ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: AUTOMATYKA z. 18 Nr kol. 303

LECH ZNAMIROWSKI

Katedra Kompleksowych Systemów Sterowania

METODA ZNAJDOWANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW SKALI ZMIENNYCH DLA MODELI STACJONARNYCH, LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę znajdowania współczynników skali zmiennych modelu opartą na znajdowaniu obszarów w przestrzeni stanu, w których pozostają rozwiązania badanego równania różniczkowego.

Do tego celu posłużono się drugą metodą Lapunowa badania stabilności. Problem rozwiązano do końca dla przypadku stacjonarnych liniowych równań różniczkowych.

Wykorzystując kryterium stabilności Hermite'a do budowy funkcji Lapunowa znaleziono ograniczenia obszaru, w którym pozostają rozwiązania równania n-tego rzędu, podając wzór na ograniczenie od góry wartości maksymalnej zmiennej oraz jej n-1 pochodnych.

I. Wstęp

Dobór współczynnika skali zmiennych powinien być taki, by spełniona była następująca nierówność:

$$a_x \leq \frac{|IM|}{|x_{max}|} \tag{1}$$

gdzie:

IM - oznacza wartość jednostki maszynowej dla danej maszyny analogowej

x_{max} - wartość maksymalna rzeczywistej zmiennej x.

Określenie współczynników skali modelu sprowadza się więc do znalezienia x_{max} lub ograniczenia na tę wielkość, co zapewni poprawną pracę elementów modelujących równanie.

Jeżeli ograniczenie to jest zbyt ostre wystarczy proste przeskalowanie modelu dla tej zmiennej, której wartości napięć modelu są zbyt małe w stosunku do jednostki maszynowej.

W dalszym ciągu zajmiemy się określeniem ograniczeń na wartości maksymalne zmiennych $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots\ldots y^{(n-1)}$ dla równania różniczkowego:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = a_{n+1} \tag{2}$$

przy warunkach początkowych

$$y(0) = y_o$$

$$y^{(1)}(0) = y_o^{(1)}$$

$$y^{(2)}(0) = y_o^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_o^{(n-1)}$$

gdzie symbolem a_i oznaczono liczby stałe, rzeczywiste.

W literaturze [1], [2], [3] podaje się metodę (metodę tę Jackson nazwał "zasadą równych współczynników") szacowania wartości

$y_{max}, y_{max}^{(1)}, \ldots\ldots y_{max}^{(n-1)}$ dla równania (2) przy założeniu

$$y_o = y_o^{(1)} = y_o^{(2)} = \ldots\ldots y_o^{(n-1)} = 0$$

a więc w przypadku szczególnym, gdy warunki początkowe są zerowe. W dalszym ciągu nie będziemy przyjmować tego upraszczającego założenia i rozpatrzymy przypadek ogólny.

Zauważmy, że zmiana zmiennej $y = x + \frac{a_{n+1}}{a_n}$ prowadzi do równania

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots\ldots a_{n-1} x^{(1)} + a_n x = 0 \qquad (3)$$

przy warunkach początkowych

$$x(0) = y_o - \frac{a_{n+1}}{a_n} = x_o$$

$$x^{(k)}(0) = x_o^{(k)} \quad k = 1,2,\ldots n-1$$

Poszukiwać więc będziemy ograniczeń na wartości maksymalne równania (3) a więc:

$$x_{max}^{(k)} \quad k = 0,1,2 \ldots\ldots n-1 \qquad (4)$$

Ograniczymy się do wartości (4) dla równań typu (3) posiadających punkt równowagi asymptotycznie stabilny. W dalszej części pracy znajdziemy obszar D przestrzeni fazowej równania (3), w którym pozostaje trajektoria dla $0 \leqslant t < \infty$. Punkt początkowy trajektorii określony warunkami początkowymi, znajduje się na granicy obszaru D. Taka metoda szacowania wartości maksymalnych rozwiązania równania różniczkowego może być wykorzystana dla układów równań i równań nieliniowych, my jednak ograniczymy się w dalszym ciągu do równania (3), ponieważ tylko w tym przypadku można otrzymać ogólne formuły.

Warunki stabilności rozwiązania równania (3) wynikają z badania pierwiastków wielomianu charakterystycznego:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (5)$$

Wykorzystamy tu kryterium stabilności Hermite'a [4].

