

INŻ. I. STELLA-SAWICKI

PODRĘCZNIK  
TEORYI MOSTÓW

DLA

INŻYNIERÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

z 182 rysunkami w tekście i 6 tablicami.

CZĘŚĆ I. BELKI PROSTE.

TOM I. BELKI STATYCZNIE WYZNACZALNE.

*(Belki staostateczne)*

Opracował

DR. MAKSYMILIAN THULLIE

profesor szkoły politechnicznej we Lwowie.

**Wydanie drugie.**

=====

**Cena 10 Koron.**

=====

**WE LWOWIE.**

NAKŁADEM AUTORA.

GŁÓWNY SKŁAD W KSIĘGARNI SEYFARThA I CZAJKOWSKIEGO.

Drukiem I. Związkowej drukarni we Lwowie.

1904.



## PRZEDMOWA.

Drugie wydanie musiałem ze względu na postęp nauki znacznie rozszerzyć. Najwięcej zmian znajdzie czytelnik w rozdziale XI, oprócz tego dodałem rozdział XVII o belce wspornikowej. Przykłady są też liczniejsze, a liczba tablic o jedną powiększona.

Oddając to wydanie pod pobłażliwy sąd inżynierów polskich, pospieszam wywiązać się z miłego obowiązku podziękowania memu asystentowi, p. Marcelemu Marcichowskiemu, który dopomagał mi w rysowaniu figur i obliczaniu przykładów.

We Lwowie, w maju 1904.

*Dr. Maksymilian Thullie.*

S. 67

S. 69

5.70

S. 73

5.91

5.96

S. 08

624.04:624.2/8



16295/1

195/58

# SPIS RZECZY.

Wstęp . . . . .	Str. 1
-----------------	--------

## A. Siły, działające na mosty.

### I. Siły zewnętrzne.

§. 1. Rodzaje sił zewnętrznych . . . . .	4
§. 2. Ciężar własny . . . . .	5
§. 3. Ciężar ruchomy mostów drogowych . . . . .	12
§. 4. Ciężar ruchomy mostów kolejowych . . . . .	15
§. 5. Obciążenie śniegiem . . . . .	19
§. 6. Ciśnienie poziome, powstające wskutek chwiania się parowozów i wozów . . . . .	20
§. 7. Parcie wiatru . . . . .	20
§. 8. Siła odśrodkowa . . . . .	25

### II. Natężenie dopuszczalne.

§. 9. Natężenie dopuszczalne dla mostów żelaznych i stalowych . . . . .	25
§. 10. Natężenie dopuszczalne dla mostów drewnianych . . . . .	31

## B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła.

### III. Działanie ciężarów skupionych.

§. 11. Linie wpływowe sił poprzecznych . . . . .	33
§. 12. Linie wpływowe momentów . . . . .	35
§. 13. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne . . . . .	37
§. 14. Wyznaczenie największych sił poprzecznych . . . . .	39
§. 15. Najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów ze względu na momenty . . . . .	42
§. 16. Wyznaczenie największych momentów . . . . .	46
§. 17. Bezwzględnie największy moment . . . . .	51
§. 18. Największe momenty dla zmiennych rozpiętości . . . . .	56

### IV. Obciążenie ciągłe.

§. 19. Obciążenie jednostajne zupełne . . . . .	59
§. 20. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne . . . . .	59

## VI

	Str.
§. 21. Największe momenty . . . . .	61
§. 22. Obciążenie ciężarem własnym i ruchomym, jednostajnie rozłożonym . . . . .	61
§. 23. Ciężar zastępczy . . . . .	62

### V. Wpływ poprzecznic.

§. 24. Ciężar stały . . . . .	69
§. 25. Siły poprzeczne wskutek ciężaru ruchomego . . . . .	70
§. 26. Momenty wskutek ciężaru ruchomego . . . . .	74

### VI. Belka ciągła przegubowa.

§. 27. Określenie . . . . .	77
§. 28. Obciążenie dowolne . . . . .	78
§. 29. Linie wpływowe belki wystającej . . . . .	78
§. 30. Linie wpływowe belki ciągłej przegubowej . . . . .	79
§. 31. Obciążenie jednostajne zupełne . . . . .	80
§. 32. Największe siły poprzeczne . . . . .	81
§. 33. Największe momenty . . . . .	84

## C. Belka kratowa równoległa.

### VII. Belka o kracie pojedynczej.

§. 34. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach . . . . .	86
§. 35. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach . . . . .	88
§. 36. Wykreślne wyznaczenie sił wewnętrznych . . . . .	89
§. 37. Belka o kracie równoramiennej . . . . .	90
§. 38. Przykład . . . . .	91
§. 39. Podparcie poprzecznic drugorzędne . . . . .	94

### VIII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 40. Zasada obliczenia . . . . .	96
§. 41. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych . . . . .	97
§. 42. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach . . . . .	97
§. 43. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach . . . . .	100
§. 44. Krzyżulce gibkie . . . . .	102
§. 45. Przykład. Obliczenie mostu drogowego o kracie dwukrotnej prostokątnej . . . . .	102

### IX. Belka o kracie złożonej.

§. 46. Krata złożona bez sztucznego natężenia . . . . .	107
§. 47. Krata złożona ze sztucznem natężeniem . . . . .	108
§. 48. Belki Howe'a i Ridera . . . . .	109

## VII

### X. Ilość materiału.

	Str.
§. 49. Uwagi ogólne . . . . .	111
§. 50. Objętość pasów . . . . .	111
§. 51. Objętość kraty z jednego materiału . . . . .	113
§. 52. Objętość kraty z różnego materiału . . . . .	114
§. 53. Objętość narożników . . . . .	116
§. 54. Objętość całej belki kratowej . . . . .	117

### D. Belka kratowa wieloboczna.

#### XI. Belka o kracie pojedynczej.

§. 55. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach . . . . .	118
§. 56. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w kracie . . . . .	119
§. 57. Krzyżulce gibkie . . . . .	121
§. 58. Ogólne wykreślne sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych . . . . .	122
§. 59. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w pasach . . . . .	123
§. 60. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w krzyżulcach . . . . .	125
§. 61. Linie wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach . . . . .	128
§. 62. Ogólny sposób wykreślenia linii wpływowych według Müllera Breslaua . . . . .	133
§. 63. Wyznaczenie analityczne największych sił wewnętrznych w krzyżulcach . . . . .	135
§. 64. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Największe i naj- mniejsze siły . . . . .	136
§. 65. Wyznaczenie wykreślne największych sił wewnętrznych . . . . .	136
§. 66. Największe siły wewn. w krzyżulcach dla obciążenia ciągłego . . . . .	137
§. 67. Największe siły wewnętrzne w krzyżulcach dla układu ciężar- ów skupionych . . . . .	145
§. 68. Podwójne krzyżulce gibkie . . . . .	149
§. 69. Podwójne krzyżulce tęgic . . . . .	150

#### XII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 70. Zasada obliczenia . . . . .	152
§. 71. Wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach . . . . .	152
§. 72. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach i krzyżulcach . . . . .	153
§. 73. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych . . . . .	154

#### XIII. Belka kratowa paraboliczna.

§. 74. Kształt pasów . . . . .	155
§. 75. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych . . . . .	157
§. 76. Linie wpływowe belki górnoparabolicznej . . . . .	158
§. 77. Siły wewnętrzne przy obciążeniu zupełnem . . . . .	160
§. 78. Największe siły wewnętrzne . . . . .	160
§. 79. Przykład . . . . .	163

## VIII

### XIV. Odmiany belki parabolicznej.

	Str.
§. 80. Zasada belki Paulego . . . . .	166
§. 81. Kształt belki Paulego . . . . .	167
§. 82. Belka paraboliczna niezbieżna . . . . .	167
§. 83. Przykład. Obliczenie dla obciążenia układem ciężarów skupionych . . . . .	169
§. 84. Przykład. Obliczenie dla obciążenia ciężarem zastępczym . . . . .	175

### XV. Belka Schwedlera.

§. 85. Określenie belki . . . . .	179
§. 86. Przybliżone wyznaczenie kształtów pasów . . . . .	179
§. 87. Dokładne wyznaczenie kształtu belki . . . . .	185
§. 88. Przykład . . . . .	186

### XVI. Inne belki kratowe jednoprzęsłowe.

§. 89. Belka Winklera . . . . .	193
§. 90. Belka eliptyczna . . . . .	197
§. 91. Belka górnoparaboliczna o stałym przekroju w pasie górnym . . . . .	198
§. 92. Belka z ciężarem pomocniczym . . . . .	199
§. 93. Belka rozporowa prosta . . . . .	200

### XVII. Belka wspornikowa.

§. 94. Belka dwupasowa . . . . .	202
§. 95. Linie wpływowe dla sił wewnętrznych w kracie . . . . .	203
§. 96. Belki trzypasowe równoległe . . . . .	205
§. 97. Linie wpływowe pasów i krzyżulców belki równoległej . . . . .	206
§. 98. Belka trzypasowa wieloboczna . . . . .	208

## E. Ugięcie belki.

### XVIII. Analityczne i wykresne wyznaczenie ugięcia.

§. 99. Ogólne uwagi . . . . .	209
§. 100. Wyznaczenie analityczne ugięcia belki . . . . .	211
§. 101. Wyznaczenie wykresne ugięcia belki kratowej . . . . .	216
§. 102. Dokładność wyznaczenia ugięcia . . . . .	219

Dodatek: Literatura . . . . .	220
-------------------------------	-----





## WSTĘP.

Opracowując Podręcznik Statyki Budowli, wyłączyliśmy ze statyki budowli obliczenie mostów, które z powodu odmiennego sposobu obciążenia jest przedmiotem osobnej nauki, tak zwanej teorii mostów (n. *Theorie der Brücken*), którą obecnie zamysłamy wyłożyć.

Zadaniem teorii mostów jest obliczenie sił, działających w każdej części mostu, odkształceń, spowodowanych temi siłami i wyznaczenie potrzebnego przekroju każdej części mostu.

Wyznamy więc najpierw:

a) siły zewnętrzne (n. *äussere Kraft*, fr. *force extérieure*, a. *outer force*, *stress*, cz. *silý zevnitřní*).

b) siły wewnętrzne (n. *innere Kraft*, fr. *force intérieure*, a. *inner force*, *strain*), potem

c) najkorzystniejszy ustrój mostu ze względu na koszt i ilość potrzebnego materiału i

d) odkształcenie mostu (n. *Formänderung*, fr. *deformation*, a. *deformation*).

Częściami składowymi mostu są:

1. przyczółki i filary (n. *Widerlager*, *Pfeiler*, fr. *culée*, *pile*, a. *pier*, cz. *piliv*).

2. łożyska (n. *Lager*, f. *support*, *coussinet*, a. *support bearing*, cz. *ložko*, *ložisko*), służące do przeniesienia sił z belek mostowych na przyczółki i filary,

3. belki czyli dźwigary (n. *Träger*, fr. *poutre*, a. *truss*),

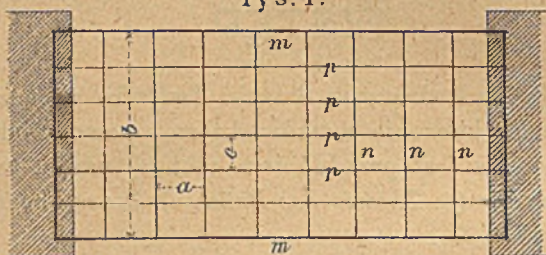
4. pomost (n. *Brückenbahn*, fr. *tablier*, a. *planking*).

5. tężniki pionowe i poziome (n. *Querverbindungen*, cz. *zavětrování*).

Obliczenie filarów, łożysk, pomostu i tężników podamy w części ustrojowej budowy mostów; w części teoretycznej mówić będziemy tylko o belkach, których jest kilka rodzajów.

Rozróżniamy mianowicie belki główne (n. *Hauptträger*, fr. *poutre principale*, cz. *hlavni nosník*) *m m* (rys. 1), spoczywające za pośrednictwem łożysk na filarach i przyczółkach, belki poprzeczne, czyli poprzecznice (n. *Querträger*, fr. *pièce du pont*, a. *cross girder, floor beam*, cz. *příčník*) *n n*, spoczywające

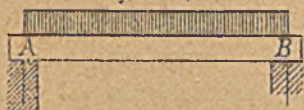
rys. 1.



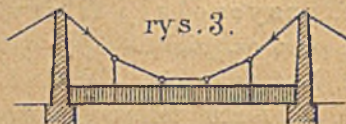
na belkach głównych i belki podłużne czyli podłużnice (n. *Nebenträger, secundäre Längsträger*, fr. *longeron*, a. *stringer*, cz. *podelník*) *p. p.*

Belki główne dzielą się znów ze względu na łożyska na 3 rodzaje. Jeżeli belka obciążona jest tylko siłami pionowymi, a oddziaływania są także pionowe, nazywamy belkę belką prostą (n. *gerader Träger, Balkenträger*, fr. *poutre droite*, a. *straight girder, beam*, cz. *nosník tramový*) (rys. 2). Drugim rodzajem belki jest wieszak (n. *Hängwerksträger*, fr. *poutre suspendante*, a. *suspension girder, hanging girder*, cz. *nosník visutý*),

rys. 2.



rys. 3.



rys. 4.



który działa nawet przy obciążeniu pionowym na podpory w kierunku ukośnym, dążąc do ich zbliżenia (rys. 3.) n. p. przy moście wiszącym. Nareszcie rozpornicą, belką rozporową (n. *Sprengwerksträger*, fr. *poutre à jambettes, poutre de châssis*, a.

\* Przy obciążeniu poprzecznym i ukośnym belki poprzeczne drugorzędnych, jak tobie się, rozpiętość belki główną podzielić na nieparzystą ilość pól, gdyż w ten sposób się osiąga, iż to, iż ukośno. bez względu na moment, nie może wystąpić.

*strut framed girder*, cz. *nosník vzepřený*) nazywamy belkę, która działa nawet przy obciążeniu pionowem na podpory w kierunku ukośnym, dążąc do ich oddalenia (rys. 4). Jeżeli belka taka ma kształt łuku, to nazywamy ją belką łukową lub łukiem (n. *Bogenträger*, fr. *poutre en arc*, *arc*, a. *arch*, *arched girder*, cz. *nosník obloukový*).

Oprócz tego używamy często belek układu złożonego, n. p. połączenia belki prostej z wiszącą, wieszaru z łukiem, belki prostej z łukiem.

Ze względu na materiał i cel rozróżniamy dalej mosty drewniane, żelazne, stalowe, kamienne, betonowe i żelaznobetonowe, dalej mosty kolejowe, drogowe, mosty dla pieszych, wodociągowe i kanałowe.

Według poprzedniego podzielimy nasz przedmiot, t. j. teorię mostów, w następujący sposób:

I. Belki proste.

II. Rozpornice, wieszary, łuki i układy złożone.

Obliczenie mostów sklepionych i filarów podamy przy opisie ustroju mostów.

Część pierwsza teorii mostów zawierać będzie tylko teorię belek prostych, którą podzielimy w ten sposób, że najprzód będziemy mówić o siłach zewnętrznych, działających na belki, potem o siłach wewnętrznych, a nakoniec o ugięciu belek. Przy wykładzie o siłach zewnętrznych rozróżniamy belki proste jednoprzęsłowe zwykle (n. *einfacher Träger*, cz. *nosník prostý*), spoczywające na dwóch podporach, i belki ciągłe (n. *continuirlicher Träger*, fr. *poutre continue*, a. *continuous beam*, cz. *nosník spojity*), podparte w więcej niż dwu punktach. Przy belkach ciągłych urządzamy niekiedy przeguby (n. *Gelenk*, fr. *charnière*, a. *joint*, cz. *kloub*) i nazywamy je wtedy belkami ciągłymi przegubowymi (n. *continuirlicher Gelenkträger*), a gdy belki są wieloboczne belkami wspornikowymi (n. *Consolträger*, a. *cantilever*).

Ponieważ obliczenie przekroju belek blaszanych i drewnianych podaliśmy w statyce budowli, więc będziemy tu mówić tylko o siłach wewnętrznych w belkach kratowych. Z powodu zaś, że do obliczenia sił zewnętrznych bezprzegubowych belek ciągłych potrzebna jest znajomość sił wewnętrznych, mówić bę-

dziemy o bezprzegubowych belkach ciągłych w jednym z późniejszych rozdziałów.

Stąd wynika następujący podział przedmiotu:

A. Siły, działające na mosty.

B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła. (*Belka ciągła przegubowa*)

C. Belka kratowa równoległa.

D. Belka kratowa wieloboczna.

E. Belka ciągła bezprzegubowa.

F. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

G. Natężenia drugorzędne.

Cztery pierwsze działy stanowią tom pierwszy, następne podajemy w tomie drugim.



## A. Siły działające na mosty.

### I. Siły zewnętrzne.

#### §. 1. Rodzaje sił zewnętrznych.

Na mosty działają rozmaitego rodzaju siły zewnętrzne, a mianowicie:

1. Ciężar własny, stały (n. *Eigengewicht, ruhende Belastung*, fr. *charge permanente*, a. *dead load*, cz. *obtěžení stálé*), ciężar belek, pomostu i w ogóle całego ustroju mostu.

2. Ciężar ruchomy, zmienny (n. *veränderliche, rollende Last, Verkehrslast*, fr. *charge roulante, variable, surcharge*, a. *live load, rolling load*, cz. *obtěžení hyblivé, proměnlivé*, h. *carga móvile*), zależny od celu mostu, a więc ciężar parowozów, wozów, tłumu ludzi lub wody.

3. Siły poziome (n. *Horizontalkräfte*), powstające wskutek parcia wiatru, chwiania się parowozów i wozów i wskutek siły odśrodkowej.

4. Oddziaływanie podpór (n. *Pfeilerdruck*, f. *réaction des appuis*, a. *supporting force*), które się oblicza na podstawie danych ciężarów.

## §. 2. Ciężar własny.

Gdy mamy most jaki projektować, ciężar własny jego jest nieznanym, dlatego przy obliczaniu sił zewnętrznych przyjmujemy go w przybliżeniu i na tej podstawie obliczamy wymiary wszystkich części mostu. Mając teraz plan mostu, możemy dokładnie obliczyć cały jego ciężar, który z przyjętym porównujemy. Jeżeli ciężar, do obliczenia przyjęty, różni się znacznie od obliczonego, musimy powtórnie obliczyć wymiary belek mostowych na podstawie obliczonego ciężaru. Rozumie się, że wymiary te po części się zmieniają, a więc i ciężar, obliczony na podstawie nowego projektu, będzie się znów różnił od przyjętego. Jeżeli ta różnica jest znaczna, musielibyśmy rachunek jeszcze raz powtórzyć. Widzimy stąd, jak ważnem jest, aby przy pierwszym obliczeniu przyjąć ciężar własny trafnie, gdyż w takim razie oszczędzimy sobie powtarzania obliczeń.

Aby otrzymać potrzebne wzory dla ciężaru stałego, zastanowimy się najprzód, od czego ciężar własny zależy. Otóż ciężar własny jest zależny od materiału, a mianowicie od natężenia dopuszczalnego i ciężaru gatunkowego materiału, od ciężaru ruchomego, od rozpiętości i od ustroju mostu. Wzory dokładne musiałyby uwzględnić wszystkie te czynniki. Uwzględnienie materiału i ciężaru ruchomego nie sprawiałoby wielkich trudności, ale ustrój mostów jest tak rozmaity, że trzeba by bardzo wiele wzorów ustawiać, aby najrozmaitsze ustroje mostów uwzględnić. W części ustrojowej budowy mostów podamy takie szczegółowe wzory, tu musimy się ograniczyć na wzory ogólniejsze, które do rozmaitych ustrojów mostów się stosując, nie mogą być zbyt dokładnymi.

W ogóle możemy postępować tu w dwojaki sposób. Licząc w przybliżony sposób, używamy wzorów, które podają odrazu ciężar całego mostu. Licząc dokładniej, obliczamy poszczególne części mostu i tak najprzód pomost, potem obliczamy ciężar pomostu dokładnie i dalej przystępujemy do obliczenia podłużnic, przyczem znamy dokładnie ciężar pomostu, działający na podłużnice i przyjmujemy tylko ciężar podłużnic wedle wzorów. Obliczywszy podłużnice, wykreślamy je i obliczamy dokładnie ich ciężar, co nam posłuży do obliczenia wymiarów poprzecznic, a nareszcie w ten sam sposób i belek głównych.

Licząc tak, zrobimy przy ciężarze własnym tem mniejszy błąd, im mniejszy jest ciężar belek głównych w stosunku do ciężaru całkowitego, a zatem mniejszy przy mostach drogowych, niż kolejowych, mniejszy przy małych mostach, niż przy wielkich. Landsberg udowadnia, że jeżeli ciężar pomostu, podłużnic i poprzecznic obliczymy dokładnie a przyjmując ciężar belek głównych, robimy błąd o 25%, to przez to zmieniają się siły wewnętrzne w pasach:

dla $l=$	10	20	30	40	50	60	70	80 m
o	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	5,7	6,7	7,4%

a w kracie jeszcze mniej. Z tego widzimy, że nawet znaczniejszy błąd w przyjęciu ciężaru własnego belek głównych dla mniejszych rozpiętości jest bez znaczenia. Przy większych rozpiętościach potrzebna jest większa dokładność.

Według Waddela potrzeba drugi raz liczyć, jeżeli ciężar całkowity różni się od przyjętego

dla $l < 30$ m	o 8%
" $l < 60$ "	o 6%
" $l < 90$ "	o 4%

1 a) Podamy tu najprzód wzory ogólne dla ciężaru całego mostu i to dla żelaznych mostów kolejowych na metr bieżący mostu według rozmaitych autorów, którzy otrzymali je na podstawie ciężarów wykonanych mostów. Wzory te mają kształt funkcji rozpiętości  $l$ , od której zależy moment sił zewnętrznych, przyczem przydana jest pewna stała ilość, gdyż ciężar poprzecznic, podłużnic i pomostu nie jest zależny od rozpiętości. Jeżeli więc  $g$  nazwiemy ciężar mostu w  $kg$  na metr bieżący,  $l$  rozpiętość w metrach,  $\alpha$  i  $\beta$  współczynniki, to ogólnie możemy napisać:

$$g = \alpha l + \beta \text{ kg/m} \dots \dots \dots 1)$$

Ponieważ we wzorze tym ustrój mostu nie jest uwzględniony, nie może on więc być dokładny, a różni autorowie podają rozmaite wartości dla współczynników  $\alpha$  i  $\beta$ . I tak Weiss podaje:

dla mostów jednotorowych	$g = 450 + 33l \text{ kg/m}$
" " dwutorowych	$g = 1800 + 11,1l + 0,44l^2$

Według Asimonta i Frauenholza

$$\text{dla mostów jednotorowych } g = 31,4l + 700 \text{ kg/m}$$

Według Otta dla mostów jednotorowych  $g=30l+800$  *kg/m*  
 „ „ dwutorowych  $g=57l+900$  „  
 „ Heinzerlinga dla most. jednot.  $g=30l+800$  „

Według Carta i Porthesa

dla mostów jednotorowych  $g=60l+600$  *kg/m*  
 „ „ dwutorowych  $g=110l+1100$  „

Według Engessera dla most. jednot.  $g=650+24,5l+0,11l^2$ .

Możemy polecić następujące wzory:

dla mostów jednot. kol. główn. $g=351+800$	<i>kg/m</i>	}	2)
„ „ dwutor. „ „ $g=0,49l^2+12l+1800$	„		
„ „ jednot. kol. drugorz. $g=30l+750$	„		

Landsberg podaje wzory więcej szczegółowe i przyjmuje dla kolei głównych i belek równoległych

bez żwirówki pomost żwirowany

dla  $l \leq 40m$   $g=660+37l$   $g=3240+46l$  *kg/m*  
 „  $l \geq 40m$   $g=660+39l$   $g=3240+50l$  „

dla belek wielobocznych

dla  $l \leq 80m$   $g=660+35l$   $g=2830+41l$  „

Dla kolei miejscowych przyjmuje on dalej dla rozpiętości od 10 do 50m

pomost górą . . . .  $g=292+31l$  *kg/m*  
 „ wglębiony . . .  $g=462+32l$  „

Dla kolei o szerokości toru 1m

pomost górą . . . .  $g=305+26l$  „  
 „ wglębiony . . .  $g=425+27l$  „

Dla kolei wąskotorowych o szerokości toru 0,75m otrzymał Lucas

dla  $l < 10m$   $g=50+29l$  *kg/m*.

Dla  $l$  od 10 do 30m

pomost wglębiony	żwirowany	pomost górą
bez żwirówki		

$g=390+\left(18+\frac{3}{8}l\right)l$   $1390+(20+0,4l)l$   $250+(18,7+0,5l)l$  *kg/m*.

Ciążar belek głównych możemy przyjąć dla mostów jednotorowych kolei głównych:

		pomost	
		zwykły	żwirowany
dla belek równoległych	33l	45l	kg/m
" " wielobocznych	30l	41l	„

1.b.) Dla żelaznych mostów drogowych ciężar jest także zależny od szerokości mostu. Tu więc liczymy ciężar stały na  $1 m^2$  pomostu.

Możemy przyjąć przy użyciu na pomost podwójnej dyliny dla mostów od  $l=10$  do  $l=100m$ ,  $\frac{h}{l} = \frac{1}{8}$  dla  $l=10$ ,  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  dla  $l=100m$ , według Engessera dla pomostu drewnianego (dylina  $100 kg/m^2$ )

		ciężar chodn. zewn.		
dla dróg kl. II.	$g=215+2,31+0,021^2$ ,	$g'=60+2,31$	$kg/m^2$	} . 3)
" " " I.	$g=295+2,71+0,0211^2$ ,	$g'=80+2,71$	„	

dla pomostu żwirowanego (żwir $480 kg/m^2$ )				
dla dróg kl. II.	$g=590+2,81+0,0251^2$ ,	$g'=60+2,31$	„	} . 4)
" " " I.	$g=730+3,21+0,0281^2$ ,	$g'=80+2,71$	„	

dla pomostu brukowanego (bruk $700 kg/m^2$ )				
	$g=960+3,71+0,0291^2$ ,	$g'=80+2,71$	„	. . 5)

Przy małych mostach bez poprzecznic i podłużnic możemy przyjąć w rów. 3) zamiast 215 tylko 125, zamiast 295 tylko 170, w rów. 4) zamiast 590 tylko 380, a zamiast 730 tylko 500, naraście w rów. 5) zamiast 960 tylko 700.

Jako ciężar belek głównych możemy przyjąć wedle Landsberga na  $m^2$  pomostu

		belki		
		równol.	wielobocz.	
Mosty na drogach II. kl.	pomost drew.	3,45l	3,12l	} . 6)
" " "	II. " żwirówka na pom. żelazn.	5,5l	5,0l	
" " "	I. " żwirówka na pom. żelazn.	6,1l	5,5l	
" " "	I. " bruk kam. na pom. żelazn.	6,77l	6,1l	
Chodniki (belki główne na $m^2$ chodn.)		3,84l	3,45l	

2.) Dla mostów drewnianych możemy przyjąć następane wartości dla ciężaru całkowitego\*):

\*) Dokładniejsze wzory podane są w „Mostach drewn.", cz. I. i II.



a) mosty kolejowe, jednotorowe z zastrzałami na długość 0,2l na metr bieżący mostu

$$\left. \begin{array}{l} \text{tymczasowego } g=50l+750 \text{ kg/m} \\ \text{stałego } g=62l+625 \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

Dla belek kratowych Howe'a przyjmujemy

$$\left. \begin{array}{l} \text{przy moście tymczasowym } g=54l+490 \\ \text{" " stałym } g=72l+650 \end{array} \right\} \text{ kg/m. } 8)$$

b) mosty drogowe na 1m<sup>2</sup> pomostu:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dylowanego o gr. 15 cm } g=8,25l+230 \text{ kg/m}^2 \\ \text{żwirowanego " 15 " } g=20l+400 \text{ " } \\ \text{" " 26 " } g=25l+540 \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 9)$$

Jeżeli nam chodzi o dokładniejsze wyznaczenie ciężaru mostu, to, jak już wspomnieliśmy, zaczynamy od obliczenia podkładów lub dyliny i wyznaczamy ich ciężar; na tej podstawie znowu obliczamy bezpośrednio dźwigające części mostu, podłużnice, poprzecznicę i tak kolejno postępujemy, aż nareszcie obliczamy belki główne.

Poniżej podajemy ciężar własny poprzecznic i podłużnic:

1. Mosty kolejowe.

a) Podłużnice. Niechaj  $g$  oznacza ciężar podłużnic na m. bieżący toru w  $kg$ ,  $a$  (rys. 1) odstęp poprzecznic w  $m$ , to mamy  $g$  dla:

	kształtówki	belki blaszane
kolei drugorz. o norm. szer. toru	$26+44a$	$40+22a$
głównych . . . . .	$62a$	$44+25,6a$

b) Poprzecznicę. Niechaj  $G$  będzie ciężar jednej poprzecznicę blaszanej,  $P$  ciśnienie koła parowozu w  $t$ ,  $b$  długość poprzecznicę,  $c$  odstęp podłużnic (rys. 1), to możemy przyjąć:

$$\begin{array}{l} \text{dla kolei jednotor. główn. . } G=29(b-0,83c)(a+4,3) \text{ kg} \\ \text{" " " drugorz. } G=25(b-0,83c)(a+4,3) \text{ " } \\ \text{" " dwutor. głównych } G=50(a-5,7)(b-1,96c) \text{ " } \end{array}$$

Landsberg podaje następane przeciętne ciężary pokładu mostu kolejowego na  $m$  bieżący toru w  $kg$ , jeżeli  $a$  oznacza odstęp poprzecznic.

Koleje główne.

M o s t	C i ęż a r		
	po- przecznic	podłużnic	pokładu (poprzecz. i podłużnic)
	kg		
jednotorowy, pomost u góry $b = 3,0 m$	$24 + \frac{240}{a}$	$32 + \frac{32}{a}$	$56 + \frac{272}{a}$
„ „ u dołu $b = 4,5 m$	$45 + \frac{450}{a}$	$32 + \frac{32}{a}$	$77 + \frac{482}{a}$
dwutorowy, „ u góry $b = 5,5 m$	$32 + \frac{325}{a}$	$32 + \frac{32}{a}$	$64 + \frac{357}{a}$
„ „ u dołu $b = 8,0 m$	$66 + \frac{668}{a}$	$32 + \frac{32}{a}$	$98 + \frac{700}{a}$

Dla kolei drugorzędnych możemy przyjąć:

$$\text{dla pomostu u dołu } 67 + \frac{433}{a} \text{ kg/m}$$

$$\text{„ „ u góry } 45 + \frac{200}{a} \text{ „}$$

2. Mosty drogowe:

a) Podłużnice. Niechaj  $g_1$  będzie ciężar w  $kg$  na  $1 m$  b. jednej podłużnicy,  $a$  odstęp poprzecznic,  $c$  odstęp podłużnic w  $m$ , to możemy przyjąć następujące wartości:

Mosty dla	ciężar	belki kształtówki	belki blaszane
		w $kg$ i $m$	
pieszych . . . . .	$g_1$	$24 + 0,39 ac$	—
drogi III kl. . . . .	$g_1$	$24 + (0,2 + 1,3c)a$	$4,4(1 + 0,44a)(1 + 0,53c)$
„ II kl. . . . .	$g_1$	$24 + (1,5 + 1,9c)a$	$8,8(1 + 0,36a)(1 + 0,31c)$
„ I kl. . . . .	$g_1$	$24 + 3,3a(1 + c)$	$12,5(1 + 0,36a)(1 + 0,27c)$

b) Poprzecznic. Niechaj  $G$  będzie ciężar jednej poprzecznic,  $b$  szerokość mostu,  $a$  odstęp poprzecznic w  $m$ , to możemy przyjąć dla poprzecznic blaszanych:

$G$  ciężar jednej poprzecznic  $kg$

$$\begin{aligned} \text{Mosty dla pieszych . . . . .} & 2,30(a - 1,68) \left(1 + \frac{0,35}{c}\right) b^2 \\ \text{„ „ drogi III kl. . . . .} & 1,70(a + 3,3) \left(1 + \frac{0,35}{c}\right) b^2 \\ \text{„ „ „ II kl. . . . .} & 1,33(a + 6,1) \left(1 + \frac{0,35}{c}\right) b^2 \\ \text{„ „ „ I kl. . . . .} & 1,11(a + 9,6) \left(1 + \frac{0,35}{c}\right) b^2. \end{aligned}$$

Nakoniec podamy ciężar pomostu i jego pokrycia wedle Winklera.

1.) Ciężar pomostu mostów kolejowych.

Część pomostu	Ciężar pomostu			
	szerokość toru zwy- czajna $s=1,5\text{ m}$		koleje wąskotorowe	
	koleje główne cięż. koła=6,5t <i>kg/m</i>	koleje drugorz. cięż. koła=5t <i>kg/m</i>	$s=1\text{ m}$ ciężar koła=3,8t <i>kg/m</i>	$s=0,75\text{ m}$ ciężar koła=2,5t <i>kg/m</i>
Szyny żelazne z drobnem że- laziwem . . . . .	84	71	51	34
Szyny stalowe z drobnem że- laziwem . . . . .	74	61	45	30
Podkłady . . . . .	160	160	88	48
Dylina . . . . .	224	224	150	112
Podkłady jeden obok drugiego	510	480	300	200
Podkłady w żwirze . . . . .	80	80	36	22
Żwir . . . . .	2000	2000	1100	760
Żelazny pomost . . . . .	200	200	110	76
Cały pomost dla podkładów zwyczajnych w przecięciu	460	450	290	190
Poręcze z obu stron . . . . .	50	50	50	50

2. Ciężar pomostu mostów drogowych.

Część pomostu	Ciężar pomostu			
	kładki	mostu dla drogi		
		3 kl.	2 kl.	1 kl.
<i>kg/m<sup>2</sup></i>				
<i>I. Pokrycie pomostu.</i>				
Dylina . . . . .	80	130	160	190
Bruk drewniany na żwirze . . . . .	—	240	250	260
Beton i asfalt . . . . .	150	300	340	380
Bruk drewniany na betonie . . . . .	—	340	350	360
Żwirówka . . . . .	150	340	380	420
Bruk kamienny . . . . .	350	600	640	680
<i>II. Pomost właściwy.</i>				
Kształtówki . . . . .	80	40	60	80
Dylina . . . . .	60	100	130	160
Płyty z żelaza lanego . . . . .	80	120	150	180
Sklepienia ceglane . . . . .	—	500	600	700
Płyty kamienne . . . . .	180	250	300	350
Pomost z kształtówek wraz z pokryciem przeciętnie . . . . .	180	340	380	420

Poręcze z obu stron 150 kg na m b. mostu.

### §. 3. Ciężar ruchomy mostów drogowych.

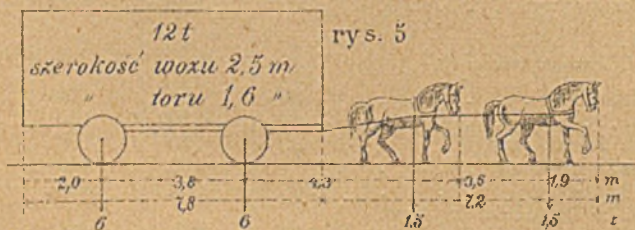
1.) Największe obciążenie mostów drogowych jest tłum ludzi lub wozów. W Austrii, Anglii i Niemczech przyjmowano dawniej obciążenie tłumem ludzi (n. *Menschengedränge*, a. *crowd of people*, cz. *tlačeníce lidí*) na 1 sążeń kw. 25 do 30 centnarów, czyli 390 do 467  $kg/m^2$ , w Bawaryi 360  $kg/m^2$ . W Ameryce przyjmują od 220 do 441  $kg/m^2$ , dla większych mostów mniej, mianowicie w miastach dla rozpiętości 91 m 260  $kg/m^2$ , dla  $l=15$  m 441  $kg/m^2$ , dla pośrednich rozpiętości wartości pośrednie, na wsi 220 do 397  $kg/m^2$ . We Francyi przyjmują 400  $kg/m^2$ , który to ciężar odpowiada już takiemu natłokowi, że się ruszać nie można.

W Austrii należy przyjmować wedle rozp. ministryalnego z dnia 15/9. 1887 (odnoszącego się jednak tylko do mostów na drogach dojazdowych i przejazdów nad koleją) wedle ważności drogi dla mostów na drodze

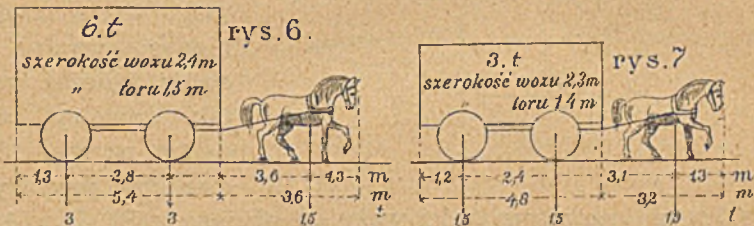
I. klasy (w miastach)	460 $kg/m^2$	}	. . . 10)
II. " (gościńce)	400 "		
III. " (drogi gminne)	340 "		

Dla mostów dla pieszych przyjąć należy jedną z tych wartości 340 do 460  $kg/m^2$  wedle tego, czy most ten znajduje się na wsi, w pobliżu zakładów przemysłowych lub też w większym mieście.

