ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: AUTOMATYKA z. 18 Nr kol. 303

WŁODZIMIERZ SZMELCER

Katedra Elektroniki

NUMERYCZNE WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW SZEREGU FOURIERA FUNKCJI OKREŚLONEJ PRZEZ WARTOŚCI DYSKRETNE

Streszczenie. Podano metodę numerycznego wyznaczania amplitud harmonicznych dla układów z elementami nieliniowymi. Do analizy nie wymagana jest znajomość postaci analitycznej opisu elementu, a jedynie zbiór wartości dyskretnych uzyskany na drodze pomiarów. Jako przykład obliczeniowy podano tranzystorowy wzmacniacz rezonansowy klasy BC.

1. Metody opisu elementów nieliniowych

Elementy nieliniowe występujące w układach elektronicznych można podzielić na następujące grupy:

- posiadające łatwo mierzalne charakterystyki, których opis matematyczny jest prosty - np. termistor,
- charakterystyki są łatwe do zmierzenia, lecz opis matematyczny jest mało przydatny z uwagi na przybliżony charakter lub niewygodną do dalszych obliczeń postać - np. tranzystor,
- znane są charakterystyki uzyskane z pomiarów, a niemożliwe jest podanie opisu matematycznego zjawisk z uwagi na ich nieznajomość - np. półprzewodniki amorficzne.

Tak więc do dalszych rozważań mamy do dyspozycji następujące postacie opisu elementów nieliniowych:

- tabele pomiarowe i wykresy,
- równania opisujące zjawiska fizykalne,
- wzory empiryczne.

2. Formułowanie modelu elementu nieliniowego

Praca zajmuje się przypadkami, dla których nieznana jest wystarczająco dokładna postać analityczna elementu, a jedyną rzetelną informacją są charakterystyki uzyskane na drodze pomiarowej. Przykładem takim jest tranzystor dla dużych sygnałów. Oczywiście, można poszukiwać funkcji aproksymującej charakterystyki pomiarowe, lecz w wypadku dużej dokładności aproksymacji postać analityczna jest uciążliwa do dalszych obliczeń. Ponadto niezbędne jest sformułowanie kryterium jakości przybliżenia. W praktyce, postępowanie takie wymaga procedury wielokrotnego przybliżania - co czyni je mało operatywnym.

Cechą rozpatrywanych układów będzie skończone widmo częstotliwościowe sygnałów wejściowych i wyjściowych - narzucone w głównej mierze przez obwody rezonansowe. Przykładem takim mogą być wzmacniacze rezonansowe klasy C, układy przemiany częstotliwości, demodulatory i detektory, modulatory oraz układy z nieliniową reaktancją.

Dodatkowe założenia wynikające wyłącznie z chęci uproszczenia rozważań są następujące:

- charakterystyka elementu nieliniowego jest jednoznaczna i posiada tylko część rzeczywistą,
- widmo sygnałów wejściowych ograniczone jest do jednej częstotliwości.

W pracy przyjęto, że model elementu nieliniowego tworzy zbiór wartości dyskretnych uzyskanych z pomiarów.

Dla funkcji jednowymiarowej ma on postać

$$\sum_n f(n\Delta x)\,\mathrm{III}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \tag{1}$$

Dystrybucja $\mathrm{III}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$, wprowadzona przez Bracewella [1] określona jest następująco

$$\mathrm{III}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) = \sum_n \delta(x - n\Delta x) \qquad n - \text{całkowite} \tag{2}$$

gdzie:

δx - dystrybucja Diraca w sensie określonym przez Temple'a [2]

Δx - odstęp między kolejnymi wartościami dyskretnymi (przedział próbkowania).

Wyrażenie (1) ujmuje zależność sygnału na wyjściu elementu nieliniowego od kolejnych wartości $n\Delta x$ sygnału na wejściu.

3. Numeryczne wyznaczanie współczynników szeregu Fouriera z wartości dyskretnych funkcji

Na wejście elementu nieliniowego podamy sygnał opisany funkcją $y(t)$. Na wyjściu uzyskamy przebieg

$$f(t) = g[y(t)] \tag{3}$$

Znamy tylko wartości dyskretne funkcji $f(t)$, a więc postać

$$f(n\tau) = g[y(n\tau)] \qquad n \text{ - całkowite} \tag{4}$$

Dalsze postępowanie wykorzystuje możliwość całkowitego określenia funkcji o uciętym widmie na podstawie zbioru rzędnych odległych od siebie o n-krotny przedział próbkowania. Warunkiem jest tutaj, by przedział próbkowania spełniał zależność

$$\tau < \frac{1}{2 f_g} \tag{5}$$

gdzie:

f_g - graniczna częstotliwość widma sygnału, a w rozpatrywanym przypadku częstotliwość najwyższej harmonicznej sygnału wejściowego.

Dokładną analizę próbkowania podaje Linden [3]. Przyjmowanie bardzo małych przedziałów próbkowania nie przynosi żadnych korzyści, a w przypadku pomiarów obarczonych błędem może dodatkowo zmniejszyć dokładność obliczeń. Podobne zagadnienie zostało omówione przez autora [4].

