniałem odległościowym, umieszczone są na mostku podstawy; na tym mostku znajduje się również ołówek, kreślący plan.



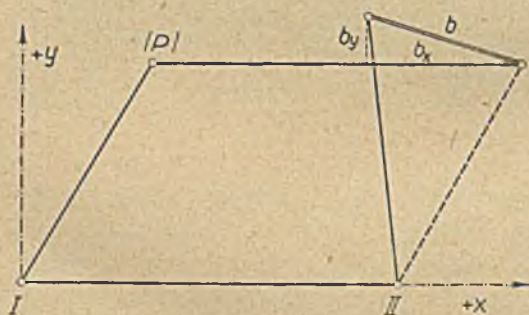
Dla zrozumienia działania systemu nanoszącego, musimy poznać zasadę tzw. równoległoboku Zeissa. W tym celu przyjmijmy, że dwa zdjęcia zostały wykonane ze stanowisk I i (II) w odległości  $b$ . Gdybyśmy podobne warunki chcieli zachować w przyrządzie, to musielibyśmy umieścić przeguby I i (II) w odległości podstawy  $b$ , co w skali planu byłoby niemożliwe do wykonania.



Rys. 299a.



Rys. 299b.



Rys. 299c.

Jeżeli jednak punkt (II) przesuniemy w kierunku podstawy o taki odcinek, aby konstrukcja przegubów była możliwa, wtedy promienie do dowolnego punktu terenu ( $P$ ) zostaną równoległe rozsunięte. Promień lewy pozostanie na miejscu, zaś prawy przesunie się do położenia II  $P$  (rys. 299a). Aby przy każdym następnym nastawieniu była zachowana równoległość prawego promienia do jego położenia właściwego, musimy wprowadzić dodatkowy liniał odległościowy, który stale musi się poruszać równoległe do podstawy I(II), względnie do jej przedłużenia I II. W miarę wyznaczania punktów dalszych będzie się on od podstawy oddalał lub zbliżał. Konstrukcja tak wykonana miała by jednak wielką wadę, gdyż dla każdego stereogramu musielibyśmy zmieniać odległość przegubów I i II, a to zależnie od długości podstawy i skali planu. Możemy jednak temu zaradzić, przenosząc zmieniającą się podstawę  $b$  z prostej I II na prostą ( $P$ )  $P$  i tworząc nowy równoległobok I, II, ( $P$ ),  $P'$  (rys. 299b). W równoległoboku tym kierunek wyznaczony z kliszy lewej, podany jest liniałem I ( $P$ ), kierunek wyznaczony z prawej kliszy, liniałem II  $P'$ , a podstawa  $b$  równa się odcinkowi  $P P'$ . Ostatnio opisany równoległobok nadaje się tylko do zdjęć normalnych, tzn. gdy osie kamer są poziome i prostopadłe do podstawy. Jeżeli jednak prócz zdjęć normalnych, wykonaliśmy zdjęcia lewo- lub w prawozwrotne, wtedy punkt  $P'$  na liniale odległościowym musimy przesunąć o rzuty podstawy (rys. 299c), a to z tego powodu, że do

liniałem I ( $P$ ), kierunek wyznaczony z prawej kliszy, liniałem II  $P'$ , a podstawa  $b$  równa się odcinkowi  $P P'$ . Ostatnio opisany równoległobok nadaje się tylko do zdjęć normalnych, tzn. gdy osie kamer są poziome i prostopadłe do podstawy. Jeżeli jednak prócz zdjęć normalnych, wykonaliśmy zdjęcia lewo- lub w prawozwrotne, wtedy punkt  $P'$  na liniale odległościowym musimy przesunąć o rzuty podstawy (rys. 299c), a to z tego powodu, że do



przyrządu zakładamy klisze w jednej płaszczyźnie, więc odpowiednie skrócenie nadać musimy podstawie.

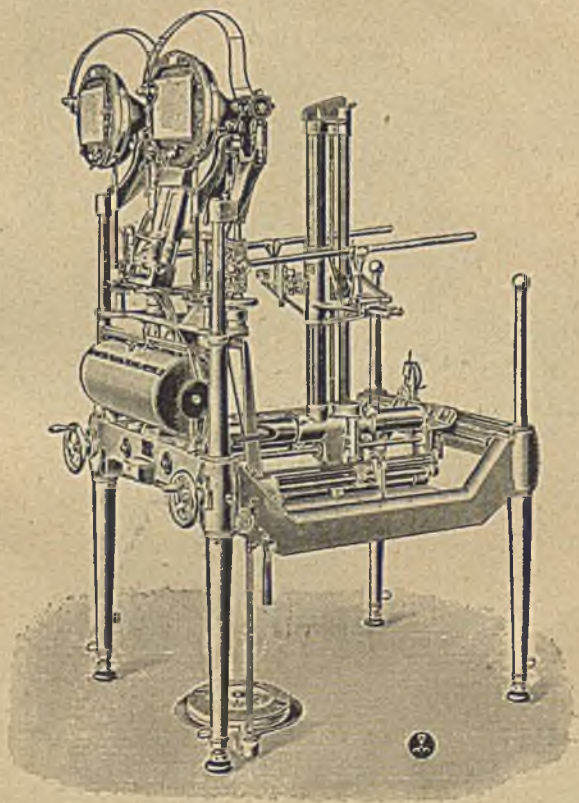
Opisany równoległobok Zeissa zastosowano w stereoautografie oraz we wszystkich nowoczesnych przyrządach do automatycznego kreślenia planów (w tzw. autografach).

Należy jeszcze objaśnić działanie liniału wysokościowego. Przesuwając mikroskopy na coraz wyższe punkty terenu, pochylamy równocześnie liniał wysokościowy, a przegub, umieszczony przesuwalnie na liniale odległościowym, odcina na wyznaczonej sytuacji punktu jego wysokość  $Z$  ponad stanowiskiem lewym. Jeżeli dla pewnej wysokości  $Z$  sprzęgniemy przegub  $H$  z liniałem tak, aby wartość ta stale była zachowana, wtedy przyrząd nakreśli warstwicę, odpowiadającą wysokości  $Z$ .

### 5. Aerokartograf.

Uniwersalnym przyrządem, na którym możemy opracowywać dowolne dwa zdjęcia tego samego terenu lub obiektu, jest aerokartograf Hegershoffa (rys. 300). Równoległobok,

który poprzednio podaliśmy tylko dla płaszczyzny, przechodzi w tym przyrządzie w czworobok przestrzenny. Klisze układamy nie w jednej płaszczyźnie, lecz (w pewnych granicach) dowolnie, toteż cały przyrząd rozwiązany jest jako konstrukcja przestrzenna, a nie płaska. Kierunki celowych do punktów terenu zmaterializowane są przez drążki kierujące. Konstrukcja aerokartografu składa się z trzech systemów: obserwacyjnego, mierzącego i nanoszącego. System obserwacyjny składa się z podwójnego peryskopu. Dodatkowe pryzmaty służą do zmiany biegu promieni w tym sensie, że przez przesunięcie ich, promienie z lewej kliszy dochodzą do prawego okularu, zaś z kliszy

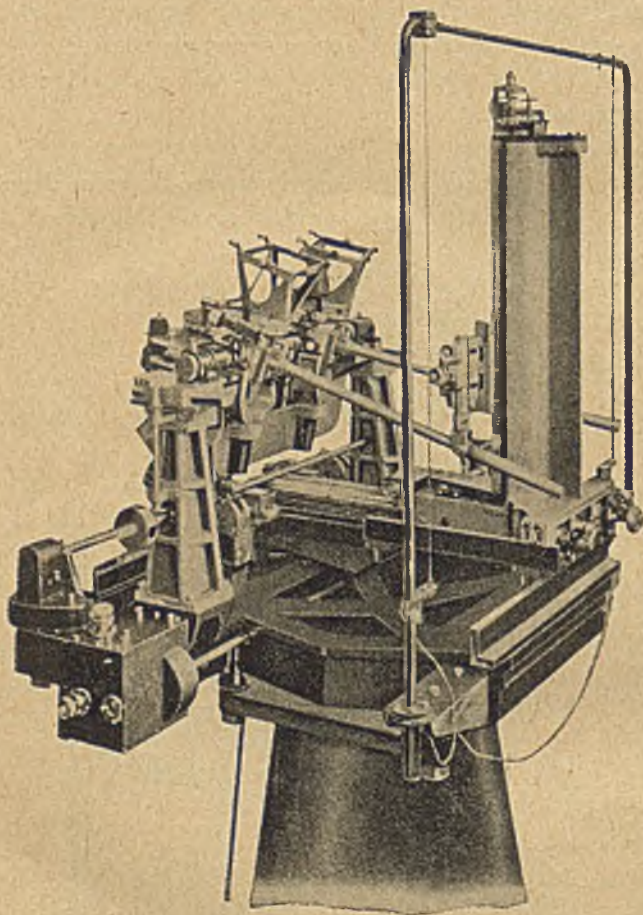


Rys. 300.

prawej do okularu lewego, co pozwala na uzyskiwanie przeciwnego efektu stereoskopowego (wyniosłości występują jako zagłębienia). System mierzący składa się z dwu kamer zastępczych, oraz umieszczonych przed nimi pryzma-



tów i soczewek, tworzących lunety teodolitu (tak, jak w poprzednio opisanym teodolicie do wymierzania klisz). Lunety te nastawiamy na punkty obrazu terenu. System n a n o s z a c y obejmuje przestrzenne suwadło wodzidłowe, składające się z sanek, przesuwalnych w kierunku trzech wzajemnie prostopadłych osi przyrządu. Suwadło to połączone jest z systemem mierzącym przy pomocy dźwągów kierujących, które przenoszą kąty poziome na kamery zastępcze, zaś kąty pionowe na pryzmaty lunet mierzących. Do sanek suwadła przymocowany jest ołówek, kreślący plan na rysownicy, znajdującej się pod przestrzen-



Rys. 301.

nym suwadłem. Poza tym możemy kreślić plany na dodatkowym koordynatografie. Podstawę nastawiamy na sankach poziomych, przesuwając przeguby dźwągów kierujących o rzuty podstawy względem ich położenia normalnego.

#### 6. Autograf Wilda (Rys. 301).

Przyrząd ten różni się zasadniczo tym od aerokartografu, że dźwągki kierujące połączone są trwale z kamerami zastępczymi. Obie kamery zastępcze są umieszczone w łożysku Kardana tak, że możemy je równocześnie skręcać i pochylać. Urządzenie to jest wielkim udogodnieniem przy orientowaniu stereogramu. Sztywne połączenie kamer z dźwągkami wymaga zastosowania dodatkowego urządzenia, obracającego kamerę do-

koła jej osi, gdyż celując na pochyloną kamerę, nie mierzymy tych samych kątów poziomych i pionowych, jakie promień zawierał z osią kamery. System mierzący i obserwacyjny jest znacznie prostszy niż w aerokartografie.

Prócz wyżej opisanych dwu autografów Hugershoffa i Wilda, istnieje cały szereg innych konstrukcyj, jak stereoplanigraf Zeissa, przyrząd Gassera, projektor Nistriego i inne, których szczegółowy opis znajdzie czytelnik w literaturze fachowej.

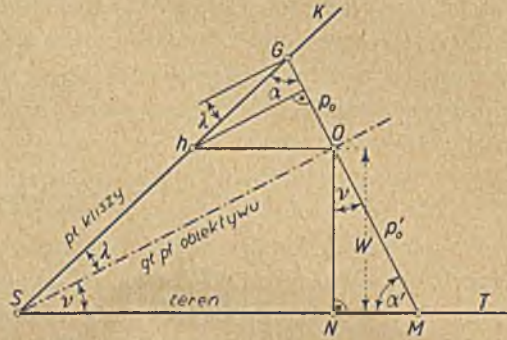


## § 6. Przetworniki

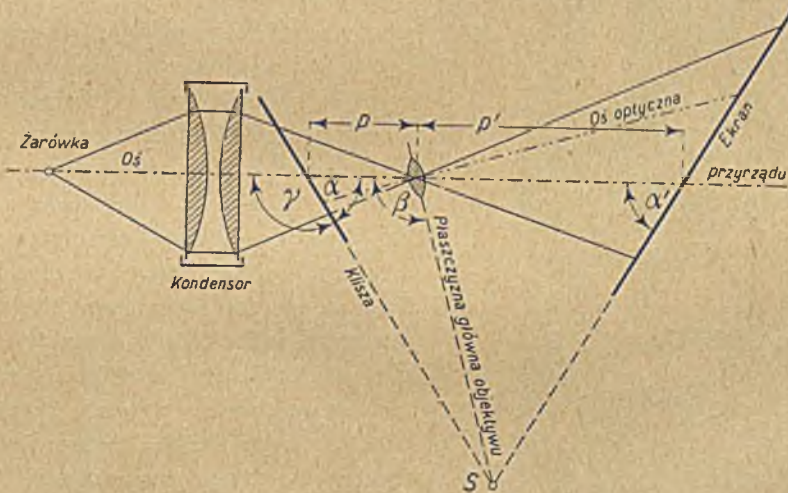
Poszczególne zdjęcia lotnicze, wykonane w terenie płaskim lub lekko falistym, możemy wykorzystać do sporządzenia planów sytuacyjnych, tzw. *fotoplanów*. Metodę, stosowaną do tego celu, nazywamy *przetwarzaniem*, a używane przyrządy *przetwornikami*. Przetwarzanie polega na takim *przefotografowaniu* zdjęcia lotniczego, by otrzymana sytuacja wykazywała na całej powierzchni żadaną skalę.

Dla spełnienia tego warunku musimy przy przetwarzaniu zachować: 1) związek perspektywiczny między terenem, kliszą i obiektywem kamery w chwili wykonania zdjęcia, 2) związek Halleya dla soczewki projekcyjnej i 3) stałą odległość środka obiektywu od tzw. śladu zbiegu  $h$  (rys. 302 a). Z powyższych warunków wynika, że w przetworniku powinny:

1) płaszczyzna kliszy, ekranu i płaszczyzna główna soczewki projekcyjnej przecinać się w jednej krawędzi  $s$ , 2) klisza obracać się w swojej płaszczyźnie, 3) płaszczyzna kliszy obracać się dookoła prostej, równoległej do krawę-



Rys. 302 a.



Rys. 302 b.

dzi  $s$ , a przechodzącej przez punkt główny kliszy, 4) płaszczyzna obrazu (ekranu) obracać się dookoła prostej, równoległej do  $s$  i przechodzącej przez obraz punktu głównego kliszy, 5) środek obiektywu projekcyjnego leżeć na osi głównej przyrządu, przechodzącej przez punkt główny kliszy i 6) musi istnieć możliwość zmiany odległości pomiędzy płaszczyznami kliszy, obiektywu i ekranu. Rys. 302b przedstawia przetwornik w liniach schematycznych.



Nowoczesne przetworniki posiadają urządzenia mechaniczne do automatycznego nastawiania warunków perspektywy i ostrości obrazu. Urządzenia takie nazywamy *inwersorami*.

Z pośród różnych typów przetworników przedstawiony jest na rys. 303 przetwornik Zeissa, składający się z lampy, kondensora, ramki na klisze i ekranu. Dwa inwersory, umieszczone obok pionowych słupów, podtrzymujących całą konstrukcję, regulują automatycznie warunki przetwarzania. Lewy nastawia obrazy »na ostro«, prawy zaś powoduje takie nachylenie trzech wspomnianych płaszczyzn, aby przecięły się podług jednej prostej. Płaszczyzny ekranu, obiektywu i kliszy obracają się dookoła osi poziomych.

### § 7. Prace polowe i biurowe

Podobnie jak każde zdjęcie wykonane inną metodą, zdjęcie fotogrametryczne opiera się na sieci triangulacyjnej lub poligonowej i sieci niwelacyjnej. Prace polowe rozpoczynamy od dokładnego wywiadu w terenie, gdzie wybieramy podstawy zdjęć, którymi staramy się objąć jak największy obszar,

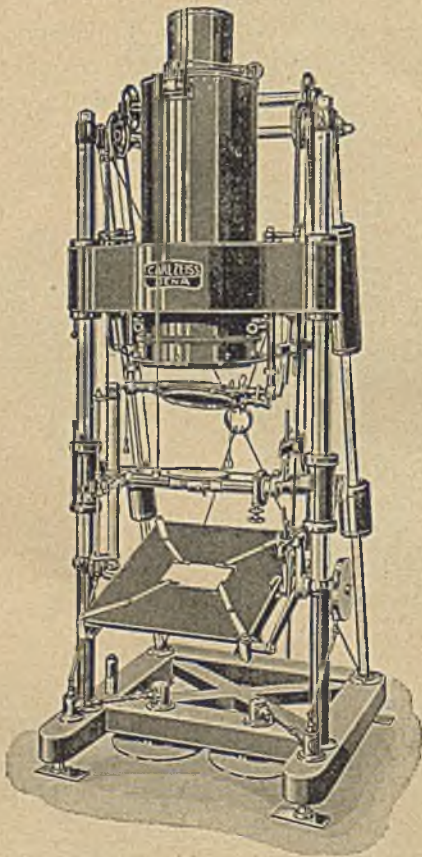
bez tzw. pól martwych. Pola martwe powstają przez zasłonięcie dalszego planu terenem, znajdującym się na planie bliższym. Najkorzystniejsze dla zdjęcia i opracowania są podstawy, założone równoległe do przeciwnych stoków. Łącznie z założeniem sieci triangulacyjnej i poligonowej wybieramy i zakładamy punkty kontrolne, przynajmniej po dwa dla każdej kliszy.

Przy zakładaniu sieci triangulacyjnej dla zdjęć aerofotogrametrycznych musimy się starać o to, aby na każdą kliszę (stereogram) wypadły najmniej trzy punkty. Punkty te zaznaczamy na terenie przed wykonaniem zdjęcia znakami bielonymi, zwykle w formie krzyża.

Opracowanie zdjęć terofotogrametrycznych przeprowadzamy z reguły przy użyciu autografów, a metodę wykreślną (punktową) stosujemy tylko w tych przypadkach, gdy nie posiadamy kosztownego autografu.

Zdjęcia lotnicze wykorzystujemy do sporządzenia fotoplanów i fotomap.

Fotoplany powstają przez naklejenie na jeden wspólny arkusz przetworzo-



Rys. 303.

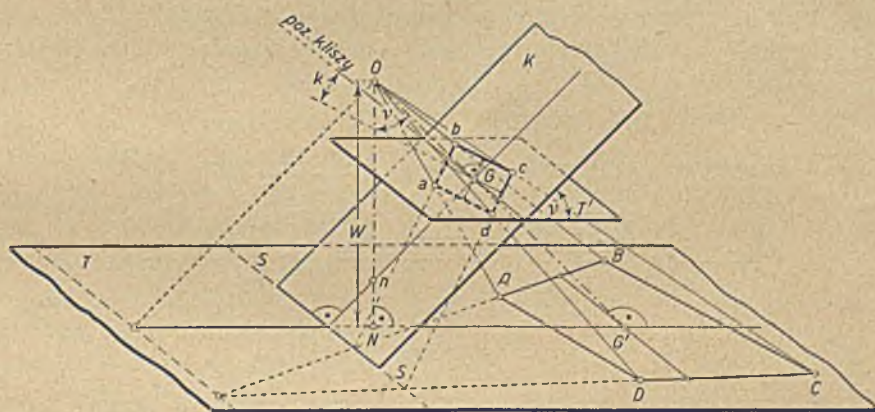


nych odbitek. Przy ich sklejaniu posługujemy się naniesioną sytuacją punktów, do których zdjęcia zostały przetworzone.

Fotoplany znalazły szerokie zastosowanie przy projektach ogólnych regulacji rzek i osiedli, przy budowie dróg i kolei, przy reambulacji i sporządzaniu map wojskowych, gospodarczych itp.

Sporządzenie *fotomapy*, tj. planu sytuacyjno-warstwicowego, opiera się na zdjęciach lotniczych stereoskopowych, wykonanych jako zdjęcia pionowe lub pochylone (zbieżne). Muszą one być wykonane w takich odstępach czasu (zależnych od wysokości i szybkości samolotu), aby wzajemne pokrycie klisz wynosiło 75%. Zdjęcia te opracowujemy na autografach. Zasadniczą czynnością przy tego rodzaju opracowaniu zdjęć jest dokładne uzyskanie orientacji tak wzajemnej, jak i zewnętrznej stereogramu. Zagadnienie to rozwiązać możemy drogą rachunkową lub, jak to z reguły ma miejsce, drogą mechaniczno-optyczną.

Obiektyw kamery lotniczej oraz punkty podkładu geodezyjnego połączone ze sobą tworzą dla jednego zdjęcia ostrosłup (rys. 304), zaś dla dwu zdjęć



Rys. 304.

dwa ostrosłupy, o wspólnej podstawie. Na podstawie orientacji wewnętrznej znamy kąty, zawarte między krawędziami ostrosłupów, możemy przeto tak usytuować ostrosłup (wzgl. oba ostrosłupy), aby ich krawędzie przechodziły przez odpowiednie punkty podkładu geodezyjnego, a tym samym przeprowadzić orientację zewnętrzną jednego lub obu zdjęć równocześnie. Rachunkowe przeprowadzenie tego zagadnienia jest, jak już wspomniano, bardzo żmudne, i dlatego w praktyce przeprowadza się je z reguły drogą mechaniczno-optyczną i to najczęściej równocześnie dla dwu zdjęć, tworzących stereogram. Sposób ten polega na orientacji w autografach dowolnie położonych, lecz tworzących stereogram dwu zdjęć fotogrametrycznych.

Wyznaczenie dwunastu elementów orientacji zewnętrznej stereogramu podzielone jest przy tej metodzie na kilka etapów, a mianowicie:

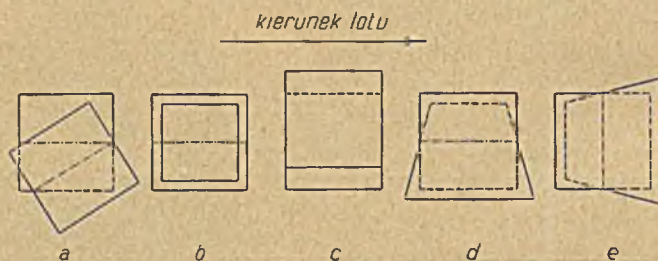


1. wyznaczenie 5 elementów orientacji wzajemnej,
2. wyznaczenie podstawy,
3. pochylenie zorientowanych wzajemnie klisz dookoła osi przyrzędu do takiego położenia, żeby wysokości punktów dostosowania odpowiadały pomiarom, wykonanym w terenie.

Do wykonania tych czynności musimy mieć dane współrzędne i wysokości co najmniej trzech punktów, uwidocznionych na kliszach stereogramu. Dla kontroli jest jednak korzystniej mieć większą ilość punktów dostosowania. Teoretycznie wystarcza przy trzech punktach znajomość ich wysokości oraz sytuacji tylko dwu z nich.

Orientację wzajemną stereogramu uzyskujemy przez systematyczne usuwanie tzw. *paralaksy pionowej*. Paralaksa pionowa nie ma nic wspólnego z różnicami wysokości, odnosi się ona tylko do przesunięć w kierunku pionowym odpowiadających sobie obrazów punktów, widzianych w polu widzenia stereoskopu, w stosunku do wskaźników. Po usunięciu paralaksy pionowej widzimy w autografie pozorny model stereoskopowy zdjętego terenu (lub obiektu), na którym możemy wykonywać wszelkie pomiary.

Dla lepszego zrozumienia tego zagadnienia wyobraźmy sobie dwa zdjęcia lotnicze, na których odfotografowano pole o formie kwadratu i przypatrzmy



Rys. 305.

się, jak ono przedstawi się na kliszach w przypadkach: skręcenia, różnej wysokości, przesunięć, pochyżeń i wichrowatego położenia osi kamer.

Omówimy tu pięć przypadków w założeniu, że kamery wraz z kliszami orientujemy normalnie, tj. tak jakby zdjęcia były wykonane z równej wysokości przy osiach pionowych (i równoległym układzie osi tłowych).

Uwaga: Na rys. 305 kierunek poziomy jest kierunkiem lotu, zaś pionowy — kierunkiem obserwacji (paralaksy pionowej).

1. Drugie zdjęcie skręcone względem pierwszego. Na obu zdjęciach występują kwadraty, lecz o położeniu różnym względem przekątnej zdjęcia, a tym samym odpowiadające sobie punkty nie będą leżały na tej samej wysokości w polu widzenia systemu projekcyjnego, powodując przez to powstanie paralaksy pionowej i to tym większej, im bardziej są one oddalone od środka pola kwadratu (rys. 305, a).

2. Drugie zdjęcie wykonano z większej wysokości niż pierwsze (rys. 305, b). Kwadrat zdjęcia drugiego będzie mniejszy niż zdjęcia pierwszego, skutkiem



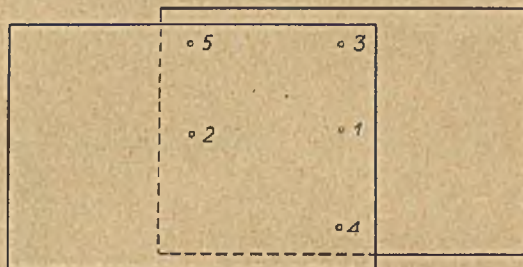
czego wystąpi dla odpowiadających sobie punktów paralaksa pionowa tym większa, im punkty będą dalej odległe od poziomej osi tłowej kliszy.

3. Zdjęcie drugie przesunięte równoległe względem pierwszego. Otrzymujemy dwa takie same kwadraty, lecz poszczególne ich punkty są względem siebie jednakowo przesunięte. Powstaje zatem paralaksa pionowa, równa dla wszystkich punktów (rys. 305, c).

4. Zdjęcie drugie pochylone względem pierwszego. Klisza pierwsza daje nam kwadrat, zaś druga trapez. Przesunięcie odpowiadających sobie punktów będzie (zależnie od kierunku pochylenia) dodatnie lub ujemne i tym większe, im punkty te będą bardziej odległe od osi poziomej kliszy, co spowoduje odpowiednią paralaksę pionową dla poszczególnych punktów (rys. 305, d).

5. Osie kamer są wchrowate względem siebie. Zdjęcie drugie wypadnie jako trapez, a odpowiadające sobie punkty są przesunięte w kierunku tzw. osi pionowej kliszy, co spowoduje również paralaksę pionową (rys. 305, e).