Poszczególne części mostu mogą być jeszcze więcej obciążone n, p. dyle pomostu, bo na jednym dylu może stać więcej ludzi, zaś na sąsiednich dylach nikt, więc dlatego liczyć będziemy obciążenie dylów pomostu na 1 m b. 160  $kg$ . Według rozporządzenia ministerstwa saskiego, bawarskiego i rosyjskiego liczyć należy części chodników dla ciężaru 560  $kg/m^2$ .



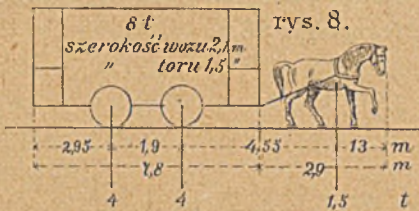
2.) Dla obliczenia obciążenia tłumem wozów potrzebne nam są ciężary i wymiary wozów. Według wyżej wspomnianego rozporządzenia austriackiego przyjmować należy dla dróg I. klasy (w większych miastach lub miejscowościach fabrycznych) wóz wedle rys. 5., dla dróg II. klasy (na gościńcach) wedle rys. 6., dla dróg III. klasy (gminnych) wedle rys. 7.



Wozy dla kolei konnych drógowych możemy przyjąć wedle rys. 8).

Jeżeli po umieszczeniu wozów zostanie jeszcze wolne miejsce, to przyjmujemy dla reszty mostu i dla chodników obciążenie tłumem ludzi.

Z tych dwóch rodzajów obciążenia tłumem ludzi lub wozów należy w każdym poszczególnym wypadku i dla każdej poszczególnej części mostu uwzględnić obciążenie niekorzystniejsze.



Leber oblicza, że tłum ludzi jest dla belek głównych niekorzystniejszy przy użyciu dwu belek głównych, jeżeli

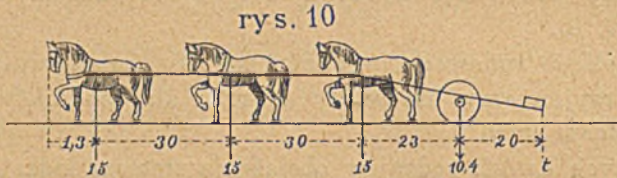
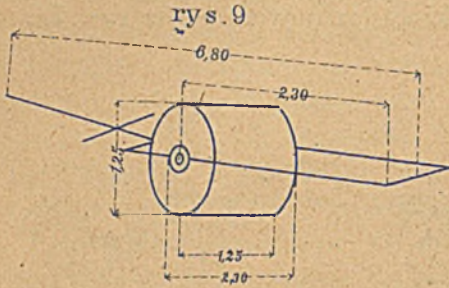
dla klasy I	II	III
$l > 19,68$	$10,39$	$3,84\ m$

W ogóle dla belek głównych tłum ludzi jest niekorzystniejszy dla klasy I dla  $l > 20\ m$ , dla drugiej dla  $l > 10$  do  $15\ m$ , dla trzeciej dla  $l > 5$  do  $10\ m$ . Poprzecznice, podłużnice i pomost obliczać należy wedle ciężarów skupionych. Tylko dla

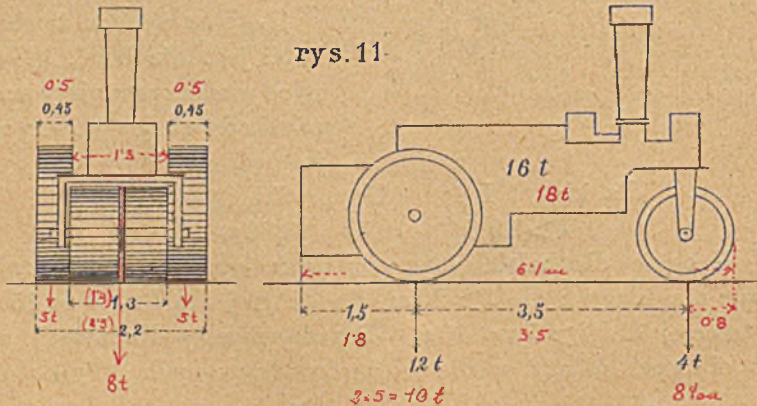
trzeciej klasy może być w pewnych wypadkach tłum ludzi. niekorzystniejszy.

Gdzie można przypuścić obciążenie walkiem konnym i pa-

rowym, należałoby tę okoliczność przy obliczeniu także uwzględnić. Rys. 9 przedstawia wałek drogowy średnich wymiarów, ciężar takiego wałka napelnionego wynosi 4 do 6 t. Ciężki wałek drogowy widzimy na rys. 10., szerokość jego wynosi 1,3 m, na metr szerokości waży on obciążony 8 t. Rys. 11. przedstawia nam wałek parowy, ważący 16 t. Jeden taki wałek



należy przyjąć, resztę mostu wtedy obciążyć tłumem ludzi. Hütte przyjmuje ciężar wałka parowego 23 t.



W innych krajach obciążenie mostów drogowych jest bardzo rozmaite. Niektóre kraje nie rozróżniają wcale rozmaitych klas dróg (Alzacya), w wielu przyjmują wóz 24-tonowy (Bawaryya), 20-tonowy (Szwajcaryya, Alzacya, Badeńskie), 18-tonowy (Rosya) lub 16-tonowy (Francya), gdzieindziej przyjmują wóz bez koni (Bawaryya, Szwajcaryya), co jest niekorzystniejszem dla belek.

#### §. 4. Ciężar ruchomy mostów kolejowych.

Ciężar ruchomy mostów kolejowych składa się z parowozów i wozów kolejowych. Przyjmujemy zatem pociąg, składający się z 2\*) parowozów z jaszczykami (tendrami) i wozów kolejowych. Często przyjmują trzy parowozy\*\*) na czele pociągu, a niektórzy chcą nawet przyjmować pociąg, składający się z samych parowozów. Jednak to nie jest uzasadnionem, bo wypadki obciążenia mostów w ten sposób są nadzwyczaj rzadkie, a pojedyncze większe nieco natężenia w takim razie nie szkodzą jeszcze materyałowi, jeżeli nie przekraczają granicy sprężystości. A że granica sprężystości leży w przybliżeniu przy natężeniu dwa razy większem, niż natężenie dopuszczalne, więc obawy przekroczenia tej granicy w takich razach, niema. Te same uwagi stosują się i do przyjmowania parowozów, zwróconych do siebie kominami\*\*\*). Przyjmowaćby więc należało pociąg o 2 parowozach na czele, zwróconych kominami naprzód. Ciężar jednej osi parowozu jest ograniczony, bo wedle norm Tow. niemieckich kolei nie może przenosić dla kolei głównych 16 t. Zresztą jednak parowozy każdej kolei mają inny ciężar, ale z powodu, że parowozy nie przechodzą zwykle na inne koleje, obliczaćbyśmy powinni mosty na podstawie danych dla pewnej kolei parowozów. Lecz w obec zwiększającego się ciągle ruchu, okazuje się potrzeba ciągłego powiększania ciężaru osi parowozów a zmniejszania ich rozstępu, wskutek tego, gdybyśmy mosty obliczali na podstawie istniejących parowozów

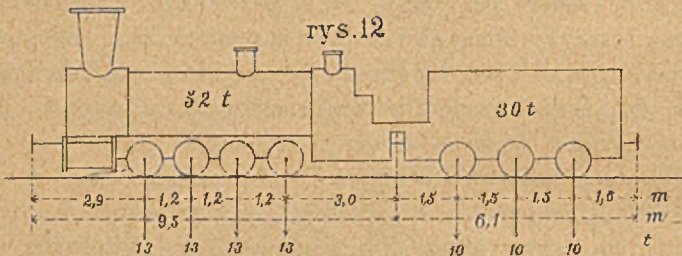
\*) Tak przyjmują we Francyi, Bawaryi, Saksonii, Prusiech, Węgrzech i Ameryce.

\*\*) W Austryi.

\*\*\*) Wirtembergia wyklucza wyraźnie takie położenie, to samo Alzacya i Ameryka. Austryya, Prusy, Bawaryya, Saksonia i Szwajcaryya przyjmują parowozy także kominami zwrócone.

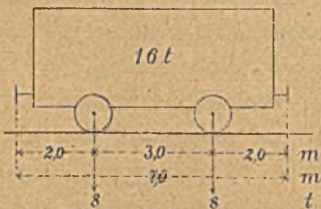
danej kolei, przy wprowadzeniu nowych parowozów mosty okazałyby się za słabe. Ażeby temu zapobiec, ustanowiono w wielu państwach pewne granice dla ciężaru parowozów. Mianowicie przyjęto pociąg urojony t. z. normalny, według którego należy mosty obliczać, a z drugiej strony parowozy, niekorzystniej na mosty działające, nie będą dozwolone.

Pociąg normalny austriacki, który jednak wedle wspomnianego rozporządzenia z r. 1887 §. 2. *d* należy brać za podstawę obliczenia tylko przy belkach łukowych, wiszących i systemach niezwykłych\*), składa się z trzech parowozów wraz z jaszczykami wedle rys. 12. i wozów ciężarowych (rys. 13).



Dla mniejszych rozpiętości (do 10 m?) przyjmować należy ciśnienie osi 14 t zamiast 13 t, zaś dla bardzo wielkich rozpiętości

rys.13.



(wyżej 100 m?) zmniejszyć (do 12 t?) ze względu na prawdopodobieństwo, że nie wszystkie ciężary osi i rozstępy będą najniekorzystniejsze.

Gdzieindziej przyjmują teraz już większe obciążenie, w Saksonii ciężar ów wynosi

15 do 20 t, na Węgrzech 16 t, w Szwajcaryi 15 do 19,2 t, w Alzacji 18 t, w Pruszech 17 t.

Poniżej podajemy schematy obciążeń pociągiem normalnym rosyjskim i kilku parowozami:

\*) Dla belek prostych należy wedle rozporządzenia liczyć na podstawie ciężaru jednostajnie rozłożonego, o czym później będziemy mówić.



a) Pociąg normalny rosyjski:

Odstępy osi: 2,7 1,3 1,3 1,3 4,5 1,6 1,6 4,5 1,3 m  
 ciężar osi: 15 15 15 15 12,5 12,5 12,5 15 15 15 t  
 13 13 4,5 1,6 3,7 3,8 3,8 3,8 m  
 15 1,25 12,5 12,5 12,5 10 10 10 t.

Parowozy mogą też być zwrócone do siebie kominami. Przy małych rozpiętościach, a także dla poprzecznic i podłużnic należy też przyjmować, że po moście przebiega jedna oś, wywierająca ciśnienie 20 t. Niekorzystniejsze z tych dwu obciążeń należy zatrzymać.

Dla obliczenia mostów drewnianych przyjmować należy następujący pociąg normalny:

Odstępy osi: 3,86 3,66 3,86 3,66 3,76 1,68 1,68 4,42 1,32 1,32 m  
 ciężar osi: 8,2 8,2 8,2 8,2 10,7 10,7 10,7 12,5 12,5 12,5 t  
 1,32 5,49 1,32 1,32 1,32 4,42 1,68 1,68 4,57 1,32 1,32 m  
 12,5 12,5 12,5 12,5 12,5 10,7 10,7 10,7 12,5 12,5 12,5 t  
 1,32 4,42 1,68 1,68 3,76 3,66 3,86 m  
 12,5 10,7 10,7 10,7 8,2 8,2 t

b) Normalny parowóz ciężarowy państwowych kolei pruskich (1901). Dwa parowozy:

Odstępy: 3 1,5 1,5 1,5 1,5 4,5 1,5 1,5 m  
 ciężary osi: 17 17 17 17 17 13 13 13 t  
 Wozy: odstępy: 1,5 3 1,5 m  
 ciężary osi: 13 13 t.

Dla małych mostów i pokładu, jeżeli 4 osie wchodzi na belkę, należy przyjmować ciężar osi po 18 t, jeżeli 3 po 19 t, jeśli 2 po 20 t.

c) Parowóz kolei szwajcarskich (1892), 3 parowozy:

Odstępy osi: 2,8 1,3 1,3 1,3 4,4 2,8 1,6 m  
 ciężary osi: 15 15 15 15 13,5 13,5 t.  
 Wozy: odstępy osi: 2 3,5 2 m  
 ciężary osi: 10 10 t.

Dla małych mostów do 15 m ciężary osi parowozu należy zwiększyć o  $2(15-l)\%$ .

d) Parowóz normalny francuski (2 parowozy), (1891):

Odstępy osi: 2,6 1,2 1,2 1,2 2,6 | 12,0 2,5 2,0 m  
 ciężary osi: 14 14 14 14 12 12 t  
 Wozy: odstępy osi: 1,5 3 1,5 m  
 ciężary osi: 8 8 t.



e) Parowóz normalny związku niemieckich kolei (1900),  
2 parowozy:

Odstępy osi	3	1,5	1,4	1,4	1,4	4	1,6	1,6	1,3	<i>m</i>
ciężary osi:	14	16	16	16	16	13	13	13		<i>t</i>
dla małych mostów odstępy osi:	1,4	1,4	1,4							<i>m</i>
ciężary osi:	16	18	16							<i>t</i>

f) Normalny austriacki parowóz kolei drugorzędnych:  
Odstępy: 2,65 1,2 1,2 2,65 | 1,55 1,5 1,5 1,55 *m*  
ciężary osi: 12 12 12 | 8,33 8,33 8,33 *t*.

g) Normalny austriacki parowóz jaszczykowy kolei miejscowych:

Odstępy:	2,5	1,1	1,1	2,5	<i>m</i>
ciężary osi:	8,5	8,5	8,5		<i>t</i>

h) Koleje francuskie o szerokości toru 1,0 *m*:

	parowóz				jaszczyk			wóz				
Odstępy osi:	2,6	1,2	1,2	1,2	2,6	1,5	3,0	1,5	1,5	3,0	1,5	<i>m</i>
ciężary osi:	10	10	10	10		8	8		8	8		<i>t</i>

i) Koleje saskie państwowe o szerokości toru 1,0 *m*:

Odstępy osi:	1,85	1,35	2,95	1,35	1,65	<i>m</i>
ciężary osi:	7,25	7,25	7,25	7,25		<i>t</i>

Jeżeli jedna oś tylko działa na części mostu, przyjąć należy jej ciężar 10 *t*.

j) Koleje saskie wąskotorowe o szerokości toru = 0,75 *m*:

	parowóz				wóz				
Odstępy osi:	1,8	0,9	0,9	2,35	<i>m</i>	1,05	2,0	1,05	<i>m</i>
ciężary osi:	5	5	5		<i>t</i>	3,8	3,8		<i>t</i>

Dla kolei wąskotorowych nie mamy przepisanych normalnych parowozów. Ponieważ na kolej taką nie mogą przechodzić z powodu różnicy szerokości toru inne parowozy, więc mosty obliczać należy wedle parowozów danej kolei.

Zamiast rzeczywistych ciężarów przyjmują często zastępczy ciężar urojony, jednostajnie rozłożony, wywołujący te same siły zewnętrzne, t. j. momenty i siły poprzeczne.

Rozporządzenie ministeryjne austriackie z 15/9 1887 zawiera następujące postanowienia co do ciężaru zastępczego przy obliczaniu momentów dla mostów żelaznych i drewnianych:

§. 3a. Obciążenie służące za podstawę obliczenia pasów, pokrywające całe przeszło, wyznacza się przy zeskładach zwykłych, swobodnie leżących (przy belkach w dwu punktach podpartych) na każdy tor na metr bieżący równo rozdzielone według rozpiętości, mierzonej od środka do środka łożyska w następujący sposób:

Skala a.

Rozpiętości teoretyczne w m	Ciążar ruchomy w t	Rozpiętości teoretyczne w m	Ciążar ruchomy w t	Rozpiętości teoretyczne w m	Ciążar ruchomy w t
1,0	30	5	11,5	40	5,6
1,5	20	10	8,5	80	4,4
2,0	15	15	7,0	120	3,8
2,5	13,5	20	6,5	160	3,4

Dla rozpiętości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej.

§. 3b W celu obliczenia poprzecznic pośredniej należy przyjąć jako ciężar ruchomy połowę całkowitego, według skali a wynikającego, obciążenia mostu, którego rozpiętością jest odległość od najbliższej lewej do najbliższej prawej poprzecznic.

Końcowe poprzecznic należy wedle ich ustroju w każdym wypadku obliczać, przyczem należy w myśl poprzedniej reguły przyjmować zamiast brakującej sąsiedniej poprzecznic odpowiednio odległą teoretyczną podporę toru.

Podłużnic należy obliczać jako belki główne, oparte na poprzecznicach.

§. 3h. Dla takich kolei drugorzędnych i miejscowych o zwykłej szerokości toru, na których nie jeżdżą ciężkie czteroosiowe parowozy, należy zmniejszyć odpowiednio obciążenie normalne w ustępach a) i b). I tak:

1) o 20 procent dla takich kolei, których mosty nie wiozą większych ciężarów, niż parowozy trzyosiowe, według schematu f);

2) o 40 procent dla takich kolei, których mosty nie wiozą większych ciężarów, niż trzyosiowe parowozy jaszczykowe, według schematu g).

Podobne rozporządzenie rosyjskie podamy poniżej (§. 23).

We Francyi przepisany został, jak wiadomo, pociąg normalny dla obliczenia belek mostowych. Obliczanie sił zewnętrznych mostów o większej rozpiętości na podstawie układu ciężarów skupionych, jest z powodu wielkiej ilości tych ciężarów nadzwyczaj żmudne. Dlatego też inżynier Collignon proponuje w (*Ann. d. ponts et chaussées* 1895/II str. 5) użycie dla mostów powyżej 30 m rozpiętości dwu ciężarów zastępczych, z których pierwszy 5,32 t/m przyjąć należy na długości dwu parowozów t. j. 30 m, drugi przedstawiający wozy ciężarowe 2,66 t/m na reszcie przęsła. Autor przekonał się, że dwa te ciężary bardzo dobrze zastępują pociąg normalny francuski. Sposób ten ma także tę dogodność, że ciężary te są stałe i niezależne od wielkości przęsła.

### §. 5. Obciążenie śniegiem.

Dalszym ciężarem działającym na mosty jest śnieg. Ciężar warstwy śniegu 80 cm wysokiej na m<sup>2</sup> pomostu wynosi około 160 kg. Rozporządzenie ministeryalne bawarskie każe też uwzględnić obciążenie śniegiem, wynoszące 100 kg/m<sup>2</sup>, saskie 70 kg/m<sup>2</sup>,

ale ponieważ śnieg zmiata się z mostów, więc się go zwykle nie uwzględnia w obliczeniu zwłaszcza, że, jeżeli śnieg jest na moście, to ruch jest po części zatamowany. Nie możemy więc przypuścić równoczesnego obciążenia śniegiem i wielkim ciężarem ruchomym.

### §. 6. Ciśnienie poziome, powstające wskutek chwania się parowozów i wozów.

Ciśnienie poziome, powstające wskutek chwania się parowozów i wozów, jest tem większe, im większy ciężar i chyżość pociągu. Z doświadczeń Webera przekonano się, że mogą dojść te siły do  $\frac{2}{3}$  ciężaru pionowego. Jednak ciśnienia te po części się znoszą, gdyż jedno koła działają na jeden tok szyn, a drugie równocześnie na drugi w przeciwnym kierunku. Przy obliczeniu mostów kolejowych przyjmujemy siłę poziomą, równą 0,08 ciśnienia pionowego u każdego koła parowozu, dla większych rozpiętości zaś (od 10 m) jedną siłę = 0,08 części ciężaru parowozu, więc dla kolei głównych 3,6 t, działającą u pierwszej osi parowozu. Leber przyjmuje tę siłę dla kolei głównych równ. 5 t, dla drugorzędnych 4 t i 3 t.

Dla mostów drogowych i kładek możemy przyjąć jako siłę poziomą 100 kg/m<sup>2</sup>. Ponieważ jednak podczas wielkiego wiatru ruch na mostach drogowych jest mniejszy i powolniejszy, a przy wielkim wichrze ustaje, więc zwykle, uwzględniając parcie wiatru wedle następnego paragrafu, nie uwzględniamy już wstrząśnień poziomych, powstałych wskutek ciężaru ruchomego.

### §. 7. Parcie wiatru.

Parcie wiatru  $w$  na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru wynosi \*)  $w=0,13v^2$ , przyczem chyżość  $v$  przyjmujemy w metrach na sekundę, a  $w$  w kg/m<sup>2</sup>. Otrzymamy więc:

	chyżość wiatru $v$	parcie wiatru $w$
dla silnej burzy . . . . .	30 m	117 kg/m <sup>2</sup>
„ wichru . . . . .	40 „	208 „
„ najsilniejszego wichru w Europie . . . . .	50 „	325 „

\*) p. Statyka Budowli, wyd. II, str. 336.

W Wiedniu spostrzegano  $v=36m$ , w Hamburgu  $v=42m$ , w Ameryce nawet parcie  $500\text{ kg/m}^2$ , w Australii  $570\text{ kg/m}^2$ , w Anglii w r. 1884 parcie większe, niż  $560\text{ kg/m}^2$ , lecz parcie to było tylko na małej przestrzeni tak wielkie, obok zaś było mniejsze, tak, że na większą płaszczyznę licząc, możemy je przyjmując średnio znacznie mniejsze. Doświadczenia Bakera wykazały, że dla płyty o płaszczyźnie  $28\text{ m}^2$  było parcie równe tylko  $\frac{2}{3}$  parcia na małą płaszczyznę ( $< 1\text{ m}^2$ ).

Przy obliczeniu mostów musimy zważać na tę okoliczność, że gdy parcie wiatru wynosi  $170\text{ kg/m}^2$ , to wozy osobowe słabo obsadzone mogą się wywrócić, próżne zaś już przy  $w=137\text{ kg/m}^2$ , a zresztą z powodu wielkiego tarcia między szynami a kołami ruch pociągów staje się niemożliwym. W rzeczy samej zastanawia się ruch pociągów podczas silnych wichrów, dlatego przyjmujemy parcie wiatru dla mostu obciążonego  $w=0,170\text{ t/m}^2$  dla kolei o torze normalnym. Takie parcie przyjmują w Austrii i Francji, w Prusiech, Alzacyi, Saksonii i Bawaryi  $150\text{ kg/m}^2$ , w Szwajcaryi nawet  $100\text{ kg/m}^2$ . Wozy kolei wąskotorowych są więcej wywrotne, dlatego przyjmujemy dla obciążonego mostu kolei wąskotorowych  $w=0,125\text{ t/m}^2$  a dla mostów drogowych i kładek  $w=0,100\text{ t/m}^2$ .

Nieobciążony most musimy obliczać na największe parcie wiatru, które w naszych stronach możemy przyjmując już bardzo wysoko  $w=0,27\text{ t/m}^2$ . W okolicach mniej wystawionych na działanie wiatru, zasłoniętych górami, w dolinach prostopadle do ich długości możemy przyjmując mniejsze parcie. Takież parcie przyjmują w Austrii i Francji,  $300\text{ kg/m}^2$  w Bawaryi,  $273\text{ kg/m}^2$  w Anglii,  $250\text{ kg/cm}^2$  w Prusiech, Saksonii i Alzacyi,  $150\text{ kg/m}^2$  w Szwajcaryi,  $235\text{ kg/m}^2$  w Rosyi.

Dla mostu obciążonego jest wprawdzie parcie na  $m^2$  mniejsze, ale powierzchnia, wystawiona na parcie, większa. W każdym więc szczególnym wypadku wyznaczamy parcie wiatru dla mostu obciążonego i nieobciążonego i obliczamy siły zewnętrzne na podstawie większego parcia. Przytem przyjmując możemy jako wysokość wozów drogowych  $2,5\text{ m}$ , kolejowych  $3,0\text{ m}$ , a tłumy ludzi  $2,0\text{ m}$ . Dla mostów kolejowych parcie wiatru dla mostu nieobciążonego przy  $w=270\text{ kg/m}^2$  daje większe wyniki od parcia na most nieobciążony tylko przy bardzo wielkich rozpiętościach. Jeżeli liczymy parcie wiatru dla belki o ścianie pełnej, to powierzchnia, wystawiona na parcie, jest  $hl$ , jeżeli  $h$

oznacza wysokość a  $l$  długość belki. Dla belek kratowych musimy dokładnie wyznaczyć powierzchnię pasów i kraty, w przybliżeniu wynosi ona  $\frac{1}{3} A$  \*); jeżeli  $A$  oznacza pełną powierzchnię belki. Wiatr, przechodząc jednak przez kratę, uderza jeszcze o drugą belkę z mniejszą już siłą, która zależy od gęstości kraty pierwszej i od oddalenia obu belek. Pierwszą okoliczność uwzględnia rozporządzenie austriackie, zmniejszając powierzchnię belki kratowej tem bardziej, im gęstsza jest krata (p. tabliczka poniżej). Co do drugiej okoliczności okazały doświadczenia Bakera, że parcie na drugą belkę jest tem większe, im dalej ona leży od belki pierwszej. Dla braku dokładniejszych doświadczeń nie możemy jeszcze uwzględnić tej okoliczności.

Odnośne ustępy rozporządzenia austriackiego minist. handlu z r. 1887 brzmią:

§. 3f. Działanie wiatru należy wyznaczyć, przyjąwszy parcie boczne  $270 \text{ kg/m}^2$  na most nieobciążony i  $170 \text{ kg/m}^2$  na most obciążony pociągiem, względnie wziąć w rachubę niekorzystniejsze z tych dwu działań, a to, jak następuje:

1. Przy nieobciążonym moście należy wziąć w rachubę jedną ze ścian niosących z powierzchnią, rzeczywiście na działanie wiatru wystawioną, drugą zaś z powierzchnią, w ten sam sposób zmierzyc się mającą, lecz zmniejszoną według poniżej podanej skali.

Przy moście obciążonym należy uważać pociąg jako  $2,5 \text{ m}$  wysoki,  $0,5 \text{ m}$  nad szynami znajdujący się, postępujący pełny prostokąt. Jako płaszczyznę, wystawioną na działanie wiatru, należy wziąć w rachunek powierzchnię pociągu i części jednej ściany, wystającej poza zarys pociągu, jakoteż i zmniejszoną wedle skali powierzchnię tych części drugiej ściany.

*Skala dla zmniejszenia wystawionej na parcie wiatru powierzchni drugiej ściany niosącej.*

Stosunek próżnej powierzchni kraty do całkowitej powierzchni zarysu w pierwszej ścianie niosącej	Spółczynnik zmniejszający dla wystawionej powierzchni drugiej ściany niosącej
przy 0,40	0,2
„ 0,60	0,4
„ 0,80	1,0

Dla wartości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej \*).

\*) Dla kraty pojedynczej  $0,25 A$ , dla kraty złożonej jednokrotnej  $0,40 A$ , dwukrotnej  $0,50 A$ .

\*\*) Wyznaczenie powierzchni, na którą działa wiatr, nie jest zupełnie jasnym wedle rozporządzenia. Zdaje nam się, że powinno się ją obliczać w następujący sposób:

Mosty drogowe. §. 14c. Wpływ parcia wiatru ma się uwzględnić w sposób, przepisany w §. 3. lit. f, przyczem uważać należy tłum ludzi lub wozów jako postępujący pełny prostokąt o 2m wysokości.

Okólnik rosyjskiego techniczno-inspektorskiego komitetu kolei żelaznych z 5. stycznia 1884. — III. Siły wewnętrzne, zależne od parcia wiatru na boczną powierzchnię mostu należy obliczać w dwóch przypuszczeniach, wybierając niepomyślniejsze:

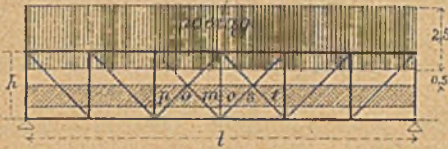
a) bez pociągu na moście, przyjmując parcie wiatru  $1\frac{1}{3}$  puda na  $st^2$  ( $235\text{ kg/m}^2$ ) bocznej powierzchni,

b) z pociągiem na moście, parcie wiatru przyjmując  $\frac{3}{4}$  puda na  $st^2$  ( $132\text{ kg/m}^2$ ) powierzchni.

Uwaga 1. W pierwszym wypadku jako boczną powierzchnię, wystawioną na działanie wiatru, należy przyjmować oprócz rzeczywistej bocznej powierzchni jednej belki jeszcze części powierzchni drugiej belki, ponieważ przy pochylonym kierunku wiatru obie belki nie będą się nakrywały. Wystawioną na działanie wiatru powierzchnię dwóch belek o tej samej rozpiętości można przyjąć w przybliżeniu dla belek o kracie przedziałowej

Nazwijmy powierzchnię pasów i kraty belki pierwszej  $A_1$ , powierzchnię pomostu  $P$  (rys. 14), części kraty, zakrytych przez pomost  $Z$ , to po-

rys. 14.



wierzchnia pierwszej belki i pomostu jest  $A_1 + P - Z$ . Przy wyznaczeniu współczynnika gęstości kraty  $\mu$  nie uwzględniamy powierzchni pomostu, bo ona przedstawia płaszczyznę pełną. Mamy więc:

$$\mu = \frac{(hl - P) - (A_1 - Z)}{hl - P} \quad . \quad 11)$$

Wyszukawszy z powyższej tabliczki odpowiedni współczynnik parcia na drugą belkę  $v$ , otrzymamy powierzchnię drugiej belki  $(A_1 - Z)v$ , zatem powierzchnię, wystawioną na parcie wiatru, obu belek i pomostu:

$$A = A_1 + P - Z + (A_1 - Z)v = (A_1 - Z)(1 + v) + P \quad . \quad 12)$$

Dla mostu nieobciążonego otrzymamy parcie wiatru na  $m$  b.:

$$g_w = \frac{270}{l} \left\{ (A_1 - Z)(1 + v) + P \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Jeżeli most jest obciążony, to parcie na pociąg uważamy jako ciężar ruchomy  $p_w$ , gdy parcie na most jako ciężar stały  $g'_w$ . Otrzymamy wtedy, nazwawszy powierzchnię pociągu  $C$  a powierzchnię pociągu, zakrytą przez belką pierwszą,  $B$ ,

$$g'_w = \frac{170}{l} \left\{ (A_1 - Z)(1 + v) + P \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$p_w = \frac{170}{l} \left\{ C - B(1 + v) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Przykład. Dla mostu układu Schiffkorna o rozpiętości  $l = 16,09\text{ m}$  jest powierzchnia pasów  $= 3,1\text{ m}^2$  a kraty  $= 5,1\text{ m}^2$ , więc  $A_1 = 8,2\text{ m}^2$ . Dalej mamy

równą 0,50 ogólnej powierzchni, ograniczonej przez pasy belki, a dla belek o kracie równoramiennej równą 0,60 tej powierzchni, przyjmując przytem, iż pomost znajduje się między pasami. Parcie wiatru na boczną powierzchnię belki rozdziela się w takim razie równo między górnymi i dolnymi tężnikami poziomymi. Jeżeli zaś pomost znajduje się nie między pasami belek, lecz nad pasami, to należy jeszcze przyjąć w rachubę parcie wiatru na zupełną, boczną powierzchnię pomostu, odnosząc owe dodatkowe parcie w zupełności do górnych lub dolnych tężników stosownie do umieszczenia pomostu.

**Uwaga 2.** W drugim wypadku, gdy pociąg znajduje się na moście, zupełna powierzchnia boczna, poddana działaniu wiatru, otrzymuje się przez dodanie do wyżej obliczonej: *a*) 10  $st^2$  na każdą stopę bieżącą ( $3,05 m^2/m$ ) w mostach z jazdą w górze, odnosząc przytem po  $\frac{3}{5}$  parcia wiatru na górne i na dolne tężniki poziome, *b*) w mostach z jazdą na dole od 10 do 7,5  $st^2$  na stopę bieżącą (od  $3,05 m^2$  do  $2,29 m^2$  na 1 *m*) stosownie do wysokości belek, zmieniającej się od 0,5 sąż. do 3 sąż. (od 1,07 do 6,4 *m*) i więcej, przyczem całe parcie na ową dodatkową powierzchnię należy odnieść do tężników dolnych.

Wartości dodatkowe 10 i 7,5  $st^2$ , ( $3,05$  i  $2,29 m^2/m$ ) otrzymane zostały przez odjęcie od zupełnej, bocznej powierzchni pociągu na jednostkę długości mostu odstępów pomiędzy sąsiednimi wozami, tudzież pomiędzy główką szyny i podłogą wozu, przyczem pierwsza liczba stosuje się do wypadku, gdy powierzchnia pociągu nie jest zasłonięta belką, druga, gdy cały pociąg jest zasłonięty belką, co się zdarza w mostach z jazdą na dole przy wysokości belki większej, niż 3 sążnie (6,4 *m*).

$P = 6,1 m^2$ ,  $Z = 2,4 m^2$ . Wysokość belki  $h = 1,26 m$ , więc  $hl = 20,27 m^2$ , a stąd wedle rów. 11)  $\mu = \frac{(20,27 - 6,1) - (8,2 - 2,4)}{20,27 - 6,1} = 0,59$ , któremuto współczynnikowi odpowiada wedle tabliczki, podanej w rozporządzeniu,  $v = 0,39$ .

Mamy zatem dla mostu nieobciążonego:

$$g_w = \frac{270}{16,09} \left\{ (8,2 - 2,4) (1 + 0,39) + 6,1 \right\} = 239 \text{ kg/m.}$$

W tym wypadku tężniki znajdują się tylko u pasu dolnego, więc siła  $g_w$  działa cała na pas dolny, w przeciwnym razie trzeba ją rozdzielić na pas dolny i górny.

Dla mostu obciążonego mamy powierzchnię pociągu:

$C = 16,09 \cdot 2,5 = 40,22 m^2$ , a zakryta przez pociąg powierzchnia belki  $B = 1,8 m^2$ . Otrzymamy więc według rów. 14) i 15):

$$g'_w = \frac{170}{16,09} \left\{ (8,2 - 2,4) (1 + 0,39) + 6,1 \right\} = 150 \text{ kg/m,}$$

$$p'_w = \frac{170}{16,09} \left\{ 40,22 - 1,8 (1 + 0,39) \right\} = 398 \text{ kg/m.}$$

Widzimy więc, że dla mostu obciążonego w tym wypadku parcie wiatru jest większe, to też parcie służy tu za podstawę obliczenia tężników.



### §. 8. Siła odśrodkowa.

Jeżeli kolej jest w łuku, to podczas przejazdu pociągu powstaje siła odśrodkowa (n. *Fliehkraft*, cz. *sila odstřediva*), działająca poziomo na szyny, która przenosi się za pośrednictwem szyn na most i jest zależną od chyżości i ciężaru pociągu i promienia łuku. Jeżeli  $p$  oznacza ciężar ruchomy na 1 m,  $c$  chyżość pociągu w *m/sek*,  $r$  promień łuku a  $g=9,81 m$  przyspieszenie ciężkości, to wiemy z fizyki, że siła odśrodkowa

$$z = \frac{pc^2}{gr} \dots \dots \dots , \dots \dots 16)$$

Ponieważ w tym wzorze  $c$  jest w drugiej potędze, więc chcąc otrzymać *najw*  $z$ , musimy zastosować ten wzór dla pociągów pospiesznych, dla których jednak  $p$  jest mniejsze, niż dla towarowych, a mianowicie możemy przyjąć w przybliżeniu  $p = \frac{3}{4} p_1$ , ciężaru na jednostkę długości pociągów towarowych, (§. 4). Wstawmy w rów. 16) dla pociągów pospiesznych:

$$c = 20 m/s, g = 9,81 m,$$

to otrzymamy: 
$$z = \frac{41}{r} p = \frac{31}{r} p_1 \left\{ \begin{array}{l} 1'2 km/min. = 72 km/h. \\ t/m \dots \dots \dots 17) \end{array} \right.$$

dla  $c = 30 m/s$  (*składowo*) 
$$z = \frac{91}{r} p = \frac{68}{r} p_1 \left\{ \begin{array}{l} 1'8 km/min. = 108 km/h. \end{array} \right.$$

Dla pociągów ciężarowych będzie dla  $c = 10 m/s$   $\cdot 0'6 km/min. = 36 km/h.$

$$z = \frac{10}{r} p_1 \dots \dots \dots 18)$$

Jeżeli chcemy liczyć dokładniej, to możemy przyjąć siłę, działającą przy każdej osi parowozu. Wtedy w poprzednich wzorach należy przyjąć za  $p$ , względnie  $p_1$ , ciężar osi, resztę pociągu możemy uważać jako ciężar jednostajnie rozdzielony  $p = 1,5 t/m$  dla pociągów osobowych a  $p = 3,6 t/m$  dla pociągów pospiesznych. Przy większych mostach możemy przyjąć jedną siłę zamiast wszystkich osi parowozu, działającą w osi pierwszej.

## II. Natężenie dopuszczalne.

### §. 9. Natężenie dopuszczalne dla mostów żelaznych i stalowych.

W §§. 23, 24. i 25. Podręcznika Statyki budowli (drugie wydanie) podaliśmy wzory do obliczenia wymiarów na podstawie

doświadczeń Wöhlera. Przy obliczaniu mostów wzorów tych tem bardziej używać należy, że tu zmiany natężeń są z powodu ciężaru ruchomego większe, niż dla innych zeskładów. Tu musimy też uwzględnić wstrząśnienia, a że dokładne obliczenie ich wpływu i wielkości nie jest możliwem, więc uwzględniamy je, przyjmując wedle wielkości wstrząśnień mniejsze natężenie dopuszczalne; inny współczynnik wstrząśnień przyjmujemy więc dla mostów kolejowych, inny dla drogowych a inny dla kładek.

