

Mgr inż. Józef K. Sułkowski
Katedra Aerologii Górniczej

DRZEWO MAKSYMALNE PRĄDÓW WENTYLACYJNYCH I JEGO PEWNE ZASTOSOWANIE

Streszczenie: Stosując pojęcia i twierdzenia teorii grafów podano w pracy sposób konstrukcji drzewa maksymalnego grafu prądów wentylacyjnych. Dokonano uogólnienia tej konstrukcji dowodząc dwóch twierdzeń o wyborze drzewa maksymalnego w dowolnych sieciach wentylacyjnych. Zaproponowano, w oparciu o drzewo maksymalne grafu prądów, sposób wyboru tras pomiarowych przy wykonywaniu zdjęć depresyjnego kopalni metodą monometryczną, który zapewni największą dokładność pomiarów przy ustalonych innych warunkach.

1. Podstawowe definicje [1]

Grafem nazywamy zbiór punktów połączonych liniami, które wyrażają połączenia między nimi. Graf jest określony przez podanie:

- niepustego skończonego zbioru X składającego się z elementów nazywanych wierzchołkami,
- relacji dwuczłonowej Γ stanowiącej dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times X$ o elementach będących parami uporządkowanymi $\langle x_1, x_2 \rangle$ gdzie $x_1, x_2 \in X$.

Pary uporządkowane $\langle x_1, x_2 \rangle$ oznaczone także przez u_k , stanowią tzw. krawędzie grafu, jeżeli zachodzi $x_1 \in \Gamma(x_2)$

Zbiór wszystkich krawędzi grafu o elementach u_1, u_2, \dots

$u_k \dots, u_n$ oznaczony jest przez U .

Graf może być więc określony jako $G = \langle X, \Gamma \rangle$ lub $G = \langle X, U \rangle$. Ciąg krawędzi grafu $\mu = [u_1, u_2, \dots, u_k]$, w którym dla każdej krawędzi jeden z wierzchołków granicznych jest także wierzchołkiem granicznym innej krawędzi, nazywany

jest łańcuchem grafu. Natomiast skończony łańcuch zaczynający i kończący się w tym samym wierzchołku nazywany jest cyklem.

Graf G_1 nazywa się podgrafem grafu G_2 , jeżeli $G_1 \subset G_2$ przy równoczesnym spełnieniu relacji zawierania $X_1 \subset X_2$ i $U_1 \subset U_2$.

Graf G_1 nazywa się grafem częściowym grafu G_2 jeżeli $G_1 \subset G_2$ przy czym $X_1 = X_2$ i $U_1 \subset U_2$.

W każdym grafie daje się wybrać taki spójny graf częściowy, w którym wszystkie wierzchołki połączone są krawędziami, ale nie istnieje żaden cykl. Nazywany jest on drzewem albo dendrytem grafu i wybierać go można zgodnie z twierdzeniem TRENTA na wiele sposobów.

2. Drzewo maksymalne grafu prądów wentylacyjnych

Schemat kanoniczny sieci wentylacyjnej może być traktowany jako graf, w którym wierzchołki stanowią węzły sieci wentylacyjnej, a krawędzie grafu odpowiadają bocznicom tej sieci. Można więc wybrać w nim drzewo w postaci bocznic łączących wszystkie węzły, a nie tworzących cykli. Łatwo wykazać [7], że w każdym drzewie grafu znajduje się

$$\varrho(G) = \text{card } X - 1$$

krawędzi, zaś ilość krawędzi odrzuconych z grafu wynosi

$$\nu(G) = \text{card } U - \text{card } X + 1$$

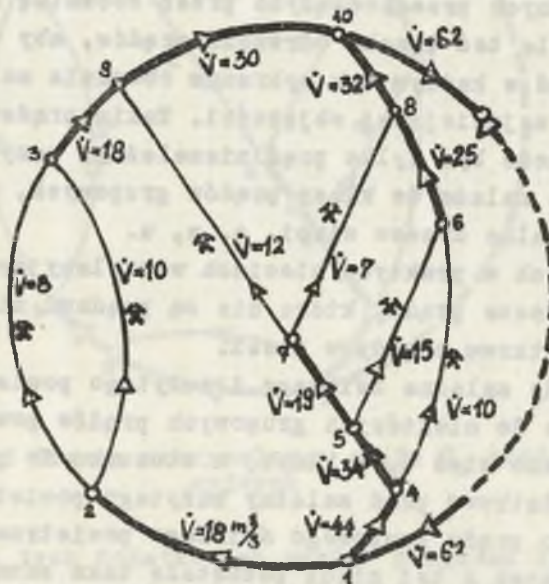
Oznaczenie $\text{card } X$ wyraża moc (ilość elementów) zbioru jako skrót słów cardinal number.