Jeżeli wszystkie wymienione przyczyny działają równocześnie, kwadrat drugiej kliszy odfotografuje się jako nieforemny czworobok, a klisze, założone do kamer jak w przypadku normalnym, nie dadzą w autografie modelu stereoskopowego. Ponieważ wpływ na paralaksę pionową jest w omawianych pięciu przypadkach różny, przeto przez kolejne usuwanie występujących paralaks na punktach, uwidocznionych na rys. 305 f (po kilkakrotnych próbach i systematycznym postępowaniu), możemy doprowadzić do zupełnego zaniku paralaksy pionowej, otrzymując tym samym pozorny stereoskopowy model terenu (który należy skontrolować na większej ilości punktów). Tak wytworzony pozorny model stereoskopowy posiada pewną skalę, którą musimy wyznaczyć i zmienić na taką, w jakiej chcemy mieć opracowany plan sytuacyjno-warstwicyowy zdjętego obszaru. W tym celu nastawiamy



Rys. 305 f.

kolejno przestrzenny wskaźnik na dwa punkty dostosowania, których sytuację i wysokości znamy, odczytujemy na podziałkach trzech osi przestrzennych przyrządu współrzędne, obliczając z nich odległość obu punktów. Odległość tę porównujemy z odległością punktów terenowych (w żądanej skali), a ze stosunku odległości w terenie do obliczonej z pomiarów na autografie otrzymujemy współczynnik redukcyjny dla skali modelu. Mając ustaloną skalę modelu stereoskopowego, przystępujemy do pochylenia zorientowanych wzajemnie klisz dookoła osi przyrządu do takiego położenia, ażeby wysokości punktów dostosowania odpowiadały (w skali) pomiarom, przeprowadzonym w terenie.

Dla przeprowadzenia tego zadania nastawiamy wskaźnik po kolei na odfotografowane punkty dostosowania i odczytujemy tę współrzędną, która odpowiada wysokości. Odczyty te redukujemy do poziomu jednego z punktów



dostosowania, a następnie przeliczamy na poziom tego samego punktu zredukowane wysokości, otrzymane w terenie.

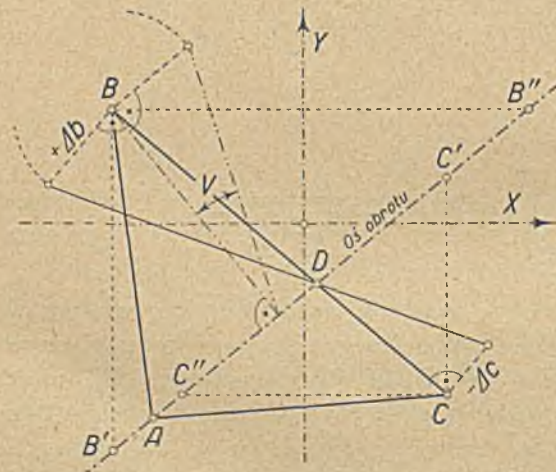
Po przeliczeniu tych różnic wysokości w skali planu, tworzymy różnice między tak otrzymanymi zredukowanymi wysokościami, które podają nam wielkości przesunięcia w kierunku pionowym punktów modelu stereoskopowego.

### Przykład.

L. p.	W y s o k o ś ć			W autografie pomierzona (mm)	Zred. na $A$	Różnica kolumny 6 -- 4
	w terenie m	W skali 1:5000 mm	Zred. na poziom p. $A$			
1	2	3	4	5	6	7
A	332,41	66,28	0,00	66,40	0,00	0,00
B	336,19	67,24	+0,96	77,20	+10,80	$\Delta b = +9,84$
C	340,25	68,05	+1,77	61,90	-4,50	$\Delta c = -6,27$

Przy pomocy tych cyfr (kol. 7) wyznaczamy graficznie (rys. 306) oś, dookoła której należy pochylić model oraz kąty, o które należy obie kamery pochylić dookoła osi  $x$ -ów i skrócić względem osi  $z$ -ów przyrządu.

Pochylając i skręcając kamery, powinniśmy również pochylić podstawę, a więc zmienić stosownie jej rzuty w autografie. Wielkości tych zmian można



Rys. 306.

obliczyć, czego jednak nie przeprowadzamy, tylko kontrolujemy pozorny model stereoskopowy, poprawiając występującą paralaksę pionową zmianą rzutów podstawy  $b_y$  i  $b_z$ . Jeżeli teraz ponownie nastawimy wskaźnik na punkty A, B i C, odczytamy ich wysokości i przeprowadzimy poprzednio opisany rachunek, to zasadniczo tak  $\Delta b$  jak i  $\Delta c$  powinno być równe zero. W razie niezgodności, należy całą czynność powtórzyć jeszcze raz, względnie tak długo, aż odpowiadające sobie punkty będą posiadały żądane wysokości.

Jak przy każdym obliczaniu, tak i przy orientowaniu zdjęć fotogrametrycznych powinniśmy posiadać punkty kontrolne, aby wykryć błędy, które (wskutek obliczenia, czy też niedokładnego usunięcia paralaksy pionowej) mogły nam otrzymany model zniekształcić. Najlepiej postąpimy, używając do tego

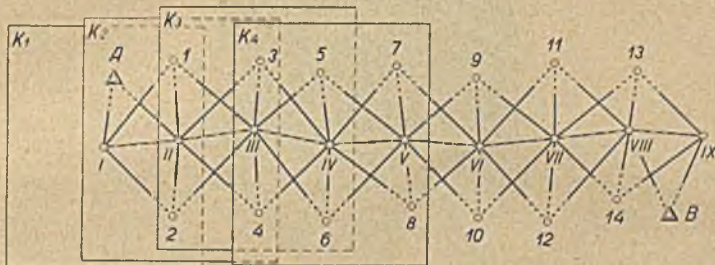


celu pięciu punktów dostosowania, z czego cztery w pobliżu naroży stereogramu oraz piąty w środku pola stereogramu.

Po dokładnym zorientowaniu zdjęć fotogrametrycznych przystępujemy do kreślenia planu sytuacyjnego, a następnie i wykreślenia warstwic.

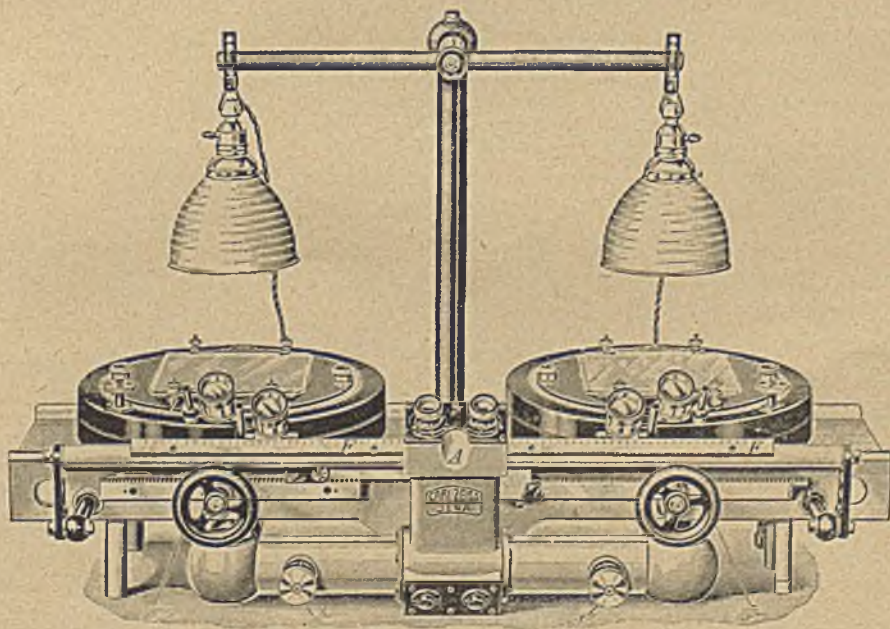
### § 8. Triangulacja fotogrametryczna

W niektórych przypadkach (gdy nie zależy nam na wielkiej dokładności i gdy stworzenie odpowiedniego podkładu geodezyjnego natrafia na znaczne trudności), możemy uzyskać punkty dostosowania przy pomocy tak zwanej



Rys. 307.

*triangulacji fotogrametrycznej.* Jeżeli triangulacja ta dotyczy tylko wyznaczenia sytuacji punktów dostosowania, wtedy mówimy o triangulacji radialnej, gdy zaś służy ona również do wyznaczenia wysokości punktów, wtedy nazywamy ją triangulacją przestrzenną. Obie wymagają przynajmniej 60%

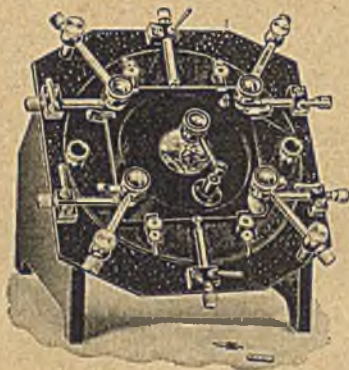


Rys. 308 a.



pokrycia zdjęć lotniczych. Większe znaczenie ma obecnie triangulacja radialna, gdyż jest łatwiejsza do opracowania, a uzyskane wyniki są dla niektórych celów zupełnie wystarczające.

Na rys. 307 przedstawiono zasadę triangulacji fotogrametrycznej, przy czym kąty w uwidocznionej sieci triangulacyjnej mierzymy na kliszach, posługując się tzw. *triangulatorem radialnym* (rys. 308 a i b).



Rys. 308 b.

---



## ROZDZIAŁ XVI

### TYCZENIE TRAS

#### § 1. Usytuowanie trasy w terenie

Trasą nazywamy oś projektu budowy inżynierskiej, wytyczoną na gruncie; w sytuacji poziomej trasa składa się z odcinków prostych i łuków (zazwyczaj kołowych), a często też i z tzw. krzywych przejściowych.

Wytyczenie bardzo krótkich tras w łatwym (tj. zupełnie płaskim) terenie może nastąpić w polu bez przygotowawczych prac domowych. Zmianę kierunku trasy mogą wywołać przekroczenia rzek, sytuacja domów, drogie grunta lub cmentarze, które musimy ominąć. Orientując się w tych warunkach, wytycza się nasamprzód kierunki prostych (otrzymując wielobok trasy), po czym wkłada się odpowiednie łuki (patrz § 3).

Trasa w terenie trudniejszym (pagórkowatym, podgórskim i górskim) wymaga uprzedniego zdjęcia terenu i sytuacji poziomej na pewnej szerokości (kilkuset metrów), opracowania położenia trasy na uzyskanym w ten sposób planie warstwicowym i wreszcie przeniesienia jej położenia z planu na grunt.

W tym celu sporządza się przed wyjściem w pole kopię kalkową trasy wraz z poligonami, które służyły do zdjęcia terenu; na kalce tej uwidacznia się wszystkie elementy, przy pomocy których można usytuować punkty prostych trasy względem boków poligonu zdjęcia. Będą to zatem punkty przecięcia się prostych trasy z bokami poligonu zdjęcia, względnie odcięte i rzędne punktów wierzchołkowych trasy lub innych jej punktów. Wszystkie potrzebne do usytuowania tych punktów długości powinny być na planie zmierzone, a rezultaty tych pomiarów wypisane na kalce. Punktów łuków nie przenosi się (z reguły) bezpośrednio na grunt. (O ile by punkty poligonowe zdjęcia w międzyczasie zaginęły, należy się posłużyć innymi punktami, uwidocznionymi na zdjęciu, choć sposób ten da nieco gorsze wyniki). Proste trasy należy wyznaczać przy pomocy większej ilości punktów i ich położenie na oko wyrównywać. Przy długich prostych, przechodzących przez przeszkody (góry, domy, lasy), wytycza się je prowizorycznie, zaczynając od ich najdłuższego widocznego odcinka, a po dojściu do ich końca, o ile występuje nadmierne zboczenie, poprawia się je (przesuwając odpowiednio pale). O ile nie wyzna-



czono położenia punktów wierzchołkowych trasy bezpośrednio, należy je w polu znaleźć przez przecięcie się dwóch wytyczonych kierunków. (Po wytyczeniu jednego kierunku zaznacza się jego położenie w okolicy punktu wierzchołkowego sznurem, a przy wytyczaniu drugiego kierunku pomocnik posuwa tyczkę w położeniu pionowym wzdłuż sznura).

## § 2. Tyczenie prostych

Jak wspomniano poprzednio, przenosi się z projektu na grunt prawie zawsze tylko punkty prostych trasy, otrzymując w ten sposób możliwość wytyczenia na terenie nasamprzód wieloboku trasy, w który następnie wkładamy łuki, zaznaczone w projekcie.

Postępowanie przy tyczeniu prostej instrumentem zależy głównie od dwu czynników: od widoczności jej punktów z punktu tyczenia i od jej długości.

Dla należytego zrozumienia sprawy, należy rozróżnić trzy przypadki:

a) punkt początkowy  $P$  i końcowy  $K$  prostej dostępne, celowa wzdłuż niej możliwa,

b) punkt końcowy  $K$  widoczny z p. początkowego  $P$ , lecz poszczególne punkty prostej, z wyjątkiem bliskich, niewidoczne,

c) celowa między punktami początkowym  $P$  i końcowym  $K$  niemożliwa.

a) *Celowa wzdłuż prostej możliwa.*

α) Długość prostej nie przekracza 2 km.

Postępowanie jest w tym przypadku podobne, jak przy tyczeniu prostej bez przyrządu.



Rys. 309.

Ustawiamy instrument (tj. jego oś) pionowo nad punktem początkowym  $P$ , zaś w punkcie końcowym  $K$  sygnał odpowiedni do długości prostej, tła i warunków atmosferycznych. Dla długości przekraczających 1 km, używa się jako sygnałów tarcz o polach naprzemian białych i czerwonych, umieszczonych na pionowo ustawionych żerdziach. Po zorientowaniu się, gdzie należy obrać punkty pośrednie (na miedzach, nieużytkach, pastwiskach itp.), przystępuje się do wytyczenia poszczególnych punktów od  $K$  aż do  $P$ . Inżynier, stojący przy przyrządzie, wprowadza płaszczyznę celową przyrządu do przekroju normalnego punktu  $P$ , zawierającego punkt  $K$  i znakami orientacyjnymi (ręką, chustką itp.) stara się wprowadzić tyczkę, trzymaną pionowo przez pomocnika w pobliżu punktu 1, do pokrycia się z nitką pionową w polu widzenia przyrządu.

Po ustaleniu punktu, pomocnik wstawia w miejsce tyczki pał, tzw. kierunkowy (około 1 m długi o średnicy około 12 cm) i wbija go w ziemię, starając się zachować przy wbijaniu kierunek pionowy. Następnie ustawia na głowie wbitego pała tyczkę, w celu wyszukania miejsca na gwóźdź (o śr. głowy



około 1 cm). Wreszcie, poznawszy po znakach inżyniera, że trafił na właściwe miejsce, wbija gwóźdź i stawia na nim pionowo tyczkę dla kontroli. (Aby pal podczas wbijania nie wyszedł z kierunku, dobrze jest umówić się z pomocnikiem, by po wbiciu pala do połowy, przerwał dalsze wbijanie i zależnie od znaków, dawanych mu przez inżyniera, ewentualnie poprawił dotychczasowy kierunek pala).

Odstępy między w ten sposób usytuowanymi palami kierunkowymi powinny wynosić z grubsza około 100 m.

β) Długość prostej przekracza 2 km.

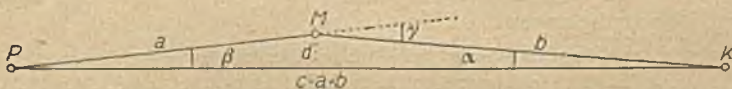
Gdy długość prostej wynosi od 2 — 5 km, porozumiewanie się z pomocnikiem jest bardzo utrudnione. W tym przypadku należy użyć jako sygnału w punkcie końcowym  $K$  wspomnianego sygnału tarczowego, lub 2 krótkich desek pobielonych, przybitych na krzyż do żerdzi sygnałowej. Wytyczenie pali kierunkowych można w tym przypadku skutecznie kilkoma sposobami.

1. Tyczenie rozpoczynamy od wyznaczenia położenia punktu  $M$ , dzielącego prostą na dwie mniej więcej równe części, po czym ustawiamy instrument nad punktem  $M$  i wytyczamy przy pomocy celowych do punktów  $P$  i  $K$  punkty pośrednie obu części. Proste długie można w ten sposób podzielić na 3 lub więcej części, tak aby tyczenie punktów pośrednich było łatwe.

2. Celując z punktu  $P$  do sygnału w  $K$ , wytyczamy odległy punkt  $M$  prostej (w którym jeszcze porozumienie się z pomocnikiem jest możliwe) oraz wszystkie punkty pośrednie. Następnie postępujemy tak samo w punkcie  $M$ , wytyczając również pewien odległy punkt  $N$  i punkty pośrednie między  $M$  i  $N$  itd. aż do końca.

Wada tej metody polega na korzystaniu przy dalszym tyczeniu z punktów  $M$  i  $N$ , które nie są przecież bezbłędnie wytyczone.

Wytyczenie to można skutecznie jednak i z bardzo wielką dokładnością, o ile poprawi się odpowiednie położenie punktów  $M$  i  $N$  sposobem, podanym pod 3.



Rys. 310.

3. Obieramy na oko mniej więcej pośrodku prostej  $P-K$  punkt  $M$  (rys. 310), po czym mierzymy teodolitem, ustawionym nad tym punktem, dokładnie kąt  $\gamma$ , przynajmniej w dwu położeniach lunety (lepiej kilkakrotnie). Znając w przybliżeniu długości  $a$  i  $b$ , możemy wyznaczyć odstęp  $d$  poprzecznego przesunięcia punktu do jego właściwego położenia na  $P-K$  ze związków:

$$\sin \alpha = \frac{d}{b} \quad \text{i} \quad \sin \alpha : \sin \gamma = a : c, \quad \text{więc} \quad \frac{d}{b} : \sin \gamma = \frac{a}{c},$$

zaś kładąc  $c = a + b$ :

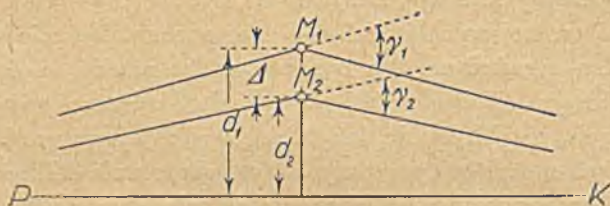
$$d = \frac{ab}{a+b} \sin \gamma. \quad (1)$$



Jeśli nie znamy odległości  $a$  i  $b$ , przesuamy się z punktu  $M_1$  do  $M_2$  (rys. 311) ku prostej  $PK$  (przesunięcie od strony kąta  $< 180^\circ$ ), a mierząc w punkcie  $M_2$  kąt  $\gamma_2$  otrzymujemy

$$\text{dla p. } M_1: \quad d_1 = \frac{ab}{a+b} \sin \gamma_1 = C \sin \gamma_1,$$

$$\text{dla p. } M_2: \quad d_2 = \frac{ab}{a+b} \sin \gamma_2 = C \sin \gamma_2.$$



Rys. 311.

$$\text{Ponieważ } M_1 M_2 = d_1 - d_2 = \Delta = C (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2),$$

a

$$d_2 : (d_1 - d_2) = C \sin \gamma_2 : C (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2),$$

przeto

$$d_2 = \frac{\Delta \sin \gamma_2}{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2}. \quad (2)$$

Dla małych kątów  $\gamma$  możemy zatem przyjąć

$$d_2 = \Delta \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}. \quad (2a)$$

W przypadku, gdybyśmy obrali p.  $M_2$  po przeciwnej stronie prostej  $PK$  będzie  $\gamma_2 < 0$ , a odstęp  $d_2$  ujemny.

$\gamma$ ) Długość prostej wynosi około 10 km.

Przy wytyczaniu tak długich prostych staramy się zastosować jeden ze sposobów, podanych pod  $\beta$ ). O ile jednak warunki są bardzo niekorzystne (np. panująca w okolicy mgła), wszystkie dotychczas omówione sposoby mogą zawieść, a wtedy jesteśmy zmuszeni tyczyć na sygnały świetlne, ustawiane w odpowiednich punktach, zatem w dzień na heliotropy, zaś w nocy na odpowiednio silne światła sztuczne. Ze względu na utrudnione porozumiewanie się z pomocnikiem, należy tą metodą wytyczyć tylko kilka odpowiednio na prostej rozmieszczonych punktów tak, aby można było potem ich użyć do wytyczenia odcinków między nimi zawartych (jednym ze sposobów, opisanych poprzednio).

Tycząc w nocy, posługujemy się specjalnymi instrumentami, opatrzonymi w urządzenia do oświetlenia nitek siatki, lub umieszczamy przed obiektywem zwierciadło w kształcie pierścienia eliptycznego, które nie przeszkadzając celowaniu oświetla odpowiednio nitki siatki (przez odbicie światła latarni

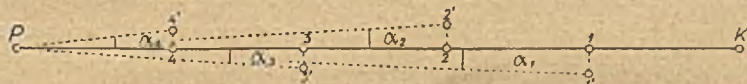


umieszczonej z boku). W braku wspomnianych urządzeń, można zastąpić zwierciadło odpowiednio wyciętym grubym papierem.

Ponieważ dokładne wytyczenie w nocy nawet tylko kilku punktów nastęrcza poważne trudności, postąpimy lepiej, ustawiając światło zamiast na punktach właściwych 1, 2, 3, 4, na punktach 1', 2', 3', 4', znajdujących się blisko prostej i mierząc bardzo dokładnie tylko kąty odchyłeń od prostej: 1'PK, 2'PK itd., co jest znacznie łatwiejszym zadaniem (rys. 312).

Znając odległości  $d$  punktów wytyczonych od instrumentu (z dokładnością kilku metrów) i kąty odchyłeń  $\alpha$ , otrzymujemy  $\Delta$ , wartości poprzecznych przesunięć punktów w odpowiednim kierunku, ze wzoru:

$$\Delta_i = d_i \frac{\alpha_i}{\rho}. \quad (3)$$



Rys. 312.

Można także posłużyć się siecią triangulacyjną, jak pod c),  $\gamma$ ).

b) Punkt końcowy widoczny z punktu początkowego; punkty pośrednie (z wyjątkiem bliskich) niewidoczne.

W tym przypadku mamy wprawdzie dany kierunek prostej, jednak nie możemy prostej wytyczyć od razu na całej jej długości.

Wytyczamy zatem prostą z punktu początkowego  $P$  aż do najdalszego widocznego punktu pośredniego  $M$ .

a) Jeśli z punktu  $M$  są oba punkty, początkowy  $P$  i końcowy  $K$  widoczne, mierzy się w punkcie  $M$  kąt  $KMP$ , a gdy ten przy kilkakrotnym pomiarze wypadł równy  $180^\circ$  (lub różnica od  $180^\circ$  jest znikomo mała), tyczy się dalej z  $M$  do  $K$ .

Gdy otrzymano w  $M$  większą różnicę od  $180^\circ$ , należy tak punkt  $M$  (patrz  $\beta$ , 3), jak i poprzednio wytyczone punkty odpowiednio przesunąć.

$\beta$ ) Jeśli z punktu  $M$  nie widać sygnału punktu  $K$ , trzeba po wycelowaniu do punktu  $P$  lunetę przerzucić, i znów wytyczyć jak najdalej leżący punkt  $N$ .

Ponieważ przy przerzucaniu lunety popelnia się podwójny błąd kolimacyjny, przeto nie należy zadowolili się wytyczeniem punktu w jednym położeniu lunety, lecz po prowizorycznym oznaczeniu wytyczonego punktu  $N'$ , wycelować po raz wtóry do punktu  $P$  w drugim położeniu lunety i po przerzuceniu otrzymać obok punktu  $N'$  punkt  $N''$ . Dzieląc odstęp ten na połowę, otrzymuje się właściwy punkt  $N$ .

Chcąc przy tej sposobności usunąć błąd kolimacyjny postępuje się, jak podano w § 2, c, 3 rozdziału VII.

W ten sposób postępując przy następnych punktach, dochodzi się ostatecznie do pewnego punktu  $R$  prostej, z którego widać punkt końcowy  $K$ . Jeśli powtarzając te same czynności na punkcie  $R$  (względem punktu przedostatniego) otrzymamy zamiast  $K$  jakiś bliski punkt  $K_1$ , to o ile punktu  $K$

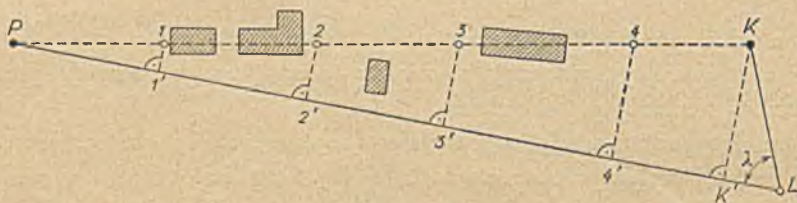


nie można przesunąć, ze względu na jego ważność lub stałość, należy przesunąć wytyczone punkty prostej proporcjonalnie do ich odległości od punktu początkowego; natomiast, o ile zmiana położenia punktu końcowego  $K$  jest możliwa, przesuwa się go do punktu  $K_1$ , aby nie tracić czasu na poprawianie wytyczonej linii. (Nie można jednak tego zrobić, o ile punkt  $K$  był już użyty do wytyczenia dalszej części trasy).

Zamiast przy tyczeniu przerzucać lunetę, można także przedłużać prostą, ustawiając się zawsze na przedostatnim punkcie, tj. mając przed sobą przynajmniej jeden punkt wytyczony. Sposób ten jest jednak mało dokładny i nie powinien być użyty przy definitywnym tyczeniu prostej.

c) *Celowa między punktami  $P$  i  $K$  jest niemożliwa.* (Tyczenie drogą pośrednią).

α) Jeśli nie można celować z  $P$  do  $K$  (i odwrotnie) z powodu przeszkody, zajmującej niezbyt wiele miejsca w kierunku poprzecznym, wówczas postąpimy najprościej, tycząc z punktu  $P$  prostą  $P-L$ , przechodzącą tuż obok przeszkody, jak to uwidoczniło na rys. 313.



Rys. 313.

Po zmierzeniu kąta  $\lambda$  na stanowisku  $L$  i długości  $LK$ , obliczamy długość  $LK' = LK \cdot \cos \lambda$  i  $K'K = LK \cdot \sin \lambda$ .

Następnie mierzymy wszystkie odcinki prostej  $PK'$ , a na prostopadłych w punktach pośrednich  $1', 2', \dots$  odmierzamy odcinki  $1'1 = \frac{K'K}{PK'}$ ,  $P1'$ ,  $2'2 = \frac{K'K}{PK'}$ ,  $P2'$  itd. (Dłuższe odcinki należy wytyczać instrumentem).

β) O ile przeszkoda rozciąga się w kierunku poprzecznym na znacznej przestrzeni, sposób poprzednio podany zawodzi; w tym przypadku należy założyć między punktami  $P$  i  $K$  poligon, który dla kontroli można zamknąć (rys. 314). Przyjąwszy początek układu w  $P$ , a za oś  $x$ -ów kierunek pierwszego boku poligonu, otrzymujemy kąt kierunkowy  $\alpha_{P,K}$  z wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha_{P,K} = \frac{y_K}{x_K}.$$

(Kąt ten jest potrzebny dla wytyczenia części początkowej prostej, od punktu  $P$ ).

W punkcie  $K$  należy wytyczyć prostą pod kątem  $\varphi_K$ , który otrzymamy z różnicy kątów kierunkowych (azymutów)  $\varphi_K = \alpha_{K,I} - \alpha_{K,P}$ , przy czym

$$\operatorname{tg} \alpha_{K,I} = \frac{y_I - y_K}{x_I - x_K} \quad (I \text{ punkt przedostatni poligonu } P-A-C-I-K).$$



Aby prosta  $PK$  wytyczyć łatwiej i dokładniej, staramy się uzyskać kilka jej punktów pośrednich, jak to często ma miejsce, gdy przeszkodę stanowi las, w którym istnieją linie leśne (p. rys. 314).

