ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: GÓRNICTWO z. 41 Nr kol. 269

Mgr inż. Jan Zych
Katedra Zwalczania Szkód Górniczych

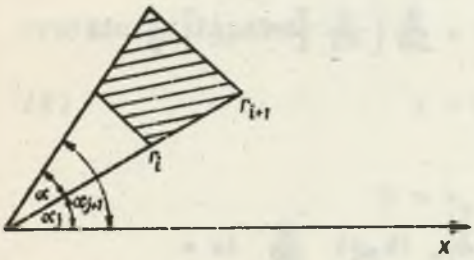
ZASTOSOWANIE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO DO WYZNACZANIA PARAMETRÓW TEORII T. KOCHMAŃSKIEGO Z POMIERZONYCH OSIADAŃ I PRZESUNIĘĆ POZIOMYCH

Streszczenie: Autor podaje metodę wyznaczania parametrów teorii T. Kochmańskiego z pomierzonych osiadań i przesunięć poziomych punktów przy zastosowaniu metod rachunku wyrównawczego. Zastosowanie metody obliczania wartości funkcji przy pomocy grafikonów daje możliwość obliczenia funkcji dla dowolnego kształtu eksploatacji i punktu dowolnie położonego, a więc wykorzystania do obliczeń dużego materiału obserwacyjnego (np. punkty rozproszone).
Jest to metoda ścisła i może być z pewnymi zmianami zastosowana do każdej teorii.

1. Wyznaczenie parametrów a, b i r_0 z pomierzonych osiadań

Ogólny wzór na osiadanie punktu [6] w teorii T. Kochmańskiego dla eksploatacji w kształcie wycinka pierścienia kołowego jak na rys. 1, bez uwzględnienia czynnika czasu przedstawia się następująco

$$w = a.g.\Delta\varphi(b,\varrho).\Delta\frac{\alpha}{2\pi} \qquad (1)$$



Rys. 1

gdzie

$\Delta\varphi(b,\varrho)$ - przyrost funkcji φ

$$\Delta\varphi(b,\varrho)=\varphi(b,\varrho_{i+1})-\varphi(b,\varrho_i) \qquad (2)$$

$\Delta\frac{\alpha}{2}$ - przyrost funkcji kątowej

$$\Delta \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} = \frac{\hat{\alpha}_{i+1}}{2\pi} - \frac{\hat{\alpha}_i}{2\pi} = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} = \frac{\hat{\alpha}}{360^o} \tag{3}$$

ϱ – współrzędna bezwymiarowa

$$\varrho_i = \frac{r_i}{r_o} \tag{4}$$

Korzystając z wzoru (3) można wzór (1) napisać w innej formie

$$w = a \cdot g \cdot \Delta\varphi(b, \varrho) \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \tag{5}$$

Jeżeli znamy z dostateczną dokładnością przybliżone wartości parametrów a_p, b_p, r_{op} (np.: a – z praktyki; b – z wzoru T. Kochmańskiego; r_o – z przekroju geologicznego) możemy napisać wzór na osiadanie [2]

$$w_{obs} + v = w_p + dw \tag{6}$$

gdzie

w_{obs} – zmierzona wartość osiadania terenu

v – poprawka uzyskiwana w procesie wyrównania

w_p – przybliżona wartość osiadania terenu

Na podstawie wzoru (5) i (6) mamy

$$w_{obs} + v = a_p \cdot g \cdot \Delta\varphi_p (b,\varrho) \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} +$$

$$+ (g \cdot \Delta\varphi_p (b,\varrho) \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi})\, da + a_p \cdot g \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \left[\Delta\varphi(b,\varrho)\right]_p db + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial r_o} \left[\Delta\varphi(b,\varrho)\right]_p dr_o \right\} \tag{7}$$

czyli

$$w_{obs} + v = a_p \cdot g \cdot \Delta\varphi_p (b,\varrho) \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} + g \cdot \Delta\varphi_p (b,\varrho) \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} da +$$

$$+ a_p \cdot g \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot \Delta \left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p \cdot db +$$

