ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria AUTOMATYKA z. 18 Nr kol. 303

STANISŁAW KUBIT

Katedra Automatyzacji
Procesów Przemysłowych

WPŁYW TARCIA COULOMBA NA PRACĘ SIŁOWNIKÓW PNEUMATYCZNYCH

Streszczenie. W artykule przeprowadzono porównanie trajektorii fazowych ruchów układów oscylacyjnych bez tarcia suchego oraz układów, w których tarcie suche występuje. Przedyskutowano wpływ różnicy pomiędzy tarciem statycznym a tarciem kinematycznym na pracę siłowników pneumatycznych. Dla pewnych szczególnych przypadków omówiono wpływ tej różnicy na pracę siłownika z ustawnikiem pozycyjnym i podano warunki, po spełnieniu których układ siłownik - ustawnik pracuje z cyklem granicznym.

1. Trajektorie fazowe ruchów układów oscylacyjnych

a. Trajektoria fazowa ruchu układu bez tarcia suchego

Zależność pomiędzy sygnałem wyjściowym a wejściowym układu oscylacyjnego bez tarcia suchego można przedstawić relacją:

$$T_n^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi T_n \cdot \frac{dx}{dt} + x = z \qquad (1)$$

przy czym:

$c.z = w$ - sygnał wejściowy (pobudzenie),

c - sztywność układu,

x - sygnał wyjściowy,

T_n - okres drgań własnych,

ξ - względny współczynnik tłumienia.

Po przyjęciu skokowej zmiany sygnału wejściowego w od wartości $w = w_o$ do wartości $w = 0$ oraz po podstawieniu $y = \frac{dx}{dt}$ i przekształceniu, równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_n^2}\frac{x}{y} - \frac{2\xi}{T_n} \tag{2}$$

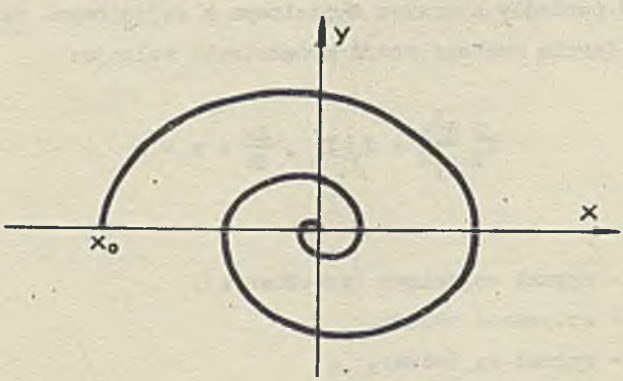
Jest to równanie różniczkowe jednorodne trajektorii fazowej. Po przeprowadzeniu całkowania otrzymamy równanie trajektorii

$$y^2 T_n^2 + 2\xi T_n \cdot y \cdot x + x^2 = c.\exp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{y}{x} T_n + \xi}{\sqrt{1-\xi}} \tag{3}$$

Z równania różniczkowego trajektorii wynika, że:

- wszystkie krzywe są jednokładne ze środkiem układu,
- styczna do trajektorii w danym punkcie x_o, y_o posiada nachylenie mniejsze od nachylenia stycznej do elipsy o równaniu $y^2 + \frac{x^2}{T_n^2} = C$ przechodzącej przez punkt x_o, y_o o wartości $\frac{2\xi}{T_n}$.

Jedną z trajektorii przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Ruch ustaje z chwilą osiągnięcia przez punkt poruszający się po trajektorii początku układu.

b. Trajektoria fazowa ruchu układu z tarciem suchym

Równanie różniczkowe takiego układu przedstawia się następująco

$$T_n^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi T_n \cdot \frac{dx}{dt} + x = z + a\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{4}$$

gdzie:

$$a\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{M_t\left(\frac{dx}{dt}\right)}{c} \tag{5}$$

$M_t\left(\frac{dx}{dt}\right)$ - moment lub siła tarcia suchego.