Na to, aby pierwiastki równania (3) miały części rzeczywiste ujemne konieczne jest i wystarczające, aby symetryczna macierz $n \times n$ wymiarowa $\underline{H}$, była istotnie dodatnio określona:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & -a_7+a_1a_6-a_2a_5+a_3a_4 & 0 & -a_5+a_1a_4 & 0 \\ \cdots & 0 & a_5-a_1a_4+a_2a_3 & 0 & a_3 \\ \cdots & -a_5+a_1a_4 & 0 & -a_3+a_1a_2 & 0 \\ \cdots & 0 & a_3 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Zapiszemy równanie (3) w postaci macierzowej:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots\cdots & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x} \qquad (7)$$

gdzie:

$$\underline{x}^T = \left[x \;\; \dot{x} \;\; \ddot{x} \;\ldots\ldots\; x^{(n-1)} \right] = \left[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\ldots\ldots\; x_n \right]$$

przy warunkach początkowych

$$x_k(0) = x_{ko} \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n.$$

Jeśli macierz $\underline{H}$ jest istotnie dodatnio określona, to forma kwadratowa:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{H}\, \underline{x} \tag{8}$$

jest również istotnie dodatnio określona.
Pochodna funkcji (8) podług czasu wzdłuż trajektorii równania (3) wyraża się wzorem [4]:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{x}^T \underline{H}\, \underline{x}) = -2(a_1 x_n + a_3 x_{n-2} + \dots\dots\dots)^2 \tag{9}$$

Ponieważ forma ta jest ujemnie określona, funkcja $V(\underline{x})$ jest więc funkcją Lapunowa. Ponadto: $\dot{V} \leqslant 0$ [4], ponieważ det $\underline{H} \neq 0$ więc $\dot{V} \equiv 0$ tylko dla $\underline{x} = 0$. Rozwiązanie trywialne $\underline{x} = 0$ układu równań (7) jest więc stabilne asymptotycznie.

II. Wartości maksymalne zmiennych w obszarze D

Dla chwili $t = 0$ funkcja $V[\underline{x}(0)] = \underline{x}^T(0)\, \underline{H}\, \underline{x}(0) = V_o$. Zbiór D_o punktów przestrzeni X opisany nierównością:

$$V(\underline{x}) \leqslant V_o \tag{10}$$

jest zbiorem wypukłym [7], zawierającym punkt $\underline{x} = 0$.
Rozważmy nierówność:

$$V(\underline{x}) \leqslant V_1, \tag{11}$$

która przedstawia zbiór D_1 przestrzeni X o tych samych własnościach.
Załóżmy, że

$$\frac{V_o}{V_1} = k^2 > 1. \quad (k > 0). \tag{12}$$

Dokonajmy zmiany układu współrzędnych według relacji

$$\underline{x}' = k\,\underline{x} \tag{13}$$

Uwzględniając (13) w równaniu (11) możemy napisać:

$$V(\underline{x}') \leqslant V_o \tag{14}$$

a więc otrzymujemy nierówność opisującą zbiór D_o w układzie współrzędnych X'.

Jeżeli punkt $\underline{x} = 0$ układu X pokryje się z punktem $\underline{x}' = 0$ układu X', to ponieważ równanie (14) przedstawia zbiór D_1 w układzie X i $k > 1$, więc $D_1 \subset D_o$. Ponieważ $\dot{V}(\underline{x}) \leqslant 0$, dla $\underline{x} \neq 0$, zatem dalsze badanie obszaru D można ograniczyć do badania wartości największych $x_{kmax} \in D_o$.

Przy wyznaczaniu x_{kmax} można kolejno traktować równanie:

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) = V(x_1, x_2 \ldots x_n) - V_o = 0 \tag{15}$$

jako równanie opisujące funkcję uwikłaną:

$$x_k = f(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n). \tag{16}$$

Oznaczmy współrzędne punktu $\underline{x}_k$ przestrzeni X, w którym funkcja opisana równaniem (16) osiąga ekstremum lokalne przez:

$$x_{ki} \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{17}$$

gdzie dla $i = k$ $\quad x_{kk} = x_{kmax}$.