$$+ a_p \cdot g \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot \Delta\left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial r_o}\right]_p dr_o \tag{8}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial r_o} = \frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho} \cdot \left(-\frac{r}{r_o^2}\right) \tag{9}$$

to wstawiając za r wartość z wzoru (4) otrzymamy

$$\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial r_o} = -\frac{1}{r_o}\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho} \tag{10}$$

a stąd wzór (8) przybierze postać

$$w_{obs} + v = a_p \cdot g \cdot \Delta\varphi_p(b,\varrho)\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} +$$

$$+ g \cdot \Delta\varphi_p(b,\varrho)\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot da + a_p \cdot g \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot \Delta\left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p db -$$

$$- \frac{a_p \cdot g}{r_{op}} \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot \Delta\left[\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho}\right]_p dr_o \tag{11}$$

lub

$$v' = -\frac{w_{obs}}{g} + a_p \cdot \Delta\varphi_p(b,\varrho)\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} + \Delta\varphi_p(b,\varrho)\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot da +$$

$$+ a_p \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi}\Delta\left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p db - \frac{a_p}{r_{op}} \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \cdot \Delta\left[\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho}\right]_p dr_o \tag{12}$$

Przyjmując oznaczenia

$$A = \Delta\varphi_p(\varrho, b)\frac{\hat{\alpha}}{2\pi}$$

$$B = a_p \cdot \Delta\left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2\pi}$$

$$C = -\frac{a_p}{r_{op}} \cdot \Delta\left[\varrho \cdot \frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho}\right]_p \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$L = -a_p \cdot \Delta\varphi_p(\varrho,b)\frac{\omega}{2\pi} + \frac{w_{abs}}{g}$$

można równanie (12) dla i-tego punktu napisać

$$v'_i = A_i \cdot da + B_i \cdot db + C_i \cdot dr_o - L_i \qquad (13)$$

gdzie

$i = 1,2,3, \ldots n$

We wzorze (12) występują trzy funkcje: $\varphi(b,\varrho)$, $\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}$ i $\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho}$

Funkcje te najłatwiej jest obliczyć przy pomocy grafikonów [6], które pozwalają na obliczenie ww funkcji dla dowolnego kształtu eksploatacji i punktu dowolnie położonego względnie tej eksploatacji. W związku z tym do obliczeń parametrów możemy wykorzystać eksploatację o dowolnym kształcie lub kilka eksploatacji i dowolną ilość punktów (np. punkty rozproszone).

Zastępując przyrosty funkcji $\Delta\varphi(b,\varrho)$, $\Delta\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}$ i $\Delta\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial\varrho}$ stałymi przyrostami, tzn. dzieląc końcową wartość funkcji $\varphi = 1$ i maksymalne wartości funkcji pozostałych, na pewną ilość k równych części mamy dla danego pola b

$$\delta\varphi(\varrho) \overset{df}{=} \frac{10^3}{k} \qquad (14)$$

$$\delta\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b} \overset{df}{=} 10^3 \left(\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b}\right)_{max} \cdot \frac{1}{k} \qquad (14a)$$

$$\delta\varrho\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial\varrho} \overset{df}{=} 10^3\varrho\left(\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial\varrho}\right)_{max} \cdot \frac{1}{k} \qquad (14b)$$

gdzie może być np.:

$k = 5,8,10,12 \ldots 20$, przy czym

k = dla każdej funkcji może być inne.

Przyjmijmy dla uproszczenia zapisu

$$\varphi(\varrho) = \varphi$$

$$\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b} = \sigma$$

$$\varrho\,\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial\varrho} = \lambda$$

oraz

$$\sigma\varphi = \frac{10^3}{k} \tag{15}$$

$$\sigma\sigma = \frac{10^3\sigma\,\max}{k} \tag{15a}$$

$$\sigma\lambda = \frac{10^3\lambda\,\max}{k} \tag{15b}$$

Dla przyjętego stałego przyrostu funkcji kątowej $\sigma.\alpha$ otrzymamy tzw. "elementarną" wartość funkcji odpowiadającą jednemu segmentowi grafikonu

$$\varphi_{el} = \sigma\varphi\,.\,\frac{\delta 2}{2\pi} \tag{16}$$

$$\sigma_{el} = \delta\sigma\,.\,\frac{\delta 2}{2\pi} \tag{16a}$$

$$\lambda_{el} = \delta\lambda\,.\,\frac{\delta 2}{2\pi} \tag{16b}$$

gdzie

φ_{el}, σ_{el}, λ_{el} – elementarne wartości funkcji

δ^2 – może być różne dla różnych funkcji.