Próbkowanie funkcji opisanej przez wyrażenie (3) zapisujemy

$$\frac{1}{\tau} f(t)\, III\left(\frac{t}{\tau}\right) = \sum_{n} f(n\tau)\delta(t - n\tau) \tag{6}$$

Transformata Fouriera funkcji $f(t)$ pomnożonej przez $III(\frac{t}{\tau})$ ma postać

$$f(t)\, III\left(\frac{t}{\tau}\right) \hat{=} \tau III\,(u\tau) * F(u) \tag{7}$$

symbol $*$ oznacza splot

Ponieważ nie znamy postaci analitycznej funkcji $f(t)$, nie możemy podać jej transformaty $F(u)$. Łatwo natomiast wyznaczyć transformatę $F'(u)$ modelu dyskretnego funkcji $f(t)$

$$\sum_{n} f(n\tau)\delta(t - n\tau) \hat{=} \tau \sum_{n} f(n\tau) e^{-j2\pi n\tau u} = F'(u) \tag{8}$$

Ponadto funkcja $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, a model dyskretny wyznaczony jest dla przedziału $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$. Trzeba więc uzupełnić go dla wartości będących wielokrotnością T. Operację tę zapisujemy następująco (dla $T = 1$)

$$f(t)\, III\left(\frac{t}{\tau}\right) * III\left(\frac{t}{T}\right) \hat{=} \tau F'(u)\, III(u) \tag{9}$$

Przejście z przekształcenia Fouriera do szeregu Fouriera polegać będzie na pozostawieniu w widmie tylko wartości dyskretnych, dla punktów odpowiadających całkowitym wielokrotnościom częstotliwości sygnału na wejściu elementu.

By odtworzyć transformatę $F(u)$ sygnału $f(t)$, trzeba dokonać filtracji, co odpowiada odrzuceniu tej części widma, która odpowiada częstotliwościom większym niż f_g (5).

Zapisujemy to następująco

$$F(u) = F'(u)\,III(u)\,II(u_g) \tag{10}$$

Funkcja filtracji $II(u)$ określona jest następująco

$$II(u) = \begin{cases} 1 & u < u_g \\ 0{,}5 & u = u_g \\ 0 & u > u_g \end{cases} \tag{11}$$

gdzie:

u_g - punkt widma odpowiadający częstotliwości granicznej f_g.

Możliwe jest również podanie wartości pośrednich funkcji $f(n\tau)$ z wyrażenia

$$F(u) \triangleq \frac{1}{\tau} f(t)\,III\left(\frac{t}{\tau}\right) * \frac{1}{\tau}\,\mathrm{sinc}\,\frac{t}{\tau} =$$

$$= \sum_n f(n\tau)\,\mathrm{sinc}\,\frac{t - n\tau}{\tau} \tag{12}$$

4. Przykład obliczeniowy

Dla tranzystorowego wzmacniacza rezonansowego klasy BC ze wspólną bazą, interesować nas będzie zależność $I_C = f(U_{BE})$ dla ustalonego napięcia zasilania, punktu pracy i oporności obciążenia.

Dla uproszczenia obliczeń posługiwać się będziemy charakterystyką we współrzędnych uogólnionych, którą przedstawia tablica.

Tablica

16 t	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ... 16
f(t)	1.0	1.0	1.0	0,9	0,8	0.6	0.3	0.1	0 ... 0

Wartości podane w tablicy przedstawiają zależność napięcia na oporności obciążenia, przy podaniu na wejście wzmacniacza sygnału sinusoidalnego o określonej amplitudzie. Zależność ta została podana z charakterystyk statycznych.

4.1. Obliczenie amplitudy pierwszej harmonicznej

Przyjmujemy: $u = 1$, $\tau = \frac{1}{4}$

$$A_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{1} f\left(\frac{2n+1}{8}\right) \cos \frac{2n+1}{4}\pi = 0{,}248$$

4.2. Obliczenie amplitudy drugiej harmonicznej

Przyjmujemy: $u = 2$, $\tau = \frac{1}{8}$

$$A_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} f\left(\frac{2n+1}{16}\right) \cos \frac{2n+1}{4}\pi = 0{,}0707$$

5. Wnioski

Podane postępowanie odznacza się dużą prostotą. Pozwala ono, oprócz uprzednio podanych zastosowań ułatwić stosowanie metody funkcji opisującej do analizy układów nieliniowych w teorii regulacji. Ponadto, dużą zaletą jest łatwość określenia sposobu wyboru wartości dyskretnych funkcji.

Innym zastosowaniem może być synteza sygnałów o określonym widmie częstotliwościowym.

LITERATURA

[1] BRACEWELL R.: The Fourier Transforms and Its Applications. McGraw-Hill, Inc. 1965.

[2] TEMPLE G.: Theories and applications of generalised functions. J. Lond. Math. Soc. 28. 1953.

[3] LINDEN D.A.: A Discussion of Sampling Theorems. Proc. IRE. t. 47, s. 1219, czerwiec 1959.

[4] SZMELCER W.: Praca dyplomowa s. 14, Katedra Elektroniki 1969.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ДАННОЙ ЧЕРЕЗ СБОР ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

С о д е р ж а н и е

Рассмотрен метод численного определения амплитуд гармонических составляющих для систем с нелинейными элементами. Для проведения анализа не нужно знание аналитической формы описания нелинейного элемента, а только совокупность дискретных значений полученных путём измерений.

Дан пример расчёта транзисторного резонансного усилителя кл. БЦ.

THE NUMERICAL CALCULATION OF FOURIER SERIES COEFFICIENTS
FOR FUNCTION DEFINED BY IT SAMPLIED VALUES

S u m m a r y

The numerical calculation method of definition of the harmonic amplitudes for systems with nonlinear elements is described. For the analysis is not needed analytical form of the nonlinear element description but only set of samples obtained through measurments.

The resonance BC class transistor amplifier is calculated for an example.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 15.X.1970 r.