Na to, aby w pewnym otoczeniu punktu $\underline{x}_k$ istniała funkcja uwikłana (16) opisana równaniem (15), musi być spełniony warunek [5]:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}_k} \neq 0 \tag{18}$$

gdzie:

$$k = 1,2, \ldots\ldots n.$$

Można łatwo dowieść*), że dla funkcji $U(\underline{x})$ danej równaniem (15) wymaganie to jest zawsze spełnione.

Warunki konieczne istnienia ekstremum lokalnego funkcji (16) są następujące:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2, \ldots\ldots k-1, k+1, \ldots\ldots n \tag{19}$$

Z zależności (15) wynika, że dla $U\left[x_i, x_k(x_i)\right]$ przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych

$$\frac{dU}{dx_i} = 0$$

a zatem

$$\frac{dU}{dx_i} = \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

Można więc napisać:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_k}} \tag{20}$$

Ponieważ zachodzi (18), więc ekstremum lokalne każdej funkcji (16) wystąpi wtedy, gdy:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}_k} = 0 \tag{21}$$

$$i = 1,2, \ldots\ldots k-1,\ k+1, \ldots\ldots n.$$

Następnie wykażemy, że jest spełniony warunek wystarczający istnienia maksimum lokalnego funkcji (16) w punkcie $\underline{x}_k$ ($x_{kk} > 0$). Korzystając z pojęcia różniczki funkcji (16) możemy znaleźć po bezpośrednich obliczeniach, że pochodna cząstkowa drugiego rzędu w punkcie $\underline{x}_k$ wynosi:

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l \partial x_m} = -\left.\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x_l \partial x_m}}{\frac{\partial U}{\partial x_k}}\right|_{\underline{x}_k} \quad \begin{array}{l} l = 1,2, \ldots\ldots k-1,\ k+1, \ldots\ldots n \\ m = 1,2, \ldots\ldots k-1,\ k+1, \ldots\ldots n. \end{array} \tag{22}$$

Jak wynika ze wzoru (38)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}_k} = \frac{2x_{kk}}{H_{kk}} \sum_{i=1}^{u} h_{ki}\, H_{ki} = A > 0, \tag{23}$$

natomiast $\frac{\partial^2 U}{\partial x_l \partial x_m} = -\,2h_{lm}$ gdzie h_{lm} jest elementem macierzy $\underline{H}$, więc

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l \partial x_m} = -\,\frac{2h_{lm}}{A}$$

Oznaczmy

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l \partial x_m} = y_{lm} \tag{24}$$

i rozpatrzmy formę kwadratową

$$y = \sum_{\substack{l=1\\m=1\\l\neq k\\m\neq k}}^{n} y_{lm}\Delta x_l \Delta x_m . \tag{25}$$

Aby funkcja (16) posiadała w punkcie maksimum lokalne warunkiem wystarczającym jest, aby forma kwadratowa (25) była istotnie ujemnie określona [5].

Zauważmy, że wobec dowolności Δx_r można formę (25) traktować jako szczególny przypadek formy kwadratowej:

$$x = \sum_{\substack{l=1\\m=1}}^{n} y_{lm}\Delta x_l \Delta x_m \quad \text{dla } \Delta x_k = 0 \tag{26}$$

Widać więc, że

$$x = -\frac{2}{A}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} h_{ij}\Delta x_i \Delta x_j \tag{27}$$

jest formą istotnie ujemnie określoną, gdyż macierz $\underline{H}$ jest istotnie dodatnio określona.

Spełniony więc jest i warunek wystarczający istnienia maksimum funkcji (16) w punkcie $\underline{x}_k$.
Zakładając nadal, że $x_{kk} > 0$ możemy zauważyć, że płaszczyzna o równaniu:

$$x_k = x_{kk} \tag{28}$$

jest styczna do powierzchni U w punkcie $\underline{x}_k$.

Z drugiej strony wiadomo [7], że przez punkt brzegowy zbioru wypukłego przechodzi płaszczyzna podpierająca. Ponieważ zero jest zawarte w zbiorze D_o, to wartość x_{kk} jest wartością największą zmiennej x_k. Podobnie można wykazać, że $-x_{kk}$ jest najmniejszą wartością x_k. Zachodzi więc zawsze:

$$|x_k| \leq x_{kk} \tag{29}$$

Wartość x_{kk} można obliczyć z równania (15) oraz (21). Rozwiązaniem powyższego układu równań są współrzędne punktów $\underline{x}_k$.
Rozpisując równanie (21) otrzymamy:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \underline{e}_i^T \underline{H}\, \underline{x} + \underline{x}^T \underline{H}\, \underline{e}_i = 0 \tag{30}$$

$$i = 1,2, \ldots\ldots k-1, k+1, \ldots\ldots n.$$

gdzie

$$\underline{e}_i^T = [0,0,\ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0]$$

i-ta kolumna.