Na podstawie powyższych założeń możemy zbudować grafikony dla poszczególnych funkcji tzn. tak podzielić płaszczyznę na segmenty, aby wpływ każdego z nich na punkt centralny był jednakowy. Sposób konstrukcji grafikonów dla poszczególnych funkcji podaje J. Magdziorz w pracy [6].

Wartość funkcji dla dowolnego punktu pod wpływem danej eksploatacji możemy obliczyć mnożąc elementarną wartość funkcji przez ilość n segmentów danej funkcji jakie obejmuje rozpatrywana eksploatacja, czyli

$$\varphi = \varphi_{el} \cdot n \tag{17}$$

$$\sigma = \sigma_{el} \cdot (n' - n'') \tag{17a}$$

$$\lambda = \lambda_{el} \cdot (n' - n'') \tag{17b}$$

gdzie

n - ilość segmentów, które obejmuje dana eksploatacja
n' - ilość segmentów dodatnich
n" - ilość segmentów ujemnych.

Stosując metodę grafikonów do obliczenia funkcji możemy wzór (12) na podstawie wzorów (17) napisać w postaci

$$v = -\frac{v_{obs}}{g} + a_p \cdot \varphi_p + \varphi_p \cdot da + a_p \cdot \sigma_p \, db - \frac{a_p}{r_{op}} \lambda_p \, dr_o \tag{18}$$

i wówczas

$$A = \varphi_p$$

$$B = a_p \sigma_p$$

$$C = -\frac{a_p}{r_{op}} \cdot \lambda_p$$

$$L = -a_p \cdot \varphi_p + \frac{w_{obs}}{g}$$

Teoretycznie rozpatrując można na podstawie osiadań trzech punktów z układu trzech równań

$$\begin{aligned} A_1 \, da + B_1 \, db + C_1 \, dr_o - L_1 &= 0 \\ A_2 \, da + B_2 \, db + C_2 \, dr_o - L_2 &= 0 \\ A_3 \, da + B_3 \, db + C_3 \, dr_o - L_3 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

w sposób jednoznaczny wyznaczyć da, db i dr_0 a następnie wartości parametrów

$$a = a_p + da$$
$$b = a_p + db \qquad (20)$$
$$r_o = r_{op} + dr_o$$

Obliczone w ten sposób parametry można potraktować jako przybliżone i poddać je wyrównaniu z większą ilością punktów.

Przy zastosowaniu metody grafikonów uniezależniamy się od kształtu eksploatacji i położenia punktu względem tej eksploatacji. Metoda ta daje nam możność wzięcia do wyrównania większej ilości punktów różnie położonych względem wybranej przestrzeni i tym samym uniknięcia przypadkowego wyznaczania parametrów. Daje również możność wyznaczenia błędów średnich obliczanych parametrów metodą rachunku wyrównawczego.

Wyznaczając parametry z większej ilości punktów najlepiej jest zastosować do obliczeń metodę najmniejszych kwadratów w ujęciu krakowianowym.

Wyrównanie należy przeprowadzić stosując zasadę [pvv] = min przyjmując odpowiednie wagi.

Proponuje się następujący sposób przyjęcia wag:

Osiadanie punktu najdalej położonego od eksploatacji ustalamy teoretycznie i o wynikłą różnicę między osiadaniem obliczonym teoretycznie i zmierzonym poprawiamy wszystkie rozpatrywane osiadania punktów. Różnica ta przy dokładnym pomiarze i długich liniach obserwacyjnych nie wynosi więcej niż parę milimetrów i traktujemy ją jako stały błąd, którego przyczyną może być np. odwodnienie gruntu czy też wpływ sąsiednich eksploatacji.