Dla wyznaczenia punktu pośredniego prostej, np.  $M$ , posłużymy się dwoma związkami:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A),$$

i

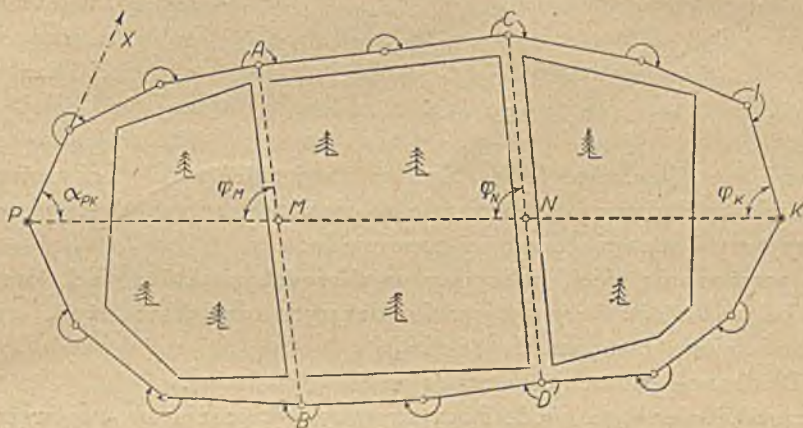
$$y = \frac{y_K}{x_K} x;$$

zatem

$$x_M = \frac{(y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A}{(y_B - y_A)x_K - (x_B - x_A)y_K} x_K, \quad y_M = \frac{(y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A}{(y_B - y_A)x_K - (x_B - x_A)y_K} y_K, \quad (4)$$

lub

$$x_M = \frac{x_A \operatorname{tg} \alpha_{A,B} - y_A}{x_K \operatorname{tg} \alpha_{A,B} - y_K} x_K, \quad y_M = \frac{x_A \operatorname{tg} \alpha_{A,B} - y_A}{x_K \operatorname{tg} \alpha_{A,B} - y_K} y_K. \quad (5)$$



Rys. 314.

Szczegółowe rozwiązanie tego zadania (wraz z pewnymi uproszczeniami rachunkowymi) podano w rozdz. IX, § 8 (str. 261).

Długość  $d_{A,M}$  i kąt  $\varphi_M$  obliczamy ze związków:

$$d_{A,M} = \frac{x_M - x_A}{\cos \alpha_{A,M}} = \frac{y_M - y_A}{\sin \alpha_{A,M}}, \quad (6)$$

przy czym

$$\alpha_{A,M} = \alpha_{A,B},$$

oraz

$$\varphi_M = \alpha_{M,A} - \alpha_{K,P} = \alpha_{B,A} - \alpha_{K,P}. \quad (6a)$$

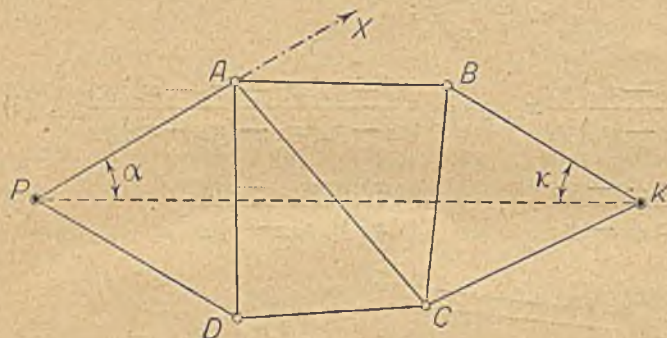
Następne czynności polegają na wytyczeniu poszczególnych odcinków  $P-M$ ,  $M-N$  i  $N-K$  z obu punktów końcowych. Wreszcie po wytyczeniu całkowitej prostej mierzymy na punktach znajdujących się mniej więcej w środku odcinków kąty, które powinny wynosić  $180^\circ$ . W razie większych różnic można obliczyć odpowiednie przesunięcia poprzeczne środkowych punktów.



Jeżeli długość poligonu  $P-K$  przekracza 1200 m (§ 12 rozdziału IX), korzystniej będzie z reguły tyczyć prostą  $P-K$  bezpośrednio przez las ciągiem busolowym o krótkich bokach (20 m), a po dojściu do punktu  $K$ , obliczyć poprzeczne przesunięcia poszczególnych punktów (tak, aby leżały na prostej).

γ) Tyczenie prostej w tunelu.

Jeżeli jest to tylko możliwe, wytyczamy nasamprzód prostą na terenie, położonym ponad tunelem, najlepiej sposobem, podanym pod β, 3, str. 401 (wytyczenie naziemne). Następnie, mając już ustalony kierunek osi trasy, tyczymy



Rys. 315.

ją przy wykonywaniu sztolni z obu punktów  $P$  i  $K$  aż do przebicia. Wewnątrz sztolni należy używać sygnałów świetlnych.

Wytyczenie osi dłuższych tunelów wymaga zazwyczaj założenia sieci triangulacyjnej (najlepiej łańcucha trójkątów) między

punktami  $P$  i  $K$  (p. rys. 315). Sieć tę nawiązujemy do sieci państwowej lub częściej zakładamy ją jako niezależną sieć lokalną; sposób drugi wymaga pomiaru bazy i odpowiedniego jej rozwinięcia.

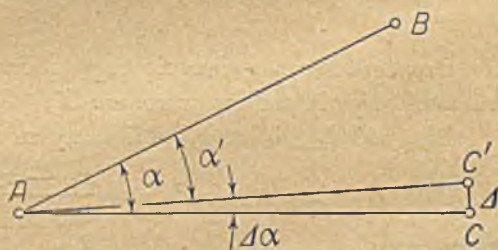
Po wyrównaniu sieci, obliczamy współrzędne punktów sieci, oraz kąty  $\alpha$  i  $\kappa$ , jak pod c), β). Przy wytyczaniu dłuższych tunelów należy uwzględnić odchylenia pionu na punktach  $P$  i  $K$ .<sup>1)</sup>

δ) Dokładne wytyczenie kierunku pod danym kątem.

Z zagadnieniem tym spotkaliśmy się przy wytyczaniu prostej przez przeszkodę (c, β), oraz przy tyczeniu tunelów (c, γ), przy czym zaznaczyć należy, że jest ono szczególnie ważne przy wytyczaniu osi tunelów.

Mając wytyczyć kierunek  $AC$ , odchylony od kierunku  $AB$  o kąt  $\alpha$  (obliczony z triangulacji lub poligonu), wytyczamy początkowo kierunek  $AC'$  w przybliżeniu (przy użyciu instrumentu w jednym położeniu lunety i jednego noniusza, wzgl. mikroskopu). Kierunek  $AC'$ , wytyczony w ten sposób będzie odchylony od kierunku  $AB$  o kąt  $\alpha'$ , z reguły nieco różny od kąta  $\alpha$  (rys. 316).

Kąt  $\alpha'$  można jednak zmierzyć bardzo dokładnie (wielokrotnie na różnych



Rys. 316.

<sup>1)</sup> Patrz Z. f. V. 1905 str. 578-579 (Simplon), oraz Schweiz. Bauzeitung 1911, str. 109 i z przerwami dalsze do str. 234 (Lotschberg).



częściach limbusu), wobec czego różnica

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha'$$

jest dokładnie znana, a tym samym można od prowizorycznie wytyczonego punktu  $C'$  odmierzyć w odpowiednim kierunku odstęp:

$$C'C = AC' \frac{\Delta \alpha}{\rho}, \quad (7)$$

a następnie sprawdzić wytyczony kierunek przez ponowny pomiar kąta  $BAC$ .

### § 3. Tyczenie łuków kołowych. Uwagi wstępne

Tyczenie łuków kołowych wykonujemy w dwu etapach; pierwszy z nich stanowi wytyczenie głównych punktów łuku, drugi wytyczenie punktów pośrednich łuku.

Punktami głównymi łuku są z reguły trzy jego punkty: początkowy  $P$ , środkowy  $S$  i końcowy  $K$  (p. rys. 317); natomiast w przypadkach, w których odcinki  $PS$  i  $SK$  wypadłyby zbyt długie dla wytyczenia punktów pośrednich, dzielimy łuk na dwie połowy, uzyskując dla obydwu pól łuków razem pięć punktów głównych. Ponieważ przystępujemy do tyczenia łuku już po wytyczeniu elementów prostych trasy (tj. mając na gruncie zaznaczone kierunki styczne do każdego łuku w jego punkcie początkowym i końcowym), a z projektu znamy promienie łuków, przeto dla usytuowania łuku między elementami prostymi trasy, czyli tzw. stycznymi, wystarczy pomierzyć w sposób bezpośredni lub pośredni jeszcze tylko kąt  $\beta$ , zawarty między nimi, tzw. kąt wierzchołkowy.

Wobec tego, że bezpośredni pomiar kąta  $\beta$  można skutecznie tylko na punkcie przecięcia się wspomnianych stycznych, tj. na punkcie wierzchołkowym  $W$ , który nie zawsze jest dostępny, przeto należy omówić dwa przypadki wyznaczenia głównych punktów łuku, w zależności od tego, czy punkt wierzchołkowy jest dostępny, czy też nie.

Poza tym omówimy jeszcze ogólnie przypadek, gdy w miejscu punktów głównych znajdują się przeszkody.

### § 4. Tyczenie głównych punktów łuku

a) Punkt wierzchołkowy  $W$  dostępny.

W tym przypadku ustawiamy instrument w punkcie  $W$  i mierzymy bezpośrednio kąt wierzchołkowy  $\beta$ , który uzupełnia kąt środkowy  $\alpha$  do  $180^\circ$ , po czym obliczamy wszystkie elementy, wyznaczające położenie punktów głównych (rys. 317):

$$WP = WK = s = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad (8)$$

$$WS = WO - r = w = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} - r = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \quad (9)$$







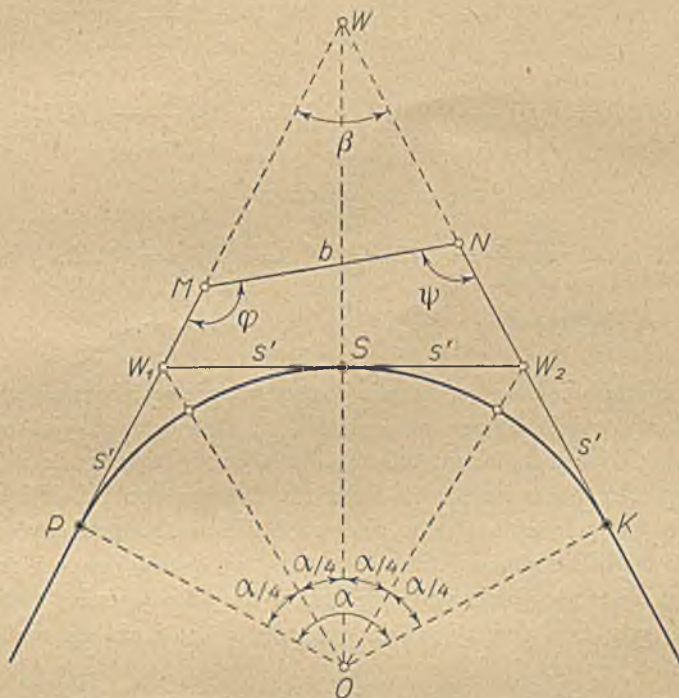
w punkcie  $S$  i zmierzeniu kątów  $WSP$  i  $WSK$ , które powinny wynosić po  $90^\circ + \alpha/4$ . (Ze względu na błędy kąta  $\beta$  oraz mierzonych długości  $s$  i  $w$ , kontrola ta nie będzie zupełnie ściśle spełniona).

Długość w ten sposób wytyczonego łuku od  $P$  do  $K$  wynosi:

$$l = r \cdot \alpha = r \frac{\alpha^0}{\rho^0} = r \pi \frac{\alpha^0}{180^0}, \quad (14)$$

zaś błąd obliczonego łuku wzrasta proporcjonalnie do promienia  $r$  i wynosi:

$$\Delta l = r \frac{\Delta \alpha'}{\rho'} = \frac{r}{3438'} \Delta \alpha' \quad (15)$$



Rys. 318.

(przy czym  $\Delta \alpha'$  należy wstawić w minutach katowych), zatem gdy  $r = 3500$  m, a  $\Delta \alpha' = 1'$ , błąd obliczonego łuku przekracza 1 m. Natomiast błąd długości stycznych  $WP$  i  $WK$ , obliczonych wzorem (8) wynosi:

$$\Delta s = \frac{r}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{\Delta \alpha'}{\rho'} = \frac{\Delta l}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (16)$$

wzrasta zatem bardzo szybko dla kątów  $\alpha$  bliskich  $180^\circ$ . Dla orientacji podajemy wartości  $\Delta s$  dla niektórych kątów  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha = 30^\circ, \Delta s = 0,536 \Delta l; \quad \alpha = 60^\circ, \Delta s = 0,667 \Delta l; \quad \alpha = 90^\circ, \Delta s = \Delta l; \\ \alpha = 120^\circ, \Delta s = 2 \Delta l; \quad \alpha = 150^\circ, \Delta s = 11,83 \Delta l. \end{aligned} \quad (17)$$



Wszystkie potrzebne do tyczenia elementy znajdujemy w specjalnych tablicach dla argumentów  $\beta$ , względnie  $\alpha$ <sup>1)</sup>.

$\beta$ ) Punkt wierzchołkowy  $W$  niedostępny.

W tym przypadku należy zmierzyć kąt  $\beta$  w sposób pośredni, a dla wyznaczenia punktów  $P$  i  $K$  obrać na stycznych dwa inne punkty ( $M, N$ ), za pośrednictwem których możnaby wytyczyć punkty  $P$  i  $K$ , a następnie i  $S$ .

Najprościej postąpimy, obierając na stycznych punkty  $M$  i  $N$  tak, aby prostą  $MN = b$  oraz kąty  $\varphi$  i  $\psi$  (rys. 318) można było dokładnie zmierzyć.

Następnie obliczamy

$$\beta = \varphi + \psi - 180^\circ, \quad (18)$$

$$WM = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta}, \quad WN = b \frac{\sin \varphi}{\sin \beta},$$

a ostatecznie

$$MP = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - WM, \quad NK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - WN. \quad (19)$$

Dla uzyskania punktu  $S$  obliczamy jeszcze

$$s' = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = PW_1 = W_1S = SW_2 = W_2K, \quad (20)$$

przy czym kontrolę stanowi:

$$W_1W_2 = 2s'. \quad (21)$$

Jeśli z jakichkolwiek powodów nie możemy zmierzyć bezpośrednio prostej  $MN$ , zakładamy w jej miejsce poligon  $M-N$ , a nawet, w wyjątkowych przypadkach, małą sieć triangulacyjną. Ostatecznie da się to zagadnienie sprowadzić do przypadku, omawianego na początku tego ustępu ( $M, N$  i kąty  $\varphi$  i  $\psi$ ).

$\gamma$ ) Jednego lub więcej punktów głównych nie można oznaczyć na terenie.

Ponieważ dokładne omówienie poruszanej w tytule sprawy wymagałoby zbyt wiele miejsca, ograniczymy się tylko do zagadnienia, występującego w przypadku, gdy dwa punkty są niedostępne, a kąt  $\beta$  nie da się bezpośrednio zmierzyć.

Załóżmy, że jeden z punktów głównych, np.  $P$ , jest dostępny (rys. 319). W tym przypadku zmierzmy kąt  $\beta$  pośrednio, jak pod  $\beta$ ), przez pomiar kątów  $\varphi$  i  $\psi$  na odpowiednio obranych stanowiskach  $M$  i  $N$ . Znając po rozwiązaniu trójkąta  $MWN$  długość  $MW$  obliczamy:

$$MP = MW - r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (22)$$

$$MW_1 = MW - r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \sec \frac{\alpha}{2}, \quad (23)$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad (24)$$

<sup>1)</sup> Z tablic, wydanych z opisem w języku polskim, należy wymienić: Prof. K. Ski-biński, Tyczenie tras, cz. II.







wiada łukowi  $l$ . Ponieważ kąt obwodowy będzie w tym przypadku równy  $\varphi$ , przeto ustawivszy instrument w punkcie  $A$ , odmierzamy na kierunku odchylonym od stycznej o kąt  $\varphi$  cięciwę  $d$ , przy czym

$$d = 2 r \sin \varphi, \quad (27)$$

otrzymując punkt 1, odległy od początku o długość  $l$ .

Zamiast obliczać  $d$  z wzoru (27), można wyznaczyć różnicę  $l - d$ , na podstawie wzorów przybliżonych:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3, \quad d = 2 r \varphi - r \frac{\varphi^3}{3}, \quad (28)$$

oraz związku

$$\varphi = \frac{l}{2 r}, \quad (29)$$

otrzymując:

$$d = l - \frac{l^3}{24 r^2}, \quad (30)$$

względnie

$$l - d = \frac{l}{24} \left( \frac{l}{r} \right)^2. \quad (31)$$

Z wzoru (31) możemy wyznaczyć:

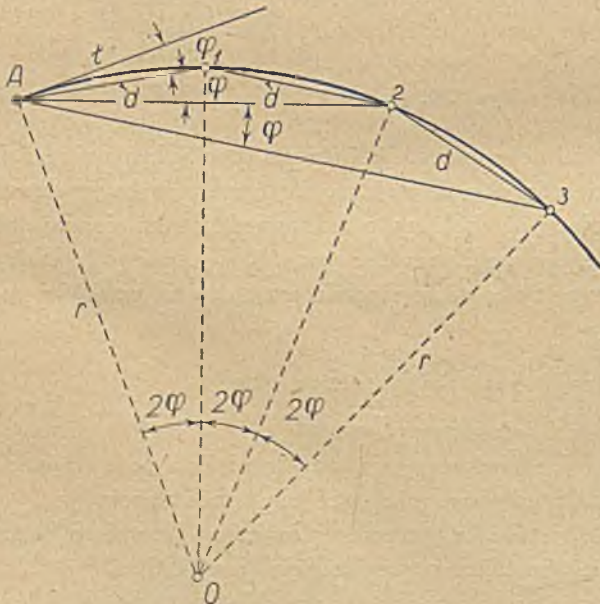
$$r = l \sqrt{\frac{l}{24(l-d)}}; \quad (32)$$

przyjmując przy pomiarze różnicę  $l - d = 0,005$  m jako praktycznie zaniedbywalną, widzimy, że dla

$l = 10$  m można położyć  $l = d$ , gdy  $r = 100$  m, zaś dla  $l = 20$  m dopiero, gdy  $r = 275$  m.

Dalsze punkty łuku w odstępach  $l$  wyznaczamy, tyjąc z punktu  $A$  kierunki odchylone od stycznej o  $2\varphi$ ,  $3\varphi$  itd. i odmierzając do przecięcia się z nimi z ostatnio wytyczonych punktów długości  $d$ . (Ostatnią czynność wykonują odpowiednio wyuczeni pomocnicy).

W ten sposób otrzymujemy kolejno punkty 2, 3, ... Jeżeli wypadnie podczas tyczenia zmienić odcinek  $l$  na  $l'$



Rys. 320.



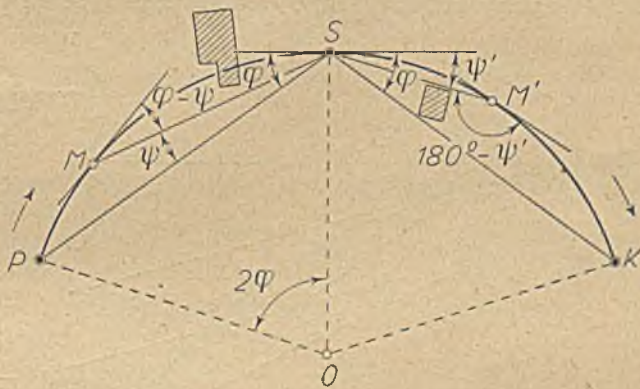
któremu odpowiadać będzie kąt środkowy  $2\varphi'$ , wówczas trzeba będzie od ostatnio wytyczonego kierunku odmierzyć kąt  $\varphi'$  (zamiast poprzedniego  $\varphi$ ).

Zauważyć należy, że najkorzystniej jest tyczyć poszczególne punkty łuku ku sobie, tj. poczynając od punktów głównych, na których nie znajduje się instrument, do stanowiska instrumentu. W tym przypadku błędy przy tyczeniu kompensują się do pewnego stopnia; błąd pomiaru długości wzrasta, natomiast maleje wpływ błędu kierunku. Długość w ten sposób wytyczonego łuku musi się zgodzić na kilka cm z długością, obliczoną z wzoru (14). Najkorzystniej jest zatem tyczyć łuk ze stanowiska  $S$ , mianowicie od  $P$  do  $S$ , a następnie od  $K$  do  $S$ .

W przypadku niemożności wytyczenia pewnego punktu, z powodu przeszkody w celowej, ustawiamy instrument na ostatnio wytyczonym punkcie ( $M$ ), a po odtworzeniu na nim kierunku stycznej, tyczymy dalej, tak jakbyśmy stali na punkcie głównym.

Na rys. 321 przedstawiono na lewej części łuku tyczenie ku instrumentowi, ustawionemu w  $S$ , zaś na prawej części tyczenie od instrumentu.

W przypadku pierwszym należy dla uzyskania w punkcie  $M$  stycznej (zwróconej ku  $S$ ) odchylić celową z  $M$  do  $S$  o kąt  $\varphi - \psi$ , o ile kierunek  $SP$  był odchylony od stycznej w  $S$  o kąt  $\varphi$ , a łukowi  $PM$  odpowiada kąt obwodowy  $\psi$ ; w przypadku drugim kąt, zawarty między kierunkiem  $M'S$  a styczną w  $M'$  (zwróconą do  $K$ ) wynosi  $180^\circ - \psi'$ , jeżeli łukowi  $SM'$  odpowiadał kąt obwodowy  $\psi'$ .



Rys. 321.

Metoda biegunowa

jest szczególnie chętnie

używana w terenie płaskim i przejrzystym, ze względu na dość znaczną dokładność oraz szybkość wykonania.

Jeżeli z żadnego z punktów głównych nie możemy widzieć większej partii łuku, trzeba by bardzo często przestawiać instrument. W tym przypadku należy jako stanowisko obrać dowolny punkt, z którego widać cały łuk, a tyczenie przeprowadzić wedle sposobu, opisanego przez autora<sup>1)</sup>, który podajemy w skróceniu.

Pierwszą czynnością w tym przypadku jest ustalenie położenia, obranego jako stanowisko przyrządu, punktu  $O'$  względem jednego z głównych punktów łuku  $P$  i stycznej w nim poprowadzonej.

<sup>1)</sup> K. Weigel, Przyczynek do tyczenia łuków kołowych metodą obwodową. Księga pamiątkowa ku czci Prof. Dr. h. c. Thulliego. Lwów 1932.







z punktu  $N$ , w którym prostopadła wystawiona w  $O'$  do  $O'P'$  przecina obwód koła. Odległość

$$O'N = \sqrt{e(2r - e)}, \quad (35)$$

a długość łuku  $P'N = r \frac{\pi}{180^\circ} \alpha_0$ , przy czym

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{O'N}{r - e}. \quad (36)$$

Biorąc tedy jakąkolwiek długość, np.  $P'A$ , wyznaczamy dla niej z tablic (jak normalnie) kąt środkowy  $\alpha$ , względnie obwodowy  $\frac{\alpha}{2}$ , a następnie obliczamy różnicę  $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha'}{2}$  przy pomocy rachunkowo łatwego wzoru:

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha'}{2} \right) = 2 \frac{r}{e} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (37)$$

przy czym  $\frac{\alpha'}{2}$  należy, uwzględniając znak, odmierzyć od kierunku  $O'N$ , prostopadłego do  $O'P'$  (jak to uwidoczniło na rys. 322).

Stacjonowanie łuku przebiega zatem od punktu  $P'$ , zaś tyczenie od kierunku  $O'N$  (dla którego  $\frac{\alpha'}{2} = 0$ ).

Dla zbadania dokładności powyższej metody w porównaniu z normalną, należy utworzyć pochodną  $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$ , względnie jej odwrotność  $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ ; pochodna ta pociągnie nas, jaki wpływ będzie miał błąd, popełniony przy odcięciu kąta  $\frac{\alpha'}{2}$  na kąt  $\frac{\alpha}{2}$  (którybyśmy wytyczyli wprost metodą normalną).

Różniczkując wzór (37) otrzymujemy:

$$\frac{d\alpha - d\alpha'}{\sin^2 \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right)} = \frac{2r - e}{e} \frac{d\alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{skąd} \quad d\alpha' = \left[ 1 + \frac{2r - e}{e} \frac{\sin^2 \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right] d\alpha, \quad (38)$$

a ponieważ

$$1 : \sin^2 \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) = 1 + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) = 1 + \left( \frac{2r - e}{e} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$



przeto ostatecznie:

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 1 + \frac{\frac{2r-e}{e}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{2r-e}{e}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (39)$$

Poniżej zestawiono wartości  $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$  i  $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$  dla kilku specjalnych wartości  $\frac{\alpha}{2}$ .

Okazuje się tedy, że — o ile popelnimy przy wytyczaniu kąta  $\frac{\alpha'}{2}$  błąd  $d\alpha'$  — powstanie przez to w kącie obwodowym (którybyśmy wytyczyli metodą normalną) błąd  $d\alpha$ , wynoszący dla  $\frac{\alpha}{2}$  bliskiego zeru ...  $\frac{e}{2r} d\alpha'$ , dla  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2}$  ...  $1/2 d\alpha'$ , zaś dla  $\frac{\alpha}{2}$  bliskiego  $90^\circ$ , błąd  $d\alpha = \left(1 - \frac{e}{2r}\right) d\alpha'$ .

$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha'}{2}$	$\frac{\alpha - \alpha'}{2}$	$\frac{d\alpha'}{d\alpha}$	$\frac{d\alpha}{d\alpha'}$	U W A G Ā
$0^\circ$	$270^\circ =$ $-90^\circ$	$90^\circ$	$\frac{2r}{e}$	$\frac{e}{2r}$	$\alpha_0$ jest kątem środkowym dla łuku $P'N$
$\frac{\alpha_0}{2}$	$0^\circ$	$\frac{\alpha_0}{2}$	2	$1/2$	
$90^\circ$	$90^\circ$	$0^\circ$	$\frac{2r-e}{2r}$	$1 - \frac{e}{2r}$	

Metoda ta jest zatem korzystniejsza od metody normalnej, o ile tylko kierunku  $P'N$  wytyczono dokładnie, co wymaga, aby długość  $r_0$  wynosiła przynajmniej około 20 do 30 m. W praktyce da się to osiągnąć i wówczas, gdy punkt  $P$  nie jest dostatecznie oddalony od punktu  $O'$  przez nawiązanie się kierunkowe na punkcie  $O'$  nie do kierunku  $O'P$ , ale do kierunku, łączącego  $O'$  z dość odległym punktem kierunkowym na stycznej w  $P$ . (Naturalnie, że wymaga to pewnych dodatkowych obliczeń, jednak stosunkowo bardzo prostych).