Licząc sposobem Winklera używamy następných wzorów \*), przyczem  $A$  oznacza przekrój,  $P_0$  siłę zewnętrzną z powodu ciężaru własnego,  $P_1$  z powodu ciężaru ruchomego a  $P_2$  takąż siłę o odwrotnym znaku.

Dla mostów kolejowych żelaznych, jeżeli przeważa ciągnienie:

$$\left. \begin{aligned} \text{Przekrój } A &= \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{590} + \frac{P_2}{1300} \text{ cm}^2 \\ \text{jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A &= \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{550} + \frac{P_2}{1380} \text{ "} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 19)$$

Dla mostów drogowych żelaznych:  
dla przeważającego ciągnienia:

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400} \text{ cm}^2 \dots \dots \dots 20)$$

dla przeważającego ciśnienia:

$$A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500} \text{ cm}^2 \dots \dots \dots 21)$$

Dla kładek żelaznych:  
dla przeważającego ciągnienia:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{1550} \text{ cm}^2 \\ \text{dla przeważającego ciśnienia} \\ A &= \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{650} + \frac{P_2}{1640} \text{ cm}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 22)$$

Licząc wedle wzorów Weyrauch'a mamy:  
dla żelaza natężenie dopuszczalne  $\tau = 700 (1 \pm \frac{1}{2} \zeta) \text{ kg/cm}^2 \dots 23)$

" stali miękkiej "  $\tau = 900 (1 + \frac{2}{3} \zeta) \text{ " } \dots 24)$

" " średnio twardej "  $\tau = 1000 (1 + \zeta) \text{ " } \dots 25)$

\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 64 i nast.

a dla zmiennych natężeń:

dla stali miękkiej  $\tau = 900 (1 - \frac{1}{2} \zeta')$  „ . 26)

„ „ średnio twardej  $\tau = 1000 (1 - \frac{1}{2} \zeta')$  „ . 27)

przyczem  $\zeta' = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \frac{P_0}{P_0 + \alpha P_1}$ , a współczynnik wstrząsnień  $\alpha$  jest dla mostów kolei głównych 1,3, kolei drugorzędnych 1,25, dla drogowych 1,2, dla kładek 1,1. Jeżeli *najw*  $P$  i *najmn*  $P$  mają przeciwne znaki, wtedy używamy dla żelaza rów. 23) ze znakiem dolnym, dla stali rów. 26) i 27).

Na podstawie najnowszych doświadczeń Bauschingera możemy przyjąć wedle Tetmajera następujące wzory:

dla żelaza spawalnego:

$$\tau = 700 \pm 350 \zeta + 13 \zeta^2 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots\dots 28)$$

dla żelaza zlewego:

$$\tau = 800 \pm 450 \zeta + 120 \zeta^2 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots\dots 29)$$

dla stali miękkiej

$$\tau = 900 \pm 500 \zeta + 280 \zeta^2 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots\dots 30)$$

dla stali średnio twardej

$$\tau = 1000 \pm 700 \zeta + 250 \zeta^2 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots\dots 31)$$

W tych częściach mostu, które obliczamy z uwzględnieniem parcia wiatru, możemy przyjąć większe natężenie dopuszczalne ze względu na tę okoliczność, że tak wielkie parcia wiatru, jakie w obliczeniu przypuszczamy, trafiają się bardzo rzadko. Możemy więc przyjąć:

	natężenie dopuszczalne
dla żelaza spawalnego . . .	1000 $\text{kg/cm}^2$
„ „ zlewego . . .	1150 „
„ stali zlewnej . . .	1400 „

Zwrócić tu musimy uwagę, że natężenie dopuszczalne należy przyjmować większe lub mniejsze, wedle tego, czy sposób obliczenia jest więcej, czy mniej ścisły. Polecamy dlatego przy obliczeniu przybliżonem belek statycznie niewyznaczalnych przyjmować natężenie dopuszczalne mniejsze, a mianowicie dla belek kratowych równoległych o kracie wielokrotnej zmniejszyć natężenie dopuszczalne o 3<sup>0</sup>/<sub>10</sub>, a dla takichże belek wielobocznych o 10<sup>0</sup>/<sub>10</sub>.

Poniżej podajemy wyciągi z rozporządzeń austriackich i rosyjskich, w których po części uwzględniono zmienność natężenia dopuszczalnego.

A. Rozporządzenie austr. min. z r. 1887.<sup>1)</sup> Mosty kolejowe.  
 §. 4. Praca materiału. Przy uwzględnieniu obciążeń i wpływów, określonych w §. 3. ust. a, b, c, d, e, g, h, jakoteż i ciężaru własnego zeskładu nie powinno przekraczać obliczone największe natężenie materiału na  $cm^2$  użytecznej powierzchni przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jako też części nie współdziałających przekroju pełnego) następujących granic:

a) Przy żelazie spawalnem na ciągnięcie, ciśnienie i ścinanie:

1. dla rozpiętości niżej 40,0 m 700 kg wraz z dodatkiem 2 kg za każdy metr rozpiętości;

2. dla rozpiętości od 40,0 m wyżej, a to:

dla 40,0 m . . . . .	, 780 kg
„ 80,0 „ . . . . .	840 „
„ 120,0 „ . . . . .	880 „
„ 160,0 „ i wyżej . . . . .	900 „

przyczem dla pośrednich rozpiętości należy wstawić wedle prawa linii prostej, a dla poprzecznic i podłużnic brać tę wartość, która odpowiada ich rozpiętości;

3. dla obliczenia nitów na ścinanie w jednym tylko kierunku  $600 kg/cm^2$ , względnie w kilku kierunkach  $500 kg/cm^2$ , przyczem należy na to zważać, że rzut ścianki dziury nitu nie powinien pracować więcej nad  $1400 kg/cm^2$ ;

4. dla obliczenia oporu przeciw ścinaniu w kierunku walcowania  $500 kg/cm^2$ ;

5. żelazo spawalne musi mieć przy wytrzymałości  $8600 kg/cm^2$  na złamanie i wyższej przynajmniej 12 procent przedłużenia.

Przy mniejszej wytrzymałości na złamanie musi być stosunkowo większe przedłużenie, które ma wynosić przy najniższej jeszcze dozwolonej wytrzymałości na złamanie  $3300 kg/cm^2$  najmniej 20%.

Przedłużenie należy mierzyć na pręcie próbnym o przekroju  $5 cm^2$  przy oddaleniu znaczków 20 cm. Jeżeli nie można uniknąć użycia pręta próbnego o innym przekroju, niż powyższy, to należy ze względu na pręt normalny w ten sposób wyznaczyć odległość znaczków, aby kwadraty odstępów miały się, jak powierzchnie przekroi.

b) Przy żelazie lanem, któryto materiał nie powinien tworzyć żadnych głównych części składowych konstrukcyi noszącej, ustanawia się powyżej wzmiankowane granice:  $700 kg/cm^2$  na ciśnienie,  $200 kg/cm^2$  na zwykłe ciągnięcie, a  $300 kg/cm^2$  na ciągnięcie przy zgnieciu.

c) Dla drzewa  $80 kg/cm^3$  na zwykłe ciągnięcie w kierunku włókien.

d) Przy wszystkich częściach ustroju, pracujących na ciśnienie, należy zważać na potrzebny opór przeciw wyboczeniu.

e) Największe natężenie, które wynika z działania wiatru, określonego w §. 3. ust. f, wraz z natężeniami poprzednio omawianemi według części konstrukcyi, o którą chodzi, nie powinno przekraczać następującej granicy:

do §. 4. ust. a punkt 1. i 2. . . . .	1000 $kg/cm^2$
„ „ „ a „ 3. . . . .	700 „
„ „ „ a „ 4. . . . .	600 „

<sup>90</sup>  
 \* z powodu obciążenia „nieobciążonego” powstają w org. belach „obciążonych” części, następnego natężenia, gdyż wewnątrz materiału, nie to ukształtowania. Ten wykwota albo rozpiętości nie. Ta uwarunkowana na org. ziele, temu mniej, awo słowem. ta uwarunkowania, taR ze sta wyokr. wyokr. rozpiętości uwarunkowania, taR wyokr. natężenia.

2.) Mosty drogowe §. 16. Natężenie. Gdy przyjmujemy za podstawę omówione w §. 15. lit. *a*, *b* i *d*. obciążenia i wpływy, jakoteż własny ciężar zeskładu, nie może przekraczać rachunkiem wyznaczone największe natężenie materiału na  $cm^2$  użytecznego przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jakoteż nie współdziałających części pełnego przekroju) następujących granic:

*a*) dla żelaza spawalnego jak w §. 4. lit. *a* l. 5. przepisano:  $750 kg/cm^2$  wraz z dodatkiem  $2 kg/cm^2$  na każdy metr rozpiętości teoretycznej, a najwyżej razem  $900 kg/cm^2$ , przyczem poprzecznice, podłużnice i składniki pośrednie obliczać należy podług ich rozpiętości.

*b*) Dla żelaza lanego obowiązują pod względem dopuszczalnego natężenia granice, ustanowione w §. 4. lit. *b*.

*c*) W końcu mają być zastosowane także dla mostów drogowych postanowienia w §. 4. lit. *a* l. 3. i 4. lit. *c*, *d* i *e* (względnie §. 6. lit. *b*), odnoszące się do mostów kolejowych.

Rozporządzenie ministerstwa handlu z dnia 29. stycznia 1892 co do użycia zasadowego żelaza zlewnego Martina dla zeskładów mostowych na kolejach.

1. Żelazo zlewne, mające być użyte do jakiegokolwiek zeskładu dźwigającego, musi posiadać przy w kierunku walcowania mierzonej wytrzymałości 3500 do 4500  $kg/cm^2$  najmniej taką ciągliwość, która wypada z wstawienia prostoliniowego dla niższej granicy 28% a dla wyższej 22%.

Dalej może wytrzymałość przy każdym moście we wszystkich jego częściach wahać się tylko w granicy 700  $kg/cm^2$ .

2. Żelazo nitowe, mające być użyte, musi wykazywać przy 3500 do 4000  $kg/cm^2$  wytrzymałości najmniej 32% do 26% ciągliwości.

3. Przy próbach, przedsięwziętych dla kierunku prostopadłego do kierunku walcowania, mają ważność te same granice wytrzymałości i procenty ciągliwości o 2 mniejszone.

Ciągliwość należy mierzyć w sposób przepisany rozp. z d. 15. września 1887 w §. 4. lit. *a*, w 5. 4. Materiał należy badać już przy wytwarzaniu ze względu na kruchość i hartowność i należy z nim przeprowadzić zwykle próby zginania w stanie nieuszkodzonym i uszkodzonym. Bliższe ich określenia są przedmiotem osobnych warunków dostawczych, które mają być zatwierdzone przez władzę nadzorczą.

5. Dla zestawionych części mostu należy zachować co do obliczonego natężenia materiału na  $cm^2$  tymczasem granice, przepisane dla żelaza spawalnego w §. 4. rozporządzenia z d. 15. września 1887.

6. Wybijanie dziur na nity, dotychczas używane, dozwolone jest tylko do 1. stycznia 1894 i to tylko pod tym warunkiem, że średnica dziury zwykłej, którą należy wziąć zawsze najmniej 3 mm mniejszą, powiększy się przez późniejsze środkowe wiercenia do średnicy potrzebnej.

Po 1. stycznia 1894 należy bez wyjątku dziury na nity wiercić, przebijanie dziur jest bezwarunkowo zakazane.

7. Przy obrabianiu i składaniu części mostowych należy o ile możności używać maszynowego nitowania.

Rozporządzenie niniejsze wchodzi w życie z dniem ogłoszenia.



e) W tężnikach poziomych i pionowych mostów o większej rozpiętości, niż 32 m:

Na ciągnięcie (przekrój użyteczny) . . . . . 9,5 kg/mm<sup>2</sup>  
na ciśnienie (przekrój półużyteczny) . . . . . 8,5 „

W razie jednoczesnego stosowania w tej samej budowlu żelaza spawalnego i zlewnego, oddzielne części danej budowli winny być wykonane całkowicie z jednego gatunku żelaza t. j. wyłącznie ze zlewnego lub spawalnego.

Do takich oddzielnych części należą pasy górne i dolne, krzyżulce i słupy, poprzecznice i podłużnice pomostu i tężniki poziome i pionowe.

Okólnik techniczno inspektorskiego komitetu kolei żelaznych z 5. stycznia 1884 r. N. 60. (Zbiór postanowień z r. 1900).

IV. Poprzeczne przekroje pasów belek głównych i belek poprzecznych (jeżeli służą jednocześnie jako tężniki poziome) powinny być obliczone na podstawie następujących wzorów:

$$\text{dla pasów } \tau = \frac{P + 0,6 P'}{A} \dots a)$$

$$\text{dla poprzecznic } \tau' = \frac{Me}{J} + \frac{0,5 P''}{A_1} \dots b)$$

przyczem  $\tau$  i  $\tau'$  oznaczają natężenia dopuszczalne dla pasów i poprzecznic,  $P$  siłę wewnętrzną, wywołaną w pasie przez obciążenie pionowe,  $P'$  siłę wewnętrzną, wywołaną w pasie przez obciążenie wiatrem,  $A$  przekrój pasu,  $M$  moment sił zewnętrznych z powodu obciążenia pionowego,  $P''$  siłę wewnętrzną, wywołaną wiatrem,  $\frac{J}{e}$  moment oporu przekroju poprzecznic,  $A_1$  przekrój poprzecznic. Jeżeli działa tylko obciążenie pionowe, to  $\tau$  nie powinno być większe od natężenia dopuszczalnego (wskazanego w ustępie poprzednim) a przy działaniu równoczesnem obciążenia pionowego i parcia wiatru  $\tau$  nie powinno być większe, aniżeli 760 kg/cm<sup>2</sup> dla żelaza spawalnego.

Uwaga. Spółczynniki liczbowe 0,6 i 0,5 w  $a)$  i  $b)$  są stosunkami  $\frac{7,25}{12}$  i  $\frac{6}{12}$  t. j. stosunkami natężeń dopuszczalnych w pasie belki głównej i w poprzecznicach dla obciążenia pionowego i wiatru.

V. Dla części belki poddanych ciśnieniu natężenie dopuszczalne z r. 1875 powinno być zmienione stosunkowo do ilorazów długości części ciśnionych przez promień bezwładności, przyczem przekątnie i słupy, na które działa obciążenie mniejsze od ciężaru dwu przedziałów, należy obliczać wedle obciążeń, przeniesionych przez poprzecznice. W ciśnionych częściach belki przekroje obliczają się nie całkowite, lecz półużyteczne, a w ciągnionych częściach przekroje użyteczne (bez dziur na nity).

## §. 10. Natężenie dopuszczalne dla mostów drewnianych.

Doświadczenia Wöhlera ograniczały się tylko na żelazo i stal. Drzewa nie badano w ten sposób, jednak analogicznie przypuszczać możemy, że zmiany w natężeniu będą miały po-

dobny wpływ także na wytrzymałość drzewa. Przy mostach drewnianych uwzględniać więc należy także wpływ zmiany natężeń wskutek ciężaru ruchomego.

Nazwijmy  $P_0$  siłę, działającą wskutek ciężaru stałego, a  $P_1$  wskutek ciężaru ruchomego, to ponieważ ciężar ruchomy jest przyczyną wstrząśnień i zmian w natężeniu, pomnożymy ciężar ruchomy współczynnikiem  $\eta$ , większym od jedności, który przyjmujemy dla kładek  $\eta=1,1$  do  $1,2$ , dla mostów drogowych  $\eta=1,2$  do  $1,3$ , dla kolejowych  $\eta=1,3$  do  $1,4$ , przyczem większe współczynniki odnoszą się do części bezpośrednio obciążonych, zaś mniejsze do części pośrednio obciążonych. Zatem:

$$A = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1} \dots \dots \dots 32)$$

Zamiast tego obliczać możemy wymiary według dawnej metody, jeżeli odpowiednio przyjmujemy natężenia dopuszczalne  $\tau_1$ , więc:

$$A = \frac{P_0 + P_1}{\tau} = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1}, \text{ stąd } \tau = \tau_1 \frac{1 + \frac{P_0}{P_1}}{\eta + \frac{P_0}{P_1}} \dots \dots 33)$$

Natężenie dopuszczalne  $\tau_1$  możemy przyjąć według następującej tabliczki:

Na	mosty stałe		mosty tymczasowe	
	drzewo		drzewo	
	miękkie	twarde	miękkie	twarde
	kg/cm <sup>2</sup>		kg/cm <sup>2</sup>	
ciągnięcie . . . . .	105	120	120	140
ciśnienie . . . . .	70	80	80	95
zginanie . . . . .	90	105	105	120

Rozp. austriackie ministeryalne nie uwzględnia zmienności natężeń p. §. 9.

Rozporządzenie rosyjskie z r. 1900.

1. Natężenie dopuszczalne drzewa. Przy projektowaniu mostów drewnianych kolejowych przyjmować należy następujące natężenia dopuszczalne:

a) dla drzewa iglastego gatunku zwykłego: na ciągnięcie (bezpośrednie) 100 kg/cm<sup>2</sup>, na ciśnienie (bezpośrednie) 50 kg/cm<sup>2</sup>, na ciśnienie prostopadłe do włókien 15 kg/cm<sup>2</sup>, na zginanie 65 kg/cm<sup>2</sup>.

b) dla dębu (którego wytrzymałość na ciągnięcie jest nie mniejszą, niż 965 kg/cm<sup>2</sup>) na ciągnięcie (bezpośrednie) 140 kg/cm<sup>2</sup>, na ciśnienie (bezpo-



średnie)  $75 \text{ kg/cm}^2$  na ciśnienie prostopadłe do włókien  $38 \text{ kg/cm}^2$ , na zginanie  $100 \text{ kg/cm}^2$ .

c) dla drzewa iglastego lepszego (którego wytrzymałość na ciągnięcie jest nie mniejsza, niż  $812 \text{ kg/cm}^2$ ) na ciągnięcie bezpośrednie  $115 \text{ kg/cm}^2$ , na ciśnienie bezpośrednie  $65 \text{ kg/cm}^2$ , na ciśnienie prostopadłe do włókien  $20 \text{ kg/cm}^2$ , na zginanie  $75 \text{ kg/cm}^2$ .

d) Przy sprawdzaniu wytrzymałości pasów w belkach kratowych należy uwzględnić także zginanie miejscowe, jeśli ono zachodzi. Przy sprawdzaniu na działanie wiatru i obciążenia pionowego w belkach kratowych, wszystkie natężenia powyższe należy zwiększyć o  $12,5 \text{ kg/cm}^2$ .

e) Przy obliczaniu mostów drewnianych czasowych wszystkie podane powyżej pod a), b), c) i d) natężenia można zmniejszyć o 25%.

## B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła.

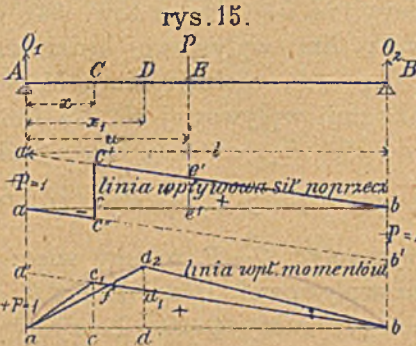
### III. Działanie ciężarów skupionych

#### §. 11. Linie wpływowe sił poprzecznych.

W Statyce Budowli wyłożyliśmy, jak się wyznacza siły poprzeczne i momenty dla belki w dwu punktach podpartej\*) dla danego obciążenia. Teraz mamy wyznaczyć momenty i siły poprzeczne, które sprawia ciężar ruchomy. W tym celu zastano-

nowimy się najpierw nad tem, jakie siły poprzeczne w danym punkcie C (rys. 15), odległym o  $x$  od A, sprawia ciężar  $P$ , gdy posuwa się od A do B.

Załóżmy, że na AB działa siła  $P$  w punkcie E w odległości  $u$  od lewej podpory A, to oddziaływanie  $O_1 = P \frac{l-u}{i}$ .



W celu wyznaczenia siły poprzecznej musimy rozróżnić dwa wypadki: czy siła P jest z przodu, lub z tyłu strony przekroju, wita poprzeczna jest dodatnia, lub ujemna.

a)  $l > u > x$ , lub: b)  $x > u > 0$ .

\*) p. Podr. Statyki Budowli, II wyd. str. 19. i 21.

Dla wypadku a) jest  $Q = O_1 = P \frac{l-u}{l}$  |  
 zaś dla b)  $Q = O_1 - P = P \frac{l-u}{l} - P = -P \frac{u}{l}$  | . . . . . 34)

Gdy ciężar porusza się po belce  $YA$  do  $B$ , to wraz z  $u$  zmienia się  $Q$ , bo, jak widzimy,  $Q$  jest funkcją  $u$ . A że  $Q$  jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej  $u$ , więc siła poprzeczna zmienia się dla zmiennej  $u$  według prawa linii prostej.

Wykreślmy w punkcie, w którym siła działa, t. j. w  $E$ , rzędną  $ee'$  w podziałce sił równą  $Q = P \frac{l-u}{l}$ , to rzędna ta będzie przedstawiała siłę poprzeczną w  $C$ , gdy  $P$  działa w  $E$ . Gdy zrobimy to samo dla rozmaitych położenia siły  $P$ , t. j. gdy wykreślmy w punktach zaczepienia siły  $P$  rzędne, równe sile poprzecznej w punkcie  $C$ , to końce tych rzędnych będą leżały według poprzedniego na linii prostej  $bc'$ .

Linie, która wyraża wpływ zmiany położenia skupionego ciężaru ruchomego na pewną ilość mechaniczną n. p. siłę poprzeczną, moment, oddziaływanie, siłę wewnętrzną, nazywamy linią wpływową (n. *Einflusslinie*, fr. *ligne d'influence*, cz. *obrazec influenčný*). W tym wypadku jest tu linia wpływowa  $bc'$  prostą, a aby wykreślić tę linię prostą dla wypadku b), dość będzie wyznaczyć dwa jej punkty. Przypuszczamy więc najpierw, że  $u=0$ , to z rów. 34) otrzymamy:  $Q=0$ , a odnośny punkt linii wpływowej będzie  $a$ . Założmy teraz, że  $u=l$ , to  $Q=-P$ , zatem robimy  $bb' = -P$ , i otrzymujemy  $b'$  drugi punkt linii wpływowej  $ab'$ . Ta linia jest jednak tylko ważną od  $a$  do  $c''$ , więc  $ac''$  t. j. dla  $x > u > 0$ .

Dla wypadku a) t. j. gdy  $l > u > x$ , mamy:  $Q = P \frac{l-u}{l}$ .

Podstawiając tu  $u=0$ , otrzymamy:  $Q=P$ , robimy więc:  $aa' = P$ , a  $a'$  jest punktem linii wpływowej. Drugi punkt  $b'$  otrzymamy, wstawiając w 34)  $u=l$ , wtedy  $Q=0$ . Łączymy teraz punkt  $a'$  z  $b$  i otrzymujemy drugą prostą, która jest ważną od  $c'$  do  $b$ . Linia wpływowa sił poprzecznych w  $C$  składa się więc z dwu równoległych prostych  $ac''$  i  $c'b$ . Wykreśliwszy tę linię, możemy wyznaczyć siłę poprzeczną w punkcie  $C$  dla któregokolwiek położenia siły  $P$ , jeżeli tylko wykreślmy rzędną w punkcie zaczepienia siły i odczytamy ją w podziałce sił.

*Derogirliche  
 statische Wert  
 Statik  
 Wielkość*

Jeżeli zamiast siły  $P$  działa siła  $P'$ , to chcąc użyć tej samej linii wpływowej, musimy rzędną  $y$  pomnożyć przez  $\frac{P'}{P}$ , więc  $Q = \frac{P'y}{P}$ , a dla  $P=1$ , będzie:  $Q = P'y$ .

Jeżeli kilka ciężarów działa na belkę w rozmaitych punktach, to:

$$Q = \frac{P'y'}{P} + \frac{P''y''}{P} + \frac{P'''y'''}{P} + \dots =$$

$$= \frac{1}{P}(P'y' + P''y'' + P'''y''' + \dots) = \frac{1}{P} \Sigma P y \quad \dots \quad 35)$$

a dla  $P=1$ , to jest, jeśli wykreślając linią wpływową, zrobimy  $aa' = bb' = 1$ , otrzymamy:

$$Q = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \dots = \Sigma P y \quad \dots \quad 36)$$

Następnie będziemy zawsze przypuszczać, żeśmy wykreślili linię wpływową dla  $P=1$ , w przeciwnym razie podzielić jeszcze musimy wynik przez  $P$  (według równ. 35).

### §. 12. Linie wpływowe momentów.

Aby wyznaczyć linię wpływową momentów, przypuścimy znowu, że siła  $P=1$ , działa na belkę  $AB$  w punkcie  $E$ . Wtedy zachodzą te same dwa wypadki: a)  $l > u > x$  i b)  $x > u > 0$ .

Dla wypadku a) jest moment ze względu na punkt  $C$   $M = O_1 x$ , więc  $\frac{M}{x} = O_1$ . Nazwijmy  $\frac{M}{x} = M'$ , to  $M' = O_1$ , a chcąc otrzymać  $M$ , trzeba pomnożyć  $M'$  przez  $x$ .

Podstawmy za  $O_1$  wartość, to

$$M' = O_1 = P \frac{l - u}{l}, \quad \dots \quad 37)$$

a dla wypadku b)  $M = O_1 x - P(x - u)$ , zatem:

$$M' = O_1 - P \left( 1 - \frac{u}{x} \right) \quad \dots \quad 38)$$

Równanie 37) jest zupełnie takie samo, jak pierwsze równanie 34); więc w ten sam sposób kreślimy prostą  $a'b$ , jak dla sił poprzecznych, z którejto prostej tylko część  $a_1 b$  jest ważną.

Według równ. 38)  $M'$  składa się z różnicy, której pierwszy wyraz  $O_1$  przedstawia się wykreślnie prostą  $a'b$ , względnie na długości  $x$  prostą  $a_1 c_1$ . Od rzędnych tej linii musimy odjąć rzędne linii, wyrażonej równaniem  $P \left( 1 - \frac{u}{x} \right)$ , równaniem także

linii prostej. Różnica  $M' = O_1 - P\left(1 - \frac{u}{x}\right)$  przedstawia równanie linii prostej, do wyznaczenia której, wystarczają dwa punkty. Jeżeli w tem równaniu zrobimy  $u=0$ , to  $P\left(1 - \frac{u}{x}\right) = P$ . Odciągnąwszy więc od rzędnej  $aa'$  rzędną  $P = aa'$ , otrzymamy rzędną linii  $M'$  równą zeru, a zatem  $a$  jako punkt linii wpływowej. Jeżeli zaś  $u=x$ , to  $P\left(1 - \frac{u}{x}\right) = 0$ ; w tym punkcie nie mamy więc nie do odciągania, zatem  $cc_1$  jest rzędną linii wpływowej. Ponieważ ta linia jest prostą, więc jeśli połączymy punkt  $a$  z  $c_1$ , to  $ac_1b$  jest linią wpływową dla momentów w punkcie  $C$ .

Dla innego punktu  $D$ , oddalonego od punktu  $A$  o  $x_1$ , otrzymamy inną linię wpływową, której rzędne trzeba będzie pomnożyć przez  $x_1$ . Abyśmy mogli linie wpływowe dla rozmaitych przekrojów porównywać, musimy je sprowadzić do wspólnej podstawy.<sup>1)</sup> Otóż wiemy, że moment w punkcie  $D$ , gdy siła  $P=1$  stoi w tymże punkcie, jest  $M = dd_1 \cdot x_1 - dd_1 \frac{x_1}{x} x$ . Poprowadźmy z punktu  $d_1$  poziomą  $d_1f$ , to  $cf = dd_1$ , połączmy punkt  $a$  z punktem  $f$ , aż prosta  $af$  przetnie się z pionową  $dd_2$ , a otrzymamy prostą  $ad_2$ . Z rysunku widzimy, że  $dd_2 : dd_1 = x_1 : x$ , czyli:  $dd_2 = dd_1 \frac{x_1}{x}$ . Punkt  $d_2$  jest więc punktem linii wpływowej momentów w  $D$  dla tej samej podstawy  $x$ . Połączmy punkt  $d_2$

rys. 16.



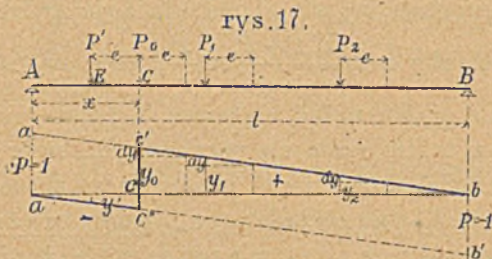
Zamiast mnożyć rzędne linii wpływowej przez stałą podstawę  $x$ , możemy zmienić odpowiednio podziałkę tak, żeby od-

razu odczytywać momenty. W takim razie trzeba jednak, aby wszystkie linie wpływowe były wykreślone ze względu na jedną podstawę. Aby się dowiedzieć na jakiejto linii będą leżały wierzchołki trójkątów wpływowych, założmy, że  $u=x$ , to otrzy-

mamy z równ. 37)  $M' = \frac{P(l-x)}{l}$ , a więc  $M = \frac{P(l-x)x}{l}$ . Wi-  
dzimy więc, że linia ta jest parabolą (rys. 16). Jeżeli siła  $P=1$   
stoi w środku belki, to moment w tym punkcie jest  $M_g = \frac{1}{4} Pl$ .  
Wykreślmy wedle przyjętej podziałki momentu  $gg_1 = M_g$ , to  $g_1$   
jest wierzchołkiem szukanej paraboli o osi pionowej. Wykre-  
ślenie tej paraboli nie przedstawia już trudności.

### §. 13. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne.

Wykreśliwszy dla punktu  $C$  i siły  $P=1$  linię wpływową



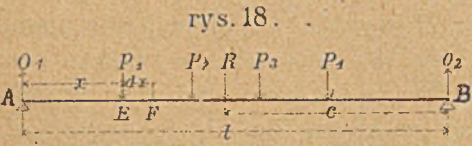
po prawej stronie  
przekroju  $C$  spra-  
wia dodatnią siłę  
poprzeczną, zaś cię-  
żar po lewej stro-  
nie tego przekroju  
ujemną. Jeżeli chce-  
my znaleźć najwięk-  
szą siłę poprzeczną  
dodatnią, obciąża-  
my, o ile możemy,

długość  $CB$ , długości zaś  $AC$  nie obciążamy wcale. Ponieważ  
rzędne od  $B$  do  $C$  wzrastają, więc przesuwamy w tym kie-  
runku układ ciężarów, rozmieszczonych w danych odstępach,  
odpowiadających pociągowi lub szeregowi wozów. Dla najwię-  
kszości więc musi stać pierwszy ciężar w punkcie  $C$ . Możliwym  
jest jednak, że gdy przesuniemy układ ciężarów skupionych  
jeszcze dalej tak, że drugi ciężar stanie na przekroju  $C$ , że  
wprawdzie pierwszy ciężar  $P'$  wywoła siłę poprzeczną ujemną,  
ale przez przesunięcie na lewo siła poprzeczna wywołana resztą  
ciężarów tak wzrośnie, że będzie większa, niż dla wypadku,  
gdy ciężar pierwszy stoi na przekroju. Chodzi więc teraz o zba-  
danie, czy dla największych sił poprzecznych pierwszy ciężar,  
czy też drugi ma stać na przekroju  $C$ . Wyznamy najprzód  
siłę poprzeczną, jaka powstaje, jeżeli ciężary  $P'$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$   
znajdują się na belce  $AB$ , a drugi ciężar  $P_0$  w punkcie danym  $C$ .  
Siła poprzeczna będzie wtedy:  $Q = -P'y' + P_0y_0 + P_1y_1 + P_2y_2$ .

Jeżeli układ ciężarów posuniemy na prawo tak, aby pierwszy ciężar stał w punkcie  $C$ , to wtedy  $Q$  powiększy się o  $\Delta Q = P'y' + P'y_0 - \Sigma_0^n Pdy$ .  $\Delta Q$  będzie mniejsze niż 0, gdy  $\Sigma_0^n Pdy > P'(y_0 + y')$ . Z rysunku widzimy, że  $dy : e = 1 : l$ , czyli  $dy = \frac{e}{l}$ , podobnie otrzymamy  $y_0 = \frac{l-x}{l}$  a  $y' = \frac{x-e}{l}$ . Podstawmy te wartości, a otrzymamy  $\Sigma_0^n P \frac{e}{l} > P' \frac{l-e}{l}$ , czyli  $\Sigma_0^n Pe > Pl + -P'e$ ,  $\Sigma_0^n Pe + P'e > Pl$ , zatem  $\frac{\Sigma_0^n P + P'}{l} > \frac{P}{e}$  . . . . . 39)

Gdy ten warunek zachodzi, to wtedy  $\Delta Q < 0$ , to znaczy, że posuwając ten układ ciężarów na prawo, zmniejszymy siłę poprzeczną, a ponieważ my szukamy *najw*  $Q$ , więc w takim razie nie będziemy posuwać na prawo, zatem dla *najw*  $Q$  drugi ciężar ma stać na  $C$ . Jeżeliby zaś  $\frac{\Sigma_0^n P + P'}{l} < \frac{P}{e}$ , toby  $dQ > 0$ , trzeba by więc posunąć na prawo układ ciężarów, a zatem pierwszy ciężar stać będzie w takim razie na przekroju dla *najw*  $Q$ . Prawo to możemy wyrazić słowami w następujący sposób: „Drugi ciężar ma stać na przekroju, gdy ciężar jednostkowy na długości  $e$  jest mniejszy, niż ciężar jednostkowy na całej belce“. A stać się to może, gdy  $P'$  jest małe lub  $e$  wielkie, więc gdy mały ciężar idzie naprzód w odległości wielkiej. Przy zwykłych obciążeniach mostów drogowych i kolejowych sprawia *najw*. siły poprzeczne układ ciężarów, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

Jeżeli wykreślimy w każdym punkcie belki rzędną, która przedstawia *najw*  $Q$ , to rzędne te wyznaczają linię największych sił poprzecznych. Chcąc wyznaczyć kształt tej linii dla danej



belki  $AB$  (rys. 18), nazwijmy  $R$  wypadkową wszystkich sił, odległą o  $e$  od podpory  $B$ , to, jak wiemy, dla przekroju  $E$  będzie *najw*  $Q = \frac{Rc}{l}$ ,

gdy w punkcie  $E$  stoi pierwszy ciężar. Jeżeli *najw*  $Q$  w punkcie  $E$  jest dla położenia, gdy w punkcie tym stoi drugi ciężar, to

najw  $Q = \frac{Rc}{l} - P_1$ . Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć najw  $Q$  dla

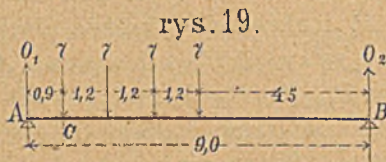
sąsiedniego przekroju  $F$ , odległego od  $E$  o  $dx$ , to musimy przesunąć nieco cały układ ciężarów.  $R$  pozostanie wtedy niezmiennione, zmieni się tylko  $c$  o  $dx$ . Ponieważ najw  $Q$  jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej  $c$ , więc najw  $Q$  zmieni się według prawa linii prostej. Widzimy więc, że dla przekrojów, dla których te same ciężary znajdują się na belce, najw  $Q$  możemy przedstawić linią prostą. Chcąc zatem wykreślić największe siły poprzeczne, najlepiej wyznaczyć najw  $Q$  dla tych przekrojów, dla których przy najniekorzystniejszym obciążeniu jeden ciężar stoi właśnie na podporze, wykreślić odnośne rzędne, równe najw  $Q$ , w tych punktach i połączyć je liniami prostymi.

Dla najmni  $Q$  należy zastosować te same pravidła z tą różnicą, że obciążać należy lewą stronę belki od danego przekroju.

#### §. 14. Wyznaczenie największych sił poprzecznych.

1. Liczebnie. Obliczamy dla najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów siły poprzeczne według wzorów, znanych ze statyki budowli (Podr. St. Bud. II. wyd. str. 20).

Przykład. Belka o rozpiętości 9 m obciążona jest połową ciężaru parowozu normalnego austriackiego. Chcąc wyznaczyć największe siły poprzeczne, obliczamy je



najpierw dla przekroju  $C$  (rys. 19), gdy jedno koło stoi na podporze  $B$ . Tu dla największości stoi pierwsze koło na przekroju. Dla tego położenia :

$$Q_1 = \frac{1}{2} 4.7 \cdot (4.5 + 1.8) = 19.5 t, \text{ najw } Q = Q_1 = 19.5 t.$$

W ten sam sposób obliczamy siły poprzeczne dla innych przekrojów.

2. Za pomocą linii wpływowych. Wykreślamy linie wpływowe dla siły  $P=1$ , wyznaczamy najniekorzystniejsze położenie, według tego ustawiamy układ ciężarów i odczytujemy poszczególne rzędne, mnożymy każdą rzędną przez odnośną siłę i dodajemy. Mnożenie to możemy zrobić także wykreślnie za pomocą kąta proporcjonalnego. Zwyczajnie mamy do czynienia

z dwiema wielkościami ciężarów, czasem z jedną. Wtedy lepiej wykreślić wprost linię wpływową dla siły  $P_1$ , odcinając nie 1 lecz  $P_1$ , ewentualnie wykreślić drugą linię wpływową dla  $P_2$  (rys. 20). Układ zaś ciężarów skupionych wykreślamy na kalce,

rys. 20



kreśląc w odstępach siły pionowe i jedną linię poziomą. Wtedy możemy cyrklem dodawać rzędne linii wpływowych pierwszej lub drugiej, wedle tego, jak która siła oznaczona. Kalki tej możemy użyć dla innych położzeń układu sił, względnie dla linii wpływowych dla innych punktów.