Po zanikaniu pobudzenia (sygnału wejściowego) równanie różniczkowe trajektorii fazowej będzie następujące

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+a)}{T_n^2 \cdot y} - \frac{2\xi}{T_n} \tag{6}$$

dla

$$\frac{dx}{dt} \geqslant 0$$

oraz

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{T_n^2\, y} - \frac{2\xi}{T_n} \tag{7}$$

dla

$$\frac{dx}{dt} \leqslant 0$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$y^2 T_n^2 + 2\xi T_n(x+a)\, y + (x+a)^2 =$$

$$= c.\exp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{y}{x+a} + \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{8}$$

dla

$$\frac{dx}{dt} \geqslant 0 \quad \text{a więc dla} \quad y \geqslant 0$$

oraz

$$y^2 T_n^2 + 2\xi T_n(x-a)y + (x-a)^2 =$$

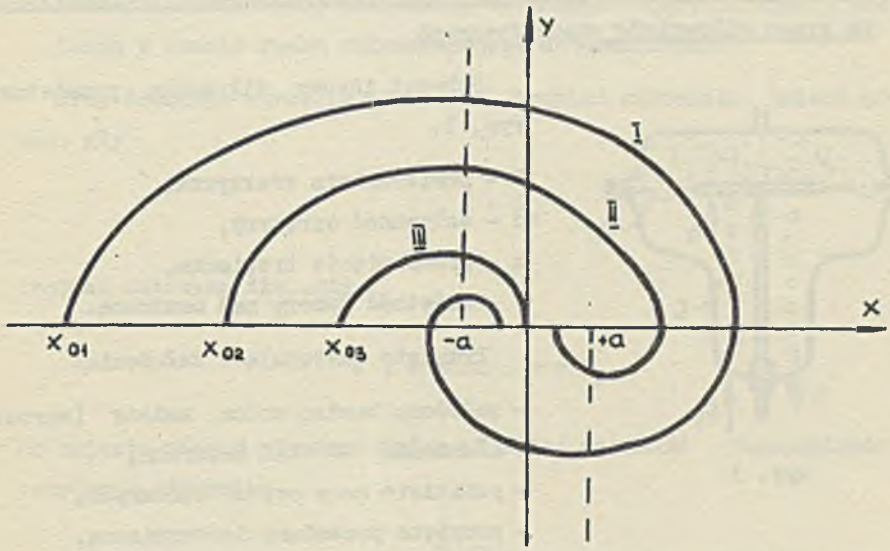
$$= c.\exp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{y}{x-a} + \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{9}$$

dla

$$\frac{dx}{dt} \leqslant 0 \quad \text{a więc dla} \quad y \leqslant 0$$

Z równań tych wynika, że uwzględnienie tarcia suchego nie zmienia ogólnej formy trajektorii. Występuje jednakże różnica polegająca na tym, że ruch na półpłaszczyźnie $y \geqslant 0$ odbywa się względem początku układu przesuniętym do punktu $(0, -a)$, natomiast ruch na półpłaszczyźnie $y \leqslant 0$ odbywa się względem początku układu przesuniętym do punktu $(0, +a)$ względem początku układu przy ruchu bez tarcia.

Rys. 2 przedstawia kilka trajektorii ruchu układu oscylacyjnego z uwzględnieniem tarcia suchego. Zakończenie ruchu następuje z chwilą osiągnięcia przez poruszający się punkt wartości $-a \leqslant x \leqslant a$ przy $y = 0$. Jak wynika z porównania trajektorii, wystąpienie tarcia suchego



Rys. 2

powoduje bardzo szybkie wytłumienie ruchu układu opisanego równaniem (1). Dotychczasowe rozważania przeprowadzono w oparciu o założenie, że nie ma różnicy pomiędzy tarciem suchym a tarciem kinetycznym. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż pojawienie się takiej różnicy nie wpłynie na kształt trajektorii fazowych ruchu. Spowoduje to tylko powstanie możliwości wcześniejszego zakończenia ruchu.

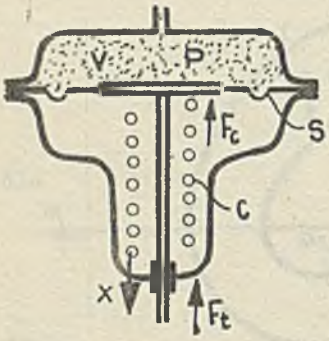
Zakończenie ruchu nastąpi z chwilą osiągnięcia przez poruszający się punkt wartości x zawartej w przedziale $-a_1 \leqslant x \leqslant a_1$ przy czym:

$$a_1 = \frac{M_S}{c}$$

gdzie:

M_S - siła lub moment tarcia statycznego.