Nakoniec zaznaczam, że kąty należy liczyć w kierunku posuwania się wskazówek zegara, aby podane wzory były zawsze ważne.

## 2. Metoda rzędnych i odciętych.

### a) Tyczenie od stycznej.

Znając w dowolnym punkcie łuku  $A$  kierunek stycznej, obieramy go jako oś odciętych ( $X$ ), a punkt  $A$  jako początek układu (rys. 323). Wobec czego z równania koła, stycznego do obranej osi w punkcie  $A$ , otrzymujemy związek dla rzędnych  $y$ :

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad (40)$$



lub w przybliżeniu

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y'^2}{2r}, \quad (41)$$

przy czym

$$y' = \frac{x^2}{2r}. \quad (41a)$$

Wartość  $y$  znajdujemy dla argumentów  $r$  i  $x$  w tablicach.

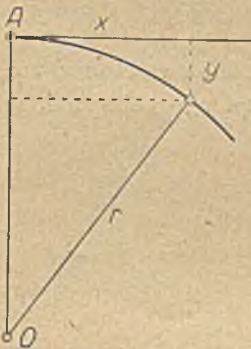
Zaniedbując wielkości poniżej 5 mm, otrzymujemy kładąc:

$$\frac{y'^2}{2r} = \frac{x^4}{8r^3} = 0,004 \text{ m},$$

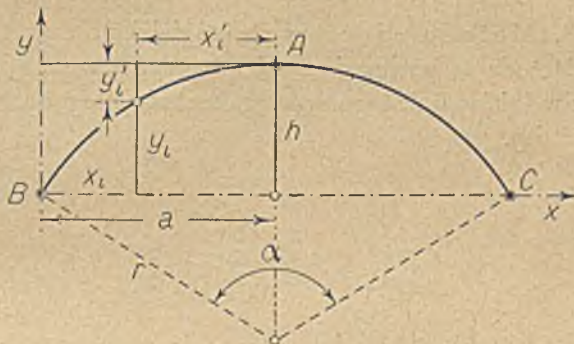
$$x = \sqrt[4]{0,032 r^3}; \quad (42)$$

wobec tego można obliczyć maksymalne wielkości odciętych  $x$  w metrach, które dla różnych promieni  $r$  dostarczą rzędne  $y$  z błędem mniejszym niż 5 mm, przy użyciu wzoru przybliżonego:

$$y' = \frac{x^2}{2r}.$$



Rys. 323.



Rys. 324.

$r =$	10	20	30	40	50	100	500	1000 m
$x_{\max} =$	2,39	4,00	5,42	6,73	7,95	13,38	44,72	75,65 m;

dla  $r$  większych —  $x_{\max}$  wzrasta prawie liniowo, ze względu na to, że

$$\frac{dx}{dr} = \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{0,032}{r}} = \frac{0,317}{\sqrt[4]{r}}. \quad (42a)$$

Metody tej można użyć do wyznaczenia położenia punktów głównych (względnie punktów, mających je zastąpić); w tym przypadku musimy kąt prosty wyznaczyć instrumentem (teodolitem).

β) Tyczenie od cięciwy.

Jeżeli nie można tyczyć od stycznej, przeprowadzamy tyczenie od cięciwy (rys. 324).







oraz prostopadle do niej

$$2' . 2 = d \sin 2 \varphi. \quad (46)$$

Dalsze punkty tyczymy jak punkt 2.

Zamiast tego sposobu można postąpić nieco inaczej przy tyczeniu punktu 2 (rys. 326), mianowicie przedłużyć  $A . 1$  o długość  $d$  do punktu  $2'$ , obliczyć długość  $e = 2 d \sin \varphi$ , a punkt 2 znaleźć przez przecięcie się łuków, zakreślonych promieniami  $e$  i  $d$  z punktów  $2'$  i 1. Dalsze punkty tyczymy tak samo.

β) Sposób postępowania bez teodolitu.

Jeżeli nie mamy przyrządu kątomierniczego, musimy pierwszy punkt łuku 1 wytyczyć przy pomocy rzędnej i odciętej; zatem dla obranego  $t$  i  $r$  obliczyć kąt obwodowy  $\varphi$  i cięciwę  $d$ , po czym współrzędne punktu 1 będą:

$$x_1 = d \cos \varphi, \quad y_1 = d \sin \varphi. \quad (48)$$

Następne punkty jak poprzednio.

#### 4. Metoda kątów stałych.

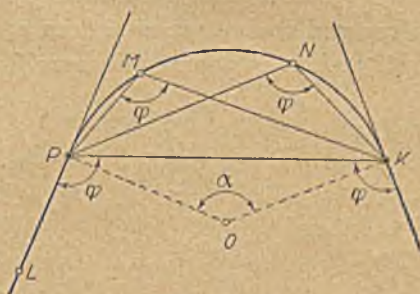
Niech kierunek stycznej w p.  $P$  (skierowany od wierzchołka  $W$ ) zawiera z kierunkiem cięciwy do p.  $K$  kąt  $\varphi$  (rys. 327), to wówczas w każdym punkcie łuku kołowego  $M, N, \dots$  przetną się kierunki poprowadzone przez punkty  $P$  i  $K$  pod kątem  $\varphi$ . (Łuk jako miejsce geometryczne przecięć kierunków z  $P$  i  $K$  pod stałym kątem  $\varphi$ ).

Na podstawie powyższego twierdzenia można wytyczyć łuk kołowy, o ile potrafimy w polu wyznaczyć punkty przecięcia się pod kątem  $\varphi$  kierunków z punktów  $P$  i  $K$ .

Przyrząd, którym tę czynność wykonujemy, nazywamy *arkografem* (przyrząd do rysowania łuku).

Arkograf składa się, podobnie jak krzyż pryzmatyczny, z dwu pryzmatów, ustawionych nad sobą, z tą jednak różnicą, że przeciwprostokątne ściany pryzmatów mogą być ustawione względem siebie pod dowolnym kątem. Jak to widać z rys. 328, dla wytyczenia kąta  $\varphi$  muszą przeciwprostokątne pryzmatów

zawierać z sobą kąt  $\frac{\varphi}{2}$ .



Rys. 327.



Rys. 328.



Kąt  $\varphi$  można obliczyć lub pomierzyć w polu na punkcie  $P$  albo  $K$ .

W pierwszym przypadku uzyskujemy odpowiednie ustawienie przyrządów skrecając górny przyrząd względem dolnego o kąt  $\frac{\varphi}{2}$ , co się da skontrolować odczytem  $\varphi$  na pewnego rodzaju limbusie, umieszczonym pod dolnym przyrządem.

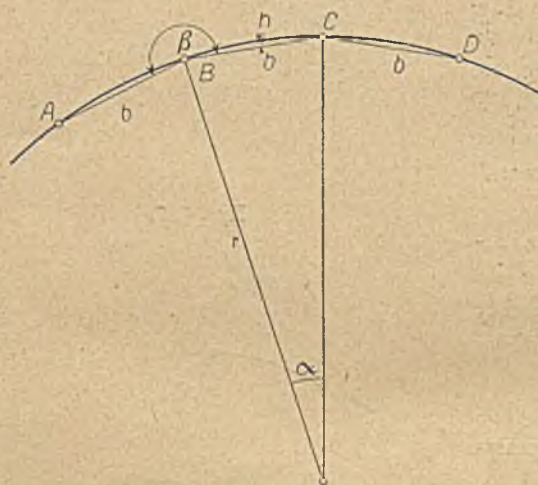
Sposób drugi polega na takim skróceniu przyrządu górnego względem dolnego, aby, stojąc w punkcie  $P$ , można było w przyrządach zobaczyć ponad sobą umieszczone obrazy punktów  $K$  i  $L$  (rys. 327).

Ten sposób tyczenia jest mało dokładny i zawodzi w terenie górzystym (przy silnie pochyłonych celowych).

### § 6. Tyczenie łuków w tunelach

Tyczenie łuków w tunelach należy przeprowadzić możliwie jak najdokładniej. Najlepiej założyć umiarowy wielobok, wpisany w łuk kołowy (rys. 329), którego boki  $b$  oraz kąty środkowe  $\alpha$  (względnie wierzchołkowe  $\beta$ ) otrzymamy, biorąc pod uwagę promień łuku  $r$ , oraz praktycznie możliwą strzałkę łuku  $h$ .

Z podanego poprzednio związku (§ 4,  $\alpha$  (11)):



Rys. 329.

względnie

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 1 - \frac{h}{r} = \frac{r-h}{r},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2h}{r} - \frac{h^2}{r^2}},$$

$$b = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{h(2r-h)}. \quad (50)$$

$$h = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4},$$

względnie

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{h}{2r}}, \quad (49)$$

obliczamy środkowe kąty wieloboku umiarowego  $\alpha$ , oraz długości cięciw  $b$ , stanowiących boki poligonu

$$b = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Z ostatniego wzoru można (z korzyścią dla dokładności obliczenia) wyrugować  $\alpha$  na podstawie relacji:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha/2}{2}},$$



Ponieważ szerokość sztolni wynosi zazwyczaj nieco ponad 2 m, należy przyjąć  $h = 1$  m, a wówczas wzory (49) i (50) przyjmą kształty następujące:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1}{2r}}, \quad b = 2\sqrt{2r-1} \quad (51)$$

(przy czym pod  $r$  i  $b$  należy rozumieć ilość metrów tych wielkości).

Kąty zewnętrzne wierzchołkowe  $\beta$  wynoszą  $180^\circ + \alpha$ , z wyjątkiem pierwszego (w punkcie początkowym łuku):  $\beta_1 = 180^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .

Dla zwiększenia dokładności można powiększyć  $b$ , obierając strzałkę  $h = 1,5$  m; w tym przypadku nie będziemy jednak tyczyćli osi tunelu, lecz łuk o promieniu o 0,5 m większym, oddalony od osi o 0,5 m nazewnątrz. W tym przypadku zmieniają się wzory (49) i (50) na:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{4r}} = \frac{0,866\dots}{\sqrt{r}}, \quad b = 2\sqrt{3r - \frac{9}{4}} = \sqrt{12r - 9} \quad (52)$$

(przy czym, jak poprzednio, pod  $b$  i  $r$  należy rozumieć ilość metrów tych wielkości).

Oczywiście, że tyczenie i pomiar przeprowadzamy przy użyciu sygnałów i nitki siatki lunety odpowiednio oświetlonych. Dla uzyskania możliwie największej dokładności posługujemy się przy tym teodolitami o trzech statywach ze spodarkami; kierunki wytyczamy, jak podano w § 2, c, d.

### § 7. Niektóre sposoby tyczenia łuków używane w budownictwie wodnym

Regulując rzekę nie wytyczamy osi koryta projektowanego, lecz trasę obu jego brzegów. O ile trasa ta jest położona na suchym łądzie, możemy przy jej wytyczaniu zastosować poprzednio omówione sposoby, natomiast w przypadku, gdy jest całkowicie lub częściowo położona w wodzie, jak to ma miejsce u tam brzegu wklęsłego, należy użyć sposobów innych. Z tego powodu przytaczam dwa sposoby, podane przez inż. Regieca<sup>1)</sup>, których praktyczność polega na tym, że łuk przypadający na wodę można wytyczyć za pomocą punktów, zaznaczonych na suchym łądzie.

Przyjmijmy, że znamy kierunek stycznej w punkcie początkowym łuku  $A$ . Obieramy na niej (po stronie mającego się wytyczyć łuku) pewną długość  $AB = b$  w okrągłych metrach (lepiej w dziesiątkach metrów) tak, aby punkt  $B$  i prostopadła w tym punkcie do prostej  $AB$ , tzw. kierownica, wypadła na suchym łądzie (p. rys. 330).

Następnie obieramy tak niewielkie elementy łuku  $l$ , aby je można było z dostateczną dla danego celu dokładnością uważać za proste, po czym obliczamy odcinki  $a$  na prostej  $AB$ , oraz odcinki  $y$  na kierownicy:

<sup>1)</sup> L. Regiec, O wytyczaniu łuków przy budowach łądowych i wodnych, Kraków 1895, str. 22 i dalsze.



$$a_1 = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = (b - a_1) \operatorname{tg} \alpha \quad (53)$$

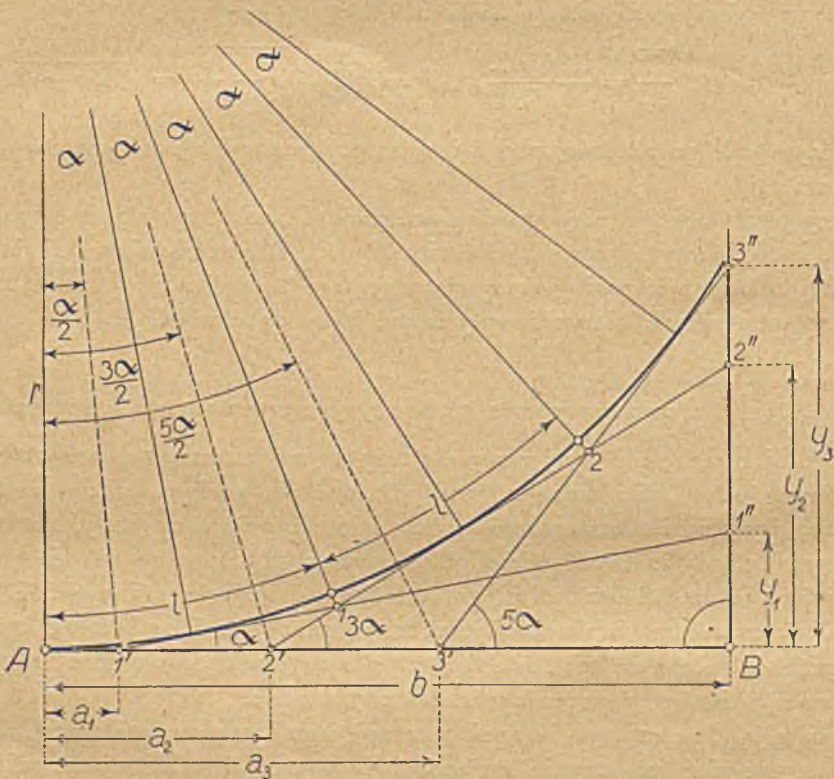
$$a_2 = r \operatorname{tg} \frac{3}{2} \alpha, \quad y_2 = (b - a_2) \operatorname{tg} 3 \alpha$$

$$a_3 = r \operatorname{tg} \frac{5}{2} \alpha, \quad y_3 = (b - a_3) \operatorname{tg} 5 \alpha$$

.....

.....

$$a_n = r \operatorname{tg} \frac{2n-1}{2} \alpha, \quad y_n = (b - a_n) \operatorname{tg} (2n-1) \alpha,$$



Rys. 330.

przy czym

$$\alpha = \frac{l}{2r} \quad \text{lub} \quad \alpha^0 = \frac{l}{2r} \rho^0. \quad (54)$$

Budowę tamy rozpoczyna się od wykonania odcinka  $A1' = \frac{l}{4}$ , następnie buduje się na kierunku  $1' - 1''$  odcinek drugi, równy  $\frac{3}{4} l$ ; trzeci i następne odcinki, wynoszące wszystkie  $l$ , wykonujemy na odpowiednich kierunkach.



Inż. Regiec podał prócz opisanego poprzednio sposobu jeszcze i drugi, nadający się do wytyczania tam kamiennych, a polegający na zastosowaniu metody biegunowej z użyciem kierownicy (p. rys. 331).

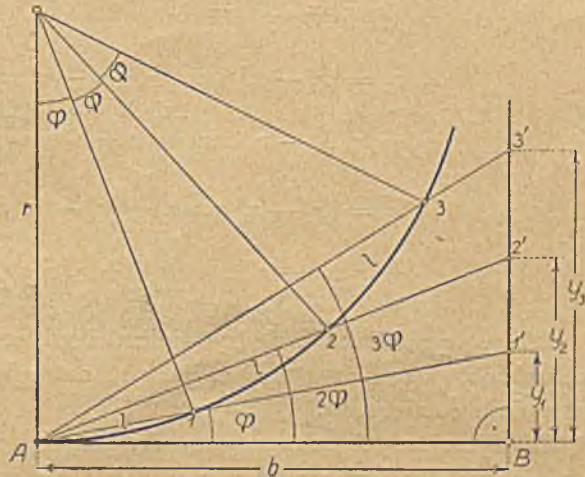
Obieramy, jak poprzednio, element łuku  $l$ , któremu niech odpowiada kąt środkowy

$$\varphi = \frac{l}{r}, \quad \varphi^0 = \frac{l}{r} \rho^0. \quad (55)$$

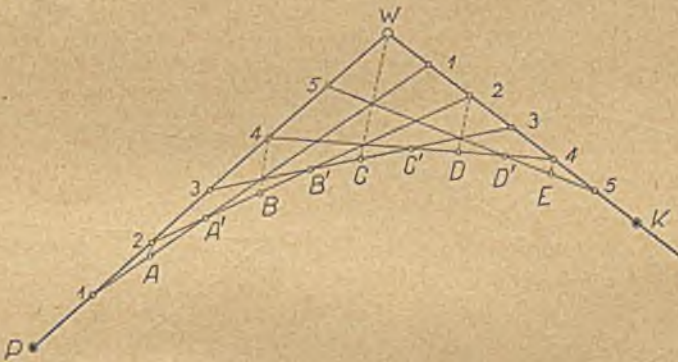
Odcinki na kierownicy będą w tym przypadku wynosiły:

$$\begin{aligned} y_1 &= b \operatorname{tg} \varphi, & (56) \\ y_2 &= b \operatorname{tg} 2\varphi, \\ y_3 &= b \operatorname{tg} 3\varphi, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ y_n &= b \operatorname{tg} n\varphi. \end{aligned}$$

Niekiedy trasa regulacyjna ma kształt paraboli. Najprostszy sposób wytyczenia paraboli, o ile znane są długości i położenie stycznych  $s_1$  i  $s_2$ , przedstawia rys. 332. Przy wytyczaniu tamy można zastąpić



Rys. 331.



Rys. 332.

parabole wielobokiem  $P-1-A'-B'-C'-D'-5-K$ , o ile tylko podzielono styczne na tak wiele części, aby wytyczane elementy łuku wypadły odpowiednio krótkie.

### § 8. Łuki koszowe

Nie zawsze można w praktyce przejść z jednej stycznej do drugiej jednym łukiem kołowym; jeżeli teren jest trudny lub jesteśmy zmuszeni obejść pewną przeszkodę, przechodzimy z kierunku stycznej początkowej do kierunku końcowej stycznej kilku łukami kołowymi, których zespół nazywamy łukiem koszowym.

Jak to widać na rysunku 333 styczne  $s_1, s_2$ , promienie  $r_1, r_2 \dots r_n$ ,

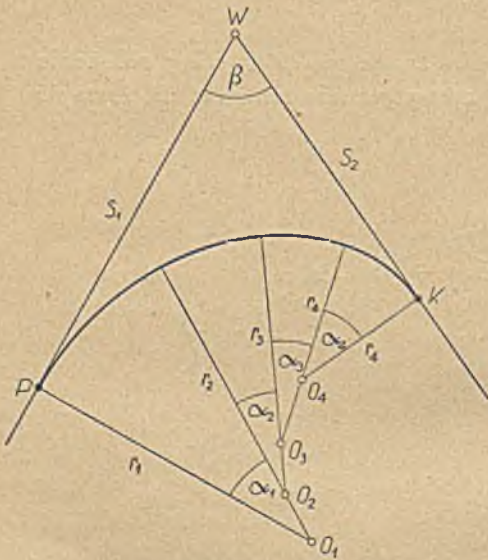


oraz różnice promieni  $r_1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{n-1} - r_n$  tworzą wielobok zamknięty, którego boki i kąty spełniają znane nam z poligonometrii 3 warunki:

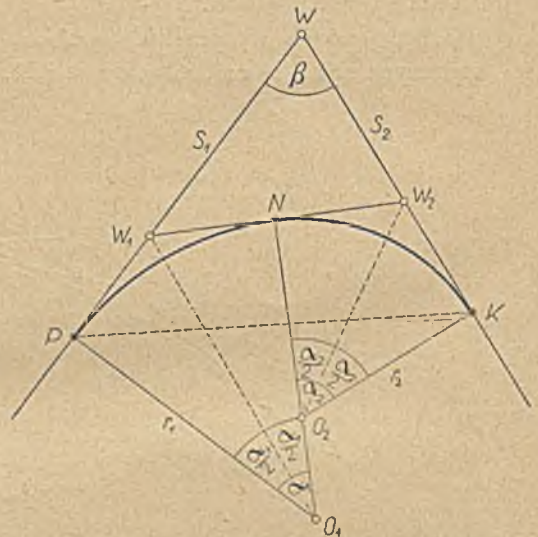
$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \sum_1^n \alpha &= 180^\circ - \beta, \\ 2) \quad s_1 &= (r_1 - r_2) \sin \alpha_1 + (r_2 - r_3) \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + \dots \\ &+ (r_{n-1} - r_n) \sin \sum_1^{n-1} \alpha + r_n \sin \sum_1^n \alpha + s_2 \cos \beta, \\ 3) \quad r_1 &= (r_1 - r_2) \cos \alpha_1 + (r_2 - r_3) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + \dots \\ &+ (r_{n-1} - r_n) \cos \sum_1^{n-1} \alpha + r_n \cos \sum_1^n \alpha + s_2 \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Z tego wynika, że pomiędzy wielkościami, zawartymi w powyższych trzech warunkach, trzy mogą być nieznane, natomiast reszta musi być przyjęta, względnie pomierzona.

Zazwyczaj znane nam są wartości  $\beta, s_1$  i  $s_2$  z pomiaru, zaś promienie  $r$  z projektu; jeżeli zatem istnieje  $n$  kątów środkowych  $\alpha$ , musimy na podstawie



Rys. 333.



Rys. 334.

projektu przyjąć jeszcze wartości  $n - 3$  kątów  $\alpha$ ; pozostałe trzy kąty wyznaczamy przy pomocy warunków (57).

Najprostszy sposób rozwiązania powyższych równań osiągniemy, jeśli przyjmiemy na podstawie projektu także i przybliżone wartości  $x_0, y_0, \dots$  kątów wyznaczanych, po czym będziemy mogli wyznaczyć ich poprawki  $\delta x, \delta y, \dots$  na podstawie równań liniowych, kładąc:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 + \cos x_0 \delta x, & \cos x &= \cos x_0 - \sin x_0 \delta x, \\ \sin y &= \sin y_0 + \cos y_0 \delta y, & \cos y &= \cos y_0 - \sin y_0 \delta y. \end{aligned} \quad (58)$$



Odsyłając czytelnika, chcącego zapoznać się bliżej z przypadkami, jakie zająć mogą w praktyce, do dzieła prof. Skibińskiego<sup>1)</sup>, omówimy krótko łuk koszowy, składający się z dwu łuków kołowych (przedstawiony na rys. 334).

Trzy poprzednio omawiane warunki mają w tym przypadku kształt następujący:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \beta \\ 2) \quad & s_2 = s_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - (r_1 - r_2) \sin \alpha_2 \\ 3) \quad & r_2 = s_1 \sin \beta - r_1 \cos \beta - (r_1 - r_2) \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (59)$$

Opierając się częściowo na zacytowanym dziele prof. Skibińskiego, podajemy kilka rozwiązań ważnych dla praktyki.

a) Dane: kąt  $\beta$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , oraz początek łuku  $P$ .

Ponieważ położenie punktu  $P$  jest dane, przeto jest również wiadoma i długość stycznej  $s_1$ .

Najpierw obliczamy

$$\cos \alpha_2 = \frac{s_1 \sin \beta - r_1 \cos \beta - r_2}{r_1 - r_2}, \quad (60)$$

a następnie z równań (59), 1) i 2) kąt  $\alpha_1$ , oraz długość drugiej stycznej  $s_2$ .

Wyznaczenie punktów  $W_1$ ,  $W_2$  i  $N$  nie nastęrcza żadnych trudności.

b) Dane: kąt  $\beta$ , długości stycznych  $s_1$  i  $s_2$ , oraz  $r_1$ .

Z równań (59), 2) i 3) wyznaczamy  $r_2$ , otrzymując przez porównanie wyników nowy związek:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 \{ s_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - s_2 \} + \sin \alpha_2 \{ r_1 (1 + \cos \beta) - s_1 \sin \beta \} = \\ = s_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - s_2, \end{aligned} \quad (61)$$

który możemy napisać we formie następującej:

$$A \cos \alpha_2 + B \sin \alpha_2 = A, \quad (62)$$

jeżeli wartość nawiasu pierwszego oznaczymy literą  $A$ , zaś drugiego literą  $B$ .

Ponieważ

$$A (1 - \cos \alpha_2) = B \sin \alpha_2,$$

względnie

$$A \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} = B \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2},$$

przeto

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{B}{A}, \quad (63)$$

oraz

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta - \alpha_2,$$

a ostatecznie

$$r_2 = r_1 - \frac{A}{\sin \alpha_2}. \quad (64)$$

<sup>1)</sup> K. Skibiński, Tyczenie tras, Lwów 1909, część I, str. 46 i dalsze.



c) Dane: kąty  $\beta$ ,  $\alpha_1$ , promień  $r_1$  oraz położenie punktu  $P$ , czyli  $s_1$ .

Ze związków (59), 1) i 3) wyznaczamy  $\alpha_2$ ,  $r_2$  oraz  $s_2$ , przy czym wyrażenie na  $r_2$  można podać i we formie, nadającej się do obliczenia logarytmami:

$$r_2 = \frac{s_1 \sin \beta - 2 r_1 \cos \frac{\beta + \alpha_2}{2} \cos \frac{\beta - \alpha_2}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}}. \quad (65)$$

d) Dane jest położenie punktów  $P$  i  $K$  na stycznych, tj.  $s_1$  i  $s_2$  oraz kąt  $\beta$ ; należy założyć łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni.

Łatwo można udowodnić, że warunek  $r_1 - r_2 = \min$  będzie wówczas spełniony, gdy styczna w punkcie styku obu łuków  $N$  będzie również równoległa do cięciwy  $PK$ .

W tym przypadku zastosujemy dla wyznaczenia kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  dwa związki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= \frac{s_2}{s_1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 180^\circ - \beta \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

oraz

zatem

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sin(\beta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \quad \frac{s_2}{s_1} = \frac{\sin(\beta + \alpha_2)}{\sin \alpha_2},$$

czyli ostatecznie

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s_2 \sin \beta}{s_1 - s_2 \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{s_1 \sin \beta}{s_2 - s_1 \cos \beta}. \quad (67)$$

Następnie obliczymy promienie  $r_1$  i  $r_2$  z rzutów na cięciwę  $PK$  i kierunku prostopadły:

$$\begin{aligned} PK &= r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2, \\ r_1 - r_2 &= r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (68)$$

### § 9. Tyczenie krzywych przejściowych (kolejowych)

a) Wyprowadzenie wzoru na krzywą przejściową. <sup>1)</sup>

Jeżeli masa  $m$  porusza się po drodze krzywoliniowej, występuje w każdym punkcie jej drogi siła odśrodkowa  $O$ , określona wzorem

$$O = \frac{m v^2}{\rho}, \quad (69)$$

przy czym  $\rho$  jest promieniem krzywizny w punkcie rozważanym, a  $v$  chyżością ruchu.