$\nu(G)$ nazywa się liczbą cykliczną grafu lub liczbą BETTIEGO [1, 6, 7].

Krawędziom grafu można przyporządkować pewne wielkości na przykład bocznicom grafu sieci wentylacyjnej można przyporządkować objętości prądów \dot{V}_1 i ich kierunek. W sieci prądów tzn. bocznic oznaczonych kierunkiem poprzednio określone definicje zmieniają dla odróżnienia nazwę. Łańcuch prądów nazywa się drogą, cykl grafu nazywa się obwodem (oczkiem), ale

pojęcie drzewa i jego własności się przenoszą. Aby wybrać minimalną ilość bocznic stanowiących drzewo sieci z największymi wartościami \dot{V} można posłużyć się algorytmem KRUSKALA dla wyboru tzw. drzewa maksymalnego [1, 5]. Należy w przypadku sieci wentylacyjnej, zacząć od wyboru bocznic o największej objętości prądu a w każdym następnym kroku wybierać (z wcześniej nie wybranych) także bocznicę o największej objętości prądu nie tworzących okładu (obwodu) z wcześniej wybranymi bocznicami.

Jeżeli trafi się na kilka bocznic o tej samej objętości prądowo nie ma znaczenia, które się wybierze. Tak więc w algorytmie tym na każdym etapie wyboru będzie się otrzymywało drzewo. Po wybraniu $\varrho(G)$ bocznic otrzymuje się drzewo maksy-



Rys. 1. Przykład drzewa maksymalnego grafu G_1 prądów wentylacyjnych

malne. Podane na rys. 1 drzewo sieci G_1 jest też maksymalnym drzewem sieci prądów wentylacyjnych. W skład niego wchodzi wszystkie prądy grupowe, a odrzucone zostały wszystkie (sześć)

prądy rejonowe identyczne z prądami niezależnymi. Liczba cykliczna BETTIEGO dla podanej sieci wynosi

$$\checkmark(G_1) = 15 - 10 + 1 = 6$$

równa się więc ilości prądów niezależnych.

Dla dowolnej sieci prądów wentylacyjnych dla których tylko ilość prądów niezależnych będzie równa liczbie cyklicznej $\checkmark(G)$ prawdziwe jest

Twierdzenie 1: Maksymalne drzewo sieci prądów wentylacyjnych składa się z wszystkich prądów grupowych i tylko z prądów grupowych.

Dowód: W takiej sieci wybrać można $\checkmark(G)$ różnych obwodów tsw. niezależnych przechodzących przez bocznice zewnętrzną bezoporową. Tyle też trzeba odrzucić prądów, aby uzyskać drzewo sieci. Stąd w każdym tak wybranym obwodzie należy odrzucić jeden prąd o najmniejszej objętości. Takim prądem w obwodzie niezależnym może być tylko prąd niezależny, wszystkie pozostałe w obwodzie należą do klasy prądów grupowych, a ich zbiór tworzy maksymalne drzewo sieci. o, n, u.

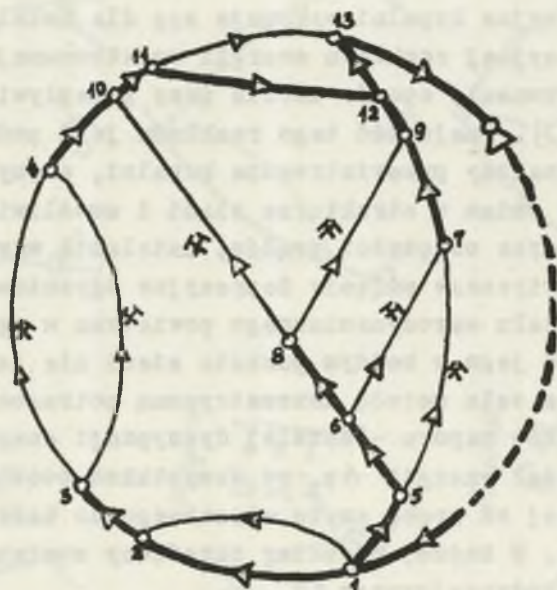
W spotkanych w praktyce sieciach wentylacyjnych kopalń występują jeszcze prądy, które nie są prądami niezależnymi a tworzą dodatkowe obwody w sieci.