Mamy ponadto równanie brzegu zbioru D_o w postaci:

$$\underline{x}^T \underline{H}\, \underline{x} = V_o$$

Biorąc pod uwagę że:

$$\underline{H} = \underline{H}^T$$

otrzymujemy n równań:

$$\underline{x}^T \underline{H}\, \underline{x} = V_o \tag{31}$$

$$\underline{x}^T \underline{H}\, \underline{e}_i = 0 \tag{32}$$

$$i = 1,2, \ldots\ldots k-1,\ k+1, \ldots\ldots n$$

Układ n-1 równań liniowych (32) można przedstawić w postaci:

$$[x_{k1},\ x_{k2}, \ldots\ x_{kk-1},\ 0,\ x_{kk+1}, \ldots\ x_{kn}]\ \underline{H}\, \underline{e}_i = -\,x_{kk}\, \underline{e}_k^T \underline{H}\, \underline{e}_i \tag{33}$$

$$i = 1,2, \ldots\ k-1,\ k+1 \ldots\ n$$

Oznaczmy przez:

$H_{ki}(i \neq k)$ jak wynika z (33), minor macierzy $\underline{H}$ powstały przez skreślenie k-tego wiersza i zastąpienie i-tej kolumny przez k-tą kolumnę (pomnożoną przez -1) i skreślenie k-tej kolumny. (I)

$H_{ki}(i=k)$ minor główny rzędu n-1 macierzy $\underline{H}$. (II)

Ponieważ macierz $\underline{H}$ jest istotnie dodatnio określona, więc $H_{kk}>0$ [6]. Zatem rozwiązanie układu równań (33) jest następujące:

$$x_{ki} = \frac{H_{ki}}{H_{kk}}\, x_{kk}$$

$$i = 1,2, \ldots\ldots n \tag{34}$$

bo dla i=k

$$x_{kk} = \frac{H_{kk}}{H_{kk}}\, x_{kk} = x_{kk}$$

Podstawiając uzyskany wynik do równania (31) otrzymamy:

$$\frac{x_{kk}}{H_{kk}}\left[H_{k1},\ H_{k2},\ \dots\ H_{kn}\right]\underline{H}\begin{bmatrix}H_{k1}\\ H_{k2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ H_{kn}\end{bmatrix}\frac{x_{kk}}{H_{kk}} = V_o \tag{35}$$

Ponieważ zachodzi (32), więc rozwiązanie równania (39) jest następujące:

$$x_{kk} = \pm\sqrt{\frac{V_o\ H_{kk}}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{ki}H_{ki}}} \tag{36}$$

Jeśli wykorzystamy zależności (7), (29) i (36), otrzymamy ostatecznie:

$$\left|x_{max}^{(k-1)}\right| \leqslant \sqrt{\frac{V_o\ H_{kk}}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_{ki}\ H_{ki}}} \tag{37}$$

$$k = 1,2,\ \dots\ n$$

gdzie:

$$V_o = \underline{x}^T(0)\ \underline{H}\ \underline{x}(0)$$

Wzór (37) pozwala oszacować wartości ekstremalne rozwiązań równania (3) w oparciu o warunki początkowe $\underline{x}(0)$ oraz współczynniki równania. W wypadku, gdy ograniczenia na zmienne są zbyt ostre wystarczy przeskalowanie modelu dla tej zmiennej, której wartości rozwiązań są zbyt małe w porównaniu z jednostką maszynową. Należy dodać, że ograniczenia te mogą być zbyt ostre od góry, a więc w modelu na wyjściach wzmacniaczy nigdy nie będzie przekroczona wartość jednostki maszynowej.

W tablicy przedstawiono ograniczenia na zmienne dla równań do rzędu piątego po wstawieniu do wzoru (37) odpowiednich wartości h_{ki} oraz H_{ki}.