Jeżeli  $Q$  oznacza ciężar wozu kolejowego, zaś  $g$  przyspieszenie ziemskie, wówczas, ze względu na to, że  $m = \frac{Q}{g}$ , będzie

$$O = \frac{Q v^2}{g \rho}. \quad (70)$$



Dla zniwelowania szkodliwego działania siły odśrodkowej, podnosimy w łuku zewnętrzny tok toru o pewną wysokość  $h$ , zwaną przechyłką toru (rys. 335), tak, aby wypadkowa  $W$  z sił  $Q$  i  $O$  działała prostopadłe do toru.

Nazywając powstały w ten sposób kąt pochylenia toru  $\alpha$ , otrzymamy dla szerokości toru  $s$  związek:

$$h = s \sin \alpha \approx s \operatorname{tg} \alpha, \quad (71)$$

a ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O}{Q} = \frac{v^2}{g \rho}$ ,

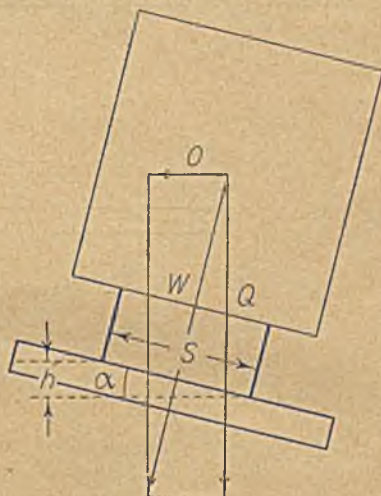
przeto 
$$h = \frac{s v^2}{g \rho}. \quad (72)$$

Dla pewnej obranej przez nas chyżości  $v$  otrzymamy, wobec tego, że  $g$  i  $s$  są wielkościami stałymi,

$$h = \frac{k}{\rho}, \quad (73)$$

zaś dla pewnego promienia łuku kołowego  $r$ :

$$h = \frac{k}{r}. \quad (74)$$



Rys. 335.

Jeżeli w łuku o promieniu  $r$  ma być podniesiona zewnętrzna szyna o odpowiednią przechyłkę  $h$ , nie może to nastąpić nagle, lecz przejściowo. W tym celu między styczną łuku a łukiem kołowym wkładamy krzywą o zmieniającej się ciągle krzywiznie, tzw. *krzywą przejściową*. Wynika stąd, że promień krzywej przejściowej  $\rho$  zmienia się w sposób ciągły od  $\infty$  do promienia  $r$  omawianego łuku. Wraz ze zmianą  $\rho$  zmienia się także i przechyłka, którą na długości krzywej przejściowej oznaczymy  $\chi$ .

Dla bliższego określenia krzywej przejściowej potrzeba jeszcze pewnych założeń. Najprościej będzie, gdy założymy, że  $\chi$  wzrasta liniowo z rzutem krzywej przejściowej na styczną, jak to uwidoczniło na rys. 336.

Dolna część rysunku przedstawia krzywą przejściową jako rzut poziomy krzywej przestrzennej, wedle której musi być ułożona zewnętrzna szyna między prostą a łukiem kołowym; w górnej części rysunku widzimy na odpowiadającej jej partii wznoszącą się szynę zewnętrzną ponad wewnętrzną o stałym wzniesieniu  $1 : z$ , które dla kolei wynosi od  $1 : 200$  do  $1 : 500$ , stosownie do ważności linii kolejowej.

Przyjmijmy początkowy punkt krzywej przejściowej  $A$  jako początek układu, przedłużenie kierunku stycznej jako dodatki kierunku osi  $x$ -ów, a prostopadły doń kierunek, skierowany do geometrycznego środka łuku, jako oś  $y$ -ów. Ze względu na ostatnio wyprowadzony związek jest

$$\rho = \frac{k}{\chi}, \quad (75)$$

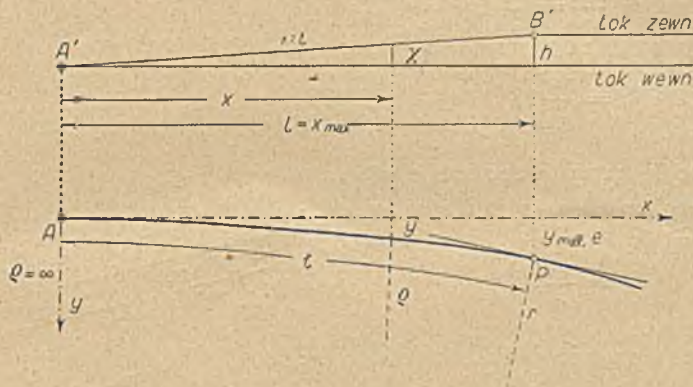


a ponieważ przyjęliśmy  $\chi : x = 1 : i$ ,

przeto 
$$\rho = \frac{ki}{x} = \frac{C}{x}. \quad (76)$$

Promień krzywizny  $\rho$  określa nam — jak wiadomo — związek

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (77)$$



Rys. 336.

(przy czym  $y'$  i  $y''$  oznaczają pierwszą i drugą pochodną  $y$  względem  $x$ )  
 Ponieważ  $y'^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha$ , zaś  $\alpha$  wynosi około  $6^\circ$ , przeto  $y'^2 = 0.011\dots$   
 można zaniedbać wobec jedności, uzyskując na  $\rho$  wzór bardzo prosty:

$$\rho = \frac{1}{y''}. \quad (78)$$

Po wstawieniu wartości za  $\rho$  z (76), otrzymujemy równanie różniczkowe krzywej przejściowej we formie następującej:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{C} \quad (79)$$

(przy czym wedle poprzednich wywodów  $C = \frac{sv^2 i}{g}$ ).

Całkując raz, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2C} + C', \quad \text{przy czym } C' = 0 \quad (80)$$

(gdyż dla  $x = 0$ , jest  $\frac{dy}{dx} = 0$ ).

Drugie całkowanie dostarcza nam:

$$y = \frac{x^3}{6C} + C'', \quad \text{przy czym również i } C'' = 0 \quad (81)$$

(gdyż dla  $x = 0$ , jest  $y = 0$ ).

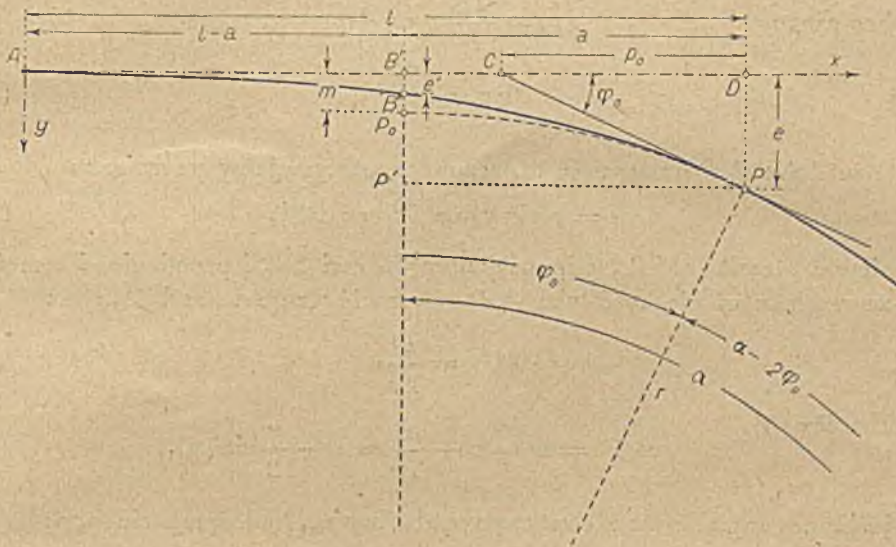


Jest to równanie paraboli sześcienniej, używanej najchętniej w praktyce jako równanie krzywej przejściowej. Prócz paraboli sześcienniej można zastosować inne krzywe jako przejściowe, nadające się szczególnie dla pociągów o wielkiej chyżości<sup>1)</sup>.

b) *Czynności przy wytyczaniu krzywej przejściowej.*

Podstawiając we wzorze (81) za  $x$  długość rzutu krzywej przejściowej na oś  $x$ -ów  $l$  (równą w przybliżeniu długości samej krzywej przejściowej) otrzymujemy:

$$y_{\max} = e = \frac{l^3}{6C}. \quad (82)$$



Rys. 337.

Należy jednak zauważyć, że w końcowym punkcie krzywej przejściowej  $P$  promień jej krzywizny równa się  $r$ , zatem wedle związku (76) jest

$$r = \frac{C}{l}, \quad (83)$$

lub

$$l = \frac{C}{r}. \quad (84)$$

Wstawiając tę wartość do ostatniej relacji na  $e$  widzimy, że

$$e = \frac{C^2}{6r^3}, \quad (85)$$

<sup>1)</sup> Wątarek, Krzywe przejściowe. Czasopismo Techniczne, 1906. Wątarek, Übergangsbogen, Organ für d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens, 1907. Petersen, Die Gestaltung der Bogen im Eisenbahngleise, Organ f. d. F. d. E. B. W., 1920, zeszyt 5 i 6. Lachman u. Rothe, Zur Konstruktion des Übergangsbogens f. Eisenbahngleise, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., 1922.



zaś rzędna dla  $x = \frac{l}{2}$  (na rys. 337 odcinek  $B'B''$ ) wynosi:

$$e' = \frac{l^3}{48C} = \frac{e}{8}. \quad (86)$$

Dla wyznaczenia wartości  $\varphi_0$ , kąta nachylenia stycznej w punkcie początkowym  $P$  właściwego łuku kołowego, użyjemy związku (80), wstawiając  $l$  w miejsce  $x$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{l^2}{2C} = \frac{C}{2r^2} = \frac{e}{p_0} = \frac{l^3}{6Cp_0}, \quad (87)$$

wobec czego 
$$p_0 = \frac{2C}{l^2} e = \frac{l}{3}, \quad (88)$$

zaś 
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{3e}{l}. \quad (89)$$

Rzut łuku  $P_0P$  na styczną, oznaczony  $a$ , otrzymujemy ze związku

$$a = r \sin \varphi_0 = PP' = DB'. \quad (90)$$

Ponieważ strzałkę  $P'P_0$ , odpowiadającą łukowi  $2\varphi_0$  i promieniowi  $r$  można — ze względu na płaskość łuku  $P_0P$  — wyrazić wzorem przybliżonym:

$$P'P_0 = \frac{a^2}{2r},$$

przeto odstęp

$$P_0B' = m = e - \frac{a^2}{2r} = e - \frac{r}{2} \sin^2 \varphi_0, \quad (91)$$

a jeśli, ze względu na stosunkowo mały kąt  $\varphi_0$ , położymy  $\sin \varphi_0 \approx \operatorname{tg} \varphi_0$ , otrzymamy

$$m = e - \frac{r}{2} \frac{C^2}{4r^4} = e - \frac{C^2}{8r^3} = e - \frac{6}{8} e = \frac{e}{4}. \quad (92)$$

Dla pewnej kategorii kolei mamy daną wartość stałej  $C$ , po czym możemy, przy pomocy tablic do tyczenia łuków, wyznaczyć wielkości:

$$l = \frac{C}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{l^2}{2C} = \frac{C}{2r^2} = \frac{3e}{l}, \quad p_0 = \frac{l}{3}, \quad e = \frac{l^3}{6C} = \frac{C^2}{6r^3},$$

$$e' = \frac{e}{8}, \quad m = \frac{e}{4}, \quad \text{oraz } a = r \sin \varphi_0, \quad (93)$$

względnie dla łuków o dużym promieniu (a więc dla kolei głównych):

$$a \approx \frac{l}{2}. \quad (93a)$$

Znając kąty  $\beta$  i  $\alpha$ , odmierzamy od punktu  $W$  zamiast  $s$  długość  $s + \Delta s$ , otrzymując punkt  $B$ , przy czym  $\Delta s = m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; podobnie odmierzamy od punktu  $W$







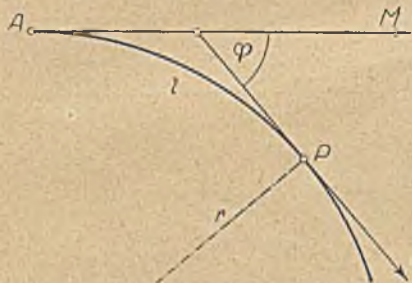
Podczas gdy praca Schramma ma znaczenie (na razie przynajmniej) raczej teoretyczne, metoda sprawdzania wytyczonego łuku, wprowadzona w życie przez Aleksandra Nalenz a, a podana szczegółowo z odpowiednim uzasadnieniem przez Höfera, znalazła szerokie zastosowanie w praktyce kolejowej.

Dokładne podanie myśli, zawartych w obu rozprawach, zajęłoby zbyt wiele miejsca, dlatego poprzestaniemy tylko na wyprowadzeniu zasadniczych wzorów Schramma, co w wielkim stopniu ułatwi nam zrozumienie postępowania przy sprawdzaniu i poprawie istniejących łuków kolejowych metodą Nalenz-Höfera.

### 1. Wyprowadzenie wzorów zasadniczych.

Schramm wprowadza pojęcia dwu linii płaskich, charakterystycznych dla łuków: a) linii krzywizny (Krümmungslinie) i b) linii zboczenia (Bildlinie).

Niech  $A$  oznacza przyjęty przez nas dowolnie początkowy punkt łuku,

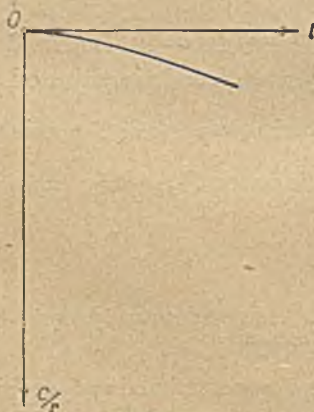


Rys. 339.

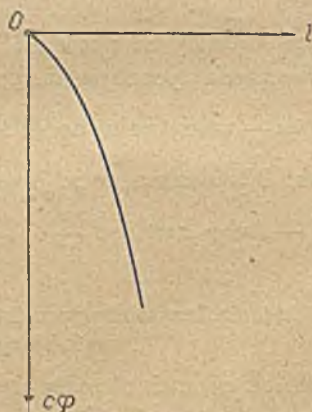
$A - M$  kierunek stycznej w punkcie  $A$ ,  $P - N$  kierunek stycznej w punkcie  $P$ , odległym od  $A$  — licząc po łuku — o odstęp  $l$  i niech  $\varphi$  będzie kątem, zawartym między stycznymi w punktach  $A$  i  $P$  (tj.  $A - M$  i  $P - N$ ), a  $r$  promieniem krzywizny w punkcie  $P$ , jak to uwidoczniło na rys. 339.

Dla przedstawienia obu wspomnianych linii obieramy dwa płaskie układy prostokątne; dla linii krzywizny jako odcięte

długości  $l$ , jako rzędne wielkości  $\frac{c}{r}$ , zaś dla linii zboczenia jako odcięte długości  $l$ , zaś jako rzędne wielkości  $c\varphi$ , przy czym  $c$  oznacza odpowiednio przyjętą stałą o wymiarach powierzchni.



Rys. 340.



Rys. 341.

Dla wykazania związku między odciętymi obu krzywych utworzymy pierwszą pochodną dla linii zboczenia (uwzględniając, że  $d\varphi = \frac{dl}{r}$ ):



$$c \frac{d\varphi}{dl} = c \frac{dl}{dl \cdot r} = \frac{c}{r}, \quad (94)$$

z czego wynika, że

$$c d\varphi = c \frac{dl}{r},$$

a ostatecznie

$$c \varphi = c \int \frac{dl}{r}. \quad (95)$$

Powyższa całka przedstawia powierzchnię, zawartą między linią krzywizny a osią odciętych. Jak tedy widać, można otrzymać odcięte linii zboczenia z linii krzywizny przy pomocy całkowania, które w praktyce zastępujemy wykreślonym sumowaniem (jak przy użyciu planimetrów harfowych).

Zastanówmy się następnie, jaki kształt będą miały obie linie dla łuku kołowego o promieniu  $r$ . Ponieważ  $r$  pozostaje dla całej długości łuku bez zmiany, przeto wykresem linii krzywizny będzie prosta, równoległa do osi  $l$ ; natomiast wykresem linii zboczenia będzie prosta, nachylona do osi  $l$  pod stałym kątem ze względu na to, że  $\varphi$  zmienia się jednostajnie.

Dla krzywej przejściowej (p. §9), przyjętej jako parabola sześcienna, otrzymamy ze względu na liniowy przyrost przechyłki  $\gamma$  szyny zewnętrznej (a tym samym i liniowy przyrost krzywizny) związek liniowy, przedstawiający linię krzywizny jako prostą, nachyloną pod pewnym stałym kątem do osi odciętych  $l$ , zatem

$$\frac{c}{r} = a l + b; \quad (96)$$

natomiast związek, odpowiadający linii zboczenia będzie wedle równania (95):

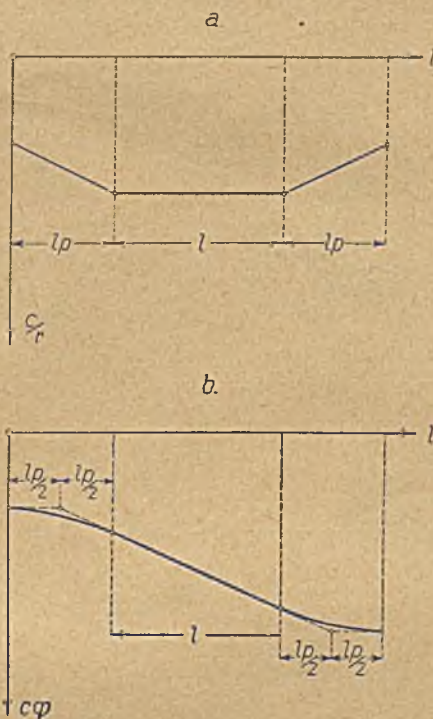
$$c \varphi = b l_p + \int a l dl = \frac{a}{2} l_p^2 + C, \quad (97)$$

przy czym  $l_p$  oznacza długość krzywej przejściowej.

Linia zboczenia krzywej przejściowej (paraboli sześciennej) jest parabolą (rzędu 2-go), której równanie w przypadku, gdy  $C = 0$  jest:

$$c \varphi = \frac{a}{2} l_p^2. \quad (97a)$$

Rys. 342 a przedstawia linię krzywizny, rys. 342 b linię zboczenia łuku kołowego z obustronnymi krzywymi przejściowymi.



Rys. 342.

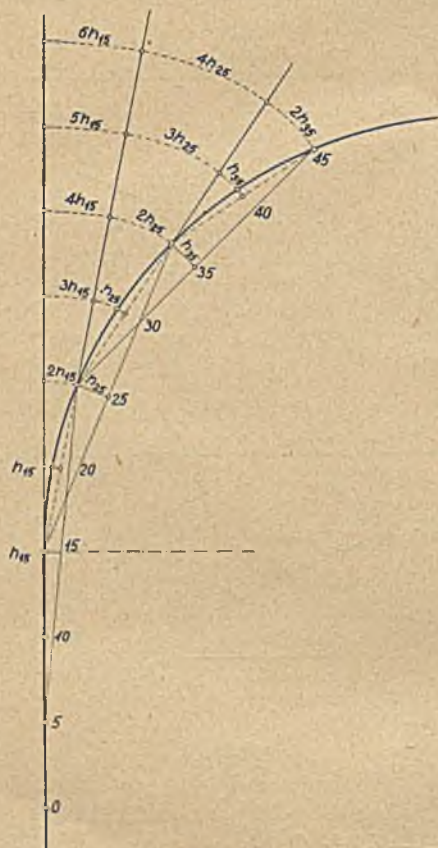


Jeżeli ze względu na bardzo wielką chyżość pociągów przyjęto jako krzywą przejściową parabolę rzędu 4-go, to odpowiadająca jej linia krzywizny będzie się składała z trzech części: z paraboli, prostej i paraboli, stanowiącej obraz lustrzany poprzedniej, zaś linia zboczenia będzie parabolą sześcienną.

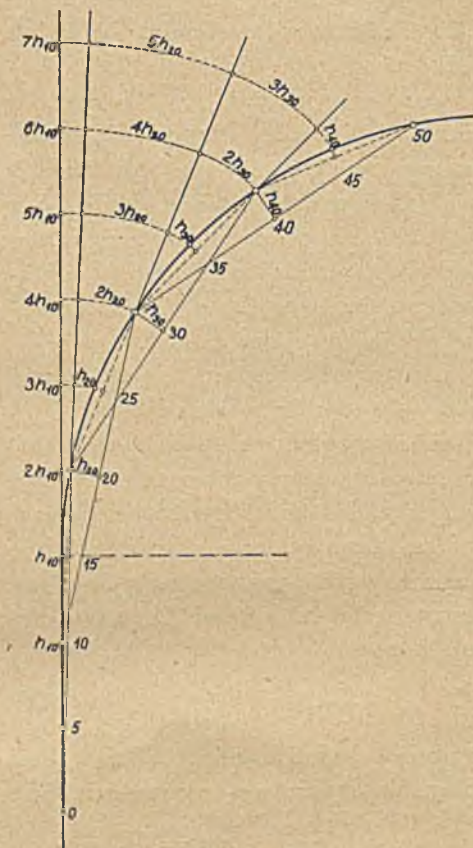
## 2. Metoda Nalenz-Höfera.

Badanie, czy istniejący łuk kolejowy posiada należyty kształt, przeprowadzamy metodą Nalenz-Höfera w sposób następujący.

Na prostej, znajdującej się przed łukiem obieramy w odstępnie około 20 metrów od przypuszczalnego początku łuku punkt początkowy 0 i począwszy od tego punktu zaznaczamy na wewnętrznej stronie zewnętrznej szyny łuku



Rys. 343 a.



Rys. 343 b.

odstępnie 5-metrowe, przy czym jest wskazane odróżnić odstępnie «dziesiątkowe» od «piątkowych», oznaczając pierwsze np. krzyżykami, drugie kreskami. Następnie napinamy między punktami odległymi od siebie o 20 m sznur i mierzymy strzałki  $h$  w ten sposób powstałych cięciw.

Na podstawie strzałek, mierzonych na «dziesiątkach» (rys. 343 b) można wyznaczyć z dość znacznym przybliżeniem długości ewolwent  $E$  dla po-







wizny (zbudowana nieco inaczej niż linia krzywizny Schramma). Odcięte i rzędne linii krzywizny otrzymujemy zatem w sposób następujący. Bierzemy pod uwagę tylko te punkty, w których pomierzono strzałki; z odległości, odpowiadających dwom sąsiednim punktom tworzymy średnie, uważając je jako odcięte, natomiast przynależne im rzędne otrzymujemy, odejmując od podwójnej wartości ewolwenty punktu dalszego podwójną wartość ewolwenty punktu bliższego. W naszym przypadku będzie zatem

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(10 + 15), & y_1 &= 2(E_{15} - E_{10}) = 2E_{15} = h_{10} \text{ (gdyż } E_{10} = 0) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(15 + 20), & y_2 &= 2(E_{20} - E_{15}) = h_{10} + h_{15} \\ & \dots & & \dots \end{aligned} \right\} (100)$$

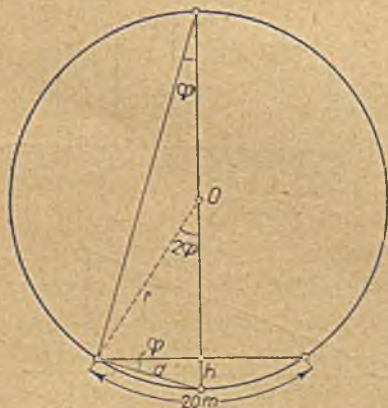
Dla utworzenia wzoru ogólnego nazwijmy pierwszą znaną strzałkę  $h_1$  a odpowiadającą jej odległość  $l_1$ , strzałkę drugą  $h_2$  i odpowiadającą jej odległość  $l_2$  itd. Po przyjęciu tych oznaczeń otrzymamy jako odcięte i rzędne:

$x$	$y$
$\frac{1}{2}(l_1 + l_2)$	$h_1$
$\frac{1}{2}(l_2 + l_3)$	$h_1 + h_2$
$\frac{1}{2}(l_3 + l_4)$	$h_1 + h_2 + h_3$
.....	.....
.....	.....
$\frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})$	$h_1 + h_2 + \dots + h_i = \sum_1^i h_i$

(101)

Zastanówmy się z kolei nad związkiem między strzałką  $h$  a promieniem krzywizny  $r$ .

Przyjmijmy naprzód, że badany łuk jest idealnym kołem. W tym przypadku jest, jak to widać na rys. 346:  $\square$  .....



Rys. 346.

$$2r : d = d : h,$$

czyli

$$h = \frac{d^2}{2r}. \quad (102)$$

Wedle wzoru (31) jest  $d = l - \frac{l}{24} \left(\frac{l}{r}\right)^2$ ,  
a tym samym

$$d^2 = l^2 - \frac{l^4}{12r^2} + [\omega_6]. \quad (103)$$

(przy czym  $[\omega_6]$  oznacza pominięte wyrazy 6-go rzędu).



Podstawiając we wzorze (102) w miejsce cięciwy  $d$  odpowiadający jej łuk  $l$ , otrzymamy

$$h = \frac{l^2}{2r} - \frac{l^4}{24r^3}. \quad (104)$$

Strzałki  $h$  odpowiadają cięciwom łuków 20-metrowych, przeto jak wynika z rys. 346,  $l = 10$  m, a w konsekwencji

$$h = \frac{50 - \frac{10\,000}{24r^2}}{r} = \frac{C - \Delta C}{r}, \quad (105)$$

przy czym, gdy  $r$  wstawimy w metrach, otrzymujemy  $h$  również w metrach. Ponieważ nasze rozważania odnoszą się do łuków kolejowych, zatem o promieniach rzadko kiedy mniejszych niż 200 metrów, a  $\Delta C$  dla  $r = 200$  m. wynosi zaledwie około 0,01, przeto poprawkę tę można pominąć i poprzedni wzór uprościć następująco:

$$h = \frac{50}{r}, \quad (106)$$

a zarazem

$$r = \frac{50}{h}. \quad (107)$$

( $h$  i  $r$ , jak poprzednio, w metrach); do ostatniego wzoru nie można jednak wstawiać wartości kilku początkowych i końcowych strzałek, gdyż początkowe i końcowe strzałki odnoszą się do cięciw, łączących punkty łuku z punktami na prostych.

Ponieważ w łuku kołowym  $r$  jest wielkością stałą, przeto w tym przypadku linia krzywizny jest prostą, zawierającą z osią  $l$  stały kąt  $\phi$ , którego tangens równa się:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{5} = \frac{50}{5r} = \frac{10}{r} = 1 : \frac{r}{10}. \quad (108)$$

Niemniej prosto przedstawia się sprawa wielkości kąta środkowego, odpowiadająca całkowitej długości łuku kołowego.