2. Wpływ różnicy pomiędzy tarciem statycznym a tarciem kinematycznym na pracę siłowników pneumatycznych



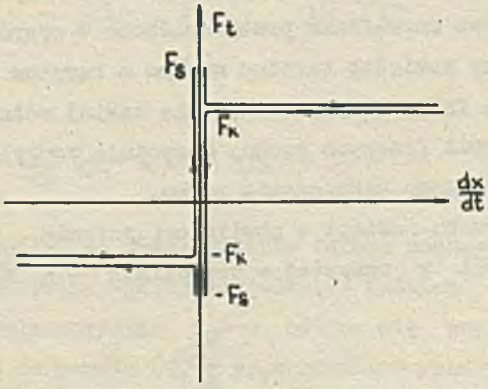
Rys. 3

Schemat ideowy siłownika przedstawia rys. 3.

S - powierzchnia efektywna,
c - sztywność sprężyny,
x - przesunięcie trzpienia,
V - objętość komory nad membraną.

Przyjęto następujące założenia:

- założono bardzo wolną zmianę (wzrost) ciśnienia P nad membraną,
- pominięto masę części ruchomych,
- przyjęto przemianę izotermiczną,
- założono istnienie siły obciążenia F_t o charakterze tarcia suchego i charakterystyce przedstawionej na rys. 4.



Rys. 4

F_S - siła tarcia statycznego,
F_k - siła tarcia kinetycznego,

- założono, że w czasie ruchu powierzchnia efektywna nie ulega zmianie.

a. Praca siłownika przy założeniu, że zmiana objętości komory nad membraną w czasie ruchu siłownika jest do pominięcia.

Przy dowolnym wzroście ciśnienia, trzpień siłownika zmieni położenie, gdy

$$P \cdot S = F_s \tag{10}$$

Trzpień zatrzyma się, gdy

$$P \cdot S = \Delta x \cdot c + F_c \tag{11}$$

Po odjęciu równań stronami można określić wielkość przesunięcia się trzpienia siłownika

$$x = \frac{F_s - F_c}{c} = \frac{\Delta F}{c} \tag{12}$$

Po pewnym czasie ciśnienie nad membraną wzrośnie do wartości P_2, przy której nastąpi następny "krok" siłownika, jak łatwo udowodnić, również o wartość Δx. Czas przerwy pomiędzy poszczególnymi "krokami" siłownika zależy od szybkości wzrastania ciśnienia nad membraną. Można wykazać, że tego typu praca siłownika wpłynie niekorzystnie na dobroć układu automatycznej regulacji, w którym rozpatrywany siłownik pracuje.

b. Praca siłownika przy uwzględnieniu zmiany objętości komory nad membraną w czasie ruchu siłownika.

Podobnie jak poprzednio trzpień siłownika przesunie się, gdy ciśnienie nad membraną osiągnie wartość P, przy której zostanie spełnione równanie (10).

Trzpień zatrzyma się, gdy

$$(P - \Delta P) \cdot S = \Delta x_1 \cdot c + F_k \tag{13}$$

P - zmiana ciśnienia na skutek zmiany objętości komory.

Wielkość ΔP można określić z równań stanu gazu

$$(P - \Delta P)(V + \Delta V) = GRT \tag{14}$$

oraz

$$P \cdot V = GRT \tag{15}$$

Z równań (14) i (15) można wyznaczyć

$$\Delta P = \frac{P \cdot \Delta V}{V + \Delta V} \tag{16}$$

przy czym

$$\Delta V = S \cdot \Delta x_1 \tag{17}$$

po wstawieniu zależności (17) i (16) do równania (13) i przekształceniu, równanie (13) przyjmie postać:

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_1 \left(\frac{V}{S} + \frac{F_c}{c}\right) + \frac{\Delta F \cdot V}{S \cdot c} = 0 \tag{18}$$

stąd

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{V}{S} + \frac{F_c}{c}\right)^2 - \frac{4\,\Delta F \cdot V}{S \cdot c} - \frac{Vc + SF_k}{2Sc}} \tag{19}$$

można wykazać, że $\Delta x_1 < \Delta x$, a więc "kroki" siłownika przy uwzględnieniu zmian objętości nad membraną będą mniejsze. Prawidłowość ta jest szczególnie widoczna, gdy przeprowadza się linearyzację równania (14).