*) Pochodna funkcji U podług x_k jest następująca:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \underline{e}_k^T \underline{H}\,\underline{x} + \underline{x}^T \underline{H}\,\underline{e}_k = 2\underline{x}^T \underline{H}\,\underline{e}_k$$

Wartość pochodnej w punkcie $\underline{x}_k$ wynosi:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}_k} = 2\,\frac{x_{kk}}{H_{kk}} \sum_{i=1}^{n} h_{ki} H_{ki} \tag{38}$$

Wstawiając (36) do (38) otrzymujemy:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}_k} \neq 0$$ ponieważ macierz $\underline{H}$ jest istotnie dodatnio określona.

III. Dwa przykłady

Przykład 1

Obliczmy ograniczenia na wartości maksymalne rozwiązania równania:

$$x''' + a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x = 0$$

dla warunków początkowych

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
x'(0) &= x'_0 \\
x''(0) &= x''_0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

W badanym przypadku macierz $\underline{H}$ jest następująca:

$$
H = \begin{bmatrix} a_2a_3 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_3+a_1a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \tag{40}
$$

Zakładamy, że rozwiązanie jest asymptotycznie stabilne tzn., macierz $\underline{H}$ jest istotnie dodatnio określona.
Zgodnie z określeniami (I) i (II) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= \begin{vmatrix} a_1a_2-a_3 & 0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1a_2-a_3) \\
H_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \\
H_{13} &= \begin{vmatrix} a_1a_2-a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 \end{vmatrix} = -a_3(a_1a_2-a_3) \\
H_{21} &= \begin{vmatrix} a_2a_3 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$H_{22} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & a_3 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2$$

$$H_{23} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$H_{31} = \begin{vmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & a_1a_2-a_3 \end{vmatrix} = -a_3(a_1a_2-a_3)$$

$$H_{32} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$H_{33} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & 0 \\ 0 & a_1a_2-a_3 \end{vmatrix} = a_2a_3(a_1a_2-a_3)$$

Na podstawie (40), (41) i (37) otrzymujemy więc:

$$|x_{max}| \leqslant \sqrt{\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{V_o}{a_1a_2-a_3}}$$

$$|x'_{max}| \leqslant \sqrt{\frac{V_o}{a_1a_2-a_3}} \tag{42}$$

$$|x''_{max}| \leqslant \sqrt{\frac{a_2\,V_o}{a_1a_2-a_3}}$$

gdzie:

$$V_o = \left[x_o\ x_o'\ x_o''\right] \underline{H} \begin{bmatrix} x_o \\ x_o' \\ x_o'' \end{bmatrix}$$

Przykład 2

Załóżmy

$$x_o = x_o' = x_o'' = 110 \quad a_1 = a_2 = 1 \quad a_3 = 0{,}5$$

Z równania (42) obliczamy ograniczenia, które wynoszą:

$$|x_{max}| \leqslant 381$$

$$|x'_{max}| \leqslant 270$$

$$|x''_{max}| \leqslant 270.$$

Stąd obliczamy współczynniki skali (bez zaokrąglenia oraz dla IM = = 100)