Są to prądy zależne świeżego i zużytego powietrza oraz prądy równoległe do niektórych grupowych prądów powietrza. Na rys. 2 pokazano sieć G_2 w której w stosunku do poprzedniej występują dodatkowo prąd zależny zużytego powietrza oraz prąd równoległy do prądu grupowego świeżego powietrza. Ilość prądów niezależnych w tej sieci pozostała taka sama, ale liczba cykliczna BETTIEGO wynosi $\checkmark(G_2) = 8$. Drzewo sieci nie zawiera więc wszystkich prądów niezależnych oraz dwóch dodatkowych prądów (prądu zależnego i prądu równoległego). Dla dowolnej sieci prądów zawierających prądy zależne i równoległe prawdziwe będzie

Twierdzenie 2: Maksymalne drzewo sieci prądów wentylacyjnych składa się z prądów grupowych bez prądów równoległych o mniej-

szej objętości oraz bez prądów o najmniejszej objętości wcho-
dzących w skład obwodów spowodowanych występowaniem prądów
zależnych.

Dowód: Gdyby nie było w sieci prądów zależnych i równole-
głych grupowych to zgodnie z twierdzeniem 1 należałoby odrzu-
cić wszystkie prądy niezależne (w ilości $\nu(G_1)$) aby otrzymać
drzewo maksymalne prądów.



Rys. 2. Przykład drzewa maksymalnego grafu G_2 prądów wentyla-
cyjnych

Występowanie tych dodatkowych prądów zwiększa liczbę pra-
dów odrzuconych do wartości równej liczbie $\nu(G_2)$ dla sieci
powiększonej. Występowanie jednego dodatkowego prądu w sieci
nie będącego niezależnym powoduje zwiększenie liczby $\nu(G)$ o
jeden. Na rys. 3 pokazano możliwe przypadki dołączenia takiego
jednego prądu (linią kreskowaną) do fragmentu sieci o trzech
węzłach i dwóch bocznicach a obok obliczono, że w każdym
przypadku powiększa się liczba BETTIEGO $\nu(G)$ na skutek
wzrostu ilości bocznicy i węzłów wyniesie jeden. Wynika stąd,

że dalsze dołączenie $(n - 1)$ prądów spowoduje przyrost liczby $V(G)$ o $(n - 1)$. Odrzucenie wszystkich n prądów wybranych w ten sposób aby nie tworzyły już obwodów i miały najmniejszą objętość z wszystkich możliwych do odrzucenia doprowadzi znowu do powstania drzewa maksymalnego sieci o. n. u.

3. Zastosowanie konstrukcji drzewa maksymalnego dla wyboru tras pomiarowych przy wykonywaniu zdjęcia depresyjnego kopalni metodą manometryczną