Wtedy to:

$$\Delta P = \frac{P}{V} \cdot \Delta V \tag{20}$$

Po wstawieniu (20) oraz (17) do równania (13) i obliczeniu x otrzymamy:

$$\Delta x_1' = \frac{\Delta F}{c + \frac{P}{V} \cdot S^2} \tag{21}$$

Można zauważyć, że długość następnego kroku jest funkcją długości kroku poprzedniego, a mianowicie:

$$\Delta x_2' = \frac{\Delta F}{c + \frac{\left(P + \frac{\Delta x_1' \cdot c}{S}\right) \cdot S^2}{V + \Delta x_1' \cdot S}} \tag{22}$$

Po rozpatrzeniu równań (22) i (21) można stwierdzić, iż ogólnie:

$$\Delta x'_{(n+1)} = \Delta x'_{(n)} \quad \text{dla} \quad F_s = \frac{c \cdot V}{S} \tag{23}$$

$$\Delta x'_{(n+1)} < \Delta x'_{(n)} \quad \text{dla} \quad F_s < \frac{cV}{S} \tag{24}$$

$$\Delta x'_{(n+1)} > \Delta x'_{(n)} \quad \text{dla} \quad F_s > \frac{cV}{S} \tag{25}$$

3. Wpływ różnicy pomiędzy tarciem statycznym a kinematycznym na pracę siłownika z ustawnikiem pozycyjnym

Schemat ideowy siłownika z ustawnikiem pozycyjnym pracującym w oparciu o zasadę "porównania przemieszczeń" pokazano na rys. 5.

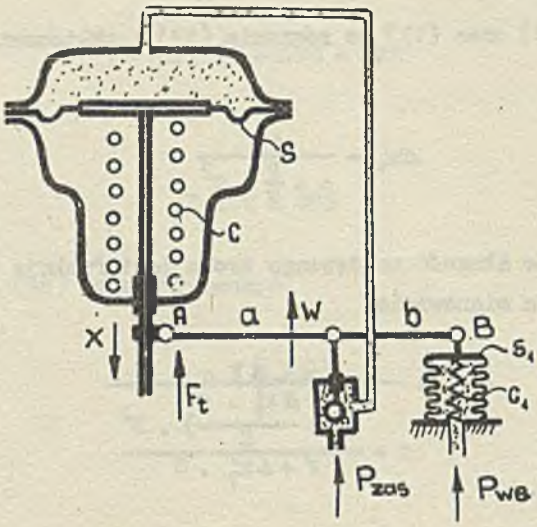
ES - element sterujący, kulkowy,

S_1 - powierzchnia efektywna mieszka ustawnika,

c_1 - sztywność całkowita mieszka ustawnika.

Praca tego układu będzie rozpatrywana po przyjęciu następujących założeń:

- pomija się masę i tarcie lepkie części ruchomych siłownika,



Rys. 5

- zakłada się, że po skokowej zmianie położenia kulki elementu sterującego ciśnienie P zmienia się inercyjnie ze stałą czasową T,
- pomija się zmiany objętości V nad membraną przy ruchu siłownika.

W stanie ustalonym bilans sił działających na trzpień siłownika posiada postać:

$$P_o \cdot S = x_o \cdot c + F_k \tag{26}$$

Aby nastąpił ruch siłownika ciśnienie nad membraną musi wzrosnąć do wartości P, przy której:

$$(P_o + \Delta P)\, S = x_o \cdot c + F_s \tag{27}$$

Z równań powyższych wynika, że

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{S}$$

aby nastąpił taki wzrost ciśnienia, musi nastąpić zmiana położenia kulki o wartość

$$w_1 \geqslant \frac{\Delta F}{S \cdot k} \tag{28}$$

gdzie:

k - wzmocnienie elementu sterującego.