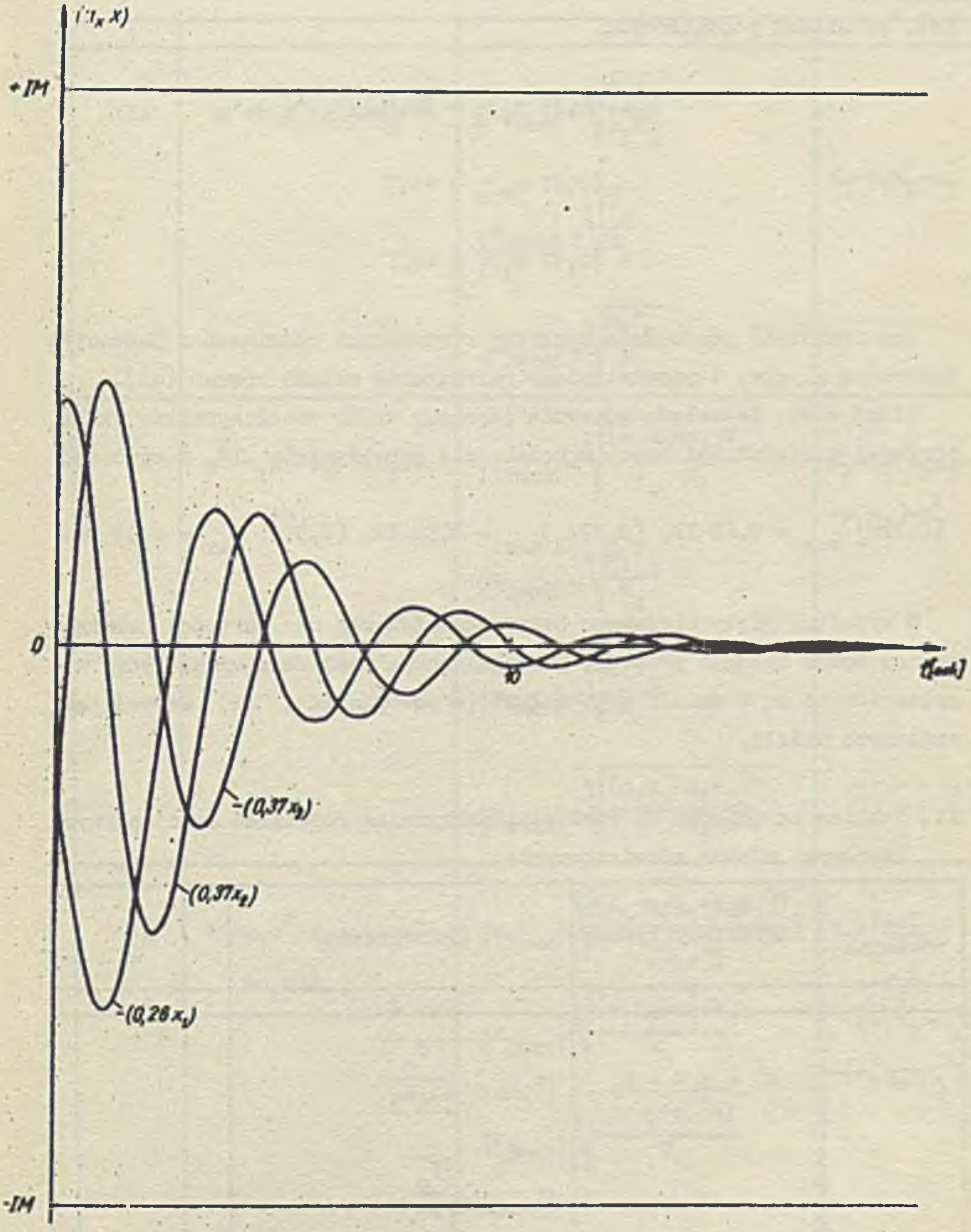
$$a_x = 0{,}26 \qquad a_{x'} = 0{,}37 \qquad a_{x''} = 0{,}37$$

Równanie (39) można przedstawić w postaci (7). Uwzględniając współczynniki skali zmiennych otrzymujemy układ równań maszynowych:

$$\frac{d}{dt}(0{,}26\ x_1) = 0{,}7\ (0{,}37\ x_2)$$

$$\frac{d}{dt}(0{,}37\ x_2) = (0{,}37\ x_3) \tag{43}$$

$$\frac{d}{dt}(0{,}37\ x_3) = -\ (0{,}37\ x_3) - (0{,}37\ x_2) - 0{,}71(0{,}26\ x_1)$$



Rys. 1

przy warunkach początkowych

$$(0{,}26\ x_1)_o = 28{,}6$$

$$(0{,}37\ x_2)_o = 40{,}7$$

$$(0{,}37\ x_3)_o = 40{,}7$$

Aby umożliwić porównanie amplitud otrzymanych rozwiązań z jednostką maszynową na rys. 1 przedstawiono rozwiązanie układu równań (43).

Widać więc, że metoda zapewnia poprawny dobór współczynników skali, ponieważ wartości zmiennych w modelu nie przekraczają IM i wynoszą:

$$(0{,}26x_1)_{max} = 0{,}65\ \mathrm{IM},\ (0{,}37x_2)_{max} = 0{,}52\ \mathrm{IM},\ (0{,}37x_3)_{max} = 0{,}48\ \mathrm{IM}.$$

W wypadku, gdyby otrzymano ostre ograniczenia na wartości ekstremalne, można dokonać prostego przeskalowania tych zmiennych, które reprezentowane są w modelu zbyt małymi (w porównaniu z IM) wartościami zmiennych modelu.