Nazwijmy  $\Delta \alpha$  kąt środkowy, odpowiadający 5-metrowej długości łuku. Jak widać z rys. 347, jest

$$2 \Delta \alpha = \frac{2h}{10},$$

zatem

$$\Delta \alpha = \frac{h}{10} \quad (109)$$

(przy czym za  $h$  należy wstawić wielkość strzałki w metrach).



Rys. 347.



Ponieważ całkowity kąt  $\alpha$  składa się z tylu elementarnych kątów  $\Delta\alpha$ , ile zmierzono strzałek, przeto

$$\alpha = \frac{\sum_1^n h}{10}, \quad (110)$$

względnie

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \sum_1^n h = 5^\circ, 7296 \dots \sum_1^n h \quad (111)$$

(przy czym  $\sum_1^n h$  oznacza, jak poprzednio, ilość metrów odpowiadającą sumie wszystkich strzałek).

Długość łuku kołowego określa nam związek

$$L = \alpha r. \quad (112)$$

Początek łuku kołowego znajduje się o  $\frac{r}{10} \sum_1^i h$  przed  $\frac{l_i + l_{i+1}}{2}$ . Przejdźmy następnie do przypadku, gdy na początku i końcu łuku kołowego założono jako krzywe przejściowe parabole sześciennne. Kąt  $\phi$ , który dla łuku kołowego był stały, jest w każdym miejscu krzywej przejściowej (z powodu zmiennych wartości strzałek i promienia) zmienny, a jego tangens określony związkiem:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dy}{dl} = \frac{h}{5} = \frac{10}{r}. \quad (113)$$

Jak poprzednio zaznaczono, krzywizna paraboli sześciennnej zmienia się liniowo, przeto

$$\frac{dy}{dl} = 10(a l + b)$$

( $a$  i  $b$  wielkości stałe), a po scałkowaniu

$$y = 5 a l^2 + K, \quad (114)$$

przy czym  $K$  jest stałą.

Jest to (jak widać) równanie paraboli płaskiej; natomiast o ile przyjęto jako krzywą przejściową parabolę 4 rzędu, linia krzywizny będzie parabolą 3 rzędu.

Jeżeli łuk kołowy i krzywe przejściowe są założone zupełnie ściśle, otrzymamy wielkość promienia łuku kołowego jak poprzednio (uwzględniając dowolną strzałkę partii środkowej).

Tak samo pozostaje bez zmiany wzór na kąt środkowy  $\alpha$ ; natomiast długość łuku, obliczoną wzorem (112), należy powiększyć obustronnie o pół długości krzywej przejściowej  $l_p$  (względnie o  $l_p - a$ , wedle § 9), tak że całkowita długość łuku kołowego, wraz z krzywymi przejściowymi wynosi:

$$L = \alpha r + l_p \quad \{ \text{wzgl. } L = \alpha r + 2(l_p - a) \}. \quad (115)$$

Dla znalezienia punktu początkowego krzywej przejściowej nie wystarcza



odjąć od pewnego punktu  $\frac{l_i + l_{i+1}}{2}$  odpowiadającą mu wartość  $\frac{r}{10} \sum_1^i h$ , lecz ponadto jeszcze pół długości odpowiedniej krzywej przejściowej (względnie  $l_p - a$ ).

Łuki, które napotykamy w praktyce są z reguły mniej lub więcej zdeformowane. Z tego powodu znajdujemy przy pomiarze zwykle różne wartości strzałek. Aby tedy znaleźć przeciętną wartość łuku promienia  $r$ , należy wziąć średnią wartość  $h_s$ , utworzoną z  $m$  strzałek środkowej partii łuku. (Początkowe i końcowe ich wartości pomijamy ze względu na prawdopodobne istnienie krzywych przejściowych).

Mając zestawione wartości strzałek, można się łatwo zorientować, które strzałki należy uwzględnić. (Porównaj załączony przykład).

Wzór na promień zmienia się wtenczas następująco

$$r = \frac{50}{h_s}, \quad (116)$$

przy czym

$$h_s = \frac{\sum h}{m}.$$

Poprawa zdeformowanego łuku polega na przesunięciu poszczególnych jego punktów w odpowiednim kierunku, przy czym jest jednak rzeczą bardzo ważną, aby łuku nie przesuwac tylko w jednym kierunku, lecz aby przesunięcia w prawo i w lewo w przybliżeniu się równoważyły.

Stosunkowo najszybciej dojdziemy do celu, wykonując dalsze czynności wykreślnie.

W myśl poprzednich wskazówek nanosimy linię krzywizny, obierając dla odciętych  $l$  skalę 1 : 1000, zaś dla rzędnych, odpowiadających odciętym  $\frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})$  skalę 1 : 20. Następnie obliczamy przy pomocy wzoru (116) przeciętny promień, którego wartość odpowiednio zaokrągloną przyjmujemy dla łuku poprawionego (tj. odpowiednio przesuniętego).

Promień  $r$  możemy otrzymać również i graficznie, kreśląc prostą wyrównującą między środkową partią punktów linii krzywizny (której nachylenie wynosi  $\psi$  przy uwzględnieniu odpowiednich skal, użytych do rysunku).

Ponieważ wedle (108)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{5} = 1 : \frac{r}{10},$$

przeto otrzymujemy, uwzględniając skale rysunku 1 : 20 i 1 : 1000 :

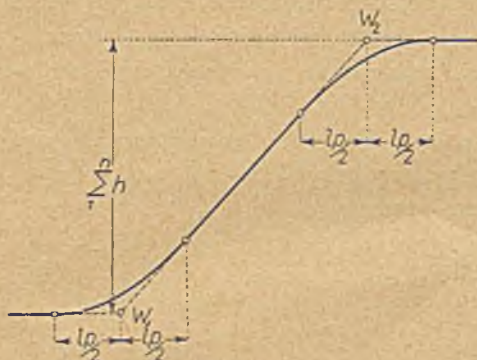
$$\frac{h}{20} : \frac{5}{1000} = \frac{1}{20} : \frac{r}{10000}. \quad (117)$$

Dla wykreślenia kąta  $\psi$  z uwzględnieniem powyższych skal należy utworzyć trójkąt prostokątny o wysokości 5 cm i przeciwprostokątnej równoległej do



prostej wyrównującej. Długość drugiej przyprostokątnej (podstawy) pomnożona przez 10000 dostarcza nam promienia  $r$  w metrach.

Jeżeli od punktów  $W_1$  i  $W_2$  przecięcia się prostej wyrównującej z osią odciętych  $l$  i równoległą do niej w odstępach  $\sum_1^n h$  odetniemy obustronnie po pół długości krzywej przejściowej, otrzymamy punkty początkowe i końcowe obu krzywych przejściowych (rys. 348).



Rys. 348.

Sposób wykreślenia paraboli jako linii krzywizny krzywej przejściowej o długości  $l_p$  podano na rys. 332 § 7.

Mając linię krzywizny toru istniejącego i naniesioną z projektu, mogliśmy utworzyć dla nich linie podwójnych ewolwent; zamiast tego nanosimy tylko różnicę między podwójnymi ewolwentami (toru i projektu), otrzymując w ten sposób tzw. linię sum, a ponieważ poszczególne  $h$  nanieśliśmy w skali 1 : 20, przeto różnice te dostarczają nam, w myśl poprzednich uwag, prostopadłe odstępy projektu od toru istniejącego, przy czym 1 mm projektu przedstawia w naturze odległość 1 cm.

Dalszy przebieg przedstawimy na przykładzie (p. tabela i rys. 349).

Tabela.

1	Odległość w metrach	10	15	20	25	30	35				
2	Wielkości pomierzonych strzałek w cm	0,5	2,0	3,5	4,0	6,0	19,6				
3	Rzędne linii krzyw. toru istniejącego	0,5	2,5	6,0	10,0	16,0	35,6				
4	Rzędne linii sum (tor istniejący — projekt I)	-0,7	-3,1	-7,6	-14,6	-26,0	-41,6				
5	Rzędne linii sum (tor istniejący — projekt II)		-0,2	-0,6	-1,5	-4,6	-10,0				
		40	45	50	55	60	65	70	75	80	
		18,6	10,2	16,7	7,8	4,9	12,1	14,6	13,9	15,8	
		35,6	54,2	64,4	81,1	88,9	93,8	105,9	120,5	134,4	150,2
		-49,2	-52,0	-58,9	-63,4	-74,4	-95,8	-118,4	-140,7	-162,9	
		-6,0	+5,0	+12,4	+22,2	+25,5	+18,4	+10,1	+2,1	-6,3	
		85	90	95	100	105	110	115		1	
		10,3	21,4	13,7	2,9	0,5	0,0	0,8		2	
		150,2	160,5	181,9	195,6	198,5	199,0	199,0	199,8	3	
		-180,5	-198,4	-203,3	-200,5	-198,9	-199,0			4	
		-12,3	-20,0	-16,5	-7,7	-1,9	+0,1	0,0		5	



W rzędzie pierwszym tabeli zestawiono odległości  $l$  zaznaczonych na torze punktów, licząc od przyjętego punktu początkowego.

W rzędzie drugim znajdujemy strzałki  $h$ , odpowiadające odległościom  $l$ .

W rzędzie trzecim umieszczono pod pośrednimi punktami (12,5, 17,5 itd.) sumy strzałek. I tak odciętej 12,5 m odpowiada rzędna 0,5 cm, odciętej 17,5 m rzędna  $0,5 + 2,0 = 2,5$  cm, odciętej 22,5 rzędna  $2,5 + 3,5 = 6,0$  itd. Rząd trzeci zawiera zatem rzędne linii krzywizny toru istniejącego.

Następnie przystąpiono do wyznaczenia odpowiedniego promienia  $r$ . W tym celu obliczono naprzód  $h_s$  (średnią strzałkę łuku kołowego), biorąc pod uwagę 12 strzałek od  $h_{33}$  do  $h_{90}$  włącznie, wobec czego

$$h_s = \frac{165,9}{12} = 13,825 \text{ cm,}$$

zatem średni promień  $r = \frac{50}{0,13825} = 361,7 \text{ m.}$

Wartość tę należy zaokrąglić w dół, ze względu na to, że niektóre z wziętych do rachunku strzałek mogły znajdować się na krzywych przejściowych. Przyjmujemy zatem

$$r = 350 \text{ m.}$$

Dla kontroli prowadzimy prostą wyrównującą, oraz tworzymy trójkąt prostokątny o wysokości 5 cm i o przeciwprostokątnej równoległej do prostej wyrównującej, otrzymując jako podstawę trójkąta  $r' = 0,0001 r$  (z dostateczną zgodnością z rachunkiem).

Po ustaleniu promienia, przyjmujemy jako pierwszy projekt łuku kołowego zazwyczaj wspomnianą prostą wyrównującą (o ile inne warunki nie stoją temu na przeszkodzie).

Na rys. 349a przyjęto z rozmysłem jako projekt linii krzywizny łuku kołowego prostą  $W'_1 - W'_2$ , a więc na oko niekorzystnie, aby dalsze postępowanie bardziej uwidocznili. Po przyjęciu prostej  $W'_1 - W'_2$  wykreślamy na początku projektu I parabolę jako linie krzywizny krzywych przejściowych.

W ten sposób powstał projekt I, uwidoczony linią kreskowaną na rys. 349 a.

Mając linie krzywizny tak toru istniejącego, jak i projektu, odmierzamy cyrklem różnice, występujące między rzędnymi obu linii, a sumując je, otrzymujemy dla każdej następnej odciętej rzędne linii sumy, tj. różnice podwójnych ewolwent w odpowiedniej skali. I tak, dla odciętej 7,5 m rzędna linii krzywizny toru istniejącego wynosi 0, zaś dla projektu I 0,7 cm, zatem rzędna linii sum dla odciętej 10 m jest  $-0,7$  cm; dla odciętej 12,5 m mamy rzędna l. krz. toru 0,5 cm, zaś rzędna l. krz. projektu I 2,9 cm, przeto rzędna linii sum dla odciętej 15 m jest  $-0,7 + (0,5 - 2,9) = -3,1$  cm; następna rzędna linii sum dla odciętej 20 m będzie  $-3,1 + (2,5 - 7,0) = -7,6$  cm (wobec tego, że dla  $l = 17,5$  m rzędna l. krz. toru wynosi 2,5 cm, zaś rzędna l. krz. projektu I 7,0 cm).

Rzędne te zestawiono w 4 rzędzie tabeli.





Rys. 349.



Postępując w ten sposób, uzyskujemy jako rzędne linii sum —198,9 cm i —199,0 cm dla odciętych 105 m i 110 m. Wobec tego, że różnica obu rzędnych wynosi tylko 1 mm, możemy przyjąć, że różnica między podwójnymi ewolwentami tych punktów nie istnieje, czyli że osie toru istniejącego i projektu biegną na tej partii już równolegle. (Faktyczna różnica wynosi zaledwie 0,6 mm).

Projekt I jest jednak nieodpowiedni, gdyż nie doprowadza luku do końcowej stycznej, lecz do prostej równoległej, oddalonej od stycznej o odstęp  $\frac{\omega}{2} = \frac{199,0}{2}$  cm = 0,995 m, co rys. 349 b potwierdza.

Aby wyznaczyć wielkość odpowiedniego przesunięcia prostej wyrównującej, należy wziąć pod uwagę, że na wielkość  $\omega$  składa się tyle wielkości  $\Delta\omega$ , ile odstępów 5-metrowych znajduje się na odległości, odpowiadającej punktom  $W_1'$  i  $W_2'$ . W naszym przypadku jest ich 14; dzieląc zatem  $\omega$  przez 14, uzyskujemy wielkość  $\Delta\omega$ , o którą należy przesunąć prostą projektu ku osi  $l$ :

$$\Delta\omega = -\frac{199,0}{14} = -14,2 \text{ cm (tj. } -7,1 \text{ mm w skali 1:20).}$$

Przesunięcie linii projektu musi nastąpić w tym przypadku ku dołowi (in minus); w kierunku poziomym odpowiada mu przesunięcie linii  $W_1' - W_2'$  o około 5 m do położenia  $W_1 - W_2$ .

W analogiczny sposób otrzymano na podstawie linii krzywizn toru i projektu II drugą linię sum, której rzędne zestawiono w 5 rzędzie tabeli, a wykres jej podano na rysunku 349 c, przy czym dla lepszego uwidocznienia stanu rzeczy naniiesiono rzędne w skali 1:10.

Jak to widać z zestawienia cyfr piątego rzędu, względnie wykresu linii sum na rys. 349 c, przesunięcia toru mają być wedle projektu II wykonane częściowo w lewo, a częściowo w prawo i wynoszą najwyżej +25,5, tj. +12,3 cm, oraz —20,0, tj. —10,0 cm; poza tym łuk kończy się wpadając kierunkowo do końcowej stycznej.

Kąt środkowy łuku kołowego  $\alpha$  otrzymamy wedle wzoru (110) i (111):

$$\alpha = \frac{1,998}{10} = 0,1998,$$

$$\alpha^\circ = 5^\circ,7296 \times 1,998 = 11^\circ,4477.$$

Długość całkowitego łuku (wraz z krzywymi przejściowymi) wynosi wedle wzoru (115):

$$L = 0,1998 \times 350 + 2 \times 17,16 = 69,93 + 34,32 = 104,25 \text{ m.}$$

Odczytane na rys. 324 a odcięte punktów  $W_1$  i  $W_2$  są: 27,3 m i 97,2 m; wobec tego długość samego łuku kołowego, wyznaczona wykreślnie, wynosi 69,9 m (zgodnie z obliczeniem). Odejmując od 27,3 m długość  $l_p - a = 17,16$  m otrzymujemy odciętą początku krzywej przejściowej: 27,3 m — 17,16 m = 10,14 m. Odcięta punktu końcowego drugiej krzywej przejściowej wynosi: 97,2 m + 17,16 m = 104,36 m.



Jeżeli podczas pomiaru strzałek zdejmujemy jeszcze pewne ważne dla trasy punkty (np. obiekty itp.), można w bardzo łatwy sposób sporządzić projekt, odpowiadający istniejącym warunkom w terenie.

Z powyższego wynika, że metoda Nalenz-Ilöfera daje nam możliwość skuteczniana należytej poprawy toru kolejowego w sposób niezwykle prosty i tani, co ma oczywiście wielkie znaczenie dla praktyki.

Polskie Koleje Państwowe unormowały postępowanie przy zastosowaniu tej metody specjalnymi przepisami. (»Tymczasowe przepisy o wykonywaniu regulacji luków metodą wykresu kątów«. Warszawa, 1937 r.).

---



## DODATEK

Poza sposobem rozwiązywania równań normalnych, podanym w rozdz. II na str. 20, poczęto w ostatnich czasach posługiwać się (głównie przy rozwiązywaniu zagadnień z dziedziny astronomii) także i innym sposobem, wynalezionym i wprowadzonym do praktyki przez prof. T. Banachiewicza.

Sposób ten polega na zastosowaniu do rozwiązywania równań normalnych tzw. krakowianów, symboli, utworzonych na wzór macierzy Cayley'a, różniących się jednak od nich zasadniczo tym, że stanowią one *gotowe formuły obliczeniowe*.

Podając w II rozdziale niniejszej książki krótki zarys rachunku wyrównawczego, nie uwzględniłem rozwiązania równań normalnych przy pomocy krakowianów, nie mając wówczas jeszcze pewności, czy sposób ten wykazuje pewne korzyści nad sposobami dotychczas używanymi. Gdy jednak prof. Banachiewicz podał w kwietniu 1938 r. zastosowanie krakowianów w odpowiednio zmienionej formie<sup>1)</sup>, i okazało się, że sposób ten daje tym większą korzyść, im większą ilość niewiadomych zawierają równania normalne, zdecydowałem się — ze względu na to, że rozdział II był już wydrukowany — przedstawić rachunkową metodę prof. Banachiewicza w końcowym ustępie książki.

Nie chcąc powiększać objętości książki dokładnym omówieniem teorii krakowianów, ograniczam się do przedstawienia wspomnianej metody na odpowiednio wybranym przykładzie.

Jako przykład wybrałem zagadnienie z dziedziny triangulacji, znane pod nazwą «równoczesne wyznaczenie współrzędnych dwu punktów» (z zastosowaniem rachunku wyrównawczego). Wybrałem to, a nie inne zagadnienie, ponieważ ma ono poważne znaczenie w dziedzinie triangulacji, czy to przy wyznaczaniu długości i orientacji bazy sieci lokalnej, czy też przy zagęszczaniu miejskich sieci triangulacyjnych itp.

Dla porównania obu metod rachunkowych (dotychczas stosowanej i wprowadzonej przez prof. Banachiewicza) podaję ten sam przykład, opracowany a) z zastosowaniem algorytmu Gaussa i b) metodą prof. Banachiewicza.

---

<sup>1)</sup> Wykład w Sekcji Geodezyjnej Polsk. Tow. Politechnicznego we Lwowie, dnia 13 kwietnia 1938 r.



Przykład równoczesnego wyznaczenia współrzędnych dwu punktów, zaczerpnięty z triangulacji m. Lwowa.

Punkty triangulacyjne dane (p. rys. 350):

	<i>y</i>	<i>x</i>
Michalowszczyzna	— 340,867	+ 6 389,328
Kleparów	— 4 190,493	+ 1 455,396
Wysoki Zamek	0,000	0,000
Dublany	+ 5 174,530	+ 4 910,231
Czartowska Skała	+ 5 706,255	— 2 186,805.

Punkty szukane: Zamarstynów (1) i Malechów (2).

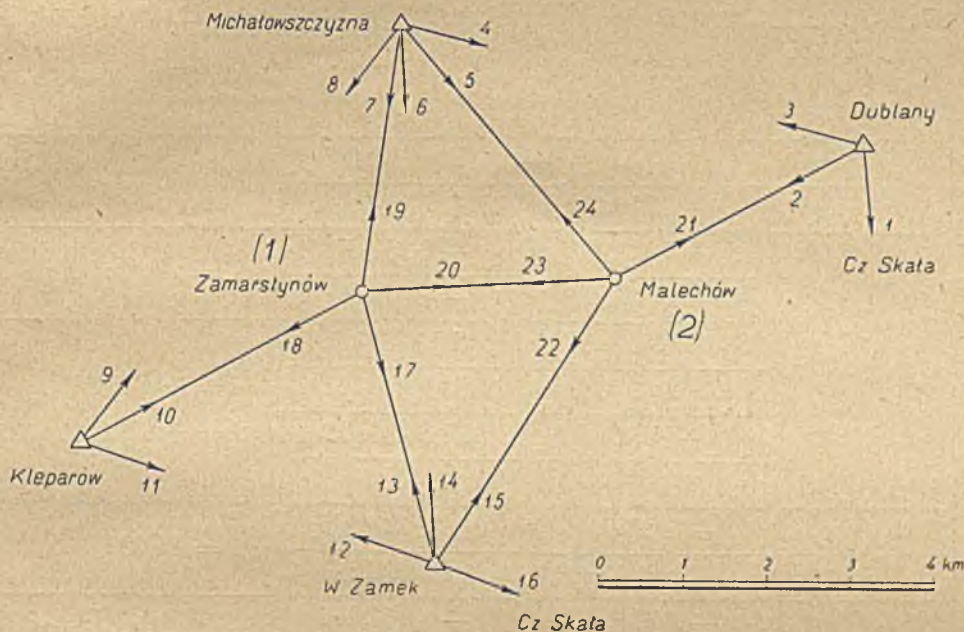
Na punktach triang. danych (stanowiska zewnętrzne), prócz p. Czart. Skała, oraz na obu punktach szukanych (stanowiska wewnętrzne) wykonano pomiary kierunkowe w 6 pełnych seriach teodolitem Wilda, typ T 3 (dokładność odczytu 0,2"). Średnie z pomiarów podane są w następującej tabeli:

Stano- wisko	Cel	Kierunek				Stano- wisko	Cel	Kierunek			
		Nr	o	'	"			Nr	o	'	"
Dubla- ny	Cz. Skała	1	0	0	2,62	Klepa- rów	Michal.	9	0	0	0,00
	(2)	2	66	34	27,57		(1)	10	24	32	11,13
	Michal.	3	109	17	49,04		W. Zamek	11	71	11	24,18
Michalo- wszczy- zna	Dubl.	4	359	59	59,87	Wysoki Zamek	Klepar.	12	0	0	0,26
	(2)	5	35	16	26,01		(1)	13	56	24	5,53
	W. Zamek	6	71	56	3,54		Michal.	14	67	47	35,77
	(1)	7	83	39	26,17		(2)	15	104	4	43,59
	Klepar.	8	112	57	1,58		Cz. Skała	16	181	48	56,73
(1) Zamarst.	W. Zamek	17	0	0	0,00	(2) Malech.	Dubl.	21	359	59	59,34
	Klepar.	18	76	56	43,61		W. Zamek	22	150	56	33,19
	Michal.	19	203	6	55,99		(1)	23	205	8	6,67
	(2)	20	281	52	15,21		Michal.	24	257	59	48,72



Kąty kierunkowe między punktami danymi, potrzebne do orientacji pomierzonych kierunków (p. tabela II), obliczono maszyną (p. przykład na str. 195):

Dubl. — Cz. Skala	175°	42'	55",03
Klep. — Michal.	37	57	45,35
W. Zamek — Cz. Skala	110	58	5,89
W. Zamek — Klep.	289	9	9,30
W. Zamek — Michal.	356	56	46,32
Michal. — Dubl.	105	0	43,64.



Rys. 350.

Przybliżone współrzędne punktów szukanych otrzymano przez rozwiązanie wcinania wprzód (p. str. 196) w odpowiednich trójkątach:

	$y$	$x$
(1) Zamarstynów :	— 826,13	+ 3 206,84
(2) Malechów :	+ 2 189,87	+ 3 342,54.

Na podstawie tych współrzędnych obliczamy przybliżone kąty kierunkowe (azymuty) oraz współczynniki  $a$  i  $b$ <sup>1)</sup> równań błędów (p. tabela I), po czym następuje orientowanie pomierzonych kierunków na wszystkich stanowiskach (tabela II). Są to na razie tylko rachunki przygotowawcze dla ułożenia równań błędów.

Niewiadomymi w zadaniu są cztery poprawki  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta x_2$  i  $\delta y_2$  współrzędnych punktów (1) i (2) oraz poprawki  $\delta z$  niewiadomych orientacyjnych na wszystkich stanowiskach (wewnętrznych i zewnętrznych). Wszystkich niewiadomych mamy więc  $k = 10$ .

<sup>1)</sup> Do tego celu użyto bardzo wygodnych tablic H. Brandenburga, Zwei trigon. Tafeln zur Berechnung der Hilfs- oder Richtungsgrößen  $a$  und  $b$ ,... Lipsk 1932.



Tabela I.

Obliczenie kątów kierunkowych (azymutów) przybliżonych oraz współczynników  $a$  i  $b$  (rachunek maszyną).

Kąt kierunkowy od $A$ do $B$	$y_B$ $y_A$ $\Delta y = y_B - y_A$	$x_B$ $x_A$ $\Delta x = x_B - x_A$	$F$ (z tablic) $a = \frac{F}{\Delta x}$	Kontrola <sup>1)</sup> $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$
Oznaczenie punktów	$\Delta x + \Delta y$ $\text{tg } \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gdy $\Delta y < \Delta x$	$\Delta x - \Delta y$	(znak $\Delta y$ ) $b = \frac{F}{\Delta y}$	
Obliczenie odnosi się do kierunków Nr.	lub $\text{ctg } \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ gdy $\Delta x < \Delta y$ $\varphi$	Kontrola $\left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \psi = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y} \\ \psi \\ \alpha \end{array} \right.$	(znak przeciwny $\Delta x$ ) $b = \frac{F}{\Delta y}$	$a = \frac{\rho''}{d^2} \Delta y$ $b = \frac{\rho''}{d^2} \Delta x$
$B$ W. Zamek	0,000	0,000	$F = 49\,830,0$	
$A$ (1)	— 826,130	+ 3 206,840		
13, 17	+ 826,130	— 3 206,840	$d^2 = 10\,966\,300^2$	
	— 2 380,710	— 4 032,970		
	0,257 614 97	0,590 311 85	$a = + 15,54$ $b = + 60,32$	
	14° 26' 46", 11	30° 33' 13", 88		
	(1) — W. Zamek	165° 33' 13", 89		
$B$ Kleparów	— 4 190,493	+ 1 455,396	$F = 84\,482,9$	
$A$ (1)	— 826,130	+ 3 206,840		
10, 18	— 3 364,363	— 1 751,444	$d^2 = 14\,386\,500$	
	— 5 115,807	+ 1 612,919		
	0,520 587 09	0,315 281 44	$a = - 48,24$ $b = + 25,11$	
	62° 29' 56", 75	72° 30' 3", 26		
	(1) — Kleparów	242° 29' 56", 74		
$B$ Michał.	— 340,867	+ 6 389,328	$F = 30\,742,1$	
$A$ (1)	— 826,130	+ 3 206,840		
7, 19	+ 485,263	+ 3 182,488	$d^2 = 10\,363\,700$	
	+ 3 667,751	+ 2 697,225		
	0,152 479 13	0,735 389 34	$a = + 9,66$ $b = - 63,35$	
	8° 40' 10", 67	53° 40' 10", 68		
	(1) — Michał.	8° 40' 10", 67		

<sup>1)</sup> Kontrolę współczynników  $a$  i  $b$  przeprowadzamy suwakiem.