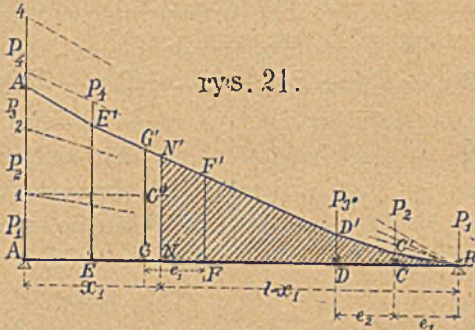
Sposób ten jest tem korzystniejszy, im trudniejsze są inne sposoby. Tu dla sił poprzecznych zazwyczaj nie oplaca się używać linii wpływowych, bo inne sposoby prowadzą prędkiej do celu.

3. Z pomocą wieloboku sznurowego sposobem Winklera. Jeżeli dana jest belka  $AB$  (rys. 21), na którą działają ciężary  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i chcemy wykreślić linię największych sił poprzecznych, wystawiamy na podporze  $A$  pionową i odcinamy na niej siły  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , mianowicie  $P_1 = 1A, P_2 = 2i, P_3 = 3z, P_4 = 4z$ , a drugą podporę  $B$  obieramy jako biegun i kreślimy promienie. Teraz ustawiamy dany układ ciężarów w ten sposób, że pierwszy ciężar stawiamy w  $B$ , przyczem dalsze ciężary działają w punktach  $C, D$  i  $E$ . W tych punktach wystawiamy pionowe i kreślimy wielobok sznurowy  $BC'D'E'A'$ . Wielobok ten sznurowy przedstawia linię oddziaływań  $O_1$  w lewej podporze, a zarazem linię najw  $Q$ , gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju. Chcąc tego twierdzenia dowieść, wyznaczymy w zwykły sposób największą siłę poprzeczną w dowolnym punkcie  $N$ , odległym od  $A$  o  $x_1$ , gdy w tym punkcie stoi pierwszy ciężar  $P_1$  (rys. 22). Ponieważ wtedy tylko trzy ciężary mieszczą się na belce, wielobok sił

wielobok sznurowy  
(zob. A-Polygon)

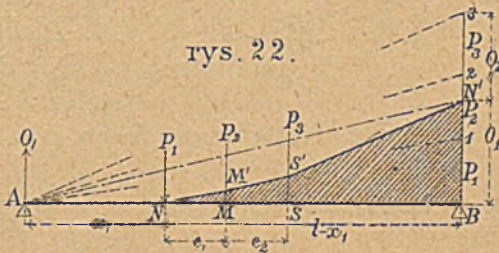


będzie 321 B, przyczem  $P_1=1B$ ,  $P_2=21$ ,  $P_3=32$ . Obieramy teraz biegun w A i kreślimy wielobok sznurowy ANM'S'N'. Zamykającą jest tu AN', a wiemy, że oddziaływanie  $O_1$  otrzymujemy, kreśląc z bieguna równoległą do zamykającej, więc tu



rys. 21.

porównaj rys. 58.



rys. 22.

AN. BN' jest zatem oddziaływaniem w A, a zarazem największą siłą poprzeczną w N, jeżeli pierwszy ciężar  $P_1$  stoi w tym punkcie. Z porównania powierzchni kreskowanych w rys. 21. i 22. widzimy, że są przystające, więc NN' (rys. 21), równe jest oddziaływaniu, a zarazem najw. sile poprzecznej w N. W ten sam sposób możemy dla każdego innego punktu belki dowieść, że rzędna między prostą AB a wielobokiem sznurowym BC'D'E'A' przedstawia najw Q w tym punkcie, gdy na przekroju stoi pierwszy ciężar.

Jeżeli chcemy dla jakiego przekroju F (rys. 21) sprawdzić, czy najw Q powstaje wtedy, gdy drugi ciężar stoi na przekroju, to wiemy, że pierwszy ciężar stoi w takim razie w G, przyczem  $GF=e_1$ , więc siła poprzeczna w punkcie F będzie:  $Q=O_1-P_1=GG'-A1=GG'-GG''=G'G''$ . Tu, jak widzimy,  $G'G'' < FN'$ , więc najw Q powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

*aby ustalić, otrzymać najw. Q należy pociągnąć prostą z bieguna A przez punkt F i przedłużyć ją do przecięcia z ostatnią lewą stroną, przez co otrzymamy otwartą rzydmo. Przy symetrycznym rozkładzie belki, możemy wielobok oddziaływań AB rozłożyć na dwa trójkąty, a minimum Q wyznaczyć we wstępnym położeniu symetrycznym to środka belki.*

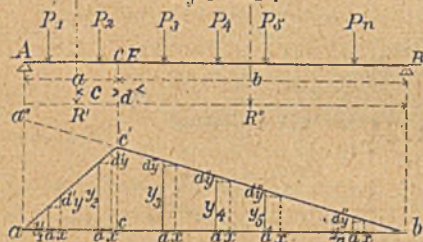
### §. 15. Najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów ze względu na momenty.

1) Powyżej w §. 11. udowodniliśmy, że linia wpływowa momentów w punkcie  $C$  ma kształt  $a'c'b$  (rys. 23).

Załóżmy, że belka  $AB$  jest obciążoną dowolnie ciężarami  $P_1, P_2 \dots P_n$ ; moment w  $C$  jest wtedy:

$$M = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots + P_n y_n = \Sigma P y.$$

rys. 23.



Jeżeli układ ciężarów przesuniemy o  $dx$  na prawo, to zmieni się moment o  $dM$  i będzie:

$$\begin{aligned} dM &= (P_1 + P_2) dy' - \\ &\quad - (P_3 + P_4 + \\ &\quad + \dots P_n) dy'' = R' dy' - \\ &\quad R'' dy'', \quad 40) \end{aligned}$$

jeżeli  $R'$  i  $R''$  oznaczają wypadkowe wszystkich ciężarów na lewo i na prawo od przekroju  $C$ .

Z rysunku widzimy, że:

$$dy' : dx = cc' : a, \quad dy' = \frac{cc'}{a} dx,$$

$$dy'' : dx = cc' : b, \quad dy'' = \frac{cc'}{b} dx.$$

Wstawiając powyższe wartości w równ. 40), otrzymujemy:

$$dM = cc' dx \left( \frac{R'}{a} - \frac{R''}{b} \right), \text{ a więc } dM > 0, \text{ gdy } \frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}. \quad 41)$$

Jeżeli więc szukamy takiego położenia układu ciężarów, któreby wywołało największy moment w  $C$ , to przesuniemy układ ciężarów na prawo, jeśli  $\frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}$ , bo wtedy  $dM > 0$ .

Jeżeli przytem nowy ciężar wejdzie na belkę, to  $\frac{R'}{a}$  będzie jeszcze większe, jeśli jeden ciężar zejdzie z belki, to  $\frac{R''}{b}$  będzie jeszcze mniejsze; a więc przy przesunięciu na prawo zyskujemy jeszcze więcej. A zatem zmiana znaku nierówności nie może nastąpić ani przez wejście, ani przez zejście jakiego

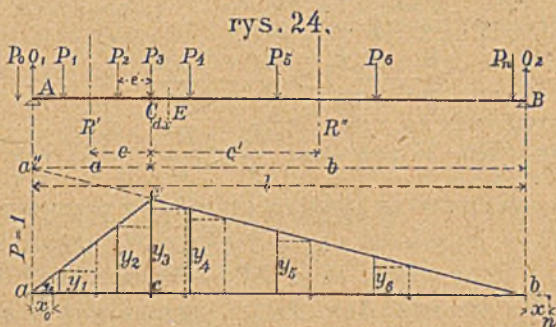
\* Największy moment będzie dla takiego położenia układu ciężarów, by ciężar jednostkowy po obu stronach przekroju  $a$  i  $b$  na  $\frac{R'}{a}$  i  $\frac{R''}{b}$  był możliwie równy, przyczem dla największości stać musi jeden ciężar na przekroju. W razie nierówności musi być układ ciężarów w tę stronę, na której  $\frac{R'}{a}$  jest większy, na której ciężar jednostkowy  $\frac{1}{a}$  jest mniejszy.

Cala Winklara

ciężaru z belki, lecz tylko przez przekroczenie ciężaru jakiego przez punkt  $C$ . Stąd wynika, że dla większości stać musi jeden ciężar na przekroju. Z kształtu linii wpływowej widzimy też, że dla większości muszą w pobliżu przekroju stać największe i najbardziej skupione ciężary, a więc n. p. dla mostów kolejowych będzie stać na przekroju dla największego momentu parowóz, a nie jaszczyk albo wóz.

To, co powyżej udowodniliśmy, podał pierwszy Winkler, ale w rzeczywistości cecha ta nie wystarcza do wyszukania najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów skupionych.

2) Załóżmy, że ciężar  $P_3$  (rys. 24) stoi na przekroju  $C$ , a właściwie o  $dx$  na prawo od przekroju, wtedy  $R' = P_1 + P_2$ ,



$R'' = P_3 + P_4 + P_5 + \dots + P_n$ . Załóżmy dalej, że  $\frac{R'}{a} < \frac{R''}{b}$ , należałoby zatem według 41) posuwać układ ciężarów na lewo.

Wystarczy tu posunięcie na lewo o  $dx$ , aby tylko  $P_3$  stanęło po lewej stronie punktu  $C$ . Załóżmy, że teraz  $\frac{R' + P_3}{a} > \frac{R'' - P_3}{b}$ , że zatem układ ciężarów należałoby przesunąć na prawo.

W takim razie musiałby układ ciężarów skupionych w tem położeniu wywołać największy moment w  $C$ . Tak jednak nie jest zawsze.

Przesuniemy bowiem układ ciężarów o  $e$  na prawo tak, aby  $P_2$  stanęło na  $C$  (na lewo o  $dx$ ) i załóżmy, że przytem ciężar  $P_0$  wchodzi na belkę, a ciężar  $P_n$  schodzi z belki, to będzie:

$$\Delta M = P_0 y_0 + R' \Delta y' - (R'' - P_n) \Delta y'' - P_n y_n.$$

Z rysunku otrzymamy:

$$y_0 = \frac{cc'x_0}{a}, \Delta y' = \frac{cc'e}{a}, \Delta y'' = \frac{cc'e}{b}, y_n = \frac{cc'(e-x_n)}{b}, \text{ wi\u0119c}$$

$$\Delta M = P_0 cc' \frac{x_0}{a} + R' cc' \frac{e}{a} - (R'' - P_n) \frac{cc'e}{b} - P_n \frac{cc'(e-x_n)}{b},$$

$$\Delta M = cc' \left( \frac{P_0 x_0}{a} + \frac{R'e}{a} - \frac{R''e}{b} + \frac{P_n x_n}{b} \right).$$

B\u0119dzie wi\u0119c:  $\Delta M > 0$ , gdy  $\frac{P_0 x_0 + R'e}{a} > \frac{R''e - P_n x_n}{b}$ , lub:

$$\frac{R' + P_0 \frac{x_0}{e}}{a} > \frac{R'' - P_n \frac{x_n}{e}}{b}, \dots \dots \dots 42)$$

co mo\u017cemy jeszcze inaczej napisa\u0107:

$$\frac{R'}{a} + \frac{P_0 x_0}{ae} > \frac{R''}{b} - \frac{P_n x_n}{be} \dots \dots \dots 43)$$

Cecha prof. Skulskiego.

Widzimy wi\u0119c, \u017ce poniewa\u017c  $\frac{R'}{a} < \frac{R''}{b}$ , wi\u0119c przy przesuni\u0119ciu uk\u0142adu ci\u0119\u017car\u00f3w na prawo wprowadzie z pocz\u0105tku moment si\u0119 zmniejsza, \u017ce jednak od chwili, gdy nowy ci\u0119\u017car  $P_0$  wchodzi na belk\u0119, a inny ci\u0119\u017car  $P_n$  z belki schodzi, \u017ce od tej chwili moment zaczyna wzrasta\u0107 tak, \u017ce po przesuni\u0119ciu o  $e$  moment b\u0119dzie wi\u0119kszy, ni\u017c poprzednio, je\u017celi zachodzi nier\u00f3wno\u015b\u0107 42). Nier\u00f3wno\u015b\u0107 42) i 43) jest t\u0105 drug\u0105 cech\u0105, kt\u00f3r\u0105 trzeba zawsze zbada\u0107, ile razy znak nier\u00f3wno\u015bci si\u0119 zmienia, aby wyznaczy\u0107 dok\u0142adnie najniekorzystniejsze po\u0142o\u017cenie.

Z nier\u00f3wno\u015bci 42) widzimy, \u017ce w\u0142yw ci\u0119\u017car\u00f3w  $P_0$  i  $P_n$  jest tem wi\u0119kszy, im wi\u0119ksze s\u0105 stosunki  $\frac{x_0}{e}$  i  $\frac{x_n}{e}$ , im bli\u017cej podp\u00f3r wi\u0119c si\u0142y  $P_0$  i  $P_n$  by\u0142y przed przesuni\u0119ciem. W\u0142yw ten jest te\u017c po tej stronie przekroju wi\u0119kszy, kt\u00f3ra jest mniejsz\u0105, wi\u0119c gdy  $a < b$ , to w\u0142yw  $P_0 \frac{x_0}{e}$  jest wi\u0119kszy, ni\u017c w\u0142yw w\u0142yw  $P_n \frac{x_n}{e}$ . W\u0142yw ci\u0119\u017car\u00f3w  $P_0$  i  $P_n$  jest wreszcie tem wi\u0119kszy, im wi\u0119ksze s\u0105 te si\u0142y, a im mniejsze wypadkowe  $R'$  i  $R''$ .

Musimy tu jeszcze doda\u0107, \u017ce te same cechy dadz\u0105 si\u0119 zast\u0119sowa\u0107 wsz\u0119dzie tam, gdzie linie w\u0142ywowe maj\u0105 ten sam ksza\u0142t, co dla moment\u00f3w belki prostej, zatem ksza\u0142t tr\u00f3jk\u0105ta z pods'aw\u0105 w osi.

*Przykład 99.* Dla bliźszego wyjaśnienia niech posłuży następny przykład. Chodzi o wyznaczenie najniekorzystniejszego położenia pociągu normalnego rosyjskiego (§. 7.) dla momentu w punkcie  $C$  (rys. 25).

Jeżeli postawimy ciężar 1' na  $C$  i wyobrazimy go sobie jako oddalony o  $dx$  na prawo od punktu  $C$ , to  $\frac{12,5}{2,561} > \frac{102,71}{23,049}$ , więc pociąg trzeba posunąć na prawo, aż ciężar 2' stanie na przekroju.

Wtedy wejdzie ciężar 3' na belkę, a  $\frac{R'}{a}$  będzie jeszcze większe (rys.

26). Wtedy będzie  $\frac{25}{2,561} > \frac{102,71}{23,049}$ . Musimy więc posunąć dalej pociąg na prawo, a mianowicie o tyle, aby 2' było po prawej stronie punktu  $C$ . Wtedy jest:  $\frac{12,5}{2,561} < \frac{115,2}{23,049}$ .

Tu zmienia się znak nierówności i według cechy Winklera powinienby ciężar 2' wywoływać największy moment, znajdując się na przekroju  $C$ . To się jednak w tym wypadku nie sprawdza, jakto możemy się łatwo o tem przekonać, badając drugą cechę (rów. 43)

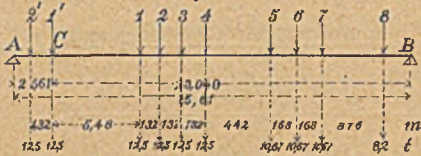
Przesuniemy mianowicie pociąg jeszcze o 1,32 m na prawo tak, aby ciężar 3' stanął na przekroju  $C$ , to wtedy wchodzi nowy ciężar 4' (rys. 27) na belkę, a ciężar 8 schodzi z belki. Wtedy jest:  $P_0=12,5 t, x_0=1,241 m, P_n=8,2 t, x_n=0,749 m$ , a więc:

$$\frac{12,5}{2,561} + \frac{12,5 \cdot 1,241}{1,32 \cdot 2,501} > \frac{115,2}{23,049} - \frac{8,2 \cdot 0,749}{23,049 \cdot 2,561}$$

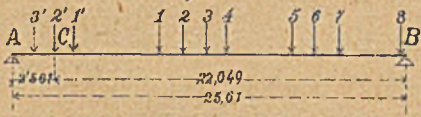
Przy przesunięciu na prawo o 1,32 m zyskujemy więc i moment staje się większym.

Gdy ciężar 3' przekracza punkt  $C$ , to  $\frac{12,5}{2,561} < \frac{119,5}{23,049}$ . Musimy więc jeszcze zbadać drugą cechę. Ale przez posunięcie pociągu o 1,32 m na prawo nie wchodzi żaden nowy ciężar na belkę i nie schodzi żaden ciężar z belki, więc:  $P_0 = P_n = 0$ , a druga cecha staje się równa pierwszej.

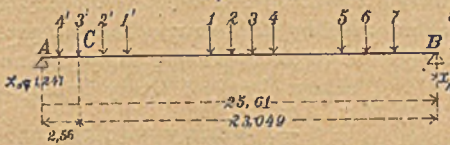
rys. 25.



rys. 26



rys. 27



A więc najniekorzystniejsze położenie pociągu dla momentu w  $C$  jest, gdy ciężar  $3'$  stoi w  $C$  i w istocie jest wtedy moment  $M=175,7 tm$ , gdy przeciwnie, gdy koło  $2'$  stoi na  $C$ , moment jest mniejszy, mianowicie:  $M=161,6 tm$ .

### §. 16. Wyznaczenie największych momentów.

a) Liczebnie zwykłym sposobem. Dla najniekorzystniejszego położenia, które według poprzedniego paragrafu wyznaczyliśmy, liczymy momenty według zasad, wyłożonych w statyce budowli \*). Dla większych rozpiętości wystarczy podzielić połowę rozpiętości na 5 lub 10 części i dla tych punktów wyznaczyć *najw.* momenty. Te punkty łączymy linią krzywą. Linia ta największych momentów jest obwiednią poszczególnych parabol, przecinających się w punktach, dla których siła jaka przybywa na belkę lub też ubywa. Dla pewnego bowiem położenia układu ciężarów, sprawiającego *najw.* moment w danym punkcie  $C$  (rys. 24) jest

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= O_1 a - R'c = \frac{R'(b+c) + R''(b-c)}{l} a - R'c = \\ &= \frac{(R' + R'') a (l-a)}{l} - \frac{c R'(l-a) + R'' a c}{l} \end{aligned}$$

Dla punktu  $E$  odległego o  $dx$  posunie się tylko cały układ o  $dx$  na prawo, więc *najw*  $M$  zmieni się jako funkcya zmiennej  $a$ . Z równania tego widzimy, że *najw*  $M$  zmieniać się będzie wedle paraboli, dopóki te same ciężary stać będą na belce.

**Przykład.** Dla belki o rozpiętości  $7m$  mamy wyznaczyć *najw.* moment w punkcie  $C$  (rys. 28.), dla którego  $x=2m$ , jeżeli belka jest obciążona parowozem normalnym austriackim. Jeżeliby stało drugie koło na przekroju

$C$  (o  $dx$  na prawo), to byłyby na belce cztery ciężary i wtedy byłoby:

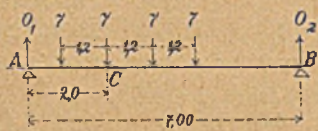
$\frac{7}{2} < \frac{21}{5}$ . Musimy więc posunąć parowóz na lewo, aż drugie koło stanie o

$dx$  na lewo od  $C$ . Wtedy  $\frac{14}{2} > \frac{14}{5}$ , więc

powinniśmy przesunąć parowóz na prawo. Gdy więc, przez przesunięcie

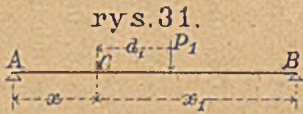
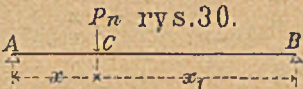
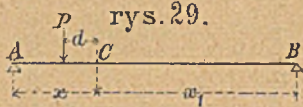
układu ciężarów ani na prawo, ani na lewo nie otrzymujemy większego momentu, zatem to położenie jest najniekorzystniejsze. Dla tego położenia mamy:  $O_1 = \frac{1}{4}(4 \cdot 7(7,0 - 2 \cdot 6)) = 17,6 t$ , więc *najw*  $M = 17,6 \cdot 2 - 7 \cdot 1,2 = 26,8 tm$

rys. 28.



\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd., str. 19.

b) Liczebnie za pomocą tablicy momentów Zimmermanna. Siła  $P$  może być w trójkiem położeniu pod względem danego punktu  $C$  belki  $AB$  (rys. 29); może działać



na lewo od  $C$ , w  $C$  (rys. 30) lub na prawo od  $C$  (rys. 31). Moment w  $C$  mamy w pierwszym wypadku:

$$1.) M = P \frac{d+x_1}{l} x - Pd = \frac{Pxx_1}{l} + \frac{P(l-x)d}{l} = \frac{Pxx_1}{l} + \frac{Px_1d}{l} \quad 44)$$

A jeżeli więcej takich sił działa na lewo od  $C$ ,

$$\Sigma M = \Sigma P \frac{xx_1}{l} - \Sigma Pd \frac{x_1}{l} \quad 45)$$

$$2.) \text{ Dla } d=0 \text{ jest } M_n = \frac{P_n xx_1}{l} \quad 46)$$

3.) Dla trzeciego wypadku jest:

$$M_1 = \frac{P_1(x_1 - d_1)}{l} x = \frac{P_1 xx_1}{l} - \frac{P_1 d_1 x}{l} \quad 47)$$

$$\text{więc } \Sigma M_1 = \Sigma P_1 \frac{xx_1}{l} - \Sigma P_1 d_1 \frac{x}{l} \quad 48)$$

Jeżeli belka obciążona jest równocześnie ciężarami  $\Sigma P$ ,  $P_n$  i  $\Sigma P_1$ , to będzie:

$$M_x = \frac{xx_1[\Sigma P + P_n + \Sigma P_1] - [\Sigma Pd]x_1 - [\Sigma P_1 d_1]x}{1} \quad 49)$$

Jeżeli  $l=na$ ,  $x=ma$ ,  $x_1=(n-m)a$ , to:

$$M_x = \frac{am(n-m)[\Sigma P + P_n + \Sigma P_1] - (\Sigma Pd)(n-m) - [\Sigma P_1 d_1]m}{n} \quad 50)$$

Otóż ułożywszy tablicę, w której dla danego pociągu podane są:  $\Sigma P$ ,  $\Sigma P_1$ ,  $\Sigma Pd$  i  $\Sigma P_1 d_1$ , możemy bardzo prędko dla każdego położenia wyznaczyć moment.

Na następnej stronie podajemy tabliczkę dla pociągu złożonego z dwu normalnych parowozów austriackich i jednego wozu, w której uwidoczniliśmy ilości  $d$ ,  $d_1$ ,  $\Sigma P$ ,  $\Sigma P_1$ ,  $\Sigma Pd$  i  $\Sigma P_1 d_1$  dla trzech pierwszych osi drugiego parowozu.

## Tabelle momentów Zimmermanna

Tablicy momentów możemy użyć też do wyznaczenia sił poprzecznych. Gdy bowiem siła  $P$  działa na lewo od  $C$  (rys. 29) to siła poprzeczna w  $C$

	13	13	13	13	10	10	10	13	13	13	13	10	10	10	8	8	
$d$	15,6	14,4	13,2	12,0	7,5	6,0	4,5	*	1,2	2,4	3,6	8,1	9,6	11,1	14,7	17,7	$d_1$
$\Sigma P$	82	69	56	43	30	20	10	*	13	26	39	49	59	69	77	85	$\Sigma P_1$
$\Sigma Pd$	897,6	694,8	507,6	336	180	105	45	*	15,6	46,8	93,6	174,6	270,6	381,6	499,2	640,8	$\Sigma P_1 d_1$
$d$	16,8	15,6	14,4	13,2	8,7	7,2	5,7	1,2	*	1,2	2,4	6,9	8,4	9,9	13,5	16,5	$d_1$
$\Sigma P$	95	82	69	56	43	33	23	13	*	13	26	36	46	56	64	72	$\Sigma P_1$
$\Sigma Pd$	1011,6	793,2	590,4	403,2	231,6	144,6	72,6	15,6	*	15,6	46,8	115,8	199,8	298,8	406,8	538,8	$\Sigma P_1 d_1$
$d$	18,0	16,8	15,6	14,4	9,9	8,4	6,9	2,4	1,2	*	1,2	5,7	7,2	8,7	12,3	15,3	$d_1$
$\Sigma P$	108	95	82	69	56	46	36	26	13	*	13	23	33	43	51	59	$\Sigma P_1$
$\Sigma Pd$	1141,2	907,2	688,8	486	298,8	199,8	115,8	46,8	15,6	*	15,6	72,6	144,6	231,6	330	452,4	$\Sigma P_1 d_1$

Jeżeli mamy n. p. wyznaczyć dla belki o rozpiętości 20 m najw. moment w środku belki, to stawiając 1 koło na środek belki, otrzymamy:

$$M = \frac{1}{10}(10 \cdot 10(30 + 13 + 59) - 180 \cdot 10 - 270,6 \cdot 10) = 284,7 \text{ tm.}$$

Postawiwszy drugie koło na środku belki. otrzymamy:

$$M = \frac{1}{10}(10 \cdot 10(43 + 13 + 56) - 231,6 \cdot 10 - 298,8 \cdot 10) = 294,8 \text{ tm.}$$

A wreszcie, gdy trzecie koło będzie stało na środku belki, będziemy mieli:

$$M = \frac{1}{10}(10 \cdot 10(56 + 13 + 43) - 298,8 \cdot 10 - 231,6 \cdot 10) = 294,8 \text{ tm.}$$

W tym wypadku więc największy moment powstaje, gdy drugie lub trzecie koło parowozu stoi na środku belki, gdyż momenty są przypadkowo w tych wypadkach równe i wynoszą 294,8 tm.



$$Q = \frac{P(d+x_1)}{l} - P = \frac{Pd}{l} - \frac{Px}{l}, \text{ a dla wi\u0119cej si\u0142}$$

$$\Sigma Q = \frac{1}{l} [\Sigma Pd - \Sigma Px] \dots \dots \dots 51)$$

Gdy si\u0142a  $P_n$  stoi na  $C$  (rys. 30), to si\u0142a poprzeczna w  $C$  jest, je\u017celi  $P_n$  oddalone od  $dx$  na prawo od  $C$ ,  $Q_n = \frac{P_n x_1}{l}$ , . . . 52)

"  $P_n$  " " " " lewo "  $C$ ,  $Q_n = -\frac{P_n x}{l}$  . . . 53)

Je\u017celi si\u0142a  $P_1$  dzia\u0142a na prawo od  $C$ , (rys. 31.), to si\u0142a poprzeczna w  $C$  jest  $Q_1 = \frac{P_1(x_1 - d_1)}{l}$ , a dla wi\u0119cej si\u0142

$$\Sigma Q_1 = \frac{1}{l} (\Sigma P_1 x_1 - \Sigma P_1 d_1) \dots \dots \dots 54)$$

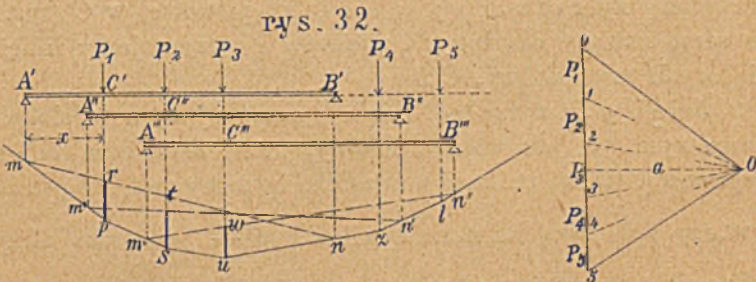
Aby otrzyma\u0107 *najw* (+ $Q$ ), obci\u0105zamy praw\u0105 stron\u0119 belki, wtedy *najw* (+ $Q$ ) =  $\frac{1}{l} [x_1(\Sigma P_1 + P_n) - \Sigma P_1 d_1]$ , . . . . . 55)

a przy obci\u0105zeniu lewej strony belki

$$\textit{najw} (-Q) = -\frac{1}{l} [x(\Sigma P + P_n) - \Sigma Pd] \dots \dots \dots 56)$$

c) Zapomoc\u0105 linii w\u0142ywowych przez dodawanie rz\u0119dnych w ten sam spos\u00f3b, co dla si\u0142 poprzecznych (§. 14).

d) Zapomoc\u0105 wieloboku sznurowego. Maj\u0105c dany uk\u0142ad ci\u0119\u017car\u00f3w skupionych  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  (rys. 32.), kre\u015blimy wielobok si\u0142, obieramy biegun  $O$  i wykre\u015blamy wielobok

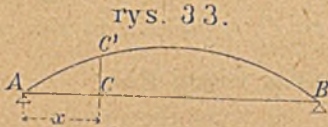


sznurowy *psu\u017cl*. Wykre\u015blili\u015my tu wielobok sznurowy, nie oznaczywszy jeszcze po\u0142o\u017czenia belki, a to dla tego, aby, mo\u017cna u\u017cy\u0107 tego samego wieloboku sznurowego dla rozmaitych po\u0142o-

zeń układu ciężarów. Zamiast bowiem posuwać układ ciężarów po belce, możemy układ ciężarów, a więc i wielobok sznurowy, zostawić na miejscu, a belkę przesuwać; położenie względne układu ciężarów i belki będzie w obu razach takie samo.

Załóżmy n. p., że mając daną belkę  $AB$  (rys. 33.), chcemy wyznaczyć *najw*  $M$  dla punktu  $C$ . Nie wiemy dokładnie, który ciężar ma stać na  $C$  dla największości, wiemy jednak, że w po-

bliżu  $C$  mają stać największe i najbardziej skupione ciężary i że cała belka ma być obciążona; będzie więc stał na  $C$  ciężar  $P_1, P_2$  lub  $P_3$ . Załóżmy najpierw, że pierwszy ciężar  $P_1$  stoi na  $C$ . Na dowolnej



linii poziomej (rys. 32.) odcinamy od pionowej przez  $P_1$   $A'C'=AC$  i  $C'B'=CB$ . Teraz więc podpory są w  $A'$  i  $B'$ , gdy ciężar  $P_1$  stoi w  $C'$ , kreślimy zatem przez  $A'$  i  $B'$  pionowe,  $mn$  będzie zamykającą, więc moment w  $C$  będzie *pr*. Teraz próbujemy, czy drugi ciężar  $P_2$ , stojąc na przekroju  $C$ , nie wywoła większego momentu, przyczem postępujemy w ten sam sposób. Robimy  $A''C''=AC$ ,  $C''B''=CB$ , kreślimy przez  $A''$  i  $B''$  pionowe i łączymy punkty  $m'$  i  $n'$  przecięcia się tych pionowych z wielobokiem sznurowym. W ten sposób wyznaczamy moment w tym wypadku dla przekroju  $C$  równy *st*. To samo powtarzamy jeszcze dla wypadku, gdy  $P_3$  stoi na  $C$  i otrzymujemy moment *uw*; która z tych trzech długości jest największa, tę zatrzymujemy i oznaczamy ją  $ja = CC'$  na pionowej w  $C$  (rys. 33.). To samo robimy dla innych punktów i otrzymujemy linię największych momentów  $AC'B$ .

Jeżeli  $y$  jest rzędną między zamykającą a wielobokiem sznurowym, to, jak wiemy,  $M=ay$ , jeżeli  $a$  oznacza odległość biegunową. Chcąc uniknąć mnożenia, możemy zmienić podziałkę, a wtedy jednostką momentów musi być  $\frac{1}{a}$  jednostki długości. Jednostka długości ma więc wartość  $a$  jednostek momentów, przyczem  $a$  należy odczytać w podziałce sił.

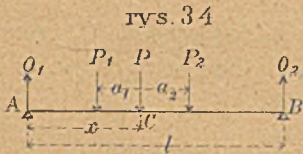
Przykład. Jeżeli podziałka sił jest  $\frac{1\text{ mm}}{1\text{ t}}$  (rys. 32.), a podziałka długości  $\frac{1\text{ mm}}{0,2\text{ m}}$ , odległość zaś biegunowa, wyrażona w podziałce sił  $a=20\text{ t}$ , to po-

działka momentów jest  $\frac{1 \text{ mm}}{20 \cdot 10^6 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ tm}}$ . Wedle tej podziałki wynosi *pr* 21 *tm*. Liczebnie otrzymaliśmy powyżej w tym wypadku 20,52 *tm*, a więc ze względu na małą podziałkę wynik wykreślony możemy uważać jako zgodny z liczebnym.

### §. 17. Bezwzględnie największy moment.

Chcąc wyznaczyć, jak wielki i w jakim punkcie będzie bezwzględnie największy moment, wiemy przedewszystkiem, że na tym przekroju musi stać jeden ciężar.

Wyznamy *najw.* moment w przekroju *C*, odległym od lewej podpory o *x* (rys. 34.). Załóżmy, że wtedy *P* stoi na przekroju, a wypadkowa ciężarów na długości *AC* jest *P*<sub>1</sub>, a na długości *CB* *P*<sub>2</sub>, wtedy



$$O_1 l = P(l - x) + P_1(l - x + a_1) + P_2(l - x - a_2), \text{ a } M = O_1 x + - P_1 a_1, \text{ więc } Ml = O_1 l x - P_1 l a_1 = = P(l - x)x + P_1(l - x + a_1)x + P_2(l - x - a_2)x - P_1 a_1 l.$$

Jeżeli *M* ma być największe, to musimy zrobić  $\frac{dM}{dx} = 0$ .

Więc  $l \frac{dM}{dx} = Pl - 2Px + P_1 l - 2P_1 x + P_1 a_1 + P_2 l - 2P_2 x + -P_2 a_2 = 0,$

a stąd  $x = \frac{(P + P_1 + P_2)l + (P_1 a_1 - P_2 a_2)}{2(P + P_1 + P_2)},$  czyli

$$x = \frac{l}{2} + \frac{P_1 a_1 - P_2 a_2}{2(P + P_1 + P_2)} \dots \dots \dots 57)$$

Wstawmy wartość za *x* w równanie dla *M*, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{4}(P + P_1 + P_2)l - \frac{1}{2}(P_1 a_1 + P_2 a_2) + \\ &+ \frac{(P_1 a_1 - P_2 a_2)^2}{4(P + P_1 + P_2)l} \dots \dots \dots 58) \end{aligned}$$

Założmy, że obliczyliśmy z rów. 57) *x* i że w *C* (rys. 35.) jest bezwzględnie *najw.* moment. Złożmy teraz siły *P*, *P*<sub>1</sub> i *P*<sub>2</sub> w wypadkową *R*, a odległość jej od punktu *C* niechaj będzie *r* (dodatnie, jeżeli po prawej stronie punktu *C*), to  $R = P + P_1 + + P_2,$  a biorąc równanie momentów ze względu na punkt *C*,  $Rr = P_2 a_2 - P_1 a_1.$

Wstawmy to w rów. 57), a otrzymamy  $x = \frac{l}{2} - \frac{Rr}{2R}$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{r}{2} = \frac{1}{2}(l - r) \dots \dots \dots 59)$$

Niechaj punkt  $E$  będzie środkiem belki, to  $AE = \frac{l}{2}$ . Da-

lej nazwijmy  $CE = d$ , to

$$d = \frac{l}{2} - x.$$

Podstawivszy za  $x$  wartość z 59), otrzymamy  $d = \frac{l}{2} + \frac{r}{2} - \frac{l}{2}$ ,

$$\text{zatem } d = \frac{r}{2} \dots \dots \dots 60)$$

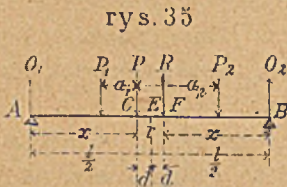
A zatem środek belki  $E$  jest równo oddalony od  $C$ , punktu zaczepienia siły  $P$  i od wypadkowej, połowi długość  $r$ , a stąd także  $FB = AC = x$ .

Dalej mamy oddziaływanie  $O_1 = \frac{Rx}{l}$ , a moment w punkcie  $C$ :

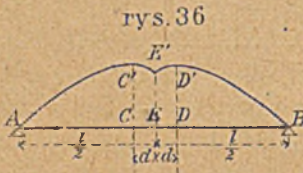
$$\text{najw } M = \frac{Rx^2}{l} - P_1 a_1 \dots \dots \dots 61)$$

Widzimy więc, że *najw*  $M$  nie będzie w środku belki, lecz w punkcie  $C$  w odstępie  $d$  od środka (rys. 36). Jeżeli układ ciężarów skupionych wchodzi na belkę z drugiej strony, to otrzymamy takie samo *najw*  $M$  w punkcie  $D$ , który leży symetrycznie do  $C$  po drugiej stronie środka belki  $E$ . W środku belki będzie zatem moment nieco mniejszy. Tylko, gdy  $P_1 a_1 = P_2 a_2$ , a więc zawsze, gdy obciążenie jest ze względu na  $E$  symetryczne,  $x = \frac{l}{2}$ , więc moment jest największy w środku belki.

Ponieważ punkt  $E$  połowi długość  $r$  (rys. 35.), więc na tem polega następująca konstrukcyja. Jeżeli dla danego układu ciężarów, które się na belce mieszczą, wykreślimy wielobok sznurowy i skrajne boki przedłużymy, to przez ich punkt przecięcia się przechodzi wypadkowa (rys. 37). Jeżeli społowiliśmy



rys. 35

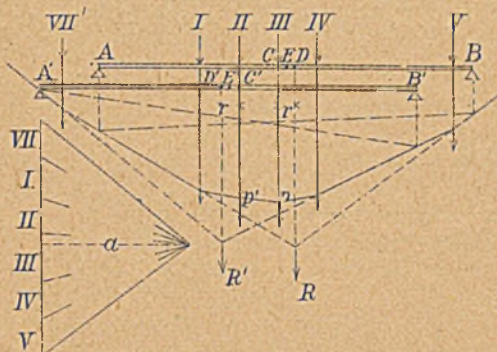


rys. 36

\* *Azobem:* Środek belki leży w półrodku między przekrojem nieobciążonym, w którym moment staje się zerowym, a punktem zaczepienia wypadkowej wszystkich ciężarów działających na belkę.

długość  $CD=r$ , to środek belki będzie w  $E$ , punkt  $C$  zaś nazywamy ze względu na punkt zaczepienia wypadkowej  $D$  przekrojem symetrycznym (n. *Symmetriequerschnitt*) punktu  $C$ .

rys. 37.



Konstrukcyę tę podał pierwszy Culmann (1866).

Twierdzenie Culmanna da się słowami tak wyrazić: Moment staje się największym przy pewnym ciężarze, gdy ten ciężar i wypadkowa wszy-

stkich ciężarów są od środka belki równo oddalone. Nie wiemy jednak jeszcze, który z ciężarów należy postawić na przekroju symetrycznym punktu  $D$ . Zwykle największy moment powstaje pod ciężarem najbliższym punktu  $D$ , jednak nie zawsze. Jeżeli zachodzi wątpliwość, trzeba dla kilku najbliższych ciężarów spróbować, czy nie otrzymamy większego momentu. Zresztą ta konstrukcyja jest tak długo ważną, jak długo ciężary te same znajdują się na belce. Jeżeli chcemy się przekonać, jak wielki może wywołać *najw.* moment inna grupa ciężarów (VII', I, II, III, IV), to musimy dla niej tę samą konstrukcyę powtórzyć, a wtedy zobaczymy, który moment będzie większym.

**Przykłady,** 1. Belka o rozpiętości 12 m niech będzie obciążona pociągiem, złożonym z dwu parowozów czteroosiowych kolei Czerniowieckiej, którego część przedstawiliśmy na rys. 38. Największy moment będzie około środka, gdzie mamy umieścić największe ciężary, a więc I, II, III, IV; na przekroju stanie prawdopodobnie największy ciężar III. Wtedy zmieszczą się na belce siły I, II, III, IV, V. Wypadkowa tych sił  $R$  jest odległa od III o

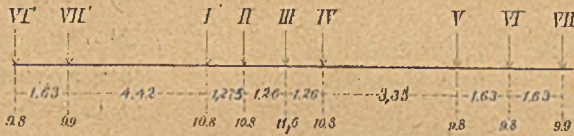
$$r = \frac{4,61 \cdot 9,8 + 1,26 \cdot 10,8 - 1,26 \cdot 10,8 - 2,535 \cdot 10,8}{3 \cdot 10,8 + 11,6 + 9,8} = \frac{17,71}{53,8} = 0,33 \text{ m,}$$

\*) Šolin (Mittheil. des Arch. u. Ing. V. in Böhmen 1877.) podaje wprawdzie znamię, aby poznać, czy siła  $P$ , czy też sąsiednie siły  $P'$  i  $P''$ , oddalone od  $P$  o  $e'$  i  $e''$  wywołują bezwzględną największość. Otrzymuje on, że *najw*  $M$  wywołuje  $P$ , jeżeli  $\frac{P'}{x - \frac{1}{2}e'} < \frac{P}{l} > \frac{P''}{l - x - \frac{1}{2}e''}$ . Ale próbowaniem równie prędko znajdziemy bezwzględnie *najw*  $M$ .

$$\text{więc } x = \frac{12 - 0,33}{2} = 5,83 \text{ m}, \quad l - x = 6,17 \text{ m}.$$

Dla tego  $x$  właśnie tych 5 ciężarów stać będzie na belce. Jeżeli III będzie stać o  $dx$  na lewo od punktu  $C$ , to  $\frac{33,2}{5,83} > \frac{20,6}{6,17}$ . Jeżeli III stoi o  $dx$  na prawo od  $C$ , to  $\frac{21,6}{5,83} < \frac{32,2}{6,17}$ , więc, gdy III stoi w  $C$ , moment jest największy.

rys. 38



Możliwymby było chyba jeszcze, że *najw.* moment powstaje pod II, wtedy zmieściłyby się na belce ciężary VII' I, II, III, IV. Wypadkowa tych sił jest odległa od II o

$$r = \frac{2,52 \cdot 10,8 + 1,26 \cdot 11,6 - 1,275 \cdot 10,8 - 5,695 \cdot 9,9}{3 \cdot 10,8 + 11,6 + 9,9} = -\frac{28,33}{53,9} = -0,53 \text{ m}, \text{ więc } x = \frac{12 + 0,53}{2} = 6,26 \text{ m}, \quad l - x = 5,74 \text{ m}.$$

Gdy na tym punkcie  $C'$  stoi ciężar II, mieszczą się jeszcze na belce ciężary VII', I, III i IV. Jeżeli II stoi o  $dx$  na lewo od  $C'$ , to  $\frac{31,5}{62,6} > \frac{22,4}{5,74}$ . Gdy II stoi o  $dx$  na prawo od  $C'$ , to  $\frac{20,7}{6,26} < \frac{33,2}{5,74}$ , zatem największy moment jest w  $C'$ , gdy II stoi na przekroju.

W pierwszym wypadku w punkcie  $C$  jest *najw.*  $M = \frac{53,8 \cdot 5,83^2}{12} + -2 \cdot 10,8 \cdot 1,897 = 111,4 \text{ tm}$ ; w drugim wypadku w punkcie  $C'$  jest *najw.*  $M = \frac{53,9 \cdot 6,26^2}{12} - 9,9 \cdot 5,695 - 10,8 \cdot 1,275 = 105,87 \text{ tm}$ . Więc bezwzględnie największy moment powstaje w  $C$  dla  $x = 5,83 \text{ m}$ .

2. Wyznaczyć należy największy moment, jaki sprawia parowóz normalny austriacki na belkę o rozpiętości 3 m.

Możliwe są dwa wypadki, albo na belce znajdują się trzy koła albo dwa koła. Jeżeli na belce znajdują się trzy koła (rys. 39), to ze względu na symetrię największy moment będzie w środku belki. Wtedy

$$O_1 = O_2 = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ t}, \text{ a moment w } C \text{ najw } M = 10,5 \cdot 1,5 - 7 \cdot 1,2 = 7,35 \text{ tm}.$$

Jeżeli na belce znajdują się dwa koła (rys. 40), to wypadkowa  $R = 14 \text{ t}$  leży w oddaleniu  $\frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ m}$  od  $C$ , a środek belki w odstępnie  $\frac{0,6}{2} = 0,3 \text{ m}$ , więc  $CE = 0,3$ ,  $AC = 1,2 \text{ m}$ ,  $DB = 3 - 1,2 - 1,2 = 0,6 \text{ m}$ . Stąd

$$O_1 = \frac{14 \cdot (1,5 - 0,3)}{3} = 5,6 t, \text{ a w } C \text{ najw } M = 5,6 \cdot 1,2 = 6,72 tm.$$

Tu większy więc jest największy moment dla 3 kół.

Jeżeli uwzględnimy, że na belkę obok ciężaru ruchomego działa także ciężar własny, który dla jednostajnego obciążenia wywołuje najw. moment w środku rozpiętości, to punkt, dla którego

moment sumaryczny jest największy, przysuwa się nieco do środka, chociaż nie wiele.

Mamy wtedy dla oddziaływania  $O_1$  (rys. 41)

$$O_1 l = P(l-x) + P_1(l-x+a_1) + P_2(l-x-a_2) + \frac{gl^2}{2},$$

zatem

$$Ml = O_1 lx - P_1 la_1 - \frac{gx^2 l}{2} = P(l-x)x + P_1(l-x+a_1)x +$$

$$+ P_2(l-x-a_2)x + \frac{gl^2 x}{2} - \frac{gx^2 l}{2} - P_1 la_1,$$

$$Ml = P(l-x)x + P_1(l-x+a_1)x + P_2(l-x-a_2)x - P_1 a_1 l + \frac{gx l}{2}(l-x).$$

Jeżeli  $M$  ma być największe, to musimy zrobić

$$\frac{dM}{dx} = 0, \text{ więc}$$

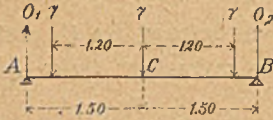
$$\begin{aligned} l \frac{dM}{dx} = 0 &= Pl - 2Px + \\ &+ P_1 l - 2P_1 x + P_1 a_1 + \\ &+ P_2 l - 2P_2 x + \\ &- P_2 a_2 + \frac{gl}{2}(l-2x) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{zatem } x = \frac{(P+P_1+P_2)l + (P_1 a_1 - P_2 a_2) + \frac{1}{2} gl^2}{2(P+P_1+P_2) + gl} \dots 62)$$

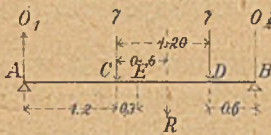
To możemy inaczej napisać

$$x = \frac{Rl - Rr + \frac{1}{2} gl^2}{2R + gl} = \frac{l - r + \frac{gl^2}{2R}}{2 + \frac{gl}{R}} \dots 63)$$

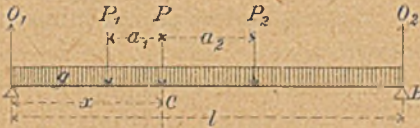
rys. 39



rys. 40



rys. 41.



Jeżeli  $d = \frac{l}{2} - x$ , to

$$d = \frac{l}{2} - \frac{l - r + \frac{gl^2}{2R}}{2 + \frac{gl}{R}} = \frac{r}{2 + \frac{gl}{R}} \dots \dots \dots 64)$$

Widzimy więc, że tu jest  $d < \frac{r}{2}$ . Różnica jest zwykle tak mała, że wystarczy jeżeli *najw*  $M_p$  obliczymy dla  $C$ , a *najw*  $M_r$  dla  $E$  i ilości te dodamy, wtedy otrzymamy *najw*  $M_q$ , nieco większe, niż w rzeczywistości.

**§. 18. Największe momenty dla zmiennych rozpiętości.**

Jeżeli dla jakiejś kolei lub drogi obliczamy więcej mostów na podstawie danego układu ciężarów skupionych, a chodzi nam o bezwzględnie największe momenty dla rozmaitych rozpiętości, to dadzą się według Empergera ustawić wzory, za pomocą których da się obliczyć *najw*  $M$  dla zmiennej rozpiętości.

α) Dla bardzo małych rozpiętości sprawia bezwzględnie największy moment jedno koło w środku belki, wtedy

$$M = \frac{Pl}{4}, \dots \dots \dots 65)$$

więc dla zmiennej  $l$  jestto równanie linii prostej  $Oa$  (rys. 42).

β) Jeżeli dwa koła mieszczą się na belce, to może być moment największy dla jednego koła lub dla obciążenia dwoma kołami. Tu musimy próbować. Według twierdzenia Culmanna środek belki  $E$  musi wtedy połowić odstęp siły  $P_1$  od wypadkowej  $R$ . Mamy wtedy, gdy  $O_1$  oznacza oddziaływanie w lewej podporze:

$$M = O_1 x = \frac{Rx}{l} x = \frac{Rx^2}{l}, \dots \dots \dots 66)$$

co zgadza się z rów. 61), przyczem według 59)  $x = \frac{l-r}{2}$ , zatem

$$\text{najw } M = \frac{Rl}{4} - \frac{Rr}{2} + \frac{Rr^2}{4l} = \frac{R}{4} \left( l - 2r + \frac{r^2}{l} \right) \dots \dots 67)$$

Jestto dla zmiennej  $l$  równanie hyperboli, bardzo zresztą płaskiej, której część  $ab$  zatrzymujemy.



Jeżeli  $P_1 = P_2$ , a odstęp sił wynosi  $a$ , to  $r = \frac{a}{2}$ , wtedy

$$\text{najw } M = \frac{R}{4} \left( l - a + \frac{a^2}{4l} \right) \dots \dots \dots 68)$$

c.) Jeżeli trzy koła stoją na belce, to zwykle wypadkowa  $R$  wpada na koło średnie, wtedy największy moment jest w środku i otrzymamy

$$O_1 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2} = \frac{R}{2}, \text{ a}$$

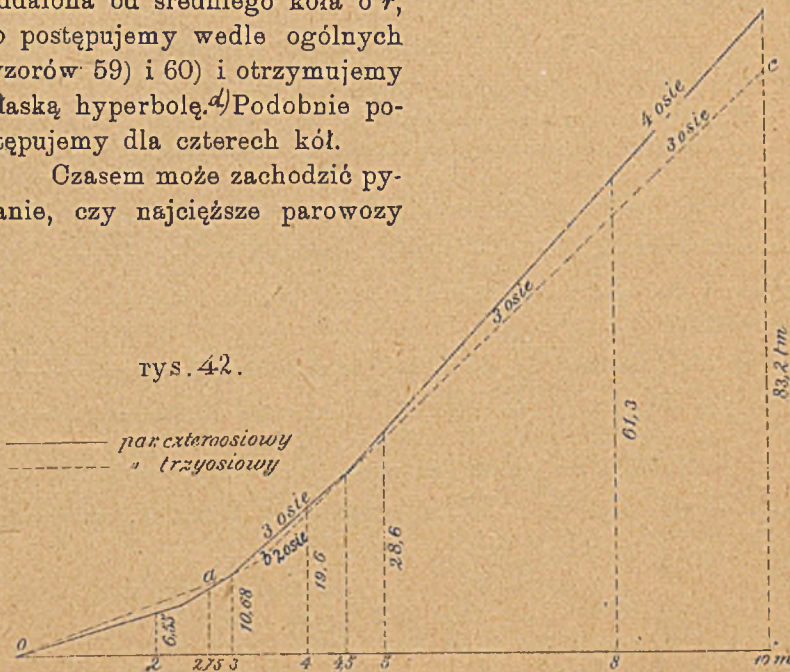
$$\text{najw } M = \frac{R}{2} \cdot \frac{l}{2} - P_1 a_1 = \frac{Rl}{4} - P_1 a_1 \dots \dots \dots 69)$$

Dla zmiennej  $l$  jest to równanie linii prostej  $bc$ .

Jeżeli wypadkowa  $R$  jest oddalona od średniego koła o  $r$ , to postępujemy wedle ogólnych wzorów 59) i 60) i otrzymujemy płaską hyperbole.<sup>d)</sup> Podobnie postępujemy dla czterech kół.

Czasem może zachodzić pytanie, czy najcięższe parowozy

rys. 42.



3-osiowe, czy też 4-osiowe wywołują największe momenty. Najlepiej wykreślić wtedy linie największych momentów dla obu parowozów i na podstawie takiego rysunku możemy dla każdej

rozpiętości (niżej 10 m) od razu powiedzieć, który parowóz sprawia największy moment i jak wielki jest ten moment.

*Przykład* Jako przykład wykreśliśmy powyższe linie największych momentów dla najcięższych trzyosiowych i czteroosiowych parowozów kolei Lwowsko-Czerniowieckiej w następujący sposób:

I. Parowóz trzyosiowy.

a) Jeżeli jedna oś znajduje się na moście, to według wzoru 65)

$$M = \frac{13,1l}{4} = 3,275 l \text{ tm, zatem dla } l=1 \text{ jest } M=3,175 \text{ tm, dla } l=3 \text{ } M=9,825 \text{ tm.}$$

b) Gdy 2 osie znajdują się na moście, wtedy  $a = 1,58 \text{ m}$ ,  $r = 0,79 \text{ m}$ ,  $x = \frac{1}{2} = 0,395$ , a  $M = \frac{Rx^2}{l} = \frac{25,6 x^2}{1}$ . Dla  $l=4$  jest  $x=2 - 0,395 = 1,605 \text{ m}$ ,

więc najw  $M = \frac{25,6 \cdot 1,605^2}{4} = 16,5 \text{ tm}$ . Podobnie otrzymamy dla  $l=3 \text{ m}$  najw

$$M = 10,41 \text{ tm, dla } l = 2,5 \text{ m, } M = 7,49 \text{ tm.}$$

c) Gdy trzy osie znajdują się na moście, to  $a_1 = 1,58 \text{ m}$ ,  $R = 38 \text{ t}$ ,  $P_1 = 12,4 \text{ t}$ , więc wedle wzoru 69)

$$\text{najw } M = \frac{38l}{4} - 12,4 \cdot 1,58 = 9,5l - 19,59 \text{ tm,}$$

stąd dla  $l=10 \text{ m}$   $M = 75,4 \text{ tm}$ , dla  $l = 4 \text{ m}$  jest  $M = 18,4 \text{ tm}$ .

II. Parowóz czteroosiowy.

a) Jeżeli jedna oś znajduje się na moście, to otrzymamy według równ. 65)  $M = 2,9 l$ .

b) Gdy 2 osie znajdują się na moście, mamy  $a = 1,26 \text{ m}$ ,  $r = 0,63 \text{ m}$ , najw. moment jest dla  $x = \frac{l}{2} - 0,315 \text{ m}$ , a najw.  $M = \frac{Rx^2}{1} = \frac{22,4 x^2}{1}$ . Stąd

otrzymamy dla  $l=3$   $x = 1,185 \text{ m}$  a  $M = 10,98 \text{ tm}$ , dla  $l=2$  jest  $x = 0,685 \text{ m}$  a  $M = 5,26 \text{ tm}$ .

c) Gdy 3 osie znajdują się na moście, to według 69) najw  $M = \frac{33,2l}{4} + - 10,8 \cdot 1,26 = 8,3l - 13,6 \text{ tm}$ , stąd dla  $l=10 \text{ m}$   $M = 69,4 \text{ tm}$ , a dla  $l=4 \text{ m}$  jest  $M = 19,6 \text{ tm}$ .

d) Gdy 4 osie znajdują się na moście, to  $a = 1,26$ ,  $r = 0,62 \text{ m}$ , więc  $x = \frac{1}{2} - 0,31$ , a najw  $M = \frac{Rx^2}{l} - 10,8 \cdot 1,26 = \frac{44 x^2}{1} - 13,6 \text{ tm}$ , mamy więc równanie hyperboli bardzo płaskiej. Stąd otrzymamy:

dla $l = 5$	8	10	12	$m$
$x =$	2,19	3,69	4,69	5,69 $m$
a najw $M =$	28,6	61,3	83,2	105,1 $tm$ .

Dla większych rozpiętości, gdy na moście zmieści się więcej, niż jeden parowóz, dla rozpiętości powyżej 30 m można przyjąć w przybliżeniu największy moment w środku, a to tem bardziej, że przy mostach kratowych chodzi nam tylko o momenty w węzłach.

## IV. Obciążenie ciągłe.

### §. 19. Obciążenie jednostajne zupełne.

W wykładzie statyki budowli mówiliśmy już o obciążeniu ciągiem dowolnym i o obciążeniu jednostajnym zupełnym\*), podamy więc tu tylko wyniki. Jeżeli  $g$  jest ciężarem jednostkowym, to w dowolnym punkcie  $C$  (rys. 43.) jest siła poprzeczna

$$Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) \quad . \quad 70)$$

a moment

$$M = \frac{1}{2} gx (l - x) \quad . \quad 71)$$

Stąd

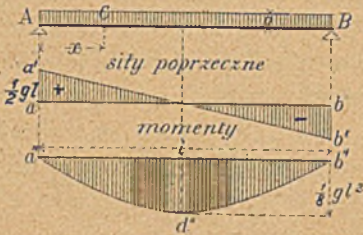
$$\text{najw } Q = \frac{1}{2} gl \quad . \quad 72)$$

jest dla  $x=0$ ,

$$\text{a najw } M = \frac{1}{3} gl^2 \quad . \quad 73)$$

dla  $x = \frac{l}{2}$ . Równanie 70) przedstawia linią prostą  $a'b'$ , zaś 71) parabolę  $a''d''b''$ .

rys. 43



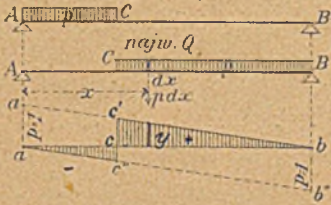
### §. 20. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne.

Ponieważ z linii wpływowej (rys. 44.) sił poprzecznych wynika, że każdy ciężar na prawo od danego przekroju  $C$

sprawia w  $C$  siłę poprzeczną dodatnią, a każdy ciężar, znajdujący się na belce po lewej stronie punktu  $C$  sprawia w  $C$  siłę poprzeczną ujemną, więc, aby otrzymać *najw*  $Q$  w punkcie  $C$ , musimy obciążyć  $BC$ , t. j. całą długość na prawo od przekroju, zaś długości  $AC$

wcale nie obciążać. Jeżeli zaś  $Q$  ma być *najmniejsze*, to obciążamy  $AC$ , a długości  $BC$  nie obciążamy wcale. Jeżeli  $p$  oznacza ciężar jednostkowy, to  $pdx$  oznacza ciężar na długości  $dx$ , zaś

rys. 44  
najmn.  $Q$ .



\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 24 i nast.

$pydx$  siłę poprzeczną, wywołaną ciężarem  $pdx$ , jeżeli  $y$  oznacza rzędną linii wpływowej dla sił poprzecznych. Jeżeli belka obciążona jest od  $C$  do  $B$ , to otrzymamy  $Q = p \int_C^B y dx$ . Otóż  $\int_C^B y dx$  jestto powierzchnia, zawarta między linią wpływową a osią od  $C$  do  $B$ , którą nazywamy powierzchnią wpływową (n. *Influenzfläche, Einflussfläche, fr. surface d'influence*). A zatem otrzymamy siłę poprzeczną w danym punkcie  $C$ , jeżeli powierzchnię wpływową dla tego punktu, odpowiadającą długości obciążonej, pomnożymy ciężarem jednostkowym  $p$ . Twierdzenie to da się w ten sam sposób dowieść dla jakiegokolwiek linii wpływowej, zawsze więc, chcąc otrzymać jakąś ilość mechaniczną, wywołaną ciężarem jednostajnym, pomnożymy odnośną powierzchnię wpływową przez ciężar jednostkowy  $p$ . Z rysunku otrzymamy

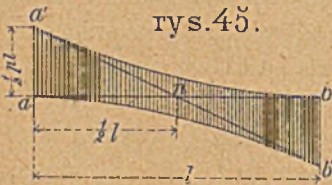
$$najw (+Q) = pbc'c = p \frac{1}{2} (l-x) \frac{l-x}{l} = \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}, \text{ czyli}$$

$$najw (+Q) = \frac{1}{2} pl \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 74)$$

Podobnie otrzymamy  $najw (-Q) = -p \cdot acc'' = -p \frac{1}{2} \frac{x^2}{l} x$ ,

$$\text{więc } najw (-Q) = -\frac{px^2}{2l} \dots \dots \dots 75)$$

Równania 74) i 75) przedstawiają dla zmiennej  $x$  parabole przystające odwrócone (rys. 45), które łatwo możemy wykreślić, gdyż dla  $x=0$  jest  $najw(+Q) = \frac{1}{2} pl$ , zaś dla  $x=l$  jest  $najw (+Q) = 0$ . Podobnie dla  $x=0$  jest  $najw (-Q) = 0$ , a dla  $x=l$   $najw (-Q) = -\frac{1}{2} pl$ .



rys. 45.

Dalej mamy  $\frac{d najw Q}{dx} = -\frac{p}{l} (l-x) = -st \zeta, \dots \dots \dots 76)$

gdy  $\zeta$  jest kątem nachylenia stycznej linii  $najw Q$  do poziomu. Z równania 76) otrzymamy dla  $x=l$   $st \zeta = 0$ ,  $\zeta = 0$ , dla  $x=0$ ,  $st \zeta = -p$ . Więc w punkcie  $b$  oś odcinków jest styczną do linii  $najw Q$ , a w punkcie  $a'$  styczną jest prosta  $a'b'$ , gdyż  $aa' = an st \zeta$ , a wstawiwszy wartości za  $aa'$  i  $st \zeta$ , otrzymamy  $\frac{pl}{2} = p \cdot an$ , więc  $an = \frac{l}{2}$ . Prosta  $a'b'$  przechodzi zatem przez środek belki  $n$  i jest styczną do obu parabol.

§. 21. Największe momenty.

Ponieważ z kształtu linii wpływowej dla momentów (rys. 15) wynika, że każdy ciężar, znajdujący się na belce, sprawia moment dodatni, więc dla największych momentów musimy całą belkę obciążyć. Można zatem tu użyć tych samych wzorów, co dla obciążenia zupełnego, tylko jeżeli we wzorach 71) i 73) zamiast  $g$  wstawimy  $p$ . Otrzymamy więc

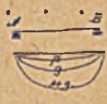
$$\text{najw (+M)} = \frac{1}{2} p x (1-x) \dots \dots \dots 77)$$

§. 22. Obciążenie ciężarem własnym i ruchomym, jednostajnie rozłożonym.

Dla równoczesnego obciążenia ciężarem własnym<sup>g</sup> i ruchomym<sup>p</sup> otrzymamy na podstawie poprzednich wzorów:

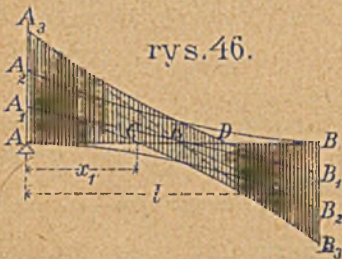
$$\left. \begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{2} (g+p) x (l-x) \\ \text{najmn } M &= \frac{1}{2} g x (l-x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 78)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{najw (+Q)} &= \frac{1}{2} g (l-2x) + \frac{p(l-x)^2}{2l} \\ \text{najw (-Q)} &= \frac{1}{2} g (l-2x) - \frac{px^2}{2l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 79)$$



Równania 78) przedstawiają parabole, jak w §. 19, zaś równania 79) dwie parabole przystające odwrócone  $A_3B_1$  i  $A_1B_3$  (rys. 46). Parabole te możemy też otrzymać przez dodanie rzędnych prostej  $A_1B_1$  dla ciężaru własnego do parabol  $A_2B$  i  $AB_2$  dla ciężaru ruchomego.

rys. 46.



Nazwijmy  $AC=x_1$ , to dla  $x=x_1$  otrzymamy z drugiego rów. 79)

$$0 = \frac{1}{2} g (l - 2x_1) - \frac{px_1^2}{2l}, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{x_1}{l} = -\frac{g}{p} + \sqrt{\left(\frac{g}{p}\right)^2 + \frac{g}{p}} \dots \dots 80)$$

Z rysunku widzimy, że  $CD=l-2x_1$ , na tej długości siły poprzeczne mogą być dodatnie i ujemne. Nazwijmy przekrój, dla którego siła poprzeczna jest  $\geq 0$ , przekrojem środkowym (n. *mittlerer Querschnitt*, fr. *ligne de partage des forces*, cz. *průřez přechodný*), to jeżeli belka jest jednostajnie zupełnie obciążona, przekrój środkowy jest w środku belki; dla obciążenia jednostronnego przekrój środkowy wychyla się ze środka belki

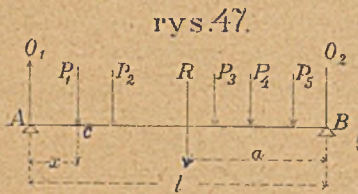
najdalej o długość  $CE=ED=\frac{l}{2}-x_1$ , którą to długość zowiemy wychyleniem się przekroju środkowego. Wychylenie to jest według 80) zależne od stosunku  $\frac{g}{p}$ , który wynosi w przybliżeniu według Winklera:

dla $l = 5$	10	20	50	75	100	150	$m$
$\frac{g}{p} = 0,12$	0,19	0,31	0,64	1,05	1,55	3,12	
a stąd $CD = 0,52$	0,42	0,34	0,24	0,15	0,12	0,08	$l$

### §. 23. Ciężar zastępczy.

Do każdego przekroju belki da się oznaczyć ciężar jednostajnie rozłożony, sprawiający ten sam największy moment lub tę samą największą siłę poprzeczną, co dany układ ciężarów skupionych. Ciężar taki nazywamy ciężarem zastępczym (n. *Belastungsgleichwert, aequivalente Last, Ersatzlast, a. equivalent uniform load*). Dla rozmaitych przekrojów belki otrzymamy w ten sposób rozmaite ciężary zastępcze, a nawet dla tego samego przekroju otrzymamy inny ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, a inny dla momentów.

Ustawmy układ ciężarów w ten sposób, abyśmy otrzymali dla przekroju  $C$  (rys. 47) największą siłę poprzeczną, a więc postawmy pierwszy ciężar na tym przekroju. Niechaj wypadkowa



rys. 47.

wszystkich ciężarów, znajdujących się na belce będzie  $R$  a jej odległość od  $B$  niechaj będzie  $\alpha$ , to oddziaływanie  $O_1 = \frac{R\alpha}{l}$ , więc najw  $Q = \frac{Ra}{l}$ . Jeżeli

ciężar zastępczy dla sił poprzecznych nazwiemy  $p$ , to według 74) najw  $Q = \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}$ ; z porównania zaś obu najw  $Q$  otrzymamy:

$$p \frac{(l-x)^2}{2l} = \frac{Ra}{l}, \text{ a stąd } p = \frac{2 Ra}{(l-x)^2} \dots \dots \dots 81)$$

Z powyższego widzimy, że ciężar zastępczy dla sił poprzecznych zależy jest od  $l-x$ , zatem od długości obciążonej, a niezależny od  $l$  rozpiętości belki, dalej, że ciężar  $p$  jest tem mniejszy, im większa długość obciążona.

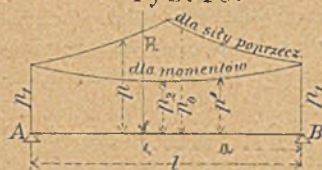
Przypuśćmy teraz, że  $x$  jest bardzo małe, <sup>czyli</sup> że  $C$  leży blisko podpory, to to samo położenie układu ciężarów wywoła w punkcie  $C$  największy moment, ~~obliczamy więc~~ <sup>obliczamy więc</sup> najw  $M = \frac{Ra}{l}x$ . Nazwijmy dla momentów ciężar zastępczy  $p'$ , to według 77) najw  $M = \frac{1}{2}p'x(l-x)$ . Porównajmy oba największe momenty, a otrzymamy  $\frac{Ra}{l}x = \frac{1}{2}p'(l-x)x$ , stąd  $p' = \frac{2Ra}{l(l-x)}$  . . . . . 82)

Widzimy więc, że ciężar zastępczy  $p'$  (rys. 48) dla momentów jest mniejszy, niż ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, tylko dla  $x=0$  będzie  $p=p'$ .

Równanie 82) jest ważnem tylko dla przekrojów, znajdujących się blisko podpory; w podobny sposób dadzą się jednak obliczyć ciężary zastępcze także dla innych punktów belki.

Wykreślmy dla każdego  $x$  odpowiednie  $p$  i  $p'$  jako rzędne i połączmy końce odnośnych rzędnych, a otrzymamy dwie linie

rys. 48.



dla  $p$  górną, zaś dla  $p'$  dolną. Linie te będą miały kształt wskazany w rys. 48. Jeżeli przyjmujemy jeden ciężar zastępczy dla całej belki, popełniamy błąd. Lepiej już jest przyjąć inny ciężar dla momentów a inny dla sił poprzecznych.

Więcej naukowo uzasadnionem jest okólnikowe rozporządzenie rosyjskiego ministerstwa komunikacyj, wydane w r. 1884 do zarządów wszystkich kolei żelaznych, w którem podane są ciężary zastępcze  $p_2$  dla momentów w środku,  $p_0$  dla sił poprzecznych w środku przęsła i  $p_1$  na podporach. Dla innych punktów belki należy według okólnika wstawić jeszcze 6 do 10 wartości pośrednich pomiędzy  $p_0$  i  $p_1$  lub  $p_1$  i  $p_2$ .

<sup>1)</sup> Z okólnika powyższego, odnoszącego się do mostów drewnianych, podajemy odnośne ustępy:

I. Natężenia w różnych częściach belki mostowej, wywoływane przez obciążenia ruchome, powinny być liczone na podstawie pociągu normalnego (§. 4). Przytem jednakoże dla wyznaczenia ciężaru zastępczego, odpowiadającego największemu momentowi zgięcia, pociąg ustawia się ściśle według schematu (§. 4), przy wyznaczeniu zaś ciężaru zastępczego dla największych sił poprzecznych, wszystkie trzy parowozy należy ustawić na czele pociągu kominami naprzód. Obciążenie na oś parowozu przyjmuje się w przęsłach do 6,4 m (włącznie) 15 t, do 8,5 m (włącznie) 18,75 t, a wyżej 8,5 m 12,5 t. Wspomniane wyżej ciężary zastępcze dla belek prostych, obliczone dla przekrojów na podporze i w środku przęsła, daje następująca tabliczka:

Rozpiętość teoretyczna w sq	Ciężar zastępczy w pud na st b			Rozpiętość teoretyczna w sq	Ciężar zastępczy w pud na st b			Rozpiętość teoretyczna w sq	Ciężar zastępczy w pud na st b			Rozpiętość teoretyczna w sq	Ciężar zastępczy w pud na st b		
	$p_1$	$p_2$	$p_0$		$p_1$	$p_2$	$p_0$		$p_1$	$p_2$	$p_0$		$p_1$	$p_2$	$p_0$
1	362	262	523	5	152	133	220	9	128	105	159	20	108	98	121
2	283	232	361	6	143	119	201	10	125	104	153	25	102	96	116
3	241	211	307	7	138	112	182	12	119	103	143	30	96	93	112
4	185	168	257	8	133	107	169	15	115	101	131	35	91	89	109

Przytem  $p_1$  jest ciężarem zastępczym dla momentów i sił poprzecznych na podporze,  $p_2$  dla momentów, a  $p_0$  dla sił poprzecznych w środku przęsła:

a) Przy obliczaniu momentów zgięcia i sił poprzecznych w różnych przekrojach przęsła odpowiednie ciężary zastępcze należy określać przy pomocy proporcji, korzystając z wielkości ciężarów zastępczych, danych w tablicy dla przekrojów na podporze i w środku przęsła.

Oznaczone w ten sposób dla jakiegokolwiek przekroju obciążenie przyjmuje się jako rozłożone na całej długości przęsła, gdy jestto obciążenie, odpowiadające największemu momentom, a na długości od danego przekroju do bardziej oddalonego punktu podparcia, gdy jest to obciążenie, odpowiadające największym siłom poprzecznym.

W każdym razie przekroje przekątni i słupów obliczać należy dla sił nie mniejszych od pełnego obciążenia przedziału.

b) Dla ułatwienia dla każdego pojedynczego przekroju przęsła niepotrzeba stosować osobnych ciężarów zastępczych, lecz należy postępować w sposób następujący:

1. Wielkość obciążenia ruchomego można przyjmować jednakową w granicach pewnych działek, których liczba zależy od długości przęsła wynosi od 6 do 12. Ciężar zastępczy dla każdej takiej części jest średnim z ciężaru zastępczego, obliczonego dla przekrojów skrajnych tej części.

2. Podobnież dla określenia natężeń w krzyżulcach może dla nich być też przyjęta jednaka wielkość ciężaru zastępczego w obrębie każdej 6 do 12 działek, na które podzielono dane przęsła.

c) Dla rozpiętości, nie wykazanych w tablicy, ciężary zastępcze wyznaczyć należy za pomocą wstawienia.

d) Za teoretyczną rozpiętość belki należy przyjąć odległość między środkami słupów narożnych.

2) Dla mostów żelaznych stosować należy okólnik zarządu głównego dróg żelaznych z dnia 29 marca (6 kwietnia) 1901 l. 14.569/61, który zezwala w celu ułatwienia przy stosowaniu pociągu normalnego przyjmować obciążenie zastępcze, podane w następujących dwu tablicach dla belek jednoprzęsłowych mostu jednotorowego w dwu punktach podpartych.



Ciążar zastępczy dla momentów.

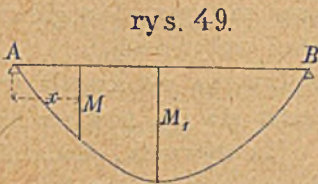
$l$	3	4	5	7	10	15	20	30	40	$m$
$p_1$	17,00	15,75	14,64	12,37	10,06	8,96	8,23	7,33	6,74	$t/m$
$p_2$	12,88	12,75	12,13	11,02	8,97	7,09	6,75	6,46	6,15	$t/m$
$l$	50	60	70	80	90	100	110	130	150	$m$
$p_1$	6,2	5,76	5,41	5,13	4,89	4,70	4,53	4,27	4,07	"
$p_2$	5,76	5,41	5,13	4,89	4,69	4,51	4,37	4,14	3,89	"

Ciążar zastępczy dla sił poprzecznych, gdy  $l_1$  oznacza długość obciążoną belki.

$l_1$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
$p_0$	30	22,67	20,25	17,76	17,00	16,16	15,38	14,64 $t/m$
$l_1$	6,0	7,0	8,0	10	11	12	13	14
$p_0$	13,5	12,37	11,34	10,06	9,72	9,42	9,18	9,06 "
$l_1$	15	18	20	23	25	30	34	40
$p_0$	8,96	8,47	8,23	7,97	7,76	7,33	7,10	6,74 "
$l_1$	44	50	54	60	70	80	90	100
$p_0$	6,51	6,20	6,01	5,76	5,41	5,13	4,89	4,70 "
$l_1$	110	130	150	170	200			
$p_0$	4,53	4,27	4,07	3,92	3,74	$t/m$ .		

Z tablicy powyższej widzimy, że zwłaszcza przy mniejszych rozpiętościach różnice między ciężarami zastępczymi  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  są bardzo wielkie. Im mniejsza jest rozpiętość, tem większy byłby błąd, gdybyśmy jeden ciężar zastępczy przyjęli dla wszystkich punktów.

W Austrii rozporządzenie z r. 1877 nakazuje przyjmować dla momentów jeden ciężar zastępczy dla całego przęsła.



rys. 49.

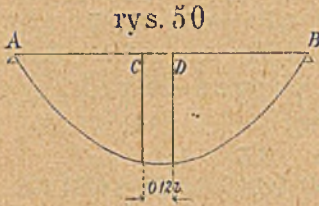
Otrzymujemy więc <sup>jako</sup> linię najw. momentów parabolę (rys. 49). Jeżeli  $M_1$  oznacza największy moment we środku, to  $M_1 = \frac{1}{8} pl^2$ ,  $M = \frac{1}{4} px(l-x)$ , stąd  $M = 4 M_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$  83)

a stąd

dla $\frac{x}{l} =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,45	0,50
$\frac{M}{M_1} =$	0,19	0,36	0,51	0,64	0,75	0,84	0,91	0,99	1,00.

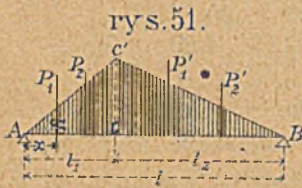
Dla lepszego zbliżenia się do linii najw. momentów, wywołanej układem ciężarów skupionych w Prusiech przyjmuje się na długości  $CD = 0,12l$  (rys. 50) linię poziomą jako linię największych momentów.

W Ameryce przyjmują przy mostach większych ciężar zastępczy, odpowiadający wozom ciężarowym i dodają jeszcze na długość parowozów odpowiednie ciężary uzupełniające, ciągle lub skupione (n. *locomotive excess*). >



Większą dokładność da się osiągnąć, jeżeli ustawimy wzory przybliżone do ciężaru zastępczego w każdym przekroju. Wzory takie ustawił Winkler na tej podstawie, że ciężar zastępczy zależy jest od kształtu linii wpływowych.

Wiemy, że dla obciążenia ciągłego ilość mechaniczna  $Y$  (moment, oddziaływanie czy siła poprzeczna) równa się powierzchni wpływowej, pomnożonej przez ciężar jednostkowy  $p$ , zatem  $Y = p \int y dx$ , jeżeli  $y$  oznacza rzędną linii wpływowej. Jeżeli zaś na belkę działa układ ciężarów skupionych, to, jak wiadomo,  $Y = \sum Py$ , jeżeli  $P$



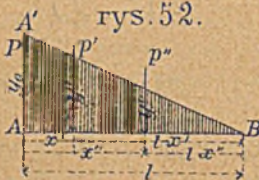
(rys. 51.) oznacza ciężar skupiony. Obciążenie zastępcze, wywołujące tę samą ilość mechaniczną  $Y$ , wynosić więc będzie:

$$p = \frac{\sum Py}{\int y dx} = \frac{\sum Py}{A} \dots \dots \dots 84)$$

jeżeli  $A$  oznacza powierzchnię wpływową.

Z powyższego okazuje się, że ciężar zastępczy jest głównie zależnym od kształtu linii i powierzchni wpływowej. >

<Przypuśćmy, że powierzchnia wpływowa ma kształt trójkąta prostokątnego (rys. 52). Taki kształt ma np. powierzchnia



wpływowa oddziaływania, dodatnich i ujemnych sił poprzecznych belki prostej. W tym ostatnim wypadku długość trójkąta  $l$  nie jest równa rozpiętości, lecz długości obciążonej belki. Chcąc wywołać największe obciążenie, stawiamy pierwsze koło na wierzchołku  $A$ , gdzie rzędna największa  $y_0$ . Nazwijmy ilość mechaniczną, dla której wykreśliłmy linię wpływową  $Y$ , to  $Y = Py_0 + P'y' + P''y'' \dots$

Z rys. widzimy, że  $y' : y_0 = (l - x') : l$ , więc  $y' = \frac{y_0(l-x')}{l}$ , podobnie  $y'' = \frac{y_0(l-x'')}{l}$ , więc  $Y = \frac{y_0}{l} \Sigma P(l-x)$ . Nazwawszy obciążenie zastępcze w tym wypadku  $p$ , otrzymamy z rów. 84)

$$\text{po wstawieniu } A = \frac{1}{2} y_0 l \quad p = \frac{\frac{y_0}{l} \Sigma P(l-x)}{\frac{1}{2} y_0 l} = \frac{2}{l^2} \Sigma P(l-x) \quad . \quad 85)$$

Według tej zasady obliczono ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, wywołanych pociągami normalnymi austriackim. Rozporządzenie austr. min. handlu z dnia 15. września 1887. §. 3 b) brzmi:

b) Dla obliczenia kraty lub ścianki w belkach głównych powyższych konstrukcyj (przy belkach w dwu punktach podpartych) należy jednak największe siły poprzeczne, wywołane ciężarem ruchomym w jednym i drugim kierunku dla każdego przekroju mostu wyznaczyć w ten sposób, że uwzględnia się tylko obciążenie, sięgające od tego przekroju do odnośnej podpory.

Dla tego obciążenia ważną jest wtedy następną skalą bez względu na rozpiętość mostu i obliczona tylko według długości obciążonej części mostu na metr bieżący toru:

*Skala b.*

Długość części obciążonej 1,0 1,5 2,0 2,5 5 10 15 20 40 80 120 160 =  $l$   
mostu w metrach.

Ciężar ruchomy na metr 30 25 20 18 14 10 8,5 7,6 6,2 4,8 4,0 3,5 =  $p$ .  
bież. długości obciążonej w ton.

Dla rozpiętości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej

Dla wyznaczenia *najw.* sił poprzecznych na podstawie zmiennych ciężarów zastępczych podał Skibiński następną konstrukcję.

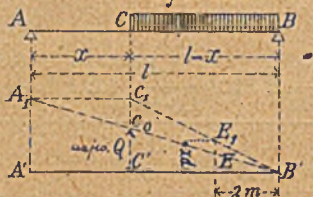
Załóżmy, że mamy dla punktu  $C$  (rys. 53) wyznaczyć *najw.* siłę poprzeczną i że ciężar zastępczy zmienny wynosi  $p_x$ . Największą siłę poprzeczną otrzymamy wtedy z rów. 74):

$$\text{najw } (+Q) = \frac{1}{2} p_x \frac{(l-x)^2}{l}$$

Zróbmy  $B'E = 2m$ , przyczem  $m$  oznacza dowolną całą ilość metrów, wykreślmy  $EE_1 = p_x$ ,

dalej  $B'E_1$  aż do przecięcia się z pionową przez  $C$ , zróbmy  $A'A_1 = CC_1$  i wykreślmy  $B'A_1$ , to z rysunku wynika, że

$$C'C_1 : p_x = (l-x) : 2m, \text{ więc}$$



$CC_1 = AA_1 = \frac{p_x(l-x)}{2m}$ . Dalej mamy  $C'C_0 : A'A_1 = (l-x) : l$ ,

więc  $C'C_0 = \frac{A'A_1(l-x)}{l} = \frac{p_x(l-x)^2}{2ml} = \frac{najw(+Q)}{m}$ .

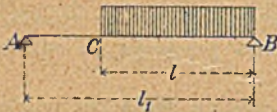
Jeżeliśmy przyjęli  $m=1m$ ,  $EB'=2m$ , to  $C'C_0 = najw(+Q)$ .

⟨Najw. siłę poprzeczną możemy też bardzo łatwo wyznać za pomocą tablic.

Nazwijmy długość obciążoną  $l$  (rys. 54), to

$$najw(+Q) = \frac{\frac{1}{2} p_x l^2}{l_1} \dots \dots \dots 86)$$

Otoż Leber, Stöckl i Häusser ułożyli tablice, w których dla każdego  $l$  znaleźć możemy w jednej rubryce  $p_x$ , a w drugiej odrazu  $\frac{1}{2} p_x l^2$ . Aby więc



wyznać dla danej belki o rozpiętości  $l_1$  największe siły poprzeczne w rozmaitych punktach, szukamy dla rozmaitych  $l$  z tablic wartości  $\frac{1}{2} p_x l^2$  i dzielimy przez  $l_1$ .

N. p. dla  $l_1=40$  otrzymamy z tablic

dla $l =$	5	10	15	20	25	30	35	40 m
$\frac{1}{2} p_x l^2 =$	175	500	956	1520	2266	3105	4012	4960 tm
najw $Q =$	4,4	12,5	23,9	38	56,6	77,6	100,3	129 t.

⟨Linia wpływowa dla momentów ma kształt trójkąta (rys. 51). Prostopadła, spuszczone z wierzchołka trójkąta  $C'$ , dzieli podstawę jego na  $l_1$  i  $l_2$ . Jeżeli  $l_1=nl$ , to  $l_2=(1-n)l$ .

Naznaczmy rzędne i ciężary po prawej stronie punktu  $C$  kreskami, to  $p = \frac{\Sigma Py + \Sigma Py'}{A}$ . Z rysunku mamy  $y = \frac{CC'x}{l_1}$ ,

$$y' = \frac{CC'(l-x)}{l_2}, \quad A = \frac{l \cdot CC'}{2}.$$

Wstawiając to w poprzednie równanie, otrzymamy

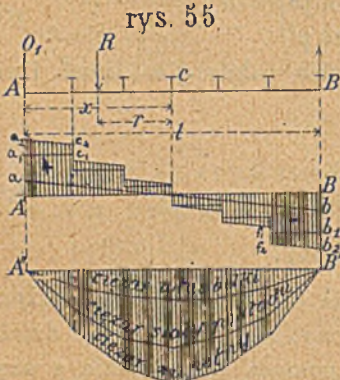
$$p = \frac{\frac{CC'}{l_1} \Sigma Px + \frac{CC'}{l_2} \Sigma P(l-x)}{\frac{1}{2} CC'l} = \frac{\frac{1}{nl} \Sigma Px + \frac{1}{(1-n)l} \Sigma P(l-x)}{\frac{1}{2} l}$$

$$p = \frac{2(1-n) \Sigma Px + 2n \Sigma P(l-x)}{n(1-n)l^2} \dots \dots \dots 87)$$

Na tej podstawie obliczył Winkler  $p_2$  dla rozmaitych rozpiętości i ułożył wzór przybliżony :



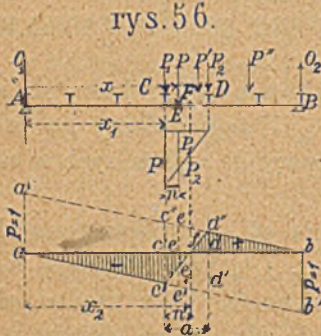
ciężenie jest pośrednie czy bezpośrednie, a i  $R$  się nie zmienia, więc i moment  $M$  jest ten sam. Zatem momenty są na poprzecznicach dla obciążenia pośredniego te same, co dla bezpośredniego.



Dla danego położenia ciężarów możemy więc wyznaczyć w ten sposób momenty, że wykreślimy bez względu na poprzecznice wielobok sznurowy, jak zwykle, a z punktów, gdzie są umieszczone poprzecznice, spuścimy pionowe aż do przecięcia się z wielobokiem sznurowym i te punkty przecięcia się połączymy prostymi. *Siła poprzeczna w przekroju ma stałą wartość.*

§. 25. Siły poprzeczne wskutek ciężaru ruchomego.

a.) *ciężary skrajne.* Na belkę  $AB$  (rys. 56.) działa ciężar  $P=1$  pośrednio przez poprzecznice, rozkładając się na dwie siły  $P_1$  i  $P_2$ , działające w punktach  $C$  i  $D$ .



Oddziaływanie w punktach  $A$  i  $B$  nie zmienia się, czy ciężar działa bezpośrednio, czy pośrednio przez poprzecznice, dlatego też, jeśli ciężar działa na długości  $AC$  lub  $DB$  siła poprzeczna w przedziale  $CD$  będzie ta sama, co przy obciążeniu bezpośrednio. W pierwszym wypadku jest mianowicie  $Q = O_1 - P_1$ , w drugim  $Q = O_1$ .

Wykreślimy więc najprzód linie wpływowe tak, jak gdyby nie było poprzecznic, to ważne są one tylko na długościach  $AC$  i  $DB$ , więc  $ac'$  i  $d''b'$ , a zmienia się tylko linia wpływowa w przedziale (n. *Fach*)  $CD$ , gdyż tu rozkłada się ciężar  $P$  na  $P_1$  i  $P_2$ , a  $Q = O_1 - P_1$ . Jeżeli  $CE = n = 0$ ,  $E$  wpada na  $C$ , więc cała siła  $P=1$  działa w punkcie  $C$  i otrzymamy rządną

linii wpływowej  $cc'$ . Jeżeli siła  $P=1$  się porusza i przyjdzie do punktu  $D$ , to siła poprzeczna jest  $dd''$ . Jeżeli zaś siła  $P$  znajduje się w przedziale  $CD$  to, rozkłada się na dwie siły  $P_1$  i  $P_2$  według prawa linii prostej, gdyż  $P_1 = P \frac{a-n}{a}$ . Jeżeli  $d'd'' = P=1$  i połączymy  $c'$  z  $d''$ , a z punktu  $E$  spuścimy pionową, to  $e_1e'' = P_1$ , więc siła poprzeczna w  $CD$   $Q = O_1 - P_1 = ee'' + -e_1e'' = -e_1e$ . Widzimy więc, że prosta  $c'd''$  jest linią wpływową dla przedziału  $CD$ .

W taki sam sposób możemy udowodnić dla jakichkolwiek linii wpływowych, że uwzględnimy wpływ poprzecznic, jeżeli spuścimy z obu poprzecznic danego przedziału pionowe i ich punkty przecięcia się z linią wpływową połączymy linią prostą, że zatem linia wpływowa między dwiema poprzecznicami jest prostą.

Mamy bowiem ogólnie, gdy  $P$  rozkłada się na  $P'$  i  $P''$  (rys. 57)

$$P' = P \frac{a-x}{a}, \quad P'' = \frac{Px}{a}, \quad \text{więc}$$

$$Py = P'y' + P''y'' = P \frac{a-x}{a} y' + \frac{Px}{a} y'',$$

$$y = \frac{a-x}{a} y' + \frac{x}{a} y'' \quad . . . . . 90)$$

Jestto równanie linii prostej. A zatem linia wpływowa między dwiema poprzecznicami musi być prostą.

Siła poprzeczna w przedziale  $CD$  dla danego obciążenia jest stała, bo ciężar  $P$  rozdziela się na  $P_1$  i  $P_2$ , z tych  $P_1$  działa w  $C$ , a potem niema żadnej siły działającej, aż w  $D$  siła  $P_2$ . Ponieważ więc linia wpływowa jest dla całego przedziału ta sama, więc i najw  $Q$  jest takie samo, jak dla jakiegokolwiek punktu tego przedziału.

*Jeżeli siła ma  
zadany wpływ  
o równym wpływie  
na wszystkie  
poprzecznic  
całego przedziału*



Jeżeli siła  $P$  działa w przedziale  $CD$ , to siła poprzeczna w tym przedziale jest  $Q = P \frac{l-x}{l} - P \frac{a-n}{a}$ . Jestto równanie prostej  $c'd''$ . Niech będzie  $x = x_1 + n$ , to otrzymamy

$$Q = P \left( \frac{l-x_1-n}{l} - \frac{a-n}{a} \right) \quad \text{czyli} \quad Q = \frac{P}{al} (n[l-a] - ax_1) \quad . 91)$$

Zatem  $Q$  jest funkcją stopnia pierwszego zmiennej  $n$ , czyli linia  $c'd''$  jest prostą, cośmy powyżej wykreslnie udowodnili. Teraz łatwo wyznaczymy punkt  $F'$ , w którym, gdy siła działa, nie sprawia w przedziale  $CD$  żadnej siły poprzecznej. Punkt ten nazywamy punktem obojętnym (n. *neutraler Punkt, Nullpunkt, Belastungsscheide*, cz. *bod neutralny*). Niech będzie dla punktu obojętnego  $n=n'$ , to wedle założenia

$$Q=0=\frac{P}{al}(n'(l-a)-ax_1), \text{ stąd } n'(l-a)=ax_1, \text{ więc}$$

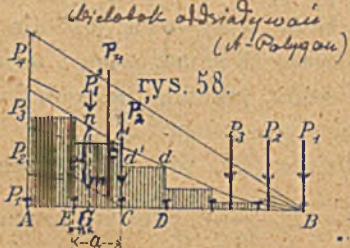
$$n'=\frac{ax_1}{l-a} \dots \dots \dots 92)$$

$$\text{Jeżeli } x_2=x_1+n', \text{ to } x_2=x_1+\frac{ax_1}{l-a}=\frac{lx_1}{l-a} \dots \dots \dots 93)$$

Linia wpływowa nad osią  $fd''b$  ma kształt trójkąta. Z kształtu tej linii wpływowej widzimy, że wedle §. 15. dla *najw*  $Q$  obciążenie układem ciężarów skupionych ma być takie, aby ciężary jednostkowe na  $FD$  i  $DB$  były, ile możliwości, równe (cecha Winklera), a jeden ciężar musi stać w  $D$ . Nazwijmy wypadkową ciężarów na długości  $FD$   $P'$ , zaś na  $DB$   $P''$ , to gdy  $\frac{P'}{a-n'} > \frac{P''}{l-x_1-a}$ , układ ciężarów posuwamy na prawo. Możemy też

napisać  $\frac{P'}{P''} > \frac{a-n'}{l-x_1-a} = \frac{a-\frac{ax_1}{l-a}}{l-x_1-a}$ , zatem  $P'l - P'a > P''a$ ,  
 nareszcie  $\frac{P'}{a} > \frac{P'+P''}{l} \dots \dots \dots 94)$

A więc dla *najw*  $Q$  obciążyć mamy długość  $FB$  (rys. 56.) i starać się, aby ciężar jednostkowy w przedziale  $CD$



i na całej belce był, ile możliwości, równy. Podobnie postępujemy dla *najmn*  $Q$ , obciążając długość  $AF$ . Widzimy więc, że dla *najw*  $Q$  na prawej poprzecznicy stać będzie zwykle albo pierwszy albo drugi ciężar.

Z tego wynika następująca konstrukcja: Wykreślamy dla oddziaływania  $O_1$  wielobok sznurowy (rys. 58.) jak dla obciążenia bezpośredniego według §. 14, który jest zarazem linią *najw*

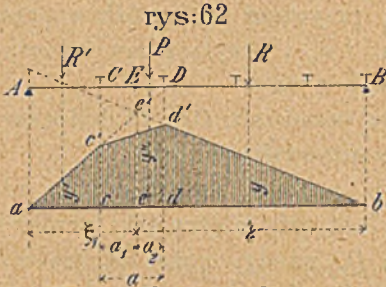
podobn. rys. 21.







z punktów *C* i *D*, gdzie są poprzecznice, ograniczające przedział *CD*, w którym dany punkt leży, pionowe i połączywszy

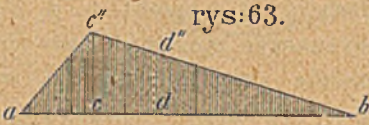


rys:62

*c'* z *d'*. Linia wpływowa jest więc teraz *ac'd'b*. Jeżeli mamy wykreślić linię wpływową dla przekroju, w którym leży poprzecznicza np. dla *C*, (rys. 63) to postępując w ten sposób, otrzymamy tę samą linię wpływową, jak gdyby poprzeczniczo nie było.

Znając linie wpływowe, możemy wyznaczyć najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów.

a) Ciężary skupione. Niechaj wypadkowa ciężarów na *AC* (rys. 62) będzie *R'*, wypadkowa ciężarów w przedziale *CD* *P*, zaś *R* wypadkowa ciężarów na *DB*. Nazwijmy odpowiednie



rys:63.

rzędne linii wpływowej *y'*, *y''*, *y*, to gdy posuniemy układ ten na prawo o *dx*, różnica momentów będzie *dM* i otrzymamy  $dM = R'dy' + Pdy'' - Rdy$ .

Z rysunku możemy wyznaczyć *dy*, *dy'*, *dy''*, a mianowicie:

$$dy' = \frac{ee'}{\xi_1} dx = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{dx}{\xi_1},$$

$$dy'' = \frac{dd' - cc'}{a} dx = \left[ \frac{\xi - a_2}{l} - \frac{\xi(\xi_1 - a_1)}{l\xi_1} \right] \frac{dx}{a} = \frac{a_1\xi - a_2\xi_1}{al\xi_1} dx,$$

$$dy = \frac{1}{l} dx. \text{ A zatem}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{R'\xi}{l\xi_1} + P \left( \frac{a_1\xi - a_2\xi_1}{al\xi_1} \right) - \frac{R}{l}, \text{ więc } dM > 0, \text{ gdy}$$

$$R'\xi + \frac{Pa_1\xi}{a} - \frac{Pa_2\xi_1}{a} - R\xi_1 > 0.$$

$$\left( R' + P \frac{a_1}{a} \right) \xi - \left( P \frac{a_2}{a} + R \right) \xi_1 > 0, \text{ czyli}$$

$$\frac{R' + P \frac{a_1}{a}}{\xi_1} > \frac{R + P \frac{a_2}{a}}{\xi} \dots \dots \dots 98)$$

A więc przez przesunięcie na prawo zyskujemy, gdy zachodzi nierówność 98). Dla największych momentów przesuwamy tak długo, aż ciężar jednostkowy na obu długościach  $\xi_1$  i  $\xi$  będzie, ile możności, równy, przyczem ciężar  $P$  w przedziale rozdzielamy w stosunku  $a_1$  i  $a_2$  i przyłączamy odnośne części do ciężarów prawej lub lewej strony.

Jeżeli punkt  $E$  leży w środku przedziału  $CD$ , to doliczamy po połowie ciężaru  $P$  do lewych i prawych ciężarów.

Gdy ciężar jaki schodzi lub wchodzi na belkę, to nie zmienia to znaku nierówności, tylko, gdy ciężar jaki przekroczy sąsiednią poprzecznicę  $C$  lub  $D$ , wtedy może się zmienić znak nierówności, więc dla większości musi być ciężar na jednej z poprzecznic tego przedziału.

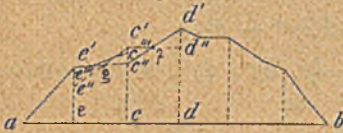
♣ Obliczamy więc największe momenty na poprzecznicach, a że linia wpływowa dla tych punktów jest ta sama, co dla obciążenia bezpośredniego, więc obliczamy te momenty tak, jakby poprzecznic nie było i otrzymujemy np. w punkcie  $c$  (rys. 64.) moment  $cc'$ . Dla tego położenia układu ciężarów będzie na poprzecznicy  $d$  moment n. p.  $dd''$ ,

co wyznaczyć możemy łatwo równocześnie przy konstrukcyi wykreślnej zapomocą wieloboku sznurowego. Dlatego więc położenia otrzymamy jako linię momentów w przedziale  $cd$  prostą  $c'd''$ . W ten

sposób wyznaczamy moment dla innego położenia, najniekorzystniejszego dla punktu  $d$  (jeden ciężar w  $d$ ) i otrzymamy linię momentów w tym wypadku  $c''d'$ , więc linia największych momentów dla punktów, leżących między  $c$  i  $d$  będzie linia łamana  $c'fd'$ . Często zamiast jednej linii bierzemy linię  $c'd'$ , przez co otrzymujemy momenty nieco za wielkie.

Możliwym jest wprawdzie jeszcze, że gdy inny ciężar jaki stoi na sąsiednich poprzecznicach, co w rysunku uwidoczniliśmy dla przedziału  $ec$ , otrzymamy linię momentów  $e'''c'''$ , która dla środkowej części przedziału będzie największością i że wtedy linia *najw*  $M$  będzie dwa razy łamaną w tym przedziale, lecz jestto rzadki wypadek, a z powodu, że różnica nie jest wielką, możemy przyjąć jako linię *najw*  $M$  linię raz łamaną  $e'gc'$ , a nawet  $e'c'$ .

rys: 64.



Wyznaczenie największych momentów

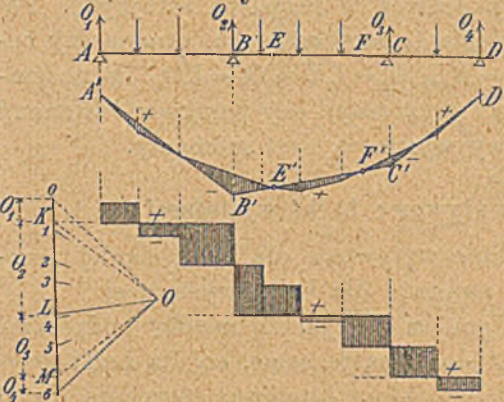
b) Obciążenie jednostajne ciągłe. Z kształtu linii wpływowej wypływa, że największe momenty otrzymamy dla obciążenia zupełnego. Wyznaczamy więc momenty tak, jak dla ciężaru stałego (§. 24).

## VI. Belka ciągła przegubowa.

### §. 27. Określenie.

Jeżeli belka jest podparta w kilku punktach, nazywamy ją belką ciągłą, wieloprzęsłową (n. *continuierlicher Träger*, fr. *poutre continue*, a. *continuous beam*, cz. *nosnik spojity*).

rys:65.



Mówiliśmy już o niej pokrótce przy wykładzie statyki budowli\*), obszerniej zastanowimy się nad nią później. Belka ciągła jest statycznie niewyznaczalną i aby ją obliczyć, musimy się uciec do prawideł sprężystości, co przedstawia wiele niedogodności, jak o tem później będziemy mówić.

Aby uczynić belkę statycznie wyznaczalną, urządzamy przeguby, którymi łączymy pojedyncze części belki w ten sposób, że każda część jest tylko w dwu punktach podparta. Taka belkę (rys. 65.) nazywamy belką ciągłą przegubową (n. *continuierlicher Gelenkträger*, a. *hinged continuous girder*). Składa się ona z części w dwu punktach podpartych, jak *AE* i *FD*, które nazwiemy częściami wystającymi (n. *überhängender Theil*) i z części wiszących (n. *schwebender Theil*) *EF*, spoczywających na częściach wystających.

*(Gelenkhafter Balken, Auslagerballtr., Krüppelträger, Cantilever)*  
*(Ballen mit Auslagerung)*  
*(Kruppelträger)*  
*(eingelagerte Träger)*  
*(Stützträger)*

\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 269.

części *BE, CF* nazywają *Wippenkammern* (Auslager, Diagonalen)

\* Jeśli belka opiera się na *n* podporach, to by ją zrobić statycznie wyznaczalną należy *n-2* przegubów. W ten sposób dostajemy pod *3* warunków równowagi (*n-2*) równań warunkowych (*n-2*) tak że w całości mamy  $3 + (n-2) = n+1$  warunków równowagi, zaś wyznaczanie belki opiera się na *n* podporach. W jednym punkcie nie może być więcej niż *2* punkty podparcia.

### §. 28. Obciążenie dowolne.

Części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte, a więc oblicza się je według zasad, wyłożonych w poprzednich rozdziałach. W ten sposób możemy wyznaczyć ciśnienia części wiszących na wystające w punktach

podparcia  $E$  i  $F$ , a znając je możemy wyznaczyć oddziaływania, siły poprzeczne i momenty części wystających według zasad, wyłożonych w statyce budowli dla belek wystających\*).

Na rysunku 65. wyznaczyliśmy oddziaływania, momenty i siły poprzeczne wykreślnie. Wykreślamy mianowicie wielobok sił, przyjmujemy biegun  $O$  dowolnie i kreślimy wielobok sznurowy. Ponieważ w  $E$  i  $F$  momenty są równe zeru, więc  $E'F'$  jest zamykającą w przęśle  $BC$ , a połączywszy  $A'$  z  $B'$  i  $D'$  z  $C'$  otrzymamy kierunki zamykających w przęslach skrajnych. Poprowadziwszy z  $O$  równoległe do zamykających, otrzymamy oddziaływania  $O_4 = 6M$ ,  $O_3 = ML$ ,  $O_2 = LK$  i  $O_1 = KO$ , na podstawie których łatwo możemy wyznaczyć siły poprzeczne w znany sposób. Wielobok sznurowy wyznacza nam momenty.

*Podobnie wyl. od  
wsp. przegubów od  
wieloboku podpór  
należy także przy-  
mować, by momenty  
totalne wyrażony,  
wtedy się 2 momenty  
tam; podporowym.*

*Dla obliczeń statyki  
obliczamy najpierw  
ciężki ciężar, a potem  
wzrosty jej od  
tytułu, Rk. etc.  
tworzy zarysów i  
ty równobieżnie. Na  
wzrosty wystających  
a wady, nie są  
liczone jak belki  
podlega.*

*Wsp. poprzeczne  
trudniejsze w pro-  
gubach, można się  
zarysować przez  
co się wyrażony  
na statyki, poniżej  
mi. i. i. i. i. i. i. i. i. i.*



### §. 29. Linie wpływowe belki wystającej.

Nim wyznaczymy linie wpływowe dla belki ciągłej przegubowej, wyznaczamy je najprzód dla belki wystającej.

Rozumie się, że dla punktu  $H$  (rys. 66) między podporami  $AB$  linie wpływowe od  $A$  do  $B$  są te same, co dla belki zwy-

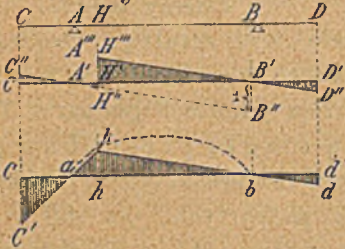
klej. Ponieważ równania dla  $Q$  i  $M$  (rów. 34, 37, i 38) nie zmieniają się, jeżeli ciężar przekroczy podporę  $A$  lub  $B$ , więc linie wpływowe poza podporami będą przedłużeniem linii wpływowych na długości  $AB$ , przezco powstaje zmiana znaku  $Q$  i  $M$ .

Dla przekrojów  $J$  i  $K$  (rys. 67.) w częściach wystających powstaje  $Q$  i  $M$  w ogóle tylko

wtedy, gdy siła leży na długości  $CJ$  albo  $KD$ , zresztą jest  $M=0$  i  $Q=0$ .

\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 30.

rys:66.



*Linie wpływowe od podp. C  
na punkt H.*  
*Linie wpływ. momentu  
na punkt H.*

Jeżeli ciężar  $P$  stoi na długości  $CJ$ , to w  $J$  jest  $Q = -P$ ,  $M = -P\xi$ . Zróbmy więc  $C_1 C_1' = x$  i połączmy  $C_1$  z  $J_1$  a otrzymamy linię wpływową dla momentu w  $J$ . Jeżeli ciężar stoi na długości  $KD$ , to w  $K$  jest  $Q = +P$ ,  $M = -P\xi$ , jeżeli  $\xi$  oznacza odstęp ciężaru od danego punktu (na prawo licząc ze znakiem dodatnim). Odnośne linie wpływowe wykreśliliśmy na rysunku 67. kreskowane.

### §. 30. Linie wpływowe belki ciągłej przegubowej.

Części wystające belki ciągłej  $AE$  i  $FD$  (rys. 68.) mają takie same linie wpływowe, jak belka wystająca. Jeżeli więc mamy wykreślić linię wpływową siły poprzecznej lub momentu dla punktu  $J$  lub  $K$ , to na długości  $AE$  otrzymamy je według poprzedniego paragrafu. W jaki sposób mamy dalej wykreślić linię wpływową na części wiszącej  $EF$ , zaraz zobaczymy.



Jeżeli ciężar  $P$  działa w odstępnie  $x$  od  $E$ , to rozkłada się na  $P'$  i  $P''$ . Dla wszystkich punktów

belki  $AE$  uwzględnić mamy tylko siłę  $P' = P \frac{b-x}{b}$ , działającą

w  $E$ . Jeżeli  $x=0$ , uwzględnić więc mamy całą siłę  $P$  w punkcie  $E$ , to otrzymamy według poprzedniego pewną rzędną linii wpływowej  $E'E''$ . Dla  $x=b$  t. j. dla punktu  $F$  jest  $P' = 0$ , więc i rzędna linii wpływowej  $= 0$ . Między tymi dwoma punktami linia wpływowa jest prosta, więc  $E''F'$ .

Rys. 68 b przedstawia linię wpływową dla siły poprzecznej w  $J$ , 68 d dla momentu w  $J$ , 68 c dla siły poprzecznej części wystającej w  $K$ , 68 e dla momentu w  $K$ .

Dla części wiszących są linie wpływowe, rozumie się, takie same, jak dla belki zwykłej, a obciążenie części wystających nie wpływa wcale na siłę poprzeczną lub moment tych części.

Na rysunku 69. wyznaczyliśmy na tej samej zasadzie linie wpływowe dla belki ciągłej, w której przeguby są w przęsłach skrajnych.

*Handwritten notes:*  
 a) Querkräfte-Einflusslinie. Bestimmt sich der Punkt, für den die Querkraft gesucht wird, zwischen den Stützen, so werden die Einflusslinien der einfachen Balkens, für die es sich im Bereiche der Stützen schreiben sehr leicht verlängert. Bestimmt sich der Punkt außerhalb der Stützen, so liegt der Fall der einfachen Tragträgeres dar.  
 b) Momenten-Einflusslinie. Bestimmt sich der Punkt, für den das Moment gesucht wird, zwischen den Stützen, so werden die Einflusslinien der einfachen Balkens





Podobnie jest dla momentu  $B'E'F'$  (rys. 68 d)

$$= \frac{1}{2} g \frac{a(a+b)}{l} x$$

więc 
$$M = \frac{1}{2} g x (1-x) - \frac{1}{2} g \frac{a(a+b)x}{l} \dots 106)$$

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu dadzą się zastosować wprost wzory 99) do 102) dla przęsła średniego z dwoma przegubami, jeśli przyjmiemy, że jedna z długości  $EB$  lub  $CF=0$ . (rys. 69 c.c.)

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 69).<sup>14</sup> W przegubach  $E$  i  $F'$  działają wtedy siły  $\frac{1}{2} gb$  i  $\frac{1}{2} gb_1$ . Ustawmy teraz równanie momentów ze względu na punkt  $C$ , a otrzymamy

$$O_2 l - \frac{1}{2} gb(a+l) - \frac{1}{2} g(a+l)^2 + \frac{1}{2} a_1^2 g + \frac{1}{2} gb_1 a_1 = 0,$$

a stąd oddziaływanie w  $B$

$$O_2 = \frac{g}{2l} [(a+l)(a+b+l) - a_1(a_1+b_1)].$$

Dla przekroju  $H$  w odstępnie  $x$  od  $B$  jest

$$Q = O_2 - \frac{1}{2} gb - g(a+x), \text{ a po wstawieniu wartości za } O_2$$

$$Q = \frac{g}{2l} [l(1-2x) + a(a+b) - a_1(a_1+b_1)] \dots 107)$$

Moment w punkcie  $H$  będzie  $M = O_2 x - \frac{1}{2} gb(x+a) - \frac{1}{2} g(a+x)^2$ ,

$$M = \frac{g}{2l} [lx(1-x) - a(a+b)(1-x) - a_1(a_1+b_1)x] \dots 108)$$

Jeżeli  $a=a_1$  i  $b=b_1$ , to

$$Q = \frac{g}{2} (l-2x) \quad \text{a} \quad M = \frac{g}{2} (x(l-x) - a(a+b)) \dots 109)$$

### §. 32. Największe siły poprzeczne.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami. Tu wyznaczmy tylko największe siły poprzeczne dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte.

Dla punktu  $K$  w odstępnie  $x$  od  $B$  linia wpływowa wykreślona jest na rys. 68 c. Dla  $najw (+Q)$  ma być obciążona długość  $KF$ , przyczem otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} najw (+Q) &= p K' K'' E'' F' = p (a - x + \frac{1}{2} b) \\ najw (-Q) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots 110)$$

Dla części  $FC$  można zastosować te same wzory, zmieniwszy tylko znak.

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy obciążyć dla  $najw (+Q)$  długość  $KF$ , największe ciężary umieścić na długości  $KE$  i jeden ciężar postawić na  $K$ .

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Dla  $najw (-Q)$  musi być obciążona lewa część odnośnego przęsła i przęsło sąsiednie do drugiego przegubu (rys. 68 *b*).

Dla obciążenia długości  $AJ$  w przęsle  $AB$  będzie, jak dla belki zwykłej  $najw (-Q) = -\frac{px^2}{2l}$ , dla obciążenia długości  $BF$   $Q = -\frac{p}{2} E'E''(a+b)$ . Z rysunku widzimy, że  $E'E'' : l = a : l$ , więc  $E'E'' = \frac{a}{l}$ . Wstawivszy to, otrzymamy dla obciążenia długości  $AJ$  i  $BF$

$$najw (-Q) = -\frac{px^2}{2l} - \frac{pa}{2l}(a+b) = -\frac{p}{2l}(x^2 + a(a+b)) \quad . \quad 111)$$

Dla  $najw (+Q)$  ma być obciążona długość  $JB$ , więc jak dla belki zwykłej  $najw (+Q) = +\frac{p(1-x)^2}{2l} \dots \dots \dots 112)$

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy dla większości obciążyć prawą stronę przęsła, jak dla belki zwykłej: dla  $najw (-Q)$  należy obciążyć lewą część przęsła i długość  $BF$ . Dla mostów drogowych należy więc przyjąć dwa oddzielne układy ciężarów skupionych, pierwszy ciężar jednego postawić na  $J$ , drugiego zaś jeden z ciężarów na  $E$  wedle §. 13. i 15. Przy mostach kolejowych jestto niemożliwe, należałoby więc przyjąć takie obciążenie mostu, aby na długości  $AJ$  znajdowały się parowozy, przyczem na  $J$  stoi jedno koło, na długości  $JB$  wozy próżne, a na  $BF$  parowóz lub wozy ładowne.

2. Przęsło skrajne z przegubem. Tu da się zastosować wzór 110) dla przęsła średniego z dwoma przegubami. Widzimy bowiem na rys. 69 $\epsilon$  że linia wpływowa jest taka sama, jak w powyższym wypadku.

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 69 *b*). Dla  $najw (+Q)$  ma być obciążona prawa część przęsła odnośnego i sąsiednie lewe przęsło, dla  $najw (-Q)$  przeciwnie część lewa odnośnego przęsła i sąsiednie prawe przęsło.

Przy obciążeniu długości  $HC$  danego pręśła powstaje siła poprzeczna jak przy belce zwykłej  $Q_1 = \frac{p(l-x)^2}{2l}$ , przy obciążeniu pręśła  $AB$   $Q_2 = p \cdot \frac{1}{2}(a+b) E'E'' = \frac{p(a+b)a}{2l}$ ,

więc  $najw (+Q) = Q_1 + Q_2 = \frac{P}{2l} [(l-x)^2 + a(a+b)]$ . . . 113

Podobnie otrzymamy

$$najw (-Q) = -\frac{P}{2l} [x^2 + a_1(a_1 + b_1)] \dots 114$$

Co do obciążenia układem ciężarów skupionych zastosować możemy i tutaj uwagi, wypowiedziane pod 2.

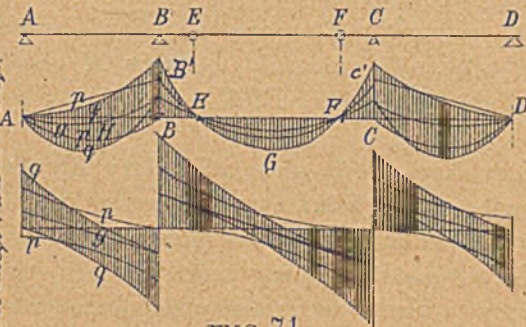
Na rys. 70. i 71. oznaczyliśmy wedle powyższego *najw.*  $(+Q)$  i *najw.*  $(-Q)$ .

W części wiszącej są, rozumie się, linie *najw.* sił poprzecznych te same, co dla belki zwykłej.

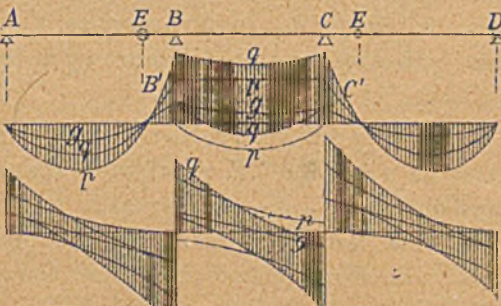
W częściach wystających pręśła średniego z dwoma przegubami są te linie proste wedle rów. 110). To samo da się powiedzieć o części wystającej pręśła skrajnego (rys. 71). Linie te proste są stycznymi do linii *najw.*  $Q$  w przegubach.

W pręśle skrajnem bez przegubu (rys. 70) linia *najw.*  $(+Q)$  jest parabolą, jak dla belki zwykłej (rów. 112), linia *najw.*  $(-Q)$  jest także parabolą o osi pionowej, lecz nie jest styczną do osi, gdyż dla  $x=0$  jest  $najw (-Q) = -\frac{pa(a+b)}{2l}$ .

rys. 70



rys. 71.



Linie najw i najm. momentów i sił poprzecznych. Na części obciążonej, ruchomego i nieruchomego.

W przęśle średnim bez przegubu (rys. 71.) linie *najw* (+ *Q*) i *najw* (— *Q*) są według rów. 107) i 108) parabolami o osi pionowej, nie dotykającymi jednak osi.

### §. 33. Największe momenty.

1. Przęśło średnie z dwoma przegubami. Tutaj także wyznaczmy tylko największe momenty dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte. Dla punktu *K* mamy wykreśloną linię wpływową *K'E''F'* (rys. 68 *e*), z której widzimy, że dla *najw* (— *M*) mamy obciążyć długość *K'F'*, a obciążenie reszty belki jest obojętne. Możemy więc także przyjąć obciążenie zupełne belki, dla którego już w §. 31. wyznaczaliśmy moment. Zmienimy tylko *g* na *p* w rów. 104.) i otrzymamy:

$$najw (-M) = \frac{1}{2} px (b - x) \dots \dots \dots 115)$$

przyczem *x* należy liczyć od punktu *E* na prawo, jako dodatnie, na lewo jako ujemne. Z rów. 115) widzimy, że *najw M* przedstawia wykreślenie przedłużenie paraboli *EGF* (rys. 70) dla części wiszącej.

Dla układu ciężarów skupionych obciążyć należy długość *KF* (rys. 66), jak dla momentów belki zwykłej w ten sposób, aby ciężar jednostkowy na *KE* i *EF* był, ile możności, równy, a jeden ciężar stał na *E*. Obciążenie reszty belki jest obojętne.

Wyznaczyć momenty wykreślenie możemy zapomocą wieloboku sznurowego, jak dla belki zwykłej (§. 17.), uwzględnivszy tę okoliczność, że moment w przegubie jest równy zeru, że więc linia zamykająca musi przecinać wielobok sznurowy w tem miejscu.

2. Przęśło skrajne bez przegubu. Linia wpływowa momentów wykreślona jest na rys. 68 *d*. Z rysunku widzimy że dla *najw* (+ *M*) ma być obciążone całe dane przęśło, na którym linia wpływowa *A'J''B'* ma kształt taki sam, jak dla belki zwykłej, następne zaś przęśło do *F* ma być nieobciążone. Otrzymamy więc moment taki sam, jak dla belki zwykłej-

$$najw (+M) = \frac{1}{2} px (l - x) \dots \dots \dots 116)$$

Jestto równanie paraboli *AHB* (rys. 70).

Dla *najw* (— *M*) nie powinno być obciążone przęśło skrajne *AB*, przęśło następne ma być obciążone do *F*, a obciążenie

reszty belki jest obojętne. Widzimy więc, że obciążenie dla *najw* ( $-M$ ) uzupełnia obciążenie dla *najw* ( $+M$ ) do obciążenia zupełnego.

A zatem *najw* ( $+M$ ) =  $M_z$  - *najw* ( $+M$ ), więc <sup>zostaje równ. 106.</sup>

$$najw (-M) = \frac{1}{2} px(l-x) - \frac{1}{2} p \frac{a(a+b)x}{l} - \frac{1}{2} px(l-x), \text{ zatem}$$

$$najw (-M) = -\frac{1}{2} p \frac{a(a+b)x}{l} \dots \dots \dots 117)$$

Jestto równanie linii prostej  $AB'$  (rys. 70).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linii wpływowych, zastosować więc tu należy prawidła, wyłożone przy momentach belki zwykłej.

3. Przeszło skrajne z przegubem. Tu zastosować się da wzór 115), jeśli tylko zmienimy  $b$  na  $l$ , więc (rys. 69e)

$$najw (+M) = \frac{1}{2} px(l-x) \dots \dots \dots 118)$$

4. Przeszło średnie bez przegubu. Linie wpływowe momentów wykreślone są na rys. 69d. Wynika z nich, że dla *najw* ( $+M$ ) ma być dane przęsło całe obciążone, a sąsiednie przęsła nie. Ponieważ jednak linia wpływowa w danym przęśle  $BC$  jest taką samą, jak dla belki zwykłej, więc i *najw* ( $+M$ ) da się tym samym wzorem wyrazić. Zatem

$$najw (+M) = \frac{1}{2} px(l-x) \dots \dots \dots 119)$$

*Najw* ( $-M$ ) wyznaczamy, jak pod 2), mianowicie

*najw* ( $-M$ ) =  $M_z$  - *najw* ( $+M$ ), więc według równ. 108)

$$najw (-M) = \frac{p}{2l} [lx(l-x) - a(a+b)(l-x) - a_1(a_1+b_1)x] + \\ - \frac{1}{2} px(l-x),$$

$$najw (-M) = -\frac{p}{2l} [a(a+b)(l-x) + a_1(a_1+b_1)x] \dots \dots \dots 120)$$

Jeżeli  $a=a_1$ ,  $b=b_1$  to

$$najw (-M) = -\frac{p}{2} a(a+b) \dots \dots \dots 121)$$

Jestto równanie linii prostej poziomej  $B'C'$  (rys. 71).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linii wpływowych. Dla *najw* ( $-M$ ) muszą być dwa układy ciężarów skupionych dla mostów drogowych, dla kolejowych zaś należy pociąg w ten sposób przyjąć, jak to wyłożyliśmy w §. 32. ust. 2.

Na rys. 70. i 71. dodaliśmy siły poprzeczne i momenty, wywołane ciężarem własnym i ruchomym i otrzymaliśmy linie najw  $Q$  i najw  $M$  dla obciążenia równoczesnego.

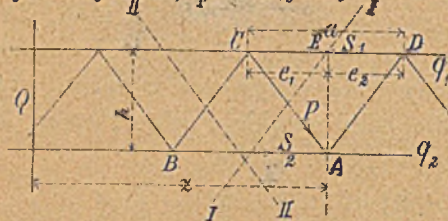
## C. Belka kratowa równoległa.

(Parallel-Gitterträger)

### VII. Belka o kracie pojedynczej.

#### §. 34. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Belkę kratową poznaliśmy już w wykładzie statyki budowli \*); poznaliśmy tam rozmaite jej rodzaje i jej części składowe. Tu podamy dalsze rozwinięcie zasad tamże podanych, a najprzód zastanawiać się będziemy nad belką kratową równoległą o kracie pojedynczej. Przetnijmy daną belkę, której część widzimy na rys. 72., płaszczyzną  $HI$  i odejmy prawą część belki.



Aby lewa część pozostała w równowadze, musimy w przeciętych przekrojach zaczepić takie siły, jakie w nich pierwszej działały. Ponieważ zakładamy, że siły zewnętrzne działają

tylko w węzłach, a krzyżulce są połączone przegibnie, więc siły wewnętrzne działają w kierunku osi przeciętych prętów.

Nazwijmy  $S_1$  i  $S_2$  siły wewnętrzne, działające w pasach belki równoległej,  $P$  siłę, działającą w krzyżulcu  $CA$ ,  $h$  wysokość belki,  $Q$  siłę poprzeczną czyli wypadkową wszystkich sił, działającą na lewą część belki, to na lewą część belki działają cztery siły:  $S_1$ ,  $P$ ,  $S_2$  i  $Q$ . Cztery te siły muszą być w równowadze, więc ze względu na punkt  $A$  suma momentów wszystkich sił musi być równą zeru. Zatem  $M_1 + S_1 h = 0$ , jeżeli  $M_1 = Qz$  jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt  $A$ . Stąd otrzymamy:

$$S_1 = -\frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 122)$$

\*) p. Podr. Statyki Budowli, II wyd. str. 323. i nast.

\* Siły działające w pasach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do momentów sił zewnętrznych, przyrównano do pasie górnej powstaje odśrodkowe, a do pasie dolnej odśrodkowe. Siły wewnętrzne, ma w chwili rozciągnięcia są największe, w połowie najmniejszej.

Podobnie otrzymamy za względu na punkt  $C$  *Na przekroju II-II*

$$M_2 - S_2 h = 0, \text{ więc} \quad S_2 = \frac{M_2}{h}, \dots \dots \dots 123)$$

jeżeli  $M_2$  jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt  $C$ .  $M_2 = Q(x - e_1)$

Jeżeli siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, to objętą jest rzeczą, jak przetniemy belkę w tym przedziale. Jeżeli zaś przypuścimy, że pas górny i dolny są obciążone jednostajnie ciężarem  $q$  i przy obliczaniu momentów i sił poprzecznych nie będziemy uwzględniać poprzecznic w węzłach, to nie jest objętym, jak przecinamy belkę. Musimy mianowicie przeciąć tak, abyśmy otrzymali te same siły zewnętrzne, którebyśmy otrzymali, gdyby ciężary w węzłach działały, a więc w połowie obu części pasów, zatem ukośnie w prostej  $H$ , równoległej do  $BC$ . Ponieważ przy wyznaczaniu sił zewnętrznych zawsze przypuszczaliśmy przekroje pionowe, więc zamiast przekroju  $H$  prowadzimy przekrój pionowy  $AE$  i robimy pewną poprawkę.

I tak, jeżeli ciężar działa w węzłach, a ciężar jednostkowy dla pasu górnego jest  $q_1$ , to gdy uwzględnimy tylko dany przedział, działa w węźle  $C$  siła  $\frac{1}{2} q_1 a$ , a więc moment tej siły ze względu na  $A$  będzie  $-\frac{1}{2} q_1 a e_1$ . Jeżeli zaś wyznaczymy moment dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, to ciężar na  $CE$  da nam moment  $-\frac{1}{2} q_1 e_1^2$ . Nazwijmy  $x$  poprawkę, którą dodać trzeba do tego momentu, aby otrzymać moment dla sił działających w węzłach, to  $-\frac{1}{2} q_1 e_1^2 + x = -\frac{1}{2} q_1 a e_1$ , stąd  $x = -\frac{1}{2} q_1 e_1 (a - e_1) = -\frac{1}{2} q_1 e_1 e_2$ . Ze względu na tę poprawkę otrzymamy zamiast wzorów 122) i 123) wzory następujące

$$S_1 = -\frac{M_1}{h} + \frac{q_1 e_1 e_2}{2h} \dots \dots \dots 124)$$

$$S_2 = +\frac{M_2}{h} - \frac{q_2 e_1 e_2}{2h} \dots \dots \dots 125)$$

Poprawki te musimy zastosować do ciężaru własnego belek głównych, jeżeli nie uwzględniamy poprzecznic przy obliczeniu  $M$ . Dla reszty ciężaru stałego i ciężaru ruchomego nie potrzebujemy dodawać poprawek, gdyż zazwyczaj wyznaczamy siły zewnętrzne ze względu na poprzecznicę, położone w węzłach. Ponieważ uwzględnienie poprzecznic nie sprawia trudności, więc licząc momenty i siły poprzeczne na podstawie ciężarów węzłowych, nie potrzebujemy wcale poprawek nawet dla ciężaru własnego belek.

*W rezultacie ciężary zastępujemy w węzłach. Jedynym wyjątkiem stanowi byłby ciężar własny belek, którebyśmy jednakże zastąpili siłą zmienną wzdłuż belki, co przeważnie nie jest wygodne, jeżeli ciężar przekroju przyjmujemy rozłożony na dwa punkta. Rozważmy: Należy do belek, które są obciążone, nie musimy uwzględniać, należy uważać za błąd.*





### §. 36. Wykreślne wyznaczenie sił wewnętrznych.

a) Sposób wielobokowy.

Wykreślne możemy wyznaczyć siły wewnętrzne dla danego obciążenia zapomocą planu sił\*).

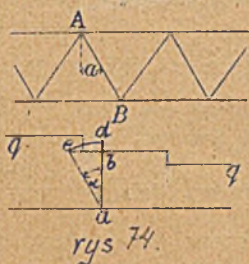
Wyznaczywszy oddziaływania znanym sposobem, wykreślamy wielobok sił na linii  $mn$  (rys. 9, tabl. I), albo też rozsuwamy go dla przejrzystości tak, jak to na rysunku uwidoczniliśmy.

Teraz wykreślamy w znany sposób plan sił i tak wyznaczamy wszystkie siły zewnętrzne. Sposobu tego z korzyścią użyć możemy dla ciężaru stałego i także do obliczania sił wewnętrznych w pasach, wywołanych ciężarem ruchomym ciągłym, gdyż wiemy, że największe siły wewnątrz w pasach powstają dla obciążenia zupełnego.

Dla obciążenia układem ciężarów skupionych jest najniekorzystniejsze obciążenie dla każdej części pasu inne, więc musielibyśmy dla każdej części pasu kreślić osobny rysunek. Także i dla krzyżulców sposób ten nie da się użyć z korzyścią.

b) Wyznaczenie sił wewnętrznych na podstawie sił poprzecznych i momentów.

1. Krzyżulce. Jeżelibyśmy otrzymali linię  $qq$  (rys. 74.), jako linię największych sił poprzecznych, to dla krzyżulca  $AB$  przedstawia *najw*  $Q$  długość  $ab$ .



Według rów. 126) jest  $P=Q$  siecz  $\alpha$ , więc  $P=ab$  siecz  $\alpha$ . Wykreślmy przez punkt  $a$  linię  $ae \parallel AB$ , to  $ae=ab$  siecz  $\alpha$ , więc  $ae=\text{najw } Q$  siecz  $\alpha=\text{najw } P$ . Zatem  $ae$  przedstawia największą siłę wewnętrzną, działającą w  $AB$ .

Jeżeli podzielimy  $P$  przez natężenie dopuszczalne  $\tau$ , to otrzymamy powierzchnię przekroju  $A$ . Dla stałego  $\tau$  możemy to zrobić, zmieniając odpowiednio podziałkę, a wtedy  $ae$  przedstawia wprost powierzchnię przekroju.

2. Pasy. Według rów. 122) siła wewnętrzna w pasie górnym lub dolnym bez względu na znak jest  $S=\frac{M}{h}$ . Jeżeli  $man$  przedstawia linię *najw*  $M$  (rys. 75), a chcemy wyznaleść siłę

\* P. Podr. Statyki Budowli II wyd., str. 327 i 331.

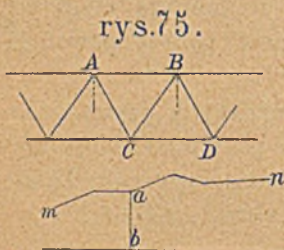
wewnętrzna w części pasu  $AB$ , to największy moment dla dla punktu  $C$  jest  $ab$ .

Moment ten mamy jeszcze podzielić przez  $h$ , co najlepiej zrobić, zmieniając podziałkę tak, że linia  $ab$  da wprost siłę wewnętrzną  $S$ . Jeżeli chcemy otrzymać przekrój, należy dla stałego natężenia dopuszczalnego jeszcze raz zmienić podziałkę.

$$A = \frac{S}{l}$$

### §. 37. Belka o kracie równoramiennej.

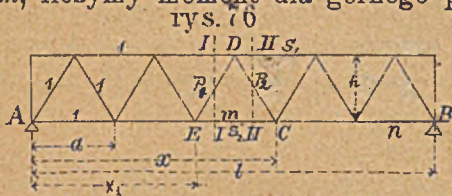
Zwykle odstęp węzłów jest równy, wtedy  $x=ma$ , gdy  $m$  jest współczynnikiem,  $a$  zaś oznacza odstęp węzłów czyli długość przedziału. Wtedy dadzą się  $Q$  i  $M$  przedstawić jako funkcje  $m$  i dadzą się ustawić wzory, z których po wstawieniu rozmaitych wartości na  $m$  otrzymamy siłę wewnętrzną.



Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne belki kratowej o kracie równoramiennej w powyższy sposób, przyczem przypuścimy obciążenie jednostajne ciążę i pomost na dole.

1. Pasy. Z rys. 76. widzimy, że  $l=na$ , gdy  $n$  oznacza ilość przedziałów.

Dla wyznaczenia siły wewnętrznej części pasu, oznaczonej  $m$ , liczymy moment dla górnego pasu ze względu na punkt  $C$ ,



dla dolnego zaś ze względu na punkt  $D$ , więc dla górnego  $x=ma$ , dla dolnego

$$x = (m-1)a + \frac{1}{2}a = \frac{2m-1}{2}a.$$

A zatem otrzymamy momenty dla

pasu górnego  $M_1 = \frac{1}{2}qx(l-x) = \frac{1}{2}qma(na-ma) = \frac{1}{2}m(n-m)a^2q,$

„ dolnego  $M_2 = \frac{1}{2}q \frac{2m-1}{2} a(na - \frac{2m-1}{2}a) =$

$$= \frac{1}{8}(2m-1)(2n-2m+1)a^2q.$$

Ponieważ przyjęliśmy tu ciężar jednostajnie rozłożony, więc mamy jeszcze zrobić poprawkę według rów. 124) i 125)

przyczem  $e_1=e_2=\frac{a}{2}$ , zatem poprawka  $-\frac{1}{2}q_1e_1e_2 = -\frac{1}{8}q_1a^2$ , je-

żeli nazwiemy  $q_1$  ciężar zupełny ( $q=p+g$ ), działający na górnym pasie, a  $q_2$  na dolnym. Zatem

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{a^2}{8h} [4m(n-m)q - q_1] \\ S_2 &= +\frac{a^2}{8h} [(2m-1)(2n-2m+1)q - q_1] \end{aligned} \right\} \dots 130)$$

2. Krzyżulce. Według §. 35. wyznaczamy  $Q$  dla przekroju pionowego przez środek krzyżulca, więc dla  $DE$  dla przekroju  $HI$ , zatem  $x_1 = (m-1)a + \frac{1}{4}a = (m - \frac{3}{4})a$ , a dla  $DC$  przecinamy według  $III$ , zatem  $x_2 = (m-1)a + \frac{3}{4}a = (m - \frac{1}{4})a$ .

Dla ciężaru własnego mamy  $Q = \frac{1}{2}g(l-2x)$ , więc dla  $DE$  jest  $Q_1 = \frac{1}{2}agn - ag(m - \frac{3}{4})$ , dla  $DC$  jest  $Q_2 = \frac{1}{2}agn - ag(m - \frac{1}{4})$ . Do tego mamy dodać poprawkę według rów. 128) i 129).

Tutaj jest  $\text{st } \alpha = \text{st } \beta = \frac{a}{2h}$ , a więc poprawka będzie

$$\frac{1}{2}h \text{ st } \alpha (g_1 - g_2) = \frac{a}{4} (g_1 - g_2),$$

gdy  $g_1$  i  $g_2$  oznaczają ciężar stały, działający na węzłach pasu górnego i dolnego.

Dla ciężaru zmiennego jest  $AE = x_1 = (m-1)a$ , zaś według rów. 96) najw  $Q = \frac{p(l-x_1-a)^2}{2(l-a)}$ , więc

$$P_1 = [\frac{1}{2}agn - (m - \frac{3}{4})ag - (g_1 - g_2)\frac{1}{4}a] \text{ siecz } \alpha + \\ + p \frac{[na - a - (m-1)a]^2}{2(na-a)} \text{ siecz } \alpha,$$

$$\text{czyli } \left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{4} \left\{ (2n - 4m + 3)g - g_1 + g_2 \right\} a \text{ siecz } \alpha + \\ &\quad + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} pa \text{ siecz } \alpha \\ P_2 &= \frac{1}{4} \left\{ (2n - 4m + 1)g + g_1 - g_2 \right\} a \text{ siecz } \alpha + \\ &\quad - \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} pa \text{ siecz } \alpha \end{aligned} \right\} \dots 131)$$

### §. 38. Przykład.

*Tabl. I*

Most kolejowy jednotorowy od dwu belkach kratowych z kratą równoboczną o rozpiętości teoretycznej 21m. Pomost leży u dołu (tabl. I). — Przyjmujemy wysokość belki  $h=2,5m$ , a odstęp węzłów  $\frac{21}{7}=3m$ . Niechaj będzie według Otta (§. 2.) ciężar stały dla jednej belki  $g = \frac{1}{2}(30.21 + 800) \frac{kg}{m} = 0,7 \frac{t}{m}$ . Ponieważ według §. 2. pomost

z poręczami waży w przybliżeniu 500 kg/m, więc dla jednej belki 0,25 t/m i działa na pas dolny, to  $g_1 = 0,23 \frac{t}{m}$ ,  $g_2 = 0,48 \frac{t}{m}$ . Jako ciężar ruchomy przyjmujemy pociąg normalny austriacki (rys. 12.), a natężenie dopuszczalne według rozporządzenia austriackiego, więc  $\tau = 700 + 2l = 742 \text{ kg/cm}^2$ .

Pasy. Moment z powodu ciężaru stałego otrzymamy według poprzedniego paragrafu dla węzłów dolnych

$$M_1 = \frac{1}{2} m(7-m)a^2g - \frac{1}{2} g_1 a^2 = \frac{m(7-m)}{2} 9.0,71 - \frac{1}{2} 0,23.9 = \\ = 3,195 m(7-m) - 0,26 \text{ tm.}$$

Dla węzłów górnych otrzymamy

$$M_2 = \frac{1}{2} (2m-1)(2.7 - 2m+1) 9.0,71 - \frac{1}{2} 0,48.9 = 0,799 (2m-1)(15 + \\ - 2m) - 0,54 \text{ tm.}$$

Dla ciężaru ruchomego wyznaczamy według §. 15. najniekorzystniejsze obciążenie i otrzymujemy, że dla węzła 1. ma stać na nim 2. koło, dla węzłów 2. i 3. trzecie koło, dla węzła I ma stać na prawej poprzeczniczy 2. koło, dla węzłów zaś II, III i IV 3. koło. Dla tych położenia pociągu obliczyliśmy według §. 16. najw. momenty. Dla węzłów pasa górnego obliczyliśmy dla najniekorzystniejszego położenia momenty na obu sąsiednich poprzecznicach  $M'$  i  $M''$ , wtedy  $M = \frac{1}{2} (M' + M'')$ .

Silę wewnętrzną obliczyliśmy wedle wzoru (122) i (123), zaś przekrój teoretyczny wedle wzoru  $A = \frac{S}{\tau} = \frac{S}{0,742}$ . Wyniki obliczenia zestawiliśmy w następnym tabliczce dla połowy belki, dla drugiej połowy są one takie same.

Część pasu	Moment w tm			Siła wewnętrzna t	przekrój teoretyczny cm <sup>2</sup>	
	ze względu na węzeł	z powodu ciężaru				
		stałego	ruchomego			razem
0 1	I	10,3	41,9	52,2	20,9	28,2
1 2	II	25,8	103,9	129,7	51,9	70,0
2 3	III	35,4	139,7	175,1	70,0	94,3
3 4	IV	38,6	148,0	186,6	74,6	100,5
0 1	0	0	0	0	0	0
I II	1	18,9	83,8	102,7	41,8	56,3
II III	2	31,7	130,4	162,1	64,8	87,3
III IV	3	33,1	155,6	193,7	77,5	104,4

Wykreślenie wyznaczyliśmy siły wewnętrzne w pasach na tabl. I. i przyjęliśmy następane podziałki: I dla długości  $\frac{1 \text{ cm}}{2 m} = 1:200$ , II dla sił  $\frac{1 \text{ mm}}{1 t}$ . Przyjąwszy odległość biegunową  $a = 20t$ , mamy III podziałkę dla momentów  $\frac{1 \text{ cm}}{20 \cdot 2 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ cm}}$ . Dla ciężaru stałego przyjęliśmy 4 razy większą odległość biegunową  $a = 80t$ , za to przyjęliśmy także dla ciężarów 4 razy większą podziałkę  $\frac{4 \text{ mm}}{1 t}$  tak, że momenty odczytujemy w tej samej podziałce, co dla ciężaru ruchomego. Chcąc odczytać wprost przekroje, zro-

biliśmy podziałkę IV  $\frac{1 \text{ mm}}{4 : (2,5 \cdot 0,742)} = \frac{1 \text{ mm}}{2,156 \text{ cm}^2}$ . Przekroje te wykreśliśmy według podziałki V  $\frac{1 \text{ cm}}{50 \text{ cm}^2}$ , na rys. 8, który przedstawia teoretyczny rozkład materiału pasów.

Krzyżulce. Dla ciężaru stałego najlepiej wyznaczyć siły poprzeczne na podstawie ciężarów węzłowych. Ciężar węzłowy w pasie dolnym wynosi  $G = 3.0,48 = 1,44 t$ , w pasie górnym  $G_1 = 3.0,23 = 0,69 t$ , w punktach  $C$   $G_2 = \frac{2}{3} 3.0,23 = 0,52 t$ , w  $D$   $G_3 = \frac{1}{4} 3.0,23 = 0,17 t$ . Oddziaływanie wyznaczamy, nie uwzględniając ciężarów węzłowych w  $A$  i  $B$ , bo one przenoszą się wprost na podpory. A więc otrzymamy  $O_1 = \frac{1}{2} (6.1,44 + 5.0,69 + + 2.0,69 + 2.0,52 + 2.0,17) = 6,785 t$ . Siły poprzeczne wyznaczymy teraz przez odejmowanie.

Siły poprzeczne dla ciężaru ruchomego obliczyliśmy na podstawie §. 25, przyczem dla pierwszego przedziału stoi drugie koło na 1. Dla tego położenia jest

$$O_1 = \frac{1}{1} (26.17,4 + 15.9,6 + 26.1,8) = 30,63 t. \quad Q = 30,63 - \frac{6,5 \cdot 1,2}{3} = 28,03 t.$$

Dla następnych przedziałów sprawia *najw*  $Q$  położenie pociągu, gdy 1 koło parowozu stoi na prawej poprzecznicy. Dalej mamy  $P = Q$  siecz  $\alpha$ , przyczem  $\text{st } \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$ , więc siecz  $\alpha = \sqrt{1+0,6^2} = 1,166$ . Przekrój obliczyliśmy wedle

wzoru  $A = \frac{P}{0,742}$ , a dla porównania także według wzoru 23) w §. 9, przy-

$$\text{czem } \tau = 700 \left( \frac{P_0}{P_0 + 1,3 P_1} \right).$$

Krzyżulce	siła poprzeczna w $t$					Przekrój teoretyczny w $\text{cm}^2$	
	w skutek ciężaru własnego	w skutek ciężaru ruchomego		suma		według rozp. minist.	wedle wzoru Weyr.
		<i>najw</i> (+ $Q$ )	<i>najw</i> (- $Q$ )	<i>najw</i> (+ $Q$ )	<i>najw</i> (- $Q$ )		
0 0	+ 0,17	—	—	+ 0,17	+ 0,17	— 0,2	— 0,2
0 I	+ 6,57	+ 28,03	0	+ 34,60	+ 6,57	— 54,4	— 53,5
I 1	+ 6,05	+ 28,03	0	+ 34,08	+ 6,05	+ 53,5	+ 53,0
I II	+ 4,61	+ 20,20	- 1,67	+ 24,81	+ 2,94	— 38,9	— 39,4
II 2	+ 3,92	+ 20,20	- 1,67	+ 24,12	+ 2,25	+ 37,9	+ 38,7
2 III	+ 2,48	+ 14,34	- 5,20	+ 16,82	- 2,72	— 26,4	— 30,8
III 3	+ 1,79	+ 14,34	- 5,20	+ 16,13	- 3,41	+ 25,3	+ 29,3
3 IV	+ 0,85	+ 9,14	- 9,14	+ 9,49	- 8,79	— 14,9	— 25,5

Z tabliczki powyższej widzimy, że przekroje krzyżulców w średniej części belki, obliczone według rozporządzenia austriackiego, są za małe. Znak — w dwu ostatnich kolumnach oznacza, że przekrój pracuje na ciśnienie.

Wykreślenie wyznaczyliśmy siły poprzeczne według zasad, poprzednio wyłożonych, mierząc siły wedle podziałki II. Na pionowej przez  $A$  odcinamy ciężary kół parowozów i jaszczyka (rys. 2.) i przyjąwszy biegun w  $B$ , kreślimy wielobok sznurowy, którego rzędne przedstawiają oddziaływania

$O_1$  dla obciążenia jednostronnego, dlatego nazywamy go też wielobokiem oddziaływań. A że dla tego obciążenia *najw*  $Q = O_1$  więc według §. 25. otrzymamy siły poprzeczne, kreśląc poziome z punktów przecięcia się wieloboku  $O_1$  z punktami węzłowymi. Badamy także, czy drugie koło nie sprawia *najw*  $Q$  (p. rys. 58). Gdy drugie koło stoi w  $r$ , pierwsze w  $m$ ,  $P_1$  rozdziela się na  $P' = mn$ , i  $P'' = P_1 - mn$ . Wtedy  $Q = O_1 - P' = mp - mn = np$ . Zróbmy  $rt = np$ , to widzimy, że tu  $rt > rs$ . A więc w pierwszym przedziale drugie koło na węźle sprawia największość. Powtarzając to samo dla innych węzłów, przekonamy się, że zresztą wszędzie 1 koło sprawia *najw*.  $Q$ . Dodajmy do tego siły poprzeczne w skutek ciężaru własnego, a otrzymamy *najw*. siły poprzeczne. Przez siecz  $\alpha$  pomnożyliśmy, kreśląc równoległe do krzyżulców. Długości te przedstawiają siły wewnętrzne  $P$ , a odczytane według podziałki VI przekroje teoretyczne. Podziałkę VI zrobiliśmy, zmieniając jednostkę podziałki II w stosunku 0,742:1, więc

$$\frac{1 \text{ mm}}{1 : 0,742 \text{ cm}^2} = \frac{1 \text{ mm}}{1,35 \text{ cm}^2}$$

Siły wewnętrzne wskutek ciężaru własnego wyznaczyliśmy oprócz tego według metody wielobokowej w rys. 9, a to według podziałki VII  $\frac{1 \text{ cm}}{2t}$ . Wielobok sił  $mn$  rozsuwamy przytem dla przejrzystości i kreślimy go w ten sposób, że uwzględniamy osobno ciężary węzłowe górne i dolne i kreślimy je po porządku naokół belki, a więc ciężary dolne, 1, 2, 3...6, oddziaływanie  $O_2$ , potem ciężary górne VIII, VII...1, 0, nakoniec  $O_1$ . Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

### *Lawiszenie* §. 39. Podparcie poprzecznie drugorzędne.

Ze względów ustrojowych nieraz odstęp węzłów jest za wielki i zachodzi potrzeba urządzenia poprzecznie między węzłami. Punkty te pasu podpieramy wtedy osobnymi krzyżulcami i otrzymujemy w ten sposób kratę z drugorzędnym <sup>zacięciem</sup> podparciem. Rysunek 77. przedstawia belkę z <sup>zacięciem</sup> podparciem drugorzędnym pasu dolnego. Zbadajmy jakie są linie wpływowe krzyżulców drugorzędnych i o ile zmieniają się te linie prętów pierwszorzędnych belki kratowej.

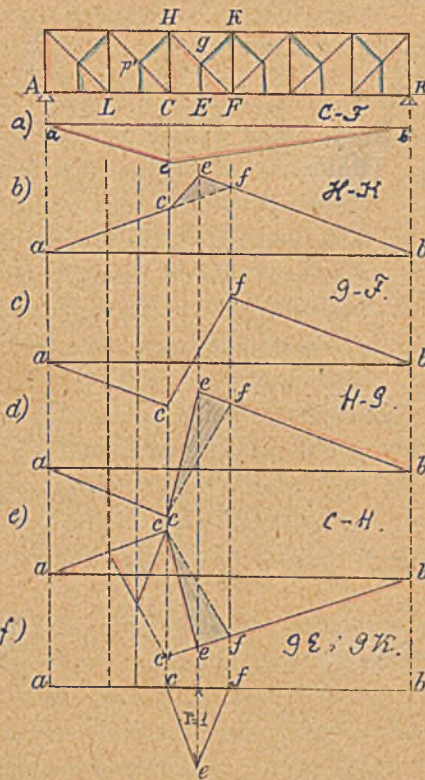
Jeżeli siła  $P=1$  działa w  $E$ , to ciągnięcie w  $GE$  jest równe  $P$ , a linia wpływowa ma kształt trójkąta *cef* (rys. *f*). Dla największości ciągnięcia w  $GE$  ma być przedział całkowicie obciążony, obciążenie reszty przęsła jest obojętnem. Ciągnięcie w  $EG$  równa się ciężarowi węzłowemu w  $E$ .

W ścięgnię drugorzędnem  $GK$  powstaje wskutek ciężaru  $P$  w  $E$  ciągnięcie  $P$  siecz  $\alpha$ , linia wpływowa ma ten sam kształt, co dla  $EG$ , należy rzędne tylko pomnożyć przez  $\frac{1}{2}$  siecz  $\alpha$ .

Co się tyczy prętów pierwszorzędnych w przedziale  $CEF$  to drugorzędne podparcie sprawia tylko zmianę linii wpływowej w tym przedziale, poza przedziałem linie wpływowe zostają

takie same, jak gdyby nie było drugorzędno-  
go podparcia. Dla pa-  
su górnego  $HK$  przed-  
stawia rys. b) linię  
wpływową. Powierz-  
chnia wpływowa zo-  
stała tu zwiększoną o  
trójkąt  $cef$ . Dla pasu  
dolnego  $CF$  linia wpły-  
wowa  $(a-f)$ , a zatem i siły  
wewnętrzne pozostają  
te same, co dla kraty  
bez podparcia drugo-  
(rys. a)  
rzednego. To samo  
możemy powiedzieć o  
linii wpływowej ścię-  
gna  $GF$  (rys. c), gdy  
powierzchnia wpływo-  
wa dla ścięgna  $HG$   
(rys. d) jest zwiększo-  
ną o trójkąt  $cef$ . O ta-  
kiż trójkąt  $cef$  jest też  
zwiększoną powierz-  
chnia wpływowa siły  
wewnętrznej w słupie

rys. 77.



Zawieszenie na pasach górnym.

$CH$ . Dla słupa  $HC$  otrzymujemy linię wpływową  $e$ . Tutaj za-  
chodzi zmiana także na długości  $CL$ , bo przecięcie słupa trafia  
też pręt  $Hp'$ , należący do drugiego przedziału pod wpływem ścięgna  $Hg'$ .

O prawdziwości podanych w rys. 77. linii wpływowych  
przekonać się można łatwo w następujący sposób. Przypuśćmy, że  
w  $C$  działa siła  $P=1$  i wykreślmy dla tego wypadku plan sił,  
powtórzmy to samo dla wypadków, gdy siła  $P=1$  zaczepia w  $E$   
a potem w  $F$ , to na podstawie tych planów sił, możemy dla  
wszystkich prętów danego przedziału wyznaczyć linie wpły-  
wowe.

Znając linie wpływowe, potrafimy łatwo w znany sposób wyznaczyć największe siły wewnętrzne dla obciążenia ciągłego lub układem ciężarów skupionych\*).

*Belki statycznie wyznaczalne mają, obok jakiegokolwiek obciążenia  $\frac{1}{2} p_0$  między, że nie potrzebują wzmocnienia temperamentu, tu że siły wewnętrzne nie mają znaczenia, gdy belki to uśredniają, belki jestu prost z powodu przyjętych wytycznych.*

## VII. Belka o kracie wielokrotnej.

### §. 40. Zasada obliczenia.

Belka o kracie wielokrotnej jest statycznie niewyznaczalna (rys. 78). Chcąc dokładnie obliczyć taką belkę, musimy uciec się do prawideł sprężystości. Obliczenie dokładne jest jednak

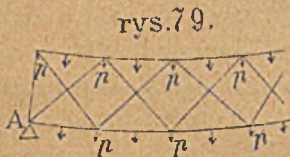
bardzo zawile, dlatego obliczamy taką belkę zwykle w przybliżeniu, rozkładając ją na pojedyncze części o kracie pojedynczej, a mianowicie kratę  $n$ -krotną rozkładamy na  $n$  części\*\*). Każdy krzyżulec znajduje się więc tylko



w jednym układzie, zaś każda część pasu i narożniki są we wszystkich układach. Jeżeli to rozkładanie ma być dozwolone, to ugięcie belki powinno być we wszystkich układach takie, aby złożony wszystkie układy w jedno, otrzymać można rzeczywiście ugiętą belkę.

Otóż to się niezupełnie sprawdza, bo aby utrzymać takie ugięcie, musielibyśmy przypuścić pasy łamane i w węzłach innych układów siły  $p$  (rys. 79). Ale ponieważ ugięcie pasu jest

bardzo małe, więc też i siły te  $p$  byłyby tak małe, że możemy je opuścić. Porównanie wyników metody przybliżonej z wynikami metody dokładnej stwierdza, że różnice są tak małe, że użycie metody przybliżonej w praktyce jest uzasadnione.



Będziemy więc belkę rozkładać na  $n$  układów i przyjmować będziemy te ciężary, jako działające na każdy układ, które zaczepiają w węzłach danego układu.

\*) p. Balicki. Czasop. Techn. 1902, str. 293.

\*\*\*) p. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 381.



§. 41. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

Jeżeli chcemy liczyć w przybliżeniu, to przyjmujemy, że ciężar, działający na jeden układ, jest  $\frac{1}{n}$  częścią całego ciężaru, zatem siła poprzeczna dla jednego układu będzie  $\frac{1}{n} Q$ .

Otrzymamy więc siłę wewnętrzną w krzyżulcu  $AD$  (rys. 78)

$$P_1 = \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \quad . . . . . 132)$$

zaś w  $AE$   $P_2 = \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \beta \quad . . . . . 133)$

Każda część pasu leży, jak wiadomo, we wszystkich układach, na każdy układ działa  $\frac{1}{n}$  część ciężaru, więc siła wewnętrzna w przecie  $AB$  będzie w jednym układzie  $\frac{M_1}{nh}$ , w drugim  $\frac{M_2}{nh}$  itd., gdy  $M_1$  i  $M_2 \dots$  oznaczają momenty dla pojedynczych układów, a więc ze względu na punkt  $F, C$  i  $D$ . Cała siła wewnętrzna w  $AB$  będzie

$$S = \frac{1}{nh} (M_1 + M_2 + M_3 + \dots M_n).$$

Jeżeli  $M = \frac{1}{n} (M_1 + M_2 + \dots M_n)$  jest średnią arytmetyczną momentów  $M_1, M_2 \dots M_n$ , to

$$S = \frac{M}{h} \quad . . . . . 134)$$

Zamiast tworzyć średnią arytmetyczną poszczególnych momentów, możemy też przyjąć, że  $M$  jest momentem ze względu na punkt średni między  $F$  i  $D$ . Punkt ten średni  $C$  otrzymamy, jeżeli środek części pasu  $AB$  połączymy z wierzchołkiem  $H$  trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu.

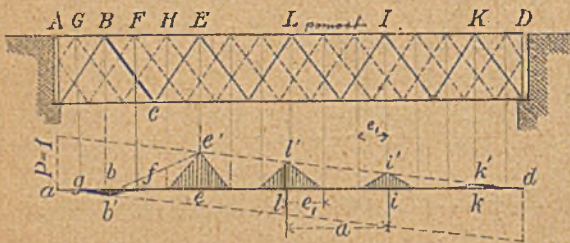
§. 42. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Zadaniem naszym będzie najpierw wynaleść linię wpływową dla danego krzyżulca  $BC$  (rys. 80). Wykreślmy najprzód linię wpływową dla  $BC$  tak, jak gdyby krata była pojedyncza. Jeżeli pomost jest na pasie górnym, to otrzymamy linię  $ab'e'd$ .

Jeżeli ciężar  $P=1$  stoi w punkcie  $B$ , to cały ten ciężar działa na układ pełnemi liniami wyciągnięty, więc siła wewnętrzna w  $BC$  będzie  $bb'$ .

Jeżeli ciężar porusza się na prawo i przyjdzie do sąsiedniego węzła  $F$ , to cały ciężar przenosi się na drugi układ, a dla krzyżulca  $BC$ , należącego do układu wyciągniętego pełnemi liniami, siła wewnętrzna równa jest zeru. Gdy ciężar  $P=1$  znajduje się między  $B$  i  $F$ , to działa on pośrednio przez poprzecznicę, więc według §. 25. otrzymamy linię wpływową, gdy połączymy  $b'$  z  $f$ . Tak samo postępujemy z drugiej strony punktu  $B$ , a otrzymamy linię wpływową  $gb'f$ . To samo powtarzamy we wszystkich obciążonych węzłach danego układu  $E, L, I$  i  $K$  i otrzymujemy jako linie wpływowe same trójkąty.

rys. 80



*Linia wpływowa na Krzyżulca  $BC$ .  
kiedy trójkrotna.*

Jeżeli krata jest dwukrotną, to te trójkąty schodzą się i otrzymujemy w węzłach drugiego układu punkty obojętne. Jeżeli zaś krata jest co najmniej trzykrotną, to otrzymamy długości, w których, jeżeli ciężar stoi, nie spr-

wia żadnej siły wewnętrznej w danym krzyżulcu. Długość taką nazywamy długością obojętną (*n. neutrale Strecke*), jaką jest np. długość  $FH$ . Dla największości siły wewnętrznej w  $BC$  należy więc obciążyć prawą część belki aż do punktu  $H$ , części lewej  $AF$  nie obciążać, a obciążenie długości  $FH$  jest obojętne.

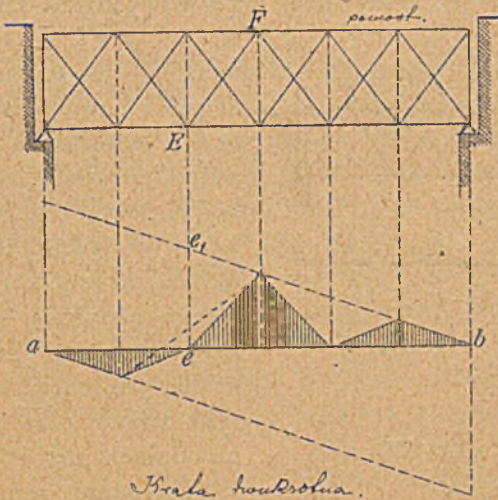
Załóżmy, że belka jest obciążona ciężarem jednostajnym ciągłym i badajmy tylko wpływ obciążenia na długości  $LI$ , to otrzymamy  $P$ , siłę wewnętrzną w  $BC$ , według sposobu przybliżonego (§. 41.), gdy  $a=ne_1$ ,  $P = \frac{p}{n} a \frac{l' + ii'}{2} = \frac{pe_1}{2} (l' + ii')$ , zaś we-

dług sposobu dokładnego jest  $P = (ll' \frac{1}{2} e_1 + ii' \frac{1}{2} e_1) p = \frac{p}{2} e_1 \times (ll' + ii')$ .

Widzimy więc, że dla ciężaru jednostajnie ciągłego według sposobu przybliżonego otrzymujemy te same wyniki, co według sposobu dokładnego. Tylko przy końcu belki, gdzie nie zawsze  $a = ne_1$ , sposób przybliżony staje się nieco niedokładnym. Zważywszy jednak, że przy podporach rzędne linii wpływowej są bardzo małe, zrozumiemy, że różnica między sposobem dokładnym a przybliżonym jest bardzo mała.

Dla kraty podwójnej widzimy z rys. 81, że powierzchnia kreskowana jest prawie dokładnie połową powierzchni  $bee_1$ . Tu

rys 81.



więc licząc należałoby przy obliczeniu uwzględnić  $Q$  dla  $E$  końca krzyżulca, który leży na pasie innym, niż pomost.

W przybliżeniu możemy tę samą regułę stosować i do kraty trzy i więcejkrotnej.

Inaczej rzecz się ma przy obciążeniu układem ciężarów skupionych. Tu musimy obliczać siły wewnętrzne na podstawie linii wpływowych, gdyż różnice między obu

sposobami są znaczne. Przypuśćmy n. p., że belka jest obciążona układem ciężarów w odstępach  $=a$ , to gdy pierwszy ciężar postawimy na  $E$ , drugi wpadnie na  $L$ , trzeci na  $I$  itd. i  $P$  będzie takie jak dla kraty pojedynczej, podczas gdy według sposobu przybliżonego mamy  $\frac{P}{n}$ . Z drugiej strony możliwym jest, że

gdy ciężar postawimy na  $E$ , inne ciężary wpadną na długości obojętne i  $P$  może być mniejsze, niż według sposobu przybliżonego.

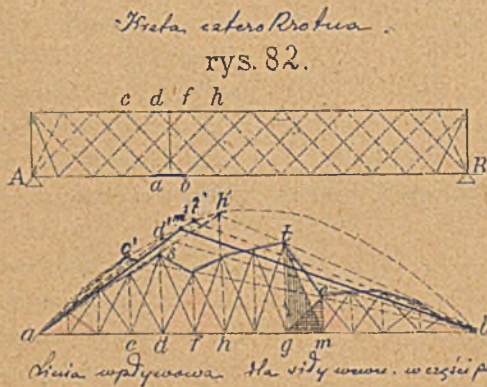
Dla *najw*  $P$  musimy obciążyć prawą stronę belki, a nie obciążać lewej strony, największe ciężary mają stać w pobliżu prawej poprzecznicy  $E$ , jeden z ciężarów ma stać na  $E$ . Przy mostach kolejowych trzeba zwykle drugie lub trzecie koło parowozu postawić na  $E$ .

Wielkość siły  $P$  wyznaczymy najlepiej wykreślnie zapomocą linii wpływowych, rachunkiem zaś w ten sposób, że dla najniekorzystniejszego położenia obliczymy ciężary węzłowe i uwzględnimy tylko należące do danego układu.

### §. 43. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Chcąc wyznaczyć linie wpływowe dla siły wewnętrznej  $S$  w części pasu  $ab$  (rys. 82.) wykreślimy najprzód parabolę, na której leżą wierzchołki trójkątów linii wpływowych dla kraty pojedynczej. (patrz str. 36 + rys. 16)

Część pasu  $ab$  leży w czterech układach. Wykreślimy najprzód linię wpływową dla układu oznaczonego liniami pełnymi  $ac'b$ . Ponieważ na ten



układ działają tylko ciężary, działające w węzłach tego układu, a więc otrzymamy podobnie, jak w poprzednim paragrafie, trójkąty, których wierzchołki leżą na liniach  $ac'$  i  $c'b$ .

To samo robimy ze wszystkimi innymi układami i w ten sposób dostaniemy szereg trójkątów, które się po części nakrywają. Łatwo jednak dostrzeżemy, że dwa takie trójkąty  $gtm + meg = gmet$ , że zatem, aby otrzymać sumę powierzchni wszystkich trójkątów, potrzebujemy tylko połączyć kolejno wierzchołki wszystkich trójkątów. W ten sposób otrzymamy jako linię wpływową wcale nieregularny wielobok zupełnie odmienny od linii wpływowej do kraty pojedynczej. Z linii wpływowej wynika, że dla *najw*  $S$  musi być cała belka obciążona, dla układu ciężarów skupionych największe ciężary mają

być w pobliżu danej części pasu, a jeden ciężar musi być na jednej z poprzecznic, gdzie rzędne linii wpływowej są największe.

Licząc w przybliżeniu wedle §. 41., otrzymalibyśmy linię wpływową *am'b*. Powierzchnia wpływowa przybliżona jest prawie równa powierzchni wpływowej dokładnej, a zatem i tutaj dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, otrzymamy w przybliżony sposób wyniki dość zgodne ze sposobem dokładnym.

Ale doświadczenia, w których mierzyłem wprost natężenie prętów, okazały, że w rzeczywistości linia wpływowa zajmuje pośrednie miejsce między dokładną a przybliżoną i zbliża się raczej do przybliżonej. Powodem tego jest ciągłość pasów, która sprawia, że ciężar, zaczepiający w węzle danego układu, przenosi się w części także i na inne układy.

Engesser dochodzi teoretycznie do tych samych wyników dla belek większych, o rozpiętości większej, niż 30 m, gdy przy mniejszych rozpiętościach układy wprost obciążone, stosunkowo większą część obciążenia przyjmują. W praktyce jednak dla małych rozpiętości nie będziemy stosować kraty wielokrotnej, a dla większych należałoby obliczać takie belki raczej sposobem przybliżonym.

Liczebne wyznaczenie *najw S* wedle metody dokładnej jest bardzo mozolne. Najlepiej wyznaczyć, jak w poprzednim paragrafie ciężary węzłowe dla kilku położeń, które się nam wydają najniekorzystniejsze, gdy ciężar jest na jednej z poprzecznic, dla których rzędne są największe. Obliczamy teraz dla tego położenia *S* dla każdego układu z osobna i dodajemy wyniki.

Wykreślnie możemy wyznaczyć siły wewnętrzne na trzy sposoby:

1. Nie rozkładając na pojedyncze układy, wyznaczmy siły poprzeczne i momenty tak, jak dla kraty pojedynczej. Siłę poprzeczną wyznaczamy ze względu na przekrój przez koniec danego krzyżulca, który leży na innym pasie niż pomost, a moment ze względu na punkt, który otrzymamy, jeżeli środek części pasu *ab* (rys. 82.) połączymy z wierzchołkiem trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu. Dla krzyżulców dzielimy wyniki przez *n*. Metoda ta, odpowiadająca metodzie analitycznej, opisanej w §. 41, jest dostatecznie dokładna, zwłaszcza dla obciążenia ciągłego.

2. Rozkładamy na pojedyncze układy i przypuszczamy, że cały ciężar działa na jeden układ. Dla tego układu wyznaczamy siły poprzeczne i momenty, następnie dla wszystkich innych,  $Q$  dzielimy przez  $n$ , a za  $M$  bierzemy średnią arytmetyczną momentów dla pojedynczych układów. Według tego sposobu możemy w przybliżeniu obliczać siły wskutek ciężaru własnego i ciężarów skupionych.

3. Zapomocą linii wpływowych wyznaczamy siły wewnętrzne w pasach i krzyżulcach, co zwłaszcza byłoby do polecenia dla układu ciężarów skupionych.

Ze względu na doświadczenia, powyżej omawiane, należałoby, chcąc liczyć dokładnie, liczyć wedle 2. i 3. i wziąć średnie wyniki.

#### §. 44. Krzyżulce gibkie. (*Angewandte Holzkunde*) Pop. 200.

Dla kraty prostokątnej urządzamy często słupy, pracujące na ciśnienie tęgą, przekątnie zaś gibkie (n. *schlaffe Diagonalen*) z żelaza płaskiego. Rozumie się, że nie mogą one wtedy pracować na ciśnienie; w tej części belki więc, w której siła poprzeczna może być dodatnią i ujemną, urządzamy dwa rzędy przekątni, jeden spadających na prawo, drugi na lewo. Otóż w takim razie w jednym przedziale jedna przekątnia pracowaćby powinna na ciągnięcie, druga na ciśnienie, ale z powodu, że jest gibka, przekątnia ciśniona wygina się i nie działa wcale.

Kratę o podwójnych gibkich przekątniach obliczamy więc zwykle tak, jak gdyby istniały tylko przekątnie ciągnięte. Właściwie jednak i gibkie przekątnie mogą pracować na małe ciśnienie, które łatwo obliczyć, znając wielkość i kształt przekroju: siłę działającą w przekątniach ciągniętych, należałoby więc zmniejszyć o siłę potrzebną do wygięcia przekątni ciśnionych.

Przekątnie podwójne urządzamy tylko tak daleko, dopóki siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc na długości wychylenia się przekroju środkowego (§. 22).

#### §. 45. Przykład. Obliczenie mostu drogowego w kracie dwukrotnej prostokątnej. (*o tuii belkach kratowych*)

*Tabl. II.*

Rozpiętość teoretyczna wynosi 80 m (tabl. II), pomost drogi II klasy szeroki 5 m szeroki leży u góry. Przyjmujemy wysokość belki  $h = \frac{l}{7,5} = 4 m$ , a od-

stępn węzłów  $j = 2m = \frac{1}{5} l$ . Ciężar własny przyjmujemy według rów. 3) na  $m^2$  pomostu  $g = 2I5 + 2,3.30 + 0,02 l^2 = 302 \text{ kg}$ , więc na  $mb$  5.302, a na jedną belkę  $g = \frac{1}{5} \cdot 302 = 755 \text{ kg} = 0,76$ . Jeżeli z tego przypada na ciężar pomostu  $192 \text{ kg/m}^2$ , to na jedną belkę  $g = \frac{1}{5} 192 = 480 \text{ kg} = 0,48 t$ , a więc ciężar samej belki  $0,76 - 0,48 = 0,26 t/m$ , z czego połowa  $0,13 t/m$  działa na pas górny, połowa na pas dolny, a zatem  $g_1 = 0,61 t/m$ ,  $g_2 = 0,13 t/m$ . Jako ciężar ruchomy przyjmiemy obciążenie, przepisane rozporządzeniem minist. austriackim dla dróg II. klasy, przyczem na szerokość mostu, przyjmujemy dwa wozy, więc na jedną belkę przypada ciężar jednego szeregu wozów (rys. 6). Natężenie dopuszczalne przyjmujemy także wedle tego rozporządzenia  $\tau = 750 + 2.30 = 810 \text{ kg/cm}^2$ .

Belkę kratową rozkładamy na dwa układy i nazywamy układ, do którego należą węzły I, III, V, VII, ... XIII, układem I, drugi zaś układem II. Ciężar węzłowy dla mostu nieobciążonego wynosi dla pasu górnego  $G_1 = 2.0,61 = 1,22 t$ , dla pasu dolnego  $2.0,13 = 0,26 t$ , w węzłach skrajnych o połowę mniej.

### 1. Obliczenie.

a) Krata. Dla układu I jest  $O_1 = 7(1,22 + 0,26) \frac{1}{5} = 5,53 t$ , dla układu II  $O_1 = 7(1,22 + 0,26) \frac{1}{5} = 4,84 t$ . A więc w układzie I jest  $Q = 5,53 t$ ,  $5,53 - 0,26 = 5,27 t$ ,  $5,53 - 1,48 = 4,05 t$ . itd.; w układzie II jest  $Q = 4,84 t$ ,  $4,84 - 1,48 = 3,36 t$ ,  $3,36 - 1,48 = 1,88 t$  itd. Wyniki uwidoczniliśmy poniżej w tabliczce.

Dla ciężaru ruchomego wyznaczmy ciężary węzłowe dla położenia, gdy szereg wozów posuwa się na prawo, a drugie koło ostatniego wozu stoi na I. Otrzymamy wtedy ciężary węzłowe w węzłach

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
3,0	1,8	1,2	1,2	1,8	1,8	2,7	0,45	1,05	3,0	1,8	1,2	1,2	1,8	1,8 t.

Z ciężarów tych działają na układ I tylko tlustemi czcionkami drukowane. Oddziaływanie  $O_1 = \frac{1}{5} (3,0.7 + 1,2.6 + 1,8.5 + 2,7.4 + 1,05.3 + 1,8.2 + 1,2.1) = 7,46 t = Q$  dla przedziału 0 II.

Z kształtu linii wpływowej (rys. 2.) wypływa, że przez posunięcie szeregu wozów na prawo lub na lewo zmniejsza się  $Q_1$ , a więc *najw*  $Q = 7,46 t$ .

Dla przedziału I III otrzymamy najniekorzystniejsze obciążenie także, gdy ostatnie koło stoi na prawej poprzecznicy, a więc ciężary węzłowe będą te same, tylko o  $4m$  przesunięte, a zatem  $Q = O_1 = \frac{1}{5} (3,0.6 + 1,2.5 + 1,8.4 + 2,7.3 + 1,05.2 + 1,8.1) = 5,49 t$ .

Podobnie otrzymamy *najw*  $Q$  dla wszystkich innych krzyżulców; wyniki zestawiliśmy w poniżej podanej tabliczce.

Dalej mamy  $P = Q$  siecz  $\alpha$ . Dla przekątnej siecz  $\alpha = \sqrt{1 + (\frac{1}{3})^2} = 1,114$ , dla słupów siecz  $\beta = 1$ , dla przekątnej 0 1 jest siecz  $\alpha = \sqrt{1 + (\frac{1}{3})^2} = 1,118$ .

Przekrój teoretyczny wyznaczamy według wzoru  $A = \frac{P}{0,81} \text{ cm}^2$ ,

Krzy- żulec	Siła poprzeczna w t					Siła wewnętrzna w t		Prze- krój te- orety- czny w cm <sup>2</sup>
	w sku- tek ciężaru wła- snego	w skutek ciężaru rucho- mego		s u m a		najw	najm	
		najw (+ Q)	najw (- Q)	najw (+ Q)	najm (+ Q)			
0 1	5,53	7,46	0	12,99	5 53	14,52	6,18	17,9
0 2	4,84	6,61	0	11,45	4,84	16,18	6,84	20,0
I 3	4,05	5,49	-0,2	9,54	3,85	13,49	5,44	16,6
II 4	3,36	4,99	-0,4	8,35	2,96	11,81	4,19	14,8
III 5	2,57	4,22	-0,68	6,79	1,89	9,60	2,67	11,9
IV 6	1,88	3,57	-0,96	5,45	0,92	7,71	1,80	9,5
V 7	1,09	2,92	-1,36	4,01	-0,27	5,67	-0,38	7,0
VI 8	0,40	2,34	-1,76	2,74	-1,36	3,87	-1,92	4,8
VII 9	-0,39	1,76	-2,34	1,37	-2,73	1,94	-3,86	2,4
VIII 10	-1,08	1,36	-2,92	0,26	-4,00	0,37	-5,66	0,6
1 I	5,27	7,46	0	12,73	5,27	-12,73	-5,27	15,8
2 II	4,58	6,61	0	11,19	4,58	-11,19	-4,58	14,2
3 IV	3,79	5,49	-0,2	9,28	3,59	-9,28	-3,59	11,5
4 III	3,10	4,99	-0,4	8,09	2,70	-8,09	-2,70	10,1
5 V	2,31	4,22	-0,68	6,53	2,31	-6,53	-2,31	8,1
6 IV	1,62	3,57	-0,96	5,19	1,62	-5,19	-1,62	6,4
7 VII	0,83	2,92	-1,36	3,75	-0,53	-3,75	+0,53	4,6
8 VIII	0,14	2,34	-1,76	2,48	-1,62	-2,48	+1,62	3,1

Co do słupów 5 V i 6 VI zauważyć musimy, że gdy prawa strona belki jest obciążoną, a jedno koło stoi na V lub VI, to wtedy działają krzyżulce III 5 i 5 VII, względnie IV 6 i 6 VIII, a więc w słupach 5 V i 6 VI powstaje tylko ciśnienie = 3t, najmniejsze P powstaje więc dla belki nieobciążonej.

b) Narożniki. Siła, powstająca w 00 z powodu ciężaru własnego jest =  $\frac{1}{2}(14(1,22 + 0,26) + 2 \cdot 0,61) = 10,97t$ . Z powodu ciężaru ruchomego jest największa siła poprzeczna, gdy 2. koło wozu ustawimy na podporze. Wtedy otrzymamy  $O_1 = \frac{1}{3}(3,3 \cdot 21 + 3 \cdot 3 \cdot 18,2 + 3 \cdot 1,5 \cdot 14,6 + 2 \cdot 3 \cdot 1,6) = 14,27t$ . A więc  $P = 10,97 + 14,27 = 25,24t$ , a przekrój  $A = \frac{25,24}{0,81} = 31,2cm^2$ .

c) Pasy. Dla ciężaru własnego otrzymamy dla m-go węzła górnego lub dolnego układu I-go  $M = 5,53m \cdot 2 - \frac{m-1}{2} \cdot 1,48 \frac{m+1}{2} \cdot 2 = 11,06m + -0,74m^2 + 0,74$ . Dla układu II otrzymamy  $M = 4,84m \cdot 2 - \left(\frac{m}{2} - 1\right)(1,22 + +0,26) \frac{m}{2} \cdot 2 = 11,16m - 0,74m^2$ .

A zatem otrzymamy dla

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$M = 11,1 \quad 19,4 \quad 27,8 \quad 32,8 \quad 37,5 \quad 40,3 \quad 41,9tm.$$

Dla części pasu górnego między węzłami m i m+1 w lewej połowie belki jest  $S = \frac{1}{4,0}(M_{m+1} + M_{m+2})$ , dla pasu dolnego  $S = \frac{1}{4,0}(M_m - 1 + M_m)$ .

Wyniki uwidoczniliśmy poniżej.



koło	na węźle	układ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	M	M <sub>p</sub>
2	VI	I	1,8		2,7		1,05		1,8		1,2		1,8		0,45		48,9	} 92,5
		II		1,8		0,45		3,0		1,2		1,8		2,7		1,05	48,6	
1	VII	I	2,7		1,5		1,65		3,0		1,2		1,8		1,05		50,5	} 90,6
		II		1,8		1,05		1,8		0,3		2,7		1,5		1,65	40,1	
2	VII	I	1,2		1,8		0,45		3,0		1,2		1,8		2,7		50,1	} 95,5
		II		1,8		2,7		1,05		1,8		1,2		1,8		0,45	45,4	

A zatem, gdy drugie koło stoi na VII węźle, otrzymamy moment największy. Wyniki zaznaczyliśmy w poniżej podanej tabliczce. Przekrój teoretyczny wyznaczyliśmy z wzoru  $\frac{S}{0,81} = \frac{M}{4 \cdot 0,81} = \frac{M}{3,24} \text{ cm}^2$ .

Część pasu		Najniekorzystniejsze położenie		M <sub>g</sub>	M <sub>p</sub>	M <sub>q</sub>	Przekrój A	Część pasu		Najniekorzystniejsze położenie		M <sub>g</sub>	M <sub>p</sub>	M <sub>q</sub>	Przekrój A
	koło	na węźle		tm			cm <sup>2</sup>		koło	na węźle	tm			cm <sup>2</sup>	
0	I	1	2	30,5	38,6	69,1	21,5	0	1	—	—	0	0	0	0
I	II	1	3	46,7	59,7	106,4	32,8	1	2	2	1	11,1	18,0	29,1	9,0
II	III	1	4	60,1	73,0	133,1	41,1	2	3	1	2	30,5	38,5	69,1	21,5
III	IV	1	5	70,3	86,0	156,3	48,2	3	4	1	3	46,7	59,7	106,1	32,8
IV	V	2	5	77,8	93,8	171,6	53,0	4	5	1	4	60,1	73,0	133,1	41,1
V	VI	2	7	82,2	95,5	177,7	54,9	5	6	1	5	70,3	86,0	156,3	48,2
VI	VII	1	8	83,8	98,0	181,8	59,4	6	7	2	5	77,8	93,8	171,6	53,0
VII	VIII	1	8	82,2	95,5	177,7	54,9	7	8	2	7	82,2	95,5	177,7	54,9

Dla ciężaru ruchomego przeprowadziliśmy tylko obliczenie dla części pasu V VI jako przykład. Powyżej podana tabliczka uwiadczenia ciężary węzłowe przy różnych położeniach i momenty ze względu na węzły 7 i 8, jakoteż ich sumę.

2. Sposób wykreślny.

a) Krata. Na rys. 2. tabl. II. wykreśliśmy linie wpływowe dla układu I. pełne, a dla układu II. kreskowane, dla ciężaru 3,0 t i 1,5 t. Na podstawie tych linii wpływowych i paska papieru, na którym naznaczyliśmy szereg wozów, jak w rys. 3, wyznaczyliśmy, próbując, największe siły poprzeczne i wykreśliśmy je w rys. 4. Używaliśmy przytem dla długości podziałki I  $\frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ m}}$ , a dla sił podziałki II  $\frac{1 \text{ cm}}{2,5 \text{ t}}$ .

W rys. 4. wyznaczyliśmy też siły poprzeczne dla ciężaru własnego (kreskowane) i, aby otrzymać *najo* (+ Q), dodaliśmy odnośne rzędne. Zupenie symetrycznie możnaby też wykreślić *najo* (− Q), ale właśnie z powodu tej symetrii uważaliśmy wykreślenie ich za zbyteczne. W celu wyznaczenia sił wewnętrznych w krzyżulcach, wykreśliśmy linie równoległe do ich kierunków. Długości w ten sposób otrzymane, odczytane na podziałce II dają siły wewnętrzne P, a na podziałce III przekroje teoretyczne, przyczem dla podziałki III jest  $\frac{1 \text{ cm}}{2,5 : 0,81} = \frac{1 \text{ cm}}{3,21 \text{ cm}^2}$ .

b) Pasy. Dla wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach wykreśliśmy linie wpływowe dla każdej części pasu dla ciężaru 3,0 i 1,5 t (rys. 6). Na podstawie tych linii wpływowych i paska papieru, na którym wykreślono szereg wozów, wyznaczyliśmy największe momenty dla każdej części pasu i uwiadczyliśmy je na rys. 7. Momenty wykreśliśmy według podziałki  $\frac{1 \text{ cm}}{20 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ cm}}{a \cdot 2 \text{ m}}$ , więc odległość biegunowa  $a = \frac{20}{2} = 10 \text{ t}$ , której użyliśmy do wykreślenia momentów z powodu ciężaru własnego. Wykreśliśmy mianowicie osobno dla układu I, a osobno dla układu II. wielobok sznurowy, a ponieważ każda część pasu leży w obu układach, więc dodaliśmy odpowiednio momenty, np. dla części pasu III IV momenty w punktach 4 i 5. Odnośne sumy przedstawiają poziome linie kreskowane

Aby otrzymać przekrój, należy zmienić podziałkę, a mianowicie przyjmując podziałkę V  $\frac{1 \text{ cm}}{20 : (4 \cdot 0,81)} = \frac{1 \text{ cm}}{6,17 \text{ cm}^2}$ .

Na rysunku 8. wykreśliśmy na tej podstawie rozkład materiału według podziałki VI  $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ cm}^2}$ , a na rys. 9. dla ciężaru własnego plan sił we dług podziałki II, przyczem połączyliśmy oba plany sił dla obu układów na jednym rysunku. Z tego planu sił otrzymujemy siły wewnętrzne w krzyżulcach wprost, zaś w pasach po dodaniu odnośnych sił z obu układów.



$$V = -\frac{h \operatorname{st} \alpha}{n} (q_1 - q_2) \dots \dots \dots 129)$$

Przytem oznaczają  $q_1$  i  $q_2$  ciężary jednostkowe, działające na pasie górnym i dolnym. A więc gdy pomost jest u góry,  $q_1 > q_2$ , zatem słupy pracują na ciśnienie; gdy zaś pomost jest u dołu, na ciągnięcie. W ogóle siły wewnętrzne w słupach są bardzo małe.

Przekątnie. Przekątnie znajdują się tylko w jednym układzie więc

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{Q_1}{n'} \operatorname{siecz} \alpha = \frac{Q}{n} \operatorname{siecz} \alpha \\ P' &= -\frac{1}{2} \frac{Q_2}{n'} \operatorname{siecz} \alpha = -\frac{Q}{n} \operatorname{siecz} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 130)$$

bo tu przekroje są pionowe, więc  $Q_1 = Q_2$ .

Widzimy więc, że w przybliżeniu są siły wewnętrzne, działające w przekątniach, takie, jak gdyby słupów nie było.

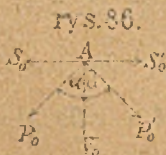
Pasy. Ponieważ siła, działająca w słupach jest bardzo mała, więc w przybliżeniu obliczamy pasy tak, jak gdyby słupów nie było.

Przy dokładnej teorii belek kratowych o kracie złożonej, musimy wziąć do pomocy pravidła sprężystości i uwzględnić materiał i przekroje, które obliczamy najprzód w przybliżeniu. Teoryę tę podamy w drugim tomie.

§. 47. Krata złożona ze sztucznem nateżeniem.

a.) Przypuśćmy najprzód, że belka jest podparta na rusztowaniu tak, że ciężar własny na belkę także nie działa. Jeżeli teraz w jednym słupie sprawimy sztuczne ciągnięcie w jakikolwiek sposób n. p. naciągnięciem śruby, to w pasach i przekątniach powstaną w skutek tego siły, które nazwiemy sztucznemi siłami wewnętrznemi (n. *künstliche Spannung*).

Jeżeli sztuczne ciągnięcie w słupie (rys. 86) jest  $V_0$ , a powstałe stąd siły wewnętrzne w przekątniach nazwiemy  $P_0$  i  $P'_0$ , a w pasach  $S_0$  i  $S'_0$ , to z powodu symetrii  $P_0 = P'_0$  i  $S_0 = S'_0$ .



Dla równowagi musi być  $P_0 \operatorname{dost} \alpha + P'_0 \operatorname{dost} \alpha + V_0 = 0$ , albo  $2P_0 \operatorname{dost} \alpha = -V_0$ ,  
 $P_0 = P'_0 = -\frac{1}{2} V_0 \operatorname{siecz} \alpha \dots \dots \dots 131)$

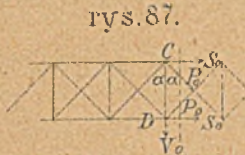
Gdy przetniemy belkę płaszczyzną pionową (rys. 87), otrzymamy dla równowagi  $2 S_0 + 2 P_0 \operatorname{wst} \alpha = 0$ , a stąd

$$S_0 = -P_0 \text{ wst } \alpha = \frac{1}{2} V_0 \text{ st } \alpha \dots \dots \dots 132)$$

Dla kraty  $n$ -krotnej otrzymamy w podobny sposób

$$S_0 = +\frac{1}{4} n V_0 \text{ st } \alpha \dots \dots \dots 133)$$

6.) Jeżeli teraz zdejmujemy rusztowanie i belkę obciążymy, to musimy dodać siły wewnętrzne, wywołane ciężarem stałym i ruchomym, do sił, wywołanych sztucznym nateżeniem  $V_0$  i otrzymamy siłę wewnętrzną w słupach wiszących



$$V = V_0 + V_1 = V_0 - \frac{h \text{ st } \alpha}{n} (q_1 - q_2) \quad 134)$$

Dalej mamy w krzyżulcach

$$\left. \begin{aligned} P = P_0 + P_1 &= -\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha + \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \\ P' = P_0 + P'_1 &= -\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 135)$$

$V_0$  jest zależne od nas, możemy więc sprawić tak wielkie ciągnięcie  $V_0$ , aby  $P$  i  $P'$  były zawsze ujemne, a więc dla *najw*  $P_1$ , a zatem i *najw*  $Q_1$ , aby  $P=0$ .

Wtedy musi być  $\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha = \frac{1}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha$ , więc

$$V_0 = \frac{2}{n} \text{ najw } Q \dots \dots \dots 136)$$

Jeżeli więc  $V_0$  ma powyższą wartość, to *najw*  $P=0$ ,

$$\text{a } \text{ najw } P' = -\frac{1}{2} \frac{2}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha =$$

$$= -\frac{2}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha = 2 \text{ najw } P'_1 \dots \dots \dots 137)$$

Widzimy więc, że dla najniekorzystniejszego obciążenia siła wewnętrzna w jednej przekątnej staje się zerem, ale za to w drugiej przekątnej ciśnienie wzrasta do podwójnej wielkości.

### §. 48. Belki Howe'a i Rídera.

Belka Howe'a jestto belka o kracie złożonej, której wszystkie części są drewniane z wyjątkiem słupów wiszących, które są żelazne i zakończone gwintami. Naciągnięciem śrub wywołujemy sztuczne nateżenie. Zastrzały rozróżniamy podwójne; te, któreby bez sztucznego nateżenia były także zastrzałami, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, fr. *lien*,

*lien principal*, a. *principal strut*), te zaś które bez sztucznego na-  