Wymaga to zmiany ciśnienia wejściowego o wartość

$$\Delta P_{we} \geqslant \frac{\Delta F}{S \cdot k} \cdot \frac{a + b}{a} \cdot \frac{c_1}{S_1} \tag{29}$$

Siłownik zatrzyma się, gdy zostanie spełnione równanie:

$$(P_o + \Delta P)\, S = (x_o + \Delta x)\, c + F_k \tag{30}$$

Stąd

$$x = \frac{\Delta F}{c} \tag{31}$$

Zmiana położenia trzpienia siłownika o wartość x zmieni położenie kulki elementu sterującego o wartość

$$-\Delta w_2 = \frac{b}{a + b} \cdot \Delta x \tag{32}$$

a to spowoduje zmianę ciśnienia na wyjściu elementu sterującego:

$$\Delta P_2 = -k \cdot \frac{\Delta F}{c} \cdot \frac{b}{a + b} \tag{33}$$

Ruch powrotny trzpienia siłownika nastąpi, gdy

$$(P_o + \Delta P - \Delta P_2) \cdot S \leqslant (x_o + \Delta x)\, c - F_s \tag{34}$$

Rozpatrzenie równań (34) i (30) pozwala na stwierdzenie, iż w układzie mogą wystąpić oscylacje, jeżeli

$$\frac{b}{a+b} \geqslant \frac{(F_k + F_s) \cdot c}{\Delta F \cdot K \cdot S} \tag{35}$$

Warunek ten koniecznym, lecz niewystarczającym istnienia w układzie oscylacji. Pojawienie się oscylacji zależy jeszcze od wielkości zmiany sygnału podanego na wejście układu. Wielkość tę można określić po przekształceniu równania (34)

$$(w_o + \Delta w_1 - \frac{b}{a+b}\Delta x)\, k \cdot S + F_s \leqslant x_o \cdot c + \Delta x \cdot c \tag{36}$$

po dalszym przekształceniu warunkiem wystarczającym istnienia oscylacji będzie:

$$\Delta w_1 \leqslant \frac{\Delta F}{c} \cdot \frac{b}{a+b} - \frac{2F_k}{k \cdot S} \tag{37}$$

lub

$$\Delta P_{we} \leqslant \frac{\Delta F}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c_1}{S_1} - \frac{2F_o(a+b) \cdot c_1}{k \cdot S \cdot S_1 \cdot a} \tag{38}$$

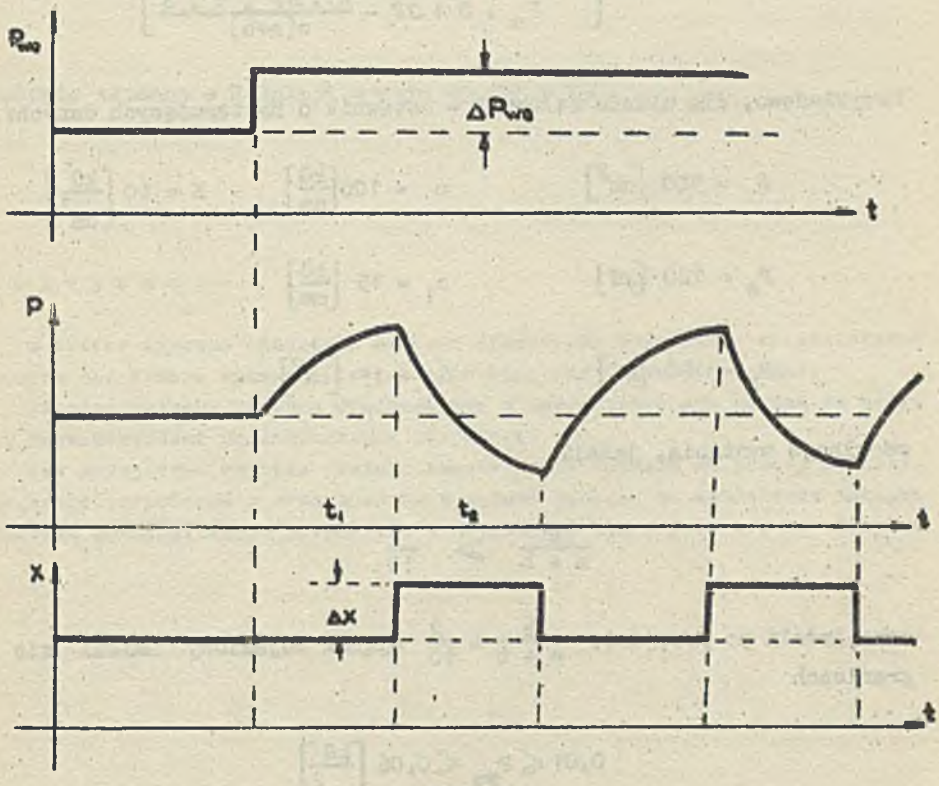
Reasumując: dla przyjętych założeń w układzie wystąpi cykl graniczny, jeżeli po spełnieniu warunku przedstawionego równaniem (35) nastąpi zmiana sygnału wejściowego w granicach:

$$\frac{\Delta F}{S \cdot K} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c_1}{S_1} \leqslant \Delta P_{we} \leqslant \frac{\Delta F}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c_1}{S_1} - \frac{2F_k(a+b) \cdot c}{k \cdot S \cdot S_1 \cdot a} \tag{39}$$

Rozważania powyższe odnosiły się do przypadków takich zmian ciśnienia wejściowego, przy których siłownik nie może wykonać dwóch kolejnych "kroków" w tym samym kierunku.

Gdyby

$$P_{we} \geqslant \frac{\Delta F \cdot c_1}{S_1 \cdot a}\left(\frac{a+b}{S \cdot k} + \frac{b}{c}\right) \tag{40}$$



Rys. 6

to siłownik wykonałby n kolejnych kroków w kierunku wzrostu sygnału x i rozważania powyższe należałoby przeprowadzić, rozpatrując stan układu po zakończeniu (n-1)-go "kroku". Na rys. 6 pokazano przebiegi sygnałów x oraz P po skokowej zmianie sygnału wejściowego i przy spełnionych warunkach (39) i (35).

Przy czym

$$t_1 = \frac{T}{\ln\left[1 - \frac{\Delta F(a+b) \cdot c}{S \cdot K \cdot a \cdot \Delta P_{we} \cdot S}\right]} \tag{41}$$

$$t_2 = \frac{T}{\ln\left[1 - \frac{F_k + F_s}{P_o \cdot S + \Delta F - \frac{K \cdot \Delta F \cdot b \cdot S}{c(a+b)}}\right]} \tag{42}$$

Przykładowo, dla układu siłownik - ustawnik o następujących danych:

$S = 500\ [cm^2]$ $\quad c = 100\left[\frac{kG}{cm}\right]$ $\quad K = 10\left[\frac{kG}{cm^3}\right]$

$F_s = 120\ [kG]$ $\quad c_1 = 15\left[\frac{kG}{cm}\right]$

$F_k = 80\ [kG]$ $\quad S_1 = 15\ [cm^2]$

oscylacje wystąpią, jeżeli

$$\frac{b}{a+b} \geqslant \frac{1}{10}$$

oraz, jeżeli po przejściu $\frac{b}{a+b} = \frac{2}{10}$ sygnał wejściowy zmieni się w granicach

$$0{,}01 \leqslant P_{we} \leqslant 0{,}06\left[\frac{kG}{cm^2}\right]$$

LITERATURA

[1] KUHIT S. - Tarcie Coulomba w urządzeniach automatyki. Referat 1 wygłoszony na Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki, w 1970 r.

[2] GORSKA N.S., KRUTOWA J.N., RUTKOWSKI W.I. - Dynamika nieliniowych serwomechanizmów. WNT Warszawa 1963 r.

[3] GUILLON M. - Teoria i obliczanie układów hydraulicznych. WNT Warszawa 1966 r.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 30.XII.1970 r.

С о д е р ж а н и е

В статье зделано сравнение фазовых траекторий движения колебательных систем без сухого трения и систем в которых это трение выступает.

Указано разницу влияния статического и кинематического трений на работу пневматических исполнительных устройств.

Для конкретных случаев указано влияние этой разницы на работу исполнительного устройства с позиционером и подано условия по исполнению которых система исполнительное устройство - позиционер будет работать нестабильно

S u m m a r y

The paper presents comparison of the phase portrait of oscillations movements without and with solid friction.

Influence of difference between the static and kinematic friction on pneumatic servomotors action is discussed.

For certain, special cases, influence of this difference on the pneumatic servomotor with positioner is presented.

Conditions of the instable action of servomotors are also given in the paper.