IV. Tablica ograniczeń na wielkości maksymalne rozwiązań stacjonarnych liniowych równań różniczkowych:

Rząd równania	Wielomian charakterystyczny $f(z) =$	Ograniczenia	M_i
1	2	3	4
II	$z^2 + a_1 z + a_2$	$\lvert x_{1max}\rvert \leq \sqrt{\frac{V_o}{a_1 a_2}}$ $\lvert x_{2max}\rvert \leq \sqrt{\frac{V_o}{a_1}}$	

cd. tablicy

1	2	3	4
III	$z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$	$\lvert x_{1max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{a_1V_o}{a_3M_3}}$ $\lvert x_{2max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{V_o}{M_3}}$ $\lvert x_{3max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{a_2V_o}{M_3}}$	$M_3=a_1a_2-a_3$
IV	$z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+$ $+a_4$	$\lvert x_{1max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_1a_2-a_3)V_o}{a_4\ M_4}}$ $\lvert x_{2max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{a_1V_o}{M_4}}$ $\lvert x_{3max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{a_3V_o}{M_4}}$ $\lvert x_{4max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_2a_3-a_1a_4)V_o}{M_4}}$	$M_4=a_1(a_2a_3-$ $-a_1a_4)-a_3^2$
V	$z^5+a_1z^4+a_2z^3+a_3z^2+$ $+a_4z+a_5$	$\lvert x_{1max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_5-a_1a_4+a_2a_3)V_o}{a_5\ M_5}}$ $\lvert x_{2max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_1a_2-a_3)V_o}{M_5}}$ $\lvert x_{3max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_1a_4-a_5)V_o}{M_5}}$	$M_5=(a_3a_4-$ $-a_2a_5)\cdot$ $(a_1a_2-a_3)-$ $-(a_1a_4-a_5)^2$

cd. tablicy

1	2	3	4
		$\lvert x_{4max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{(a_3a_4-a_2a_5)V_0}{M_5}}$ $\lvert x_{5max}\rvert \leqslant \sqrt{\frac{[a_2(a_3a_4-a_2a_5)-}{M_5}}$ $\frac{-a_4(a_1a_4-a_5)]V_0}{M_5}$,	

LITERATURA

[1] JACKSON A.S.: Analog Computation, Mc Graw-Hill, New York, 1960.

[2] KORN G.A., KORN T.M.: Electronic Analog and Hybrid Computers, Mc Graw-Hill, New York, 1964.

[3] LEVINE L.: Metody stosowania maszyn analogowych, WNT, W-wa 1969.

[4] PARKS P.C.: A New Look at the Routh-Hurwitz Problem Using Liapunov's Second Method, Bull. De l'Acad. Pol. des Science, Warszawa 1964.

[5] FICHTENCHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1964.

[6] ГАНТМАХЕР Ф.Р.: "Теория матриц" ГИТТЛ, Москва, 1954.

[7] ALEXIEWICZ A.: Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa 1969.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 16.X.1970 r.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАСШТАБА АМПЛИТУДЫ ПЕРЕМЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АНАЛОГОВОГО МОДИЛИРОВАНИЯ

С о д е р ж а н и е

В статье представлено метод определения коэффициентов масштаба амплитуды переменных, опираясь на определение такой области фазового пространства, в котором остают решения данного дифференциального уравнения.

К решению задачи применен второй метод Ляпунова.

Проблема решена до конца для стационарных линейных дифференциальных уравнений. При построении функции Ляпунова израсходован критерий устойчивости Гермита. В работе находилься ограничения области, в которой остаются траектории решения. В конце представили формулы на ограничение сверху максимальной величины переменной и её производных (порядка 1,2,...... n-1).

THE METHOD OF DETERMINING THE SCALE FACTORS OF THE MODEL OF STATIONARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ANALOG SIMULATION

S u m m a r y

The method of determining the scale factors of the model differential equations for analog computers was been presented. The method is based on determining the space state area in which the solutions of the examined equation remain.

For this purpose the second Liapunov's method was been used.

The problem was solved to the end for the stationary, linear differential equations. Using the Hermite's stability criterion to construct Liapunov's function, the restrictions of space state mentioned above were found.

At the end the formula for the restrictions of maximum value of variables and their derivatives (1,2,......n-1) of the solution of stationary linear differential equation was presented.