<sup>2)</sup> Wartość zaokrąglona.



B	Dublany	+ 5 174,530	+ 4 910,231	$F = 84\,913,8$
A	(2)	+ 2 189,870	+ 3 342,540	
2, 21		+ 2 984,660	+ 1 567,691	$d^2 = 11\,365\,850$
		+ 4 552,351	- 1 416,969	
		1,903 857 33	0,311 260 93	$a = + 54,16$ $b = - 28,45$
		62° 17' 21" 57	72° 42' 38", 43	
		(2) — Dublany	62° 17' 21", 57	
B	W. Zamek	0,000	0,000	$F = 94\,551,4$
A	(2)	+ 2 189,870	+ 3 342,540	
15, 22		- 2 189,870	- 3 342,540	$d^2 = 15\,968\,100$
		- 5 532,410	- 1 152,670	
		0,655 151 47	0,208 348 62	$a = - 28,29$ $b = + 43,18$
		33° 13' 51", 14	78° 13' 51", 14	
		(2) — W. Zamek	213° 13' 51", 14	
B	(1)	- 826,130	+ 3 206,840	$F = 9\,262,3$
A	(2)	+ 2 189,870	+ 3 342,540	
20, 23		- 3 016,000	- 135,700	$d^2 = 9\,114\,700$
		- 3 151,700	+ 2 880,300	
		0,044 993 37	0,913 887 74	$a = - 68,26$ $b = + 3,07$
		87° 25' 25", 71	47° 34' 34", 29	
		(2) — (1)	267° 25' 25", 71	
		(1) — (2)	87° 25' 25", 71	
B	Michal.	- 340,867	+ 6 389,328	$F = 101\,381,1$
A	(2)	+ 2 189,870	+ 3 342,540	
5, 24		- 2 530,737	+ 3 046,788	$d^2 = 15\,687\,500$
		+ 516,051	+ 5 577,525	
		0,830 624 58	0,092 523 30	$a = - 33,27$ $b = - 40,06$
		39° 42' 49", 88	5° 17' 10", 12	
		(2) — Michal.	320° 17' 10", 12	



Tabela II.  
Orientowanie kierunków obserwowanych.

Nr. kierunku	Punkty obserwowane	Kierunki pomierzone $K_m$			Różnica $\alpha - K_m$ $z_0 = \frac{[\alpha - K_m]}{n}$			Kąty kierunkowe $\alpha$			Kierunki zorientowane $K_0 = K_m + z_0$			Wyrazy wolne równań błędów $l = \alpha - K_0$
		0	'	"	0	'	"	0	'	"	0	'	"	
Stanowisko: Dublany														
1	Cz. Skala	0	0	2,62	175	42	52,41	175	42	55,03	175	42	56,12	-1,09
2	(2)	66	34	27,57				242	17	21,57	242	17	21,07	+0,50
3	Michał.	109	17	49,04	175	42	54,60	285	0	43,64	285	0	42,54	+1,10
					175	42	53,50							
Stanowisko: Michałowszczyzna														
4	Dublany	359	59	59,87	105	0	43,77	105	0	43,64	105	0	43,31	+0,33
5	(2)	35	16	26,01				140	17	10,12	140	17	7,45	+2,67
6	W. Zamek	71	56	3,54	105	0	42,78	176	56	46,32	176	56	46,98	-0,66
7	(1)	83	39	26,17				188	40	10,67	188	40	9,61	+1,06
8	Kleparów	112	57	1,58	105	0	43,77	217	57	45,35	217	57	45,02	+0,33
					105	0	43,44							
Stanowisko: Kleparów														
9	Michał.	0	0	0,00	37	57	45,35	37	57	45,35	37	57	45,23	+0,12
10	(1)	24	32	11,13				62	29	56,74	62	29	56,36	+0,38
11	W. Zamek	71	11	24,18	37	57	45,12	109	9	9,30	109	9	9,41	-0,11
					37	57	45,23							
Stanowisko: Wysoki Zamek														
12	Kleparów	0	0	0,26	289	9	9,04	289	9	9,30	289	9	9,84	+0,54
13	(1)	56	24	5,53				345	33	13,89	345	33	15,11	+1,22
14	Michał.	67	47	35,77	289	9	10,55	356	56	46,32	356	56	45,35	+0,97
15	(2)	104	4	43,59				33	13	51,14	33	13	53,17	-2,03
16	Cz. Skala	181	48	56,73	289	9	9,16	110	58	5,89	110	58	6,31	-0,42
					289	9	9,58							



## Stanowisko: Zamarstynów (1)

17	W. Zamek	0	0	0,00	165	33	13,89	165	33	13,89	165	33	13,05	+ 0,84
18	Kleparów	76	56	43,61	165	33	13,13	242	29	56,74	242	29	56,66	+ 0,08
19	Michał.	203	6	55,99	165	33	14,68	8	40	10,67	8	40	9,04	+ 1,63
20	(2)	281	52	15,21	165	33	10,50	87	25	25,71	87	25	28,26	- 2,55
					165	33	13,05							

## Stanowisko: Malechów (2)

21	Dublany	359	59	59,34	62	17	22,23	62	17	21,57	62	17	19,50	+ 2,07
22	W. Zamek	150	56	33,19	62	17	17,95	213	13	51,14	213	13	53,35	- 2,21
23	(1)	205	8	6,67	62	17	19,04	267	25	25,71	267	25	26,83	- 1,12
24	Michał.	257	59	48,72	62	17	21,40	320	17	10,12	320	17	8,88	+ 1,24
					62	17	20,16							

Ze względów rachunkowych korzystnie jest podzielić wszystkie współczynniki  $a$  i  $b$  przez 10; wówczas poprawki współrzędnych będą wyrażone w decymetrach. Wobec tego równania błędów na stanowisku zewnętrznym, np. na punkcie Michałowszczyzna, będą brzmiały:

$$\begin{aligned}
 \lambda_4 &= - \delta z_M && && && && && && && & + 0,33 \\
 \lambda_5 &= - \delta z_M && && && && - 3,327 \delta x_2 - 4,006 \delta y_2 && && && + 2,67 \\
 \lambda_6 &= - \delta z_M && && && && && && && & - 0,66 \\
 \lambda_7 &= - \delta z_M + 0,966 \delta x_1 - 6,335 \delta y_1 && && && && && && && & + 1,06 \\
 \lambda_8 &= - \delta z_M && && && && && && && & + 0,33 \\
 [\lambda] &= - 5 \delta z_M + 0,966 \delta x_1 - 6,335 \delta y_1 - 3,327 \delta x_2 - 4,006 \delta y_2 + 3,73 = 0.
 \end{aligned}$$

Natomiast na stanowisku wewnętrznym, np. na p. Malechów, równania błędów będą:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{17} &= - \delta z_1 + 1,554 \delta x_1 + 6,032 \delta y_1 && && && && && && && & + 0,84 \\
 \lambda_{18} &= - \delta z_1 - 4,824 \delta x_1 + 2,511 \delta y_1 && && && && && && && & + 0,08 \\
 \lambda_{19} &= - \delta z_1 + 0,966 \delta x_1 - 6,335 \delta y_1 && && && && && && && & + 1,63 \\
 \lambda_{20} &= - \delta z_1 + 6,826 \delta x_1 - 0,307 \delta y_1 - 6,826 \delta x_2 + 0,307 \delta y_2 - 2,55 \\
 [\lambda] &= - 4 \delta z_1 + 4,522 \delta x_1 + 1,901 \delta y_1 - 6,826 \delta x_2 + 0,307 \delta y_2 && && && && && && && & = 0.
 \end{aligned}$$

W tabeli III zestawiono wszystkie równania błędów (w ilości 24) oraz sumy równań dla każdego stanowiska z odpowiednią ujemną wagą ułamkową.



Tabela III  
Zestawienie równań błędów.

Stano- wisko	$\lambda$	$\delta z$	$\delta x_1$	$\delta y_1$	$\delta x_2$	$\delta y_2$	$l$	Waga $p$
Dublany	1	-1					-1,09	1
	2	-1					+0,50	1
	3	-1			+5,416	-2,845	+1,10	1
	Suma	-3			+5,416	-2,845	+0,51	- $\frac{1}{3}$
Michał.	4	-1					+0,33	1
	5	-1					+2,67	1
	6	-1			-3,327	-4,006	-0,66	1
	7	-1	+0,966	-6,335			+1,06	1
	8	-1					+0,33	1
Suma	-5	+0,966	-6,335	-3,327	-4,006	+3,73	- $\frac{1}{5}$	
Kleparów	9	-1					+0,12	1
	10	-1	-4,824	+2,511			+0,38	1
	11	-1					-0,11	1
	Suma	-3	-4,824	+2,511			+0,39	- $\frac{1}{3}$
W. Zamek	12	-1					-0,54	1
	13	-1	+1,554	+6,032			-1,22	1
	14	-1					+0,97	1
	15	-1					-2,03	1
	16	-1			-2,829	+4,318	-0,42	1
	Suma	-5	+1,554	+6,032	-2,829	+4,318	-3,24	- $\frac{1}{5}$
(1)	17	-1	+1,554	+6,032			+0,84	1
	18	-1	-4,824	+2,511			+0,08	1
	19	-1	+0,966	-6,335			+1,63	1
	20	-1	+6,826	-0,307	-6,826	+0,307	-2,55	1
	Suma	-4	+4,522	+1,901	-6,826	+0,307	0,00	- $\frac{1}{4}$
(2)	21	-1					+2,07	1
	22	-1			+5,416	-2,845	-2,21	1
	23	-1	+6,826	-0,307	-2,829	+4,318	-1,12	1
	24	-1			-6,826	+0,307	+1,24	1
	Suma	-4	+6,826	-0,307	-7,566	-2,226	-0,02	- $\frac{1}{4}$



Niewiadome orientacyjne  $\delta z$  rugujemy wprost z równań błędów, stosując odpowiednią regułę Schreibera, a następnie łączymy w jedno równanie każdą parę równań błędów, odpowiadających kierunkom przeciwnym (leżącym na jednym boku), przy czym wyraz wolny nowego równania jest średnią z wyrazów wolnych odpowiedniej pary, a waga takiego równania jest  $2^1$ . W ten sposób z 24 równań błędów (o 10 niewiadomych) otrzymujemy 7 równań o wagach jednakowych (równych 2) oraz 6 równań dodatkowych (sumowych) z ujemnymi wagami ułamkowymi (p. tabela IV). Pozostały zatem tylko cztery niewiadome.

Tabela IV.

Zestawienie zredukowanych równań błędów oraz równań dodatkowych.

Złączono razem równania	Ornazczenie	Waga	$\delta x_1$	$\delta y_1$	$\delta x_2$	$\delta y_2$	$l' =$ $\frac{1}{2}(l_i + l_k)$	Suma kontrolna s	
13 i 17	$\delta_1$	2	+1,554	+6,032			-0,190	+7,396	
10 i 18	$\delta_2$	2	-4,824	+2,511			+0,230	-2,083	
7 i 19	$\delta_3$	2	+0,966	-6,335			+1,345	-4,024	
2 i 21	$\delta_4$	2			+5,416	-2,845	+1,285	+3,856	
15 i 22	$\delta_5$	2			-2,829	+4,318	-2,120	-0,631	
5 i 24	$\delta_6$	2			-3,327	-4,006	+1,955	-5,378	
20 i 23	$\delta_7$	2	+6,826	-0,307	-6,826	+0,307	-1,835	-1,835	
Równania dodatkowe (sumy na stan.)	Dubl.	$\Delta_D$	$-\frac{1}{2}$			+5,416 -1,8053	-2,845 +0,9483	+0,510 -0,1700	+3,081 -1,0270
	Mich.	$\Delta_M$	$-\frac{1}{5}$	+0,966 -0,1932	-6,335 +1,2670	-3,327 +0,6654	-4,006 +0,8012	+3,730 -0,7460	-8,972 +1,7944
	Klep.	$\Delta_K$	$-\frac{1}{3}$	-4,824 +1,6080	+2,511 -0,8370			+0,390 -0,1300	-1,923 +0,6410
	W. Z.	$\Delta_{WZ}$	$-\frac{1}{5}$	+1,554 -0,3108	+6,032 -1,2064	-2,829 +0,5658	+4,318 -0,8636	-3,240 +0,6480	+5,835 -1,1670
	(1)	$\Delta_1$	$-\frac{1}{4}$	+4,522 -1,1305	+1,901 -0,4752	-6,826 +1,7065	+0,307 -0,0768		-0,096 +0,0240
	(2)	$\Delta_2$	$-\frac{1}{4}$	+6,826 -1,7065	-0,307 +0,0768	-7,566 +1,8915	-2,226 +0,5565	-0,020 +0,0050	-3,293 +0,8232

Dla ułatwienia maszynowego obliczenia współczynników równań normalnych wypisano w każdym drugim wierszu równań dodatkowych (sum) iloczyny współczynników przez odpowiednią wagę ułamkową. Otrzymane współczynniki równań normalnych kontrolujemy przy pomocy kolumny sum s.

<sup>1)</sup> W przypadku, gdy na pewnym boku mamy tylko jednostronną celową (w przód lub wstecz), równanie błędu, odpowiadające tej celowej, pozostaje niezmienniczone z wagą 1.



Równania normalne dla 4 niewiadomych (poprawek współrzędnych) są następujące:

$$\begin{aligned}
 &121,24 \delta x_1 - 20,15 \delta y_1 - 71,04 \delta x_2 + 7,07 \delta y_2 - 24,31 = 0 \\
 &- 20,15 \delta x_1 + 147,50 \delta y_1 + 6,05 \delta x_2 - 10,79 \delta y_2 - 8,74 = 0 \\
 &- 71,04 \delta x_1 + 6,05 \delta y_1 + 150,45 \delta x_2 - 31,56 \delta y_2 + 37,65 = 0 \\
 &7,07 \delta x_1 - 10,79 \delta y_1 - 31,56 \delta x_2 + 74,86 \delta y_2 - 36,15 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{N}$$

Tabela V.

Rozwiązanie równań normalnych wraz z równaniami wag metoda Gaussa.

## a) Redukcja 1.

	$\delta x_1$	$\delta y_1$	$\delta x_2$	$\delta y_2$	wyrazy wolne (znak przeciwny)	$Q_1$
1	+ 121,24 1,0	- 20,15 - 0,166 199	- 71,04 - 0,585 945	+ 7,07 + 0,058 314	+ 24,31 + 0,200 511	+ 1 + 0,008 248
2		+ 147,50 - 3,349	+ 6,05 - 11,807	- 10,79 + 1,175	+ 8,74 + 4,040	+ 0,166 199
3			+ 150,45 - 41,626	- 31,56 + 4,143	- 37,65 + 14,244	+ 0,585 945
4				+ 74,86 - 0,412	+ 36,15 - 1,418	- 0,058 314
S	+ 37,12	+ 122,61 + 6,169	+ 53,90 + 21,750	+ 39,58 - 2,165	+ 31,55 - 7,443	+ 1 - 0,306 169

## b) Redukcja 2.

	$\delta y_1$	$\delta x_2$	$\delta y_2$	w. w.	$Q_1$	$Q_2$
2	+ 144,151 1,0	- 5,757 - 0,039 937	- 9,615 - 0,066 701	+ 12,780 + 0,088 657	+ 0,166 199 + 0,001 153	+ 1 + 0,006 937
3		+ 108,824 - 0,230	- 27,417 - 0,384	- 23,406 + 0,510	+ 0,585 945 + 0,006 637	+ 0,039 937
4			+ 74,448 - 0,641	+ 34,732 + 0,852	- 0,058 314 + 0,011 086	+ 0,066 701
S	+ 128,779	+ 75,650 + 5,143	+ 37,416 + 8,590	+ 24,106 - 11,417	+ 0,693 830 - 0,148 482	+ 1 - 0,893 340

## c) Redukcja 3.

	$\delta x_2$	$\delta y_2$	w. w.	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
3	+ 108,594 1,0	- 27,801 - 0,256 009	- 22,896 - 0,210,840	+ 0,592 582 + 0,005 457	+ 0,039 937 + 0,000 368	+ 1 + 0,009 209
4		+ 73,807 - 7,117	+ 35,584 - 5,862	- 0,047 228 + 0,151 706	+ 0,066 701 + 0,010 224	+ 0,256 009
S	+ 80,793	+ 46,006 + 20,684	+ 12,688 + 17,034	+ 0,545 354 - 0,440 887	+ 0,106 638 - 0,029 732	+ 1 + 0,743 942



## d) Redukcja 4 i obliczenie niewiadomych.

	$\delta y_2$	w. w.	$Q_{1.}$	$Q_{2.}$	$Q_{3.}$	$Q_{4.}$
4	+66,690	+ 29,722	+0,104 478	+0 076 925	+0,256 009	+1
	1,0	+0,445 674	+0,001 567	+0,001 153	+0,003 839	+0,014 995
		$= \delta y_2$	$= Q_{1.4}$	$= Q_{2.4}$	$= Q_{3.4}$	$= Q_{4.4}$

## e)

$\delta x_2$	$Q_{1.5}$	$Q_{2.5}$	$Q_{3.5}$
-0,210 840	+0,005 457	+0,000 368	+0,009 209
+0,114 096	+0,000 401	+0,000 295	+0,000 983
-0,096 744	+0,005 858	+0,000 663	+0,010 192

## f)

$\delta y_1$	$Q_{1.2}$	$Q_{2.2}$
+0,088 657	+0,001 153	+0,006 937
+0,029 727	+0,000 104	+0,000 077
-0,003 864	+0,000 234	+0,000 026
+0,114 520	+0,001 491	+0,007 040

## g)

$\delta x_1$	$Q_{1.1}$
+0,200 511	+0,008 248
-0,025 989	-0,000 091
-0,056 687	+0,003 432
+0,019 033	+0,000 248
+0,136 868	+0,011 837

U w a g a. Kontrolę poszczególnych redukcji przeprowadzono przy pomocy sumy równań normalnych (ostatni wiersz schematów a, b i c), które podlegają również redukcji. Niewiadome kontrolujemy przez wstawienie ich wartości do sumy równań w schemacie a).

Poprawki współrzędnych:

$$\delta x_1 = +0,137 \text{ dm}$$

$$\delta x_2 = -0,097 \text{ dm}$$

$$\delta y_1 = +0,114 \text{ ,,}$$

$$\delta y_2 = +0,446 \text{ ,,}$$



Wstawiając te wartości do równań błędów tabeli III, obliczymy z sumy równań błędów na każdym stanowisku poprawki niewiadomych orientacyjnych:

$$\begin{aligned} \delta z_D &= -0'',42, & \delta z_M &= +0'',34 & \delta z_K &= +0'',01, & \delta z_{WZ} &= -0'',03, \\ & & \delta z_1 &= +0'',41 & \text{ i } & \delta z_2 &= +0'',16, \end{aligned}$$

a następnie błędy  $\lambda$  poszczególnych kierunków, otrzymując:

$\lambda_1 = -0'',67$	$\lambda_4 = -0'',01$	$\lambda_9 = +0'',11$	$\lambda_{12} = -0'',51$
$\lambda_2 = -0,84$	$\lambda_5 = +0,87$	$\lambda_{10} = 0,00$	$\lambda_{13} = -0,29$
$\lambda_3 = +1,52$	$\lambda_6 = -1,00$	$\lambda_{11} = -0,12$	$\lambda_{14} = +1,00$
<u>suma: +0,01</u>	$\lambda_7 = +0,13$	<u>suma: -0,01</u>	$\lambda_{15} = +0,20$
	$\lambda_8 = -0,01$		<u><math>\lambda_{16} = -0,39</math></u>
	<u>suma: -0,02</u>		<u>suma: +0,01</u>
	$\lambda_{17} = +1'',33$	$\lambda_{21} = +0'',12$	
	$\lambda_{18} = -0,71$	$\lambda_{22} = -0,17$	
	$\lambda_{19} = +0,63$	$\lambda_{23} = +0,42$	
	<u><math>\lambda_{20} = -1,26</math></u>	<u><math>\lambda_{24} = -0,38</math></u>	
	<u>suma: -0,01</u>	<u>suma: -0,01</u>	

$$[\lambda\lambda] = 11,42. \text{ Kontrola: } [u \cdot 10] = 40,576 - (5,020 + 24,081) = 11,47_5.$$

Wobec tego średni błąd pomierzonego kierunku wynosi według wzoru ścisłego:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-k}} = \sqrt{\frac{11,47}{24-10}} = \pm 0'',90_5.$$

Średnie błędy współrzędnych punktów (1) i (2) są następujące:

$$\begin{aligned} \mu_{x_1} &= \mu \sqrt{Q_{1.1}} = 0,905 \sqrt{0,01184} = \pm 0,099 \text{ dm} = \pm 1,0 \text{ cm} \\ \mu_{y_1} &= \mu \sqrt{Q_{2.2}} = 0,905 \sqrt{0,00704} = \pm 0,076 \text{ „} = \pm 0,8 \text{ „} \\ \mu_{x_2} &= \mu \sqrt{Q_{3.3}} = 0,905 \sqrt{0,01019} = \pm 0,091 \text{ „} = \pm 0,9 \text{ „} \\ \mu_{y_2} &= \mu \sqrt{Q_{4.4}} = 0,905 \sqrt{0,01500} = \pm 0,111 \text{ „} = \pm 1,1 \text{ „} \end{aligned}$$

Wyrównane współrzędne punktów szukanych:

(1) Zamarstynów

$$\begin{aligned} y_0 &= -826,130 & x_0 &= +3\,206,840 \\ \delta y_1 &= +0,011 & \delta x_1 &= +0,014 \\ \hline y_1 &= -826,119 & x_1 &= +3\,206,854 \end{aligned}$$

(2) Malechów

$$\begin{aligned} y_0 &= +2\,189,870 & x_0 &= +3\,342,540 \\ \delta y_2 &= +0,045 & \delta x_2 &= -0,010 \\ \hline y_2 &= +2\,189,915 & x_2 &= +3\,342,530. \end{aligned}$$



Przed obliczeniem tego samego przykładu sposobem prof. Banachiewicza, podaję kilka uwag, odnoszących się do krakowianów.

Biorąc rzecz ze strony matematyki, krakowiany stanowią rodzaj macierzy Cayley'a, z tą jednak różnicą, że podczas gdy macierze Cayley'a nie nadają się do bezpośrednich działań rachunkowych, krakowiany są wzorami przydatnymi do rachowania (zawierają w sobie gotowy schemat rachunkowy). Poza tym teoria krakowianów różni się od teorii macierzy prawem mnożenia, i ta ich właściwość powoduje, że nadają się one specjalnie do rozwiązywania liniowych równań, a więc i równań normalnych (z odpowiednimi kontrolami rachunkowymi).

Odsyłając czytelnika dla zapoznania się z teorią krakowianów do rozpraw specjalnych<sup>1)</sup>, poprzestaję na podaniu przykładu obliczeniowego, zawartego w rozprawie prof. Banachiewicza pt. «Was sind die Formeln neuer Art?», który objaśni czytelnika o sposobie mnożenia krakowianów.

Niech wielkości  $X$  i  $Y$  będą wyznaczone przy pomocy następujących związków:

$$X = \xi [e(ca - da') - f(c'a - d'a')] + \eta [e(-cb + db') - f(-c'b + d'b')]$$

$$Y = \xi [e'(ca - da') - f'(c'a - d'a')] + \eta [e'(-cb + db') - f'(-c'b + d'b')];$$

jeżeli związki te przedstawimy w formie krakowianowej, przybiorą one kształt następujący:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & a' \\ -b & -b' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & c' \\ -d & -d' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & e' \\ -f & -f' \end{Bmatrix}$$

Dla wykazania, jak należy wykonać zaznaczony tym wzorem rachunek (mnożenie krakowianów), wstawmy następujące wartości szczegółowe zamiast wyrazów, znajdujących się po prawej stronie związku:

$$\xi = 3, \eta = 2, a = 4, a' = -1, b = 5, b' = -6, c = -5, c' = 7,$$

$$d = -1, d' = 2, e = 1, e' = 3, f = 4, f' = 2.$$

W wyniku otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{Bmatrix}$$

Mnożenie powyższych czterech krakowianów wykonujemy kolejno, przemnażając najpierw ze sobą pierwsze dwa, a następnie mnożąc wynik przez trzeci krakowian itd.

Wedle zasady mnożenia krakowianów, otrzymamy, biorąc pod uwagę dwa pierwsze z nich:

$$3 \times 4 + 2 \times (-5) = 2$$

oraz

$$3 \times (-1) + 2 \times 6 = 9,$$

<sup>1)</sup> T. Banachiewicz, Was sind die Formeln neuer Art. Acta Astr. c, Mai 1929.  
F. Koebeke, O zastosowaniu krakowianów w astronomii, Poznań 1937.



zatem

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 9 \end{Bmatrix}.$$

Mnożąc uzyskany wynik przez krakowian trzeci, otrzymujemy analogicznie:

$$2 \times (-5) + 9 \times 1 = -1$$

$$2 \times 7 + 9 \times (-2) = -4,$$

zatem

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -4 \end{Bmatrix}.$$

W ten sam sposób wykonujemy trzecie mnożenie, uzyskując w rezultacie:

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ -4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix},$$

tj.  $X = 15$ ,  $Y = 5$ .

Iloczyn dwu krakowianów, o elementach  $a$  i  $b$ , jest krakowianem o elementach  $c$ , co piszemy ogólnie tak:

$$\begin{Bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & b_{3,2} \\ b_{1,3} & b_{2,3} & b_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{Bmatrix},$$

przy czym poszczególne elementy  $c_{i,k}$  obliczamy według wzoru

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + a_{i,3} b_{k,3},$$

a więc np.

$$c_{1,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{1,2} + a_{1,3} b_{1,3},$$

$$c_{3,2} = a_{3,1} b_{2,1} + a_{3,2} b_{2,2} + a_{3,3} b_{2,3}, \text{ itd.}$$

Rozwiązanie równań normalnych metodą prof. Banachiewicza, które opiera się głównie na mnożeniu odpowiednich krakowianów, zawiera jeszcze specjalny sposób wyznaczania poszczególnych wyrazów krakowianów. Objasnienie odnośnych rachunków podano przy opracowaniu szczegółowym następującego przykładu rachunkowego.



Schemat rozwiązania równań normalnych  
metodą prof. Banachiewicza



## Objaśnienia do schematu rachunkowego prof. Banachewicza.

1) Współczynnik zredukowany otrzymuje się przez pomnożenie liczb jego kolumny z tab. I przez liczby tej kolumny tab. II, której numer zgadza się z numerem wiersza tego współczynnika.

2) Dla zrozumienia działań tablicami I, II i III, przedstawiono tablicę II i III w formie ogólnej, podając jednocześnie znaczenie poszczególnych symboli.