Po uwzględnieniu tego stałego błędu można już przyjąć, że błąd średni i-tego spostrzeżenia wynosi

$$m_i = \frac{w_i}{w_{max}} \cdot m_o \qquad (21)$$

Związek powyższy wynika z samego procesu osiadania punktów. Proces ten jest zjawiskiem statystycznym i jako taki posiada pewien rozrzut, który prawdopodobnie jest proporcjonalny do wielkości osiadania. Każde zjawisko statystyczne cechuje tzw. odchylenie standardowe. Otóż praktyka wykazuje, że najmniejsze odchylenie standardowe posiadają punkty położone dalej od eksploatacji, czyli wynika stąd, że proces osiadania w dalszej odległości przebiega bardziej regularnie, co tymbardziej utwierdza nas w przekonaniu, że hipoteza (26) powinna zdać egzamin. Uważając wzór (21) za słuszny mamy

$$p_i = \frac{m_o^2}{m_i^2} \tag{22}$$

a stąd na podstawie (21)

$$p_i = \frac{m_o^2}{\left(\frac{w_i}{w_{max}}\right)^2 m_o^2} \tag{23}$$

i ostatecznie

$$p_i = \left(\frac{w_{max}}{w_i}\right)^2 \tag{24}$$

Z wzoru (24) wynika, że punktom położonym dalej od eksploatacji przydajemy dużo większą wagę. Gdyby przyjęta w ten sposób waga była przesadnie dużą dla punktów odległych od eksploatacji, nie powinno to rzutować zbyt niepomyślnie na wyniki wyrównania, może nam tylko nieco powiększyć błąd średni jednostkowy m_o. Unikamy natomiast wyników absurdalnych polegających na tym, że otrzymalibyśmy zbyt wielkie poprawki dla punktów odległych.

Istnieje oczywiście możliwość próby innego przyjęcia wag niż według równania (24), przy czym zgodnie z zasadą Gaussa tę hipotezę można uznać za właściwą, która da najmniejszy błąd średni m_o. Jednakże dla uniknięcia ewentualnych wyników ab-

surdalnych wydaje się wskazane pewne przewiększanie wag dla punktów odległych od eksploatacji. Ostateczną odpowiedź co do obioru wag da nam oczywiście doświadczenie.

Metoda różniczkowa wyznaczenia parametrów z pomierzonych osiadań przy zastosowaniu metody grafikonów posiada w porównaniu z innymi metodami następujące zalety:

1) jest to metoda ścisła pod względem matematycznym
2) zastosowanie metody grafikonów pozwala w sposób dokładny obliczyć funkcje φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$ i $\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ dla dowolnie położonego punktu względem eksploatacji o dowolnym kształcie. Jest to więc metoda ogólna nie skrępowana kształtem i rozmiarami wyeksploatowanego pokładu ani też położeniem punktu względem eksploatacji
3) istnieje możliwość wykorzystania bardzo dużego materiału obserwacyjnego pod warunkiem zastosowania kryterium $[pvv] = \min$ przy czym jako wagę można przyjąć kwadrat stosunku osiadania maksymalnego do osiadania danego punktu lub też inne uzasadnione empirycznie kryterium,
4) pozwala na odliczenie błędów średnich wyznaczonych parametrów
5) przy pomocy tej metody można również wyznaczyć współczynnik czasu
6) rozpatrując pewne grupy punktów istnieje możliwość zbadania zmienności parametrów jako funkcji odległości i czasu.

2. Wyznaczenie parametrów a, b, r_o oraz $\frac{db}{dz}$ z przesunięć poziomych

Ogólny wzór na przesunięcie punktu w dowolnym kierunku pod wpływem eksploatacji w kształcie wycinka pierścienia kołowego jak na rys. 1 przedstawia się następująco [6]:

$$u = -a.g.r_o \cdot \frac{db}{dz} \cdot \Delta\psi(b,\varrho) \cdot \Delta\frac{\sin\alpha}{2\pi} \quad . \qquad (25)$$

lub przyjmując funkcję $\psi(b,\varrho)$ tak jak jest obliczona w tablicach [4]

$$u = -a.g.r_o \frac{db}{dz} . \Delta\psi(b,\varrho) . \Delta \frac{\sin\alpha}{2} \tag{26}$$

Różnica we wzorze (25) i (26) wynika stąd, że

$$\psi'(b,\varrho) = \pi\psi(b,\varrho) \tag{27}$$

Do dalszych rozważań przyjmijmy wzór (25). We wzorze tym $\Delta\psi'(b,\varrho)$ - oznacza przyrost funkcji ψ'

$$\Delta\psi'(b,\varrho) = \psi'(b,\varrho_{i+1}) - \psi'(b,\varrho_i) \tag{28}$$

$\Delta \frac{\sin\alpha}{2\pi}$ - oznacza przyrost funkcji kątowej

$$\Delta \frac{\sin\alpha}{2\pi} = \frac{\sin\alpha_{j+1}}{2\pi} - \frac{\sin\alpha_j}{2\pi} = \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi} \tag{29}$$

Przyjmując, że

$$\frac{db}{dz} = \frac{-c}{H} \tag{30}$$

możemy napisać

$$u = a.g.r_o \frac{c}{H} . \Delta\psi'(b,\varrho) . \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi} \tag{31}$$

albo inaczej po oznaczeniu $\frac{g}{H} = Q$

$$u = Q.a.r_o.c.\Delta\psi'(b,\varrho) . \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi} \tag{32}$$

Znając z dostateczną dokładnością przybliżone wartości parametrów a_p, b_p, r_{op} i o_p można przesunięcie poziome punktu wyrazić przy pomocy wzoru

$$u_{obs} + v = u_p + d_u \tag{33}$$

gdzie:

u_{obs} – zmierzona wartość przesunięcia poziomego

v – poprawka uzyskiwana w trakcie wyrównania

u_p – przybliżona wartość przesunięcia poziomego

Wówczas korzystając z wzoru (33) mamy

$$u_{obs}+v = Q\cdot a_p\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}+Q\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,da+$$

$$+Q\cdot a_p\cdot t_{op}\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,dc+Q\cdot a_p\cdot t_{op}\cdot c_p\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\left[\Delta\psi(b,\varrho)\right]_p\,db+$$

$$+Q\cdot a_p\cdot c_p\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\left[\Delta\psi_p(b,\varrho)+t_{op}\frac{\partial}{\partial r_o}\left[\Delta\psi(b,\varrho)\right]_p\right.\,dr_o \tag{34}$$

lub inaczej

$$v''=-\frac{u_{obs}}{Q}+a_p\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}+$$

$$+r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,da+a_p\cdot r_{op}\cdot\Delta\psi_p(b,\varrho)\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,dc+$$

$$+a_p\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\left[\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,db+$$

$$+a_p\cdot c_p\cdot\left\{\Delta\psi_p(b,\varrho)+r_{op}\cdot\Delta\left[\frac{\Delta\psi(b,\varrho)}{\partial r_o}\right]_p\right\}\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,dr_o \tag{35}$$

Ponieważ

$$\psi(b,\varrho)=\int_b^{\varrho}\frac{\partial\varphi(b,\sigma)}{\partial b}\,d\sigma \tag{36}$$

to

$$\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial b}=\int_0^{\varrho}\frac{\partial^2\varphi(b,\sigma)}{\partial b^2}\,d\sigma \tag{37}$$

Natomiast

$$\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial r_o} = \frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial\varrho}\cdot\left(-\frac{r}{r_o^2}\right) \tag{38}$$

gdzie po podstawieniu za r wartości z wzoru (4) mamy

$$\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial r_o} = -\frac{r}{r_o}\cdot\varrho\cdot\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial\varrho} \tag{39}$$

i dalej korzystając z tego, że

$$\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial\varrho} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\int_b^{\varrho}\frac{\partial\varphi(b,\sigma)}{\partial b}\,d\sigma\right) = \frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b} \tag{40}$$

mamy

$$\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial r_o} = -\frac{1}{r_o}\cdot\varrho\cdot\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b} \tag{41}$$

Uwzględniając wzór (41) mamy

$$v' = -\frac{u_{obs}}{Q} + a_p\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p'(b,\varrho)\,\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi} +$$

$$+ r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p'(b,\varrho)\,\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,da +$$

$$+ a_p\cdot r_{op}\cdot\Delta\psi_p'(b,\varrho)\,\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,dc + a_p\cdot r_{op}\cdot c_p\cdot$$

$$\cdot\,\Delta\left[\frac{\Delta\psi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p\cdot\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,db + a_p\cdot c_p\cdot\left\{\Delta\psi(b,\varrho) -\right.$$

$$\left. - \Delta\left[\varrho\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p\right\}\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}\,d_{ro} \tag{42}$$

Przyjmując oznaczenia

$$D = r_{op}\cdot c_p\cdot\Delta\psi_p'(b,\varrho)\,\frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}$$

$$E = a_p\, r_{op} \cdot c_p \cdot \Delta\left[\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p \cdot \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}$$

$$F = a_p \cdot c_p \cdot \left\{\Delta\psi_p\,(b,\varrho) - \Delta\left[\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}\right]_p\right\} \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}$$

$$G = a_p \cdot r_{op} \cdot \Delta\psi_p\,(b,\varrho)\ \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi}$$

$$M = -\,a_p \cdot r_{op} \cdot c_p \cdot \Delta\psi_p\,(b,\varrho)\ \frac{\Delta\sin\alpha}{2\pi} + \frac{u_{obs}}{Q}$$

można równanie (42) dla i-tego punktu napisać

$$v_i' = D_i\, da + E_i\, db + F_i\, dr_o + G_i\, dc + M_i \tag{43}$$

gdzie

$i = 1,2,3,\ldots n$

We wzorze (42) występują trzy funkcje: $\psi'(b,\varrho)$ $\frac{\partial\psi'(b,\varrho)}{\partial b}$ i $\varrho\,\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}$. Dwie ostatnie funkcje nie są jeszcze obliczone w tabelach (obecnie są obliczone) można je jednak w dość prosty sposób obliczyć numerycznie. W tabeli nr 1 obliczono przykładowo funkcje $\frac{\partial\psi(\varrho)}{\partial b}$ i $\varrho\frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b}$ dla $b = 0{,}95$.

Wymienione wyżej trzy funkcje najłatwiej jest obliczyć przy pomocy grafikonów. Grafikony pozwalają na obliczenie tych funkcji dla dowolnie położonego punktu w żądanym kierunku pod wpływem eksploatacji o dowolnym kształcie.

Zastępując skończone przyrosty funkcji $\Delta\psi(b,\varrho)$, $\Delta\,\frac{\partial\psi(b,\varrho)}{\partial b}$ i $\Delta\varrho\,\frac{\partial\varphi(b,\varrho)}{\partial b}$ stałymi przyrostami, tzn. dzieląc końcowe wartości funkcji $\psi'(\varrho,b)$ i $\frac{\partial\psi(\varrho)}{b}$ oraz maksymalną wartość funkcji pozostałej na pewną ilość k równych części, mamy dla danego b

$$\delta\psi(\varrho) = 10^3\,\frac{\psi'(\varrho)}{k} \tag{44}$$

$$\delta \frac{\partial \psi(\varrho)}{\partial b} = 10^3 \frac{\partial \psi(\varrho)}{\partial b} \cdot \frac{1}{k} \tag{44a}$$

$$\delta_\varrho \frac{\partial \varphi(\varrho)}{\partial b} = 10^3 \left[\varrho \frac{\partial \varphi(\varrho)}{\partial b}\right]_{max} \cdot \frac{1}{k} \tag{44b}$$

Przyjmując oznaczenia (dla uproszczenia zapisu)

$$\psi'(\varrho) = \psi'$$

$$\frac{\partial \psi'(\varrho)}{\partial b} = \xi$$

$$\varrho \frac{\partial \varphi(\varrho)}{\partial b} = \vartheta$$

mamy

$$\delta \psi' = 10^3 \frac{\psi'}{k} \tag{45}$$

$$\delta \xi = 10^3 \frac{\xi}{k} \tag{45a}$$

$$\delta \vartheta = 10^3 \frac{\vartheta_{max}}{k} \tag{45b}$$

Dla stałego przyrostu funkcji kątowej $\frac{\Delta \sin\alpha}{2\pi}$ równego $\frac{\delta \sin\alpha}{2\pi}$ otrzymamy elementarną wartość funkcji odpowiadającą jednemu segmentowi grafikonu

$$\psi'_{el} = \delta \cdot \psi' \frac{\delta \sin\alpha}{2\pi} \tag{46}$$

$$\xi_{el} = \delta \cdot \xi \frac{\delta \sin\alpha}{2\pi} \tag{46a}$$

$$\vartheta_{el} = \delta \vartheta \cdot \frac{\delta \sin\alpha}{2\pi} \tag{46b}$$

a wówczas wartość funkcji dla dowolnie położonego punktu w dowolnym kierunku i dla dowolnego kształtu eksploatacji będzie wynosić odpowiednio

$$\psi = \psi_{el} \ (n' - n'')$$

$$\xi = \xi_{el} \ (n' - n'')$$

$$\vartheta = \vartheta_{el} \ (n' - n'')$$

gdzie

n' – ilość pól dodatnich dla danego grafikonu

n'' – ilość pól ujemnych

Teoretycznie rozpatrując na podstawie przesunięć czterech punktów z układu czterech równań

$$D_1 \, da + E_1 \, db + F_1 \, dr_o + G_1 \, dc + M_1 = 0$$

$$D_2 \, da + E_2 \, db + F_2 \, dr_o + G_2 \, dc + M_2 = 0$$

$$D_3 \, da + E_3 \, db + F_3 \, dr_o + G_3 \, dc + M_3 = 0$$

$$D_4 \, da + E_4 \, db + F_4 \, dr_o + G_4 \, dc + M_4 = 0$$

można w sposób jednoznaczny wyznaczyć da, db, dr_o, i dc, a następnie wartości parametrów

$$a = a_p + da$$

$$b = b_p + db$$

$$r_o = r_{op} + dr_o$$

$$c = c_p + dc$$

Parametry te należy potraktować jako przybliżone i w dalszym ciągu poddać wyrównaniu o ile to możliwe z większą ilością punktów metodą rachunku wyrównawczego.

Do obliczeń podobnie jak przy wyznaczaniu parametrów z osiadań najlepiej jest zastosować metodę najmniejszych kwadratów w ujęciu krakowianowym.

Wyrównanie należy przeprowadzić stosując zasadę $[pvv] = min$.

Wydaje się słuszne aby przyjąć wagi w sposób analogiczny jak przy osiadaniach tj.

$$p_i = \left(\frac{u_{max}}{u_i}\right)^2$$

Stosując metodę różniczkową wyznaczania parametrów z pomierzonych przesunięć poziomych można oprócz parametrów a, b i r_0 wyznaczyć dodatkowo wartość pochodnej $\frac{db}{dz}$

Poza tym przesunięcia poziome punktów są w mniejszym stopniu w stosunku do osiadań, obarczone ubocznymi wpływami jakie powoduje eksploatacja górnicza np. odwadnianie gruntu itp.

3. Wyznaczanie parametrów a, b, r_0 i $\frac{db}{dz}$ z osiadań i przesunięć poziomych

Z dotychczasowych rozważań wynika, że parametry a, b, r_0 można wyznaczyć z pomierzonych osiadań albo z pomierzonych przesunięć poziomych punktów, na podstawie których możemy dodatkowo wyznaczyć $\frac{db}{dz}$

Zjawisko wpływu eksploatacji górniczej na ruchy mas górotworu zachodzi w czasoprzestrzeni czterowymiarowej. Pomijając czynnik czasu, tj. rozpatrując wynik tego procesu, pozostaje nam rozpatrywać ten proces w przestrzeni trójwymiarowej, tzn. rozpatrywać ruchy pionowe i poziome.

Biorąc pod uwagę tylko osiadania, co zdarza się bardzo często, albo tylko przesunięcia poziome, nie możemy ująć całego procesu wpływu eksploatacji górniczej na górotwór i wnioski nasze wyciągane na tej podstawie mogą okazać się błędne.

Należy więc, o ile to tylko możliwe, wyznaczać parametry teorii zarówno z osiadań jak i z przesunięć poziomych punktów.

Otrzymamy stąd układ równań o błędnościach P_i czyli o niejednakowej błędności. Ażeby otrzymać równanie o jednakowej błędności należy każde równanie podzielić przez błąd średni spostrzeżenia.

Tablica 1

ϱ	$10^3 \frac{\Delta\psi(\varrho)}{\Delta b}$	$10^3\varrho \frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b}$	ϱ	$10^3 \frac{\Delta\psi(\varrho)}{\Delta b}$	$10^3\varrho \frac{\partial\varphi(\varrho)}{\partial b}$
0,1	0,18	0,98	3,3	4161,35	3245,08
0,2	1,40	7,52	3,4	4521,66	3269,63
0,3	4,00	24,17	3,5	4891,84	3285,55
0,4	7,05	54,18	3,6	5270,43	3223,28
0,5	11,60	99,55	3,7	5657,84	3293,16
0,6	16,83	161,22	3,8	6051,82	3285,64
0,7	23,68	239,25	3,9	6451,89	3271,14
0,8	33,34	333,02	4,0	6856,45	3250,13
0,9	46,13	441,35	4,2	7675,48	3190,62
1,0	63,95	562,73	4,4	8502,81	3110,44
1,1	87,46	695,34	4,6	9329,61	3014,15
1,2	118,46	837,24	4,8	10151,08	2901,99
1,3	158,31	986,42	5,0	10960,50	2780,11
1,4	208,30	1140,81	5,2	11752,86	2650,41
1,5	270,94	1298,49	5,4	12524,23	2515,38
1,6	346,67	1457,52	5,6	13170,94	2377,27
1,7	436,81	1616,16	5,8	13990,07	2337,96
1,8	542,88	1772,78	6,0	14678,85	2099,24
1,9	664,43	1925,89	6,5	16262,14	1762,95
2,0	803,80	2074,22	7,0	17641,31	1453,42
2,1	960,15	2216,57	7,5	18819,20	1179,02
2,2	1133,99	2352,01	8,0	19808,22	942,28
2,3	1326,58	2479,68	8,5	20626,51	742,96
2,4	1536,61	2598,92	9,0	21296,87	578,94
2,5	1763,94	2708,04	8,5	21841,57	445,32
2,6	2009,38	2810,14	10,0	22280,04	333,34
2,7	2271,65	2901,45	10,5	22631,59	253,03
2,8	2550,04	2983,00	11,0	22900,00	181,76
2,9	2844,14	3054,72	12,0	23315,49	94,34
3,0	3153,31	3116,63	13,0	23581,65	39,33
3,1	3476,56	3168,84	14,0	23751,64	6,52
3,2	3812,98	3211,60	15,0	23843,70	0,46

We wszystkich rozważaniach zakładano, że pomiary wykonywane były dokładnie czyli, że błędy średnie pomiaru są niewielkie i jako takie przy proponowanym przyjęciu wag można pominąć, a wagi są wynikiem rozrzutu statystycznego, wynikającego z sumowania wielu zmiennych przyczyn naturalnych.

LITERATURA

[1] BANACHIEWICZ T.: Rachunek krakowianowy. PWN 1959.

[2] BATKIEWICZ W.: Zmniejszenie deformacji górotworu przez prowadzenie eksploatacji frontem o specjalnym kształcie. Kraków, marzec 1965. Praca habilitacyjna.

[3] FICHTENHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy PWN 1966.

[4] KOCHMAŃSKI T.: Obliczenie ruchów punktów górotworu pod wpływem eksploatacji górniczej PWN 1956.

[5] KOCHMAŃSKI T.; MAGDZIORZ J.: Zmniejszenie odkształceń przez kształtowanie frontu eksploatacji górniczej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Górnictwo. W druku.

[6] MAGDZIORZ J.: Nowe metody obliczania wskaźników deformacji górotworu. Ochrona terenów górniczych. W druku.

[7] WRONA Wł.: Matematyka PWN 1964.