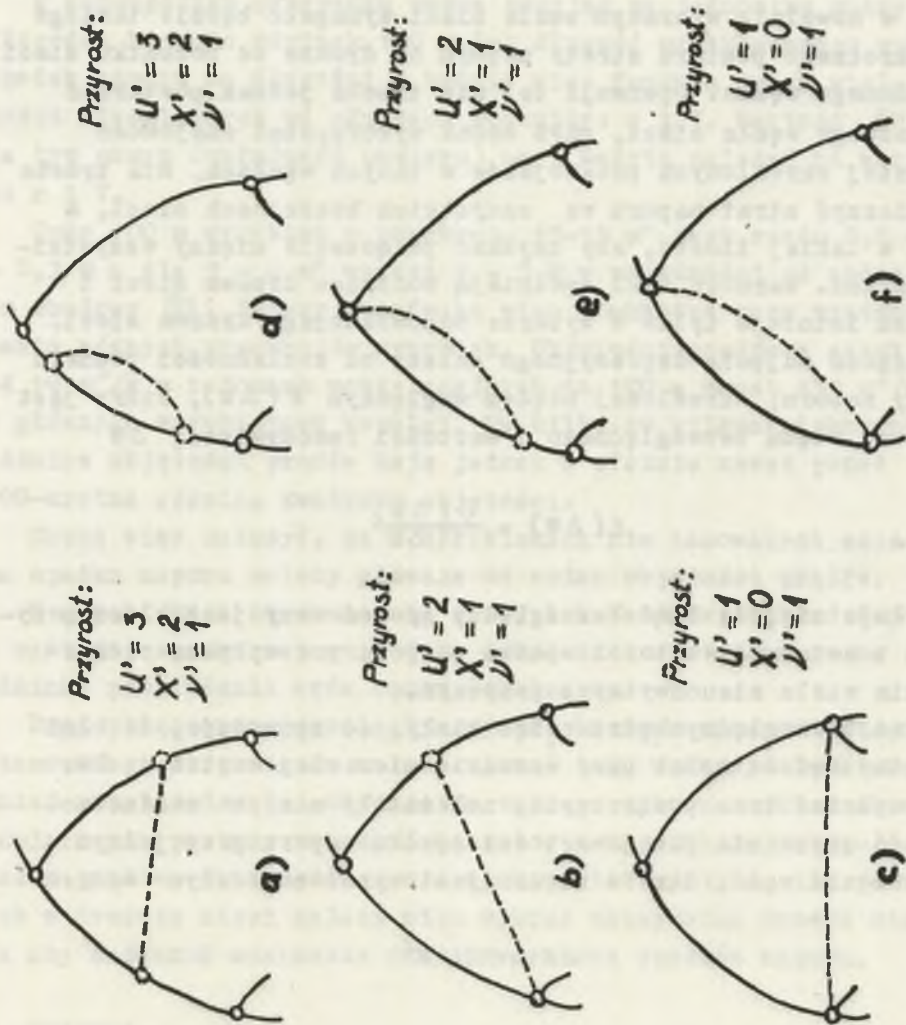
Zdjęcie depresyjne kopalni wykonuje się dla ustalenia w jej sieci wentylacyjnej rozkładu energii wydatkowanej przez wentylator na pokonanie oporów tarcia przy przepływie powietrza wyrobiskami [3]. Znajomość tego rozkładu jest podstawą do opracowania analizy przewietrzania kopalni, oceny efektów wprowadzonych zmian w strukturze sieci i umożliwia, przy dodatkowym pomiarze objętości prądów, ustalenie wartości oporów wyrobisk. Praktycznie zdjęcie depresyjne ogranicza się do określenia potencjału aerodynamicznego powietrza w węzłach sieci, gdyż znajomość jego w każdym punkcie sieci nie jest potrzebna. Stosując w tym celu metodę manometryczną potrzeba zmierzyć wartości spadków naporu -(ściślej dyssypacji energii) ΔW_1 i spiętrzeń źródeł energii Δp_1 we wszystkich bocznicach na drodze niezależnej od zrzębu szybu wdechowego do badanego węzła na tej drodze. W każdej bocznicy określony zostanie spadek potencjału aerodynamicznego $\Delta \phi_1$

$$\Delta \phi_1 = \Delta W_1 - \Delta p_1$$

wtedy potencjał aerodynamiczny ϕ_k w dowolnym węźle k sieci wyniesie [4]

$$\phi_k = - \sum_{i=1}^k \Delta \phi_1$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, k$ kolejne numery bocznicy w dowolnie wybranej drodze od początku sieci do badanego węzła k .



Rys. 3. Przypadki dołączenia jednego prądu do najmniejszego fragmentu sieci i wzrost wartości liczby γ (G)

W metodzie manometrycznej do pomiaru straty naporu używać trzeba mirkomanometru, węża grubościennego długości 100–250 m i sond ciśnieniowych. Pomiar polega na przykładaniu odcinka węża wzdłuż wyrobiska i odczytywaniu różnicy ciśnień między przekrojami początkowym i końcowym wyrobiska. Określenie potencjału w dowolnie wybranym węźle sieci wymagało będzie takiego wielokrotnego pomiaru straty naporu na drodze od początku sieci do badanego węzła. Operacji tej nie trzeba jednak powtarzać dla każdego węzła sieci, gdyż można wykorzystać znajomość wczesniej określonych potencjałów w innych węzłach. Nie trzeba też mierzyć strat naporu we wszystkich bocznicach sieci, a tylko w takiej ilości, aby uzyskać połączenie między wszystkimi węzłami. Warunek taki spełniają bocznicie drzewa sieci i problem istnieje tylko w wyborze odpowiedniego drzewa sieci. Dokładność zdjęcia depresyjnego zależy od dokładności pomiaru straty naporu, określonej błędem względnym $\varepsilon(\Delta W)$, który jest ilorazem błędu bezwzględnego i wartości rzeczywistej ΔW

$$\varepsilon(\Delta W) = \frac{\delta(\Delta W)}{\Delta W}$$

Wydaje się, że błąd bezwzględny spowodowany jest klasą przyrządu i zmianami wartości spadku naporu pod wpływem oddziaływania wielu nieuchwytnych przyczyn.

Błąd bezwzględny będzie więc stały, co spowoduje, że błąd względny będzie malał przy wzroście mierzonej wartości ΔW . Przy wyborze tras pomiarowych, należałoby mieć na uwadze możliwość uzyskania dużej wartości spadku naporu przy jednym przyłożeniu węża. Strata naporu jest wyrażona znanym wzorem

$$\Delta W = R \cdot v^2$$

lub

$$\Delta W = r \cdot l \cdot v^2$$

gdzie:

- r - opór jednostki długości bocznicy,
- l - ilość jednostek długości.

W szczególnym przypadku można przyjąć za jednostkę miary długości bocznic odcinek 100 m lub długość przykładanego węża. Spadek naporu na długości l będzie więc funkcją dwóch wielkości niezależnych od długości bocznicy: r i \dot{V} . Wartość ΔW (a tym samym dokładność pomiaru) na l będzie zależała od wartości r i \dot{V} .

Opór 100 m wyrobisk o przekroju 15-18 m² jest rzędu 0,2 - 0,3 M a dla 5 - 6 m² wynosi 2 - 3 M w zależności od rodzaju obudowy [2]. Zmiany oporów są więc 10-krotne przy występowaniu różnych przekrojów wyrobisk. Objętości prądów w sieci są od 10 m³/s w rejonach wentylacyjnych do 100 a nawet 150 m³/s w głównych wyrobiskach kopalni. Te kilkadziesiąt do kilkunastokrotne różnice objętości prądów dają jednak w efekcie nawet ponad 100-krotne różnice kwadratu objętości.

Można więc założyć, że w wyrobiskach nie otamowanych zmiana spadku naporu zależy głównie od zmian objętości prądów.

W wyrobiskach otamowanych, mniej lub bardziej dokładnie, o wartości spadku naporu będzie decydowało występowanie na odcinku przyłożenia węża oporu lokalnego.

Przy połączeniu równoległym wyrobiska otamowanego i nieotamowanego do pomiarów należy wybrać ten, w którym będzie mniej przyłożeń węża. Gdy nie ma takiego wyboru w skład tras pomiarowych powinny wchodzić bocznicie o największej objętości prądów. Ponieważ bocznic tych wystarczy tyle, ile jest ich w drzewie sieci należy więc wybrać maksymalne drzewo sieci aby zapewnić mierzenie dużych wartości spadków naporu.

4. Wnioski

- Trasy pomiarowe powinny przebiegać zgodnie z twierdzeniami 1 i 2 przez bocznicie z prądami grupowymi.
- Włączanie do tak wybranych tras bocznic dodatkowych umożliwia kontrolę poprzednio wykonanych pomiarów, ale nie jest

potrzebne z punktu widzenia minimalnych potrzeb dla wykonania zdjęcia depresyjnego.

- Wybieranie mniejszej ilości tras w postaci dłuższych ciągów boocznio, nie zapewnia objęcia pomiarami każdego węzła sieci.
- Wybieranie tras w postaci drzewa sieci, ale nie maksymalnego ze względu na objętości prądów daje mniejsze prawdopodobieństwo dokładnego wykonania zdjęcia depresyjnego.

LITERATURA

- [1] BERGE C.: *Theorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris 1958 (tłum. ros. Moskwa 1962).
- [2] BERTARD C.: *Valeurs pratiques des resistances*, *Revue de l'industrie minerale* 1962, 15 Nov. nr 2 specjal.
- [3] BUDRYK W.: *Wentylacja kopalń*, WGH, Katowice 1961.
- [4] BYSTRON H.: *Depresja wentylatora w świetle I i II zasady termodynamiki*, *Przegląd Górniczy* 1968, 7-8, s. 314-323.
- [5] FORD L.R.Jr., FULKERSON D.R.: *Flows in networks*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1962 (tłum. ros. Moskwa 1966).
- [6] LELEK A.: *Zbiory, Bibl. Matem. PZWS*, 26, W-wa 1966.
- [7] ORK O.: *Wstęp do teorii grafów*, PWN, W-wa 1966.