Tablica II. $p_{i,k}$				Tablica III. $\alpha_{i,k}$			
1	$p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$p_{1,4}$	1			
	1	$p_{2,3}$	$p_{2,4}$	$\alpha_{1,2}$	1		
		1	$p_{3,4}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	1	
			1	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{3,4}$	1

$$p_{1,2} = -\frac{[pab]}{[paa]}, \quad p_{1,3} = -\frac{[pac]}{[paa]}, \quad p_{1,4} = -\frac{[pad]}{[paa]}, \quad \dots, \quad p_{2,3} = -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]},$$

$$p_{2,4} = -\frac{[pbd.1]}{[pbb.1]}, \quad \dots, \quad p_{3,4} = -\frac{[pcd.2]}{[pcc.2]}, \quad \dots$$

$$\alpha_{1,2} = p_{1,2}, \quad \alpha_{1,3} = p_{1,3} + p_{2,3} \alpha_{1,2}, \quad \alpha_{2,3} = p_{2,3};$$

$$\alpha_{1,4} = p_{1,4} + p_{2,4} \alpha_{1,2} + p_{3,4} \alpha_{1,3}, \quad \alpha_{2,4} = p_{2,4} + p_{3,4} \alpha_{2,3}, \quad \alpha_{3,4} = p_{3,4}.$$

Jak widzimy, liczby tabl. II powstają w kolejności tworzenia współczynników zredukowanych (drugie wiersze tabl. I), zaś wyrazy tabl. III powstają sukcesywnie przez wymnażanie tabl. II przez tabl. III.

3) Kolumna kontrolna tabl. II wymnożona przez kol. kontr. tabl. III daje 1,236 131, co powinno równać się sumie wszystkich  $\alpha_{i,k}$ ; suma ta wynosi 1,236 130.

4) Liczby  $q_{i,k}$  powstały z liczb tabl. III, pomnożonych wierszami przez dolne liczby słupa 1, czyli przez  $\sqrt{\frac{1}{[paa]}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{[pbb.1]}}$ , itd.

5) Wyrazy słupa 2 są wynikiem mnożenia poszczególnych wierszy tabl. IV przez wyrazy wolne (na dole). Suma kwadratów wyrazów słupa 2 stanowi wyraz redukcyjny dla [II] (kontrola  $[\lambda\lambda]$ ).

6) Wartości niewiadomych otrzymujemy przez wymnożenie tabl. IV przez słup 2. Wartości niewiadomych pomnożone przez kol. kontrolną tabl. I (wiersze górne) dają +31,5506, co powinno być równe sumie wyrazów wolnych równań normalnych (+31,55).

7) a) Suma kol. kontrolnej tabl. V powinna być równa sumie kwadratów liczb kol. kontrolnej tabl. IV.

b) Kolumna kontrolna tabl. I (wiersze górne) pomnożona przez kol. kontrolną tabl. V powinna dać 4 (ilość równań norm.); w omawianym przykładzie otrzymujemy 4,00009, co jest kontrolą wystarczającą.

Dalszy rachunek, odnoszący się do wyznaczenia poszczególnych  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\mu_x$  i  $\mu_y$ , przeprowadzamy jak w metodzie poprzedniej.



## Schemat rozwiązania równań normalnych metodą Banachiewicza.

L. p.	Tablica I. Współczynniki równań normalnych. Współczynniki r. norm. zredukowane <sup>1)</sup>					Slup 1. Odwrotności współczyn- ników kwa- dratowych i ich pier- wiastki				Tablica II. $f_{i,k}^{2)}$					Tablica III. $a_{i,k}^{3)}$		
	1	2	3	4	suma kontrolna				suma kontrolna					suma kontrolna <sup>3)</sup>			
1	+ 121,24	- 20,15	- 71,04	+ 7,07	+ 37,12	0,008 2481 0,090 819	1	+ 0,166 199	+ 0,585 945	- 0,058 314	+ 0,693 830	1			+ 1,0		
2		+ 147,50 + 144,151	+ 6,05 - 5,757	- 40,79 - 9,615	+ 122,61 + 128,779	0,006 9372 0,083 290		1	+ 0,039 937	+ 0,066 701	+ 0,106 638	+ 0,166 199	1		+ 1,166 199		
3			+ 150,45 + 108,594	- 31,56 - 27,801	+ 53,90 + 80,793	0,009 2086 0,095 961			1	+ 0,256 009	+ 0,256 009	+ 0,592 582	+ 0,039 937	1	+ 1,632 510		
4				+ 74,86 + 66,689	+ 39,58 + 66,689	0,014 9948 0,122 453				1		+ 0,104 478	+ 0,076 925	+ 0,256 009	1		
												+ 1,236 130			+ 1,236 131		

L. p.	Slup 2 <sup>5)</sup>	Tablica IV. $q_{i,k}^{4)}$				suma kontrolna	Slup 3. Wartości niewiadom- ych <sup>6)</sup> $dm$	Tablica V. $Q_{i,k} = \{Tabl. IV\}^2$				suma kontrolna
1	+ 2,207 81	+ 0,090 819			+ 0,090 819	+ 0,136 88	+ 0,011 837				+ 0,020 753	
2	+ 1,064 48	+ 0,013 843	+ 0,083 290		+ 0,097 133	+ 0,114 53	+ 0,001 491	+ 0,007 041			+ 0,010 349	
3	- 2,197 05	+ 0,056 865	+ 0,003 832	+ 0,095 961	+ 0,156 658	- 0,096 73	+ 0,005 858	+ 0,000 663	+ 0,010 191		+ 0,020 551	
4	+ 3,639 74	+ 0,012 794	+ 0,009 420	+ 0,031 349	+ 0,122 453	+ 0,445 70	+ 0,001 567	+ 0,001 154	+ 0,003 839	+ 0,014 995	+ 0,021 555	
		+ 24,31	+ 8,74	- 37,65	+ 36,15 <sup>7)</sup>					suma:	0,073 208 <sup>8)</sup> (0,073,206)	

<sup>\*)</sup> Wyraży wolne równań norm. (N), ze znakami przeciwnymi.  
Suma wyr. wolnych = + 31,55 (z kontr. + 31,5506).



## LITERATURA

### A. DZIELA TREŚCI OGÓLNEJ

- HELMERT F. R. Die math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie (2 tomy), Leipzig 1880 i 1884.
- BOURGOIS R. Cours de Géodésie et d'Astronomie de position, Paris 1912.
- ADAMS H. Practical Surveying and Elementary Geodesy, London 1913.
- HARTNER-DOLEŽAL Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, Wien 1921.
- BOURGOIS R. Géodésie élémentaire, Paris 1922 (wyd. 2-e).
- JORDAN-EGGERT Handbuch der Vermessungskunde, t. III, Stuttgart 1923.
- AEENDROTH A. Die Praxis des Vermessungsingenieurs, Berlin 1923.
- PRÉVOT. Topographie, Paris 1925.
- NÄBAUER M. Grundzüge der Geodäsie mit Einschluss der Ausgleichsrechnung, Leipzig 1928.
- LOPERFIDO A. Prima nozioni di Geodesia operativa, Milano 1928.
- DE GRAAFF HUNTER J. Geodesie, Survey of India Prof. Papers, 1929.
- PIZETTI P. Trattato di Geodesia teoretica, Bologna 1928.
- KOWACZEW J. D. Osnowy na wyzszała geodezja (po bułgarsku), Sofia 1930.
- JORDAN-EGGERT Handbuch der Vermessungskunde, tom II (część 1-a i 2-a), Stuttgart 1931 i 1933.
- NÄBAUER M. Vermessungskunde, Berlin 1932.
- TARDI P. Traité de Géodésie (2 tomy), Paris 1934.
- ALEKSAPOLSKI, GOŁOWIN, KRASOWSKI, CZEBOTAREW i SZIRAJEW Kurs Geodezji, Moskwa Lenin-grad 1934.

Dziewięć treści ogólnej autorów polskich podano przy końcu § 1 rozdziału I.

### B. DZIELA I ROZPRAWY. DOTYCZĄCE POSZCZEGÓLNYCH ROZDZIAŁÓW

#### DO ROZDZIAŁU II:

- CZUBER E. Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891.
- HELMERT F. R. Die Ausgleichsrechnung nach der Math. der kl. Quadrate, Leipzig Berlin 1907.
- CZUBER E. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1908.
- POINCARÉ H. Calcul des probabilités, Paris 1912.
- WEIGEL K. Rachunek wyrównawczy wedle metody najmn. kwadratów itd., Lwów-Warszawa 1923.
- WARCZALOWSKI E. Rachunek wyrównania według metody najmn. kwadratów, Warszawa 1923.
- JORDAN-EGGERT Handbuch der Vermessungskunde, tom I, Stuttgart 1935.



## DO ROZDZIAŁU III:

- KÖNIG A. Geometrische Optik, Leipzig 1929.  
 ROHR M. v. Die optischen Instrumente, Berlin 1930.  
 SCHROTT P. Praktische Optik, Wien 1930.  
 KÖNIG A. Das Fernrohr (Handb. d. Astroph. t. I, cz. 1), Berlin 1933.  
 WEIGEL K. Teoria optyczna lunety z soczewką ogniskującą, Przegł. Miern. 1933.  
 KOHLRAUSCH F. Praktische Physik, Leipzig Berlin 1935.

## DO ROZDZIAŁU V:

- AMSLER Neuere Planimeterkonstruktionen, Z. f. Verm. 1884.  
 LORBER F. Coradis Kugelplanimeter, Z. f. Verm. 1888.  
 WILSKI P. Rollenschiefe u. Scharnierschiefe beim Amslerschen Polarplanimeter, Z. f. Verm. 1892.  
 LANG Neuerungen am Kompensationsplanimeter, Z. f. Verm. 1898.  
 MONTIGEL R. Genauigkeitsuntersuchungen über Flächenbestimmungen mit dem Planimeter, Z. f. Verm. 1926.  
 ULBRICH K. Allgemeine math. Theorie der Umfahrungsplanimeter im vektoranalytischer Darstellung, Oe. Z. f. Verm. 1930.  
 ULBRICH K. Untersuchung u. d. Genauigkeit der Scheibenrollplanimeter, Z. f. Instr. 1930.

- GAUS F. G. Die Teilung der Grundstücke, Berlin 1904.  
 VOLGER Ch. Geodätische Übungen f. Landmesser u. Ingenieure, 1-a część. Berlin 1910.  
 KOLANOWSKI W. Nowy sposób obliczenia powierzchni ze współrzędnych, Przegł. Miern. 1930.

## DO ROZDZIAŁU VI:

- HELMERT F. R. Die math. u. phys. Th. der höheren Geodäsie (tom II-gi), Leipzig 1884.  
 PELLETAN ET LALLEMAND Lever des plans et nivellement, Paris 1889.  
 STAMPFER-LORBER Das Nivellieren, Wien 1894.  
 REINHERTZ Über die Schätzungsgenauigkeit an Nivellier- und Distanzskalen, Z. f. Verm. 1897.  
 REINHERTZ Ablesungsgenauigkeit an Nivellierskalen, Z. f. Verm. 1897.  
 KUMMER Genauigkeit der Abschätzung mittels Nivellierfernrohres, Z. f. Verm. 1897.  
 LALLEMAND Ch. Nivellement de haute Précision, Paris Liège 1912.  
 VERHANDLUNGEN d. 17-ten Allg. Konferenz d. Intern. Erdmessung 1912.  
 WARCHALOWSKI E. Niwelacja geometryczna, Warszawa 1926.  
 BAESCHLIN C. F. Untersuchungen ü. d. Reduktion der Präzisionsnivellement, Bern 1926.  
 LALLEMAND Ch. Propositions pour les Nivellements de haute Précision, Bul. géod. 1928.  
 PARHURST DOUGLAS J. Design and Constructions of First-order Leveling Rod, Eng. News-Record, New York 1928.  
 NECTOUX Niveau à nivelle indépendante à grande puissance, J. Géom. Exp. 1929.  
 BAROT Niveau à lunette Wild de haute précision, J. Géom. Exp. 1930.  
 MARTIN R. Le niveau à lunette Zeiss nr. 2, J. Géom. Exp. 1930.  
 DE GRAAFF HUNTER J. and BOMFORD G. Dynamic and Orthometric Heights, Surv. Ind. Geod. Rep. 1930.  
 WERKMEISTER P. Das Präzisions-Nivellierinstrument von H. Wild, Z. f. Instr. 1930.  
 RÜNE G. A. Definition nebst Formeln d. Inter. Erdmessungskonf. 1912 betr. «Nivellements h. Präz. Z. f. Verm. 1930.  
 NIETHAMMER Th. Nivellement und Schwere als Mittel z. Berechn. wahrer Meereshöhen, Bale 1932.  
 VIGNAL J. Evaluation de la Précision d'une méthode de Nivellement, Bul. géod. 1936.



## DO ROZDZIAŁU VII:

- SCHERMERHORN W. Vergleichung des neuen Zeiss-Theodolits mit heutigen Konstruktionen, Z. f. Instr. 1925.
- GUTKOWSKI F. Układ optyczny teodolitu Wilda, Przegl. Miern. 1928.
- BASTL F. Über die Exzentrizität der Alhidade, Oe. Z. f. Verm. 1928.
- ROHRMANN A. Zur Bestimmung von Kreisteilfehlern, Z. f. Instr. 1928.
- FRTZ L. Untersuchung eines Breithaupt'schen Kreises nach d. Meth. von Heuvelink u. Bemerkungen zu d. Meth., Z. f. Instr. 1928.
- PERRIER G. Un nouveau théodolit à microscope, Rev. Opt. 1928, 1929.
- WERKMEISTER P. Der neue Präzisionstheodolit Wild, Z. f. Instr. 1928.
- LEEMAN W. Mitteilungen über e. einfachen Apparat zur Prüfung von Kreisteilungen, Schw. Z. f. Verm. 1930.
- RANNIE I. L. Design of new types of theodolites, Can. Surv. 1930.

## DO ROZDZIAŁÓW VIII i IX:

- FERBER Polygonausgleichung n. d. Meth. d. kl. Quadrate mit in voraus angenommenen mittl. Fehlern, Z. f. Verm. 1907.
- VOGLER Ch. Geodätische Übungen f. Landmesser u. Ingenieure I T., Berlin 1910.
- HAPANOWICZ N. Eine Studie ü. Ausgl. v. Poligonzügen, Oe. Z. f. Verm. 1912.
- WEIGEL K. Zasady przeprowadzenia pomiaru krajów..., Czas. Techn. 1918.
- GAUSS F. G. Die trigon. u. polygon. Rechnungen in d. Feldmessenkunst, Stuttgart 1922.
- KLUŻNIAK S. Technika pomiarowa w pracach polnych, Warszawa 1924.
- WEIGEL K. O dostosowaniu tymczas. sieci tr. do ostat. sieci tr. Państwa Polskiego, Archiwum Tow. Nauk. Lwów, 1925.
- KLUŻNIAK S. Wyrównanie poligonów wdl. Instr. Techn. M. R. R., Przegl. Miern. 1928.
- EGGERT O. Die Ausgleichung von Poligonzügen n. d. Meth. d. kl. Quadrate, Z. f. Verm. 1928.
- PERRIER G. Propositions pour les Bases et Triangulations de I ord., Bul. géod. 1928.
- ROUSSILHE H. Propositions pour les Triang. secondaires..., Bul. géod. 1928.
- WIMMER K. Die neueren preusz. Katasterneumessungen, 1928.
- FÖRSTER G., SCHÜTZ G. Systematische Fehler in geod. Netzen, Veröff. d. preusz. geod. Inst. 1929.
- KERSZUS H. Geodätisches Rechnen, Stettin 1929.
- PINKWART Genauigkeit des Einkettens, Z. f. V. 1930.
- EGGERT O. Rechwinklige Koordinaten auf d. Ellipsoid, a. d. Kugel u. in d. Ebene, Z. f. Verm. 1930.
- ZAGRZEJEWSKI M. Ścisła poligonometria wlg met. prof. Danilowa, Przegl. Miern. 1930.
- WEIGEL K. Wyrównanie spostrzeżeń niejednorodnych. Kryterium przyjęcia wag, Spraw. Tow. Nauk. we Lwowie 1936.

## DO ROZDZIAŁU X:

- MONTANARI G. La livella dioptrica del dottore G. Montanari, Venezia 1680.
- Das neue Tachymeter nach Patent TICH'Y u. STARKE, Wochenschr. d. oester. Ing. u. Arch. Ver. 1878.
- TICH'Y A. Die Präzisionstachymetrie u. ihre neuesten instrumentalen Mittel, Z. d. oestr. Ing. u. Arch. Ver. 1892.
- GOULIER Etudes théoriques et pratiques ..... sur la tachéométrie, Paris 1892 (Gauthier-Villars).
- HAMMER E. Der Hammer-Fennelsche Tachymeter-Theodolit u. d. Tachymeter-Kippregel, Stuttgart 1901.
- D'ANGELO Le tachéomètre et ses applications....., Paris 1906.
- SCHIEWOR G. Der Tachymeter Hammer-Fennel....., Kassel 1930.
- WERKMEISTER P. Topographie, Berlin 1930.



## DO ROZDZIAŁU XI:

- BALTENSPERGER Die Polarkoordinatenmethode m. optischer Distanzmessung bei Grundbuchvermessungen, Z. f. Verm. 1926.
- LÜDEMANN K. Genauigkeitsuntersuchungen an einem geodätischen Doppelbild Entfernungsmesser, Z. f. Inst. 1928.
- LÜDEMANN K. Die Katastermessung n. d. Polarkoordinatenmethode . . . , Allgem. Verm. Nachr. 1928.
- BAROT Le théodolit universel Wild et son duplicateur tachéom., J. Géom. Exp. 1929.
- BOSSHARDT R. La mesure optique des distances et le tachéomètre auto-réducteur Bosshardt-Zeiss, J. Géom. Exp. 1929.
- ACKERL Versuchsmessungen m. d. selbstreduzierenden Distanzmesser von Bosshardt-Zeiss, Z. f. Instr. 1929.
- BOSSHARDT R. Optische Distanzmessung und Polarkoordinatenmethode, Stuttgart 1930.

## DO ROZDZIAŁU XIII:

- DELAMBRE Base du système métrique décimale . . . , t. II, 1807.
- GAUSS Berliner Astron. Jahrbuch, 1826.
- BESSEL Gradmessung in Ostpreußen, 1838.
- BAEYER Die Küstenvermessung . . . , Berlin 1849.
- KOPPE Trigonometrische Höhenmessung zur Gotthardtunnel-Triangulierung, Z. f. Verm. 1876.
- HELMERT F. R. Diskussion der Beobachtungsfehler in Koppes Vermessung . . . , Z. f. Verm. 1876.
- FEARNLEY Zur Theorie der terrestr. Refraktion, Intern. Erdm. 1883. Anhang VII.
- HELMERT F. R. Die math. u. phys. Theorien d. höh. Geodäsie, T. II, Kap. 8, 1884.
- LALLEMAND Ch. Note sur l'erreur de réfraction dans le nivellement géométriques, Intern. Erd. Konf., Berlin 1897.
- KOSS Kimmtiefenbeobachtungen, Mitt. aus d. Gebiete d. Seewesens, Pola 1900.
- HELMERT F. R. Trigonom. Höhenmessung u. Refraktionskoeffizienten in d. Nähe d. Meerespiegels, Akad. d. Wissensch. Wien 1908.
- WÜNSCHMANN Die terrestrische Strahlenbrechung, Handbuch d. phys. Optik, Leipzig 1926.
- DE GRAAFF HUNTER J. The Height of Mount Everest and other Peaks, Surv. Ind. Geod. Rep. 1928.
- BAKER O. Principes du nivellement géodésique, Paris 1929.
- ROHRER H. Die rechnerische Auswertung trigonometrischer Höhenmessungen, Oe. Z. f. Verm. 1929.

## DO ROZDZIAŁU XIV:

- LAPLACE Traité de mécanique céleste, t. IV, Paris 1805.
- BABINET Nivellements barométriques. Modification de formule barom. de Laplace . . . , Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences, Paris 1850.
- PLANTAMOUR Résumé des observ. thermom. et barom., faites à l'observ. de Genève et au Gr. St. Bernhard, Genève 1851.
- RÜHLMANN Die Barometrischen Höhenmessungen . . . , Leipzig 1870.
- VOGLER Ch. Beitrag zu den Erfahrungen über Naudetsche Aneroide, Z. f. Verm. 1877.
- WHYMPER How to use the aneroid barometer, London 1891.
- ANGOT Sur la formule barométrique, Ann. du Bureau Centr. Météorol. 1896, B. Memoires, Paris 1898.
- LIZNAR J. Die barometrische Höhenmessung, Leipzig Wien 1904.
- GROSSMANN Die barom. Höhenformel u. ihre Anwendung, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol. 1905.
- ALT E. Eine neue Gestalt der hypsom. Formel, Meteorol. Z. 1909.



- HANN, JELLINER Anleitung zu meteorol. Beobacht., Wien 1910.  
 LIZNAR J. Zur barometr. Höhenmessung, Meteorol. Z. 1915.  
 LIZNAR J. Die neuen barom. Höhenformeln von ALT, Meteorol. Z. 1917.  
 JORDAN W. Barometr. Höhentafeln, Stuttgart 1917.  
 EBERT H. Ueber d. barometr. Höhenskala, Z. f. Instr. 1929.  
 LÜDEMANN K. Teufenmessung mit d. Quecksilberbarometer, Allg. Verm. Nachr. 1929.  
 OMODEI D. Misure altimetriche in base alla pressione atmosferica Firenze, Ist. geogr. milit. 1930,

## DO ROZDZIAŁU XV:

- HUGERSHOFF R. Photogrammetrie und Luftbildwesen, Wien 1930.  
 GAST P. Vorlesungen über Photogrammetrie, Leipzig 1930.  
 v. GRUBER O. Ferienkurs in Photogrammetrie, Stuttgart 1930.  
 BAESCHLIN u. ZELLER Lehrbuch der Stereophotogrammetrie, Zürich 1934.  
 WILCZKIEWICZ E. Zasady zdjęć fotogrametrycznych, Lwów 1930.  
 OLLIVIER F. La Topographie sans Topographes, Paris 1929.  
 ROUSSILHE H. Emploi de la Photographie aérienne aux levés topographique a grande échelle, Paris 1930.  
 CASSINIS E SOLAINI Lezioni di Fotogrammetria, Milano 1936.  
 ABDULLACH Ch. Notion de Photogrammétrie terrestre et aérienne, Paris 1934.  
 CLERC L. Application de la Photogrammétrie aérienne, Paris 1920.  
 v. GRUBER O. Einfache und Doppelpunkteinschaltung im Raum, Jena 1924.  
 SCHWIDEWSKY K. Das Entzerrungsgerät, Berlin 1935.  
 SCHWIDEWSKY K. Einführung in die Luft — und Erdbildmessung, Leipzig 1936.  
 LÜSCHER H. Kartieren nach Luftbildern, Berlin 1937.  
 BUCHHOLTZ A. Über die Ausgleichung von Bildtriangulation, 1930.  
 SCHWEIZER G. Praktische Untersuchung einer Radialtriangulation in Hügelland, Stuttgart 1930.

## DO ROZDZIAŁU XVI:

- REGIEC L. O wytyczaniu łuków przy budowach lądowych i wodnych, Kraków 1895.  
 PERNT Tafeln z. Abstecken v. Kreis u. Übergangsbögen durch Polarkoordinaten, Wien 1903.  
 WĄTOREK K. Übergangsbogen, Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens, 1907.  
 SKIBIŃSKI K. Tyczenie tras (2 części), Lwów 1909.  
 BARRAUD Tables pour le calcul et le tracé des courbes, Lausanne 1917.  
 PETERSEN Die Gestaltung d. Bogen im Eisenbahngeleise, Berlin Wiesbaden 1920.  
 LACHMANN u. ROTHE Zur Konstruktion d. Uebergangsbogens f. Eisenbahngeleise, Z. f. ang. Mathem. 1922.  
 HÖFER M. Die Absteckung von Gleisbogen aus Evolventenunterschieden, Berlin 1927.  
 SCHRAMM G. Die Gestaltung der Gleisbogen als Kurven mit fortlaufend veränderlicher Krümmung, Berlin 1931.  
 P. K. P. Tymczasowe przepisy o wykonywaniu regulacji łuków metodą wykresu kątów, Warszawa 1937.

SPIS CZASOPISM ORAZ ORGANÓW NIEKTÓRYCH INSTYTUCYJ,  
W KTÓRYCH SĄ OMAWIANE ARTYKULY Z DZIEDZINY GEODEZJI

## A. ZA GRANICĄ:

- Bulletin géodésique, organ de l'Association de Géodésie, Paris rue Auber 19, 8-e.  
 Comptes rendus de la Commission géodésique baltique, Helsinki (Kikkokatu 3).  
 Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Liebenwerda (Freitag Str. 14).



Astronomische Nachrichten, Kiel (Moltkestrasse 80)  
 Bildmessung u. Luftbildwesen, Berlin (Karlsruher Str. 1).  
 Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1 (skr. poczt. 147)  
 Archiv für Photogrammetrie, Wien.  
 Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien.  
 The Canadian Surveyor, Ottawa (University of Toronto Press).  
 Publications of the United States Coast and Geodetic Survey, Washinton  
 Engineering News Record, New-York.  
 Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Quai des Grands Augustins 55, 6-0).  
 Bulletin de Photogrammètrie, Paris.  
 Journal des Géomètres et Experts français, Paris (r. d'Angoulême 6, 11-e).  
 Revue d'Optique théoretique et instrumentale, Paris (Boul. Pasteur 3, 15-e).  
 The Empire Survey Reviere, London.  
 Report of the Progress of the Ordnance Survey, Southampton.  
 Survey of India, Professional Papers, Dehra Dun.  
 Survey of India, Geodetic Report, Dehra Dun.  
 Bolettino del Comitato nazionale italiano per la Geodesia e la Geofisica, Padova.  
 Il Geometra italiano, Trieste.  
 Rivista del Catasto e dei servizi tecnici erariali, Ministero delle Finanze, Roma.  
 Verbali della Reale Commissione geod. ital., Padova.  
 Procès-verbaux des séances de la Commission géodésique suisse, Berne.  
 Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik, Zürich.  
 Zeměměřický Věstník, Brno.  
 Geodezist, Moskwa.

B. W KRAJU :

Acta Astronomica, Kraków (Observatorium Uniwer. Jagiel.).  
 Czasopismo Techniczne, Lwów (Tow. Politechniczne).  
 Przegląd Mierniczy, Warszawa.  
 Przegląd Techniczny, Warszawa.  
 Przegląd Fotogrametryczny, Warszawa.  
 Publikacje Astronomicznego Obserwatorium Warszawskiego.  
 Sprawozdania Polskiej Akademii Umiejętności, Kraków.  
 Sprawozdania i publikacje Akademii Nauk Technicznych, Warszawa.  
 Sprawozdania i publikacje Towarzystwa Naukowego we Lwowie.  
 Wiadomości Służby Geograficznej (organ W. I. G.) Warszawa.





EG Politechniki Śląskiej  
nr inw.: 11 - 13050



Dyr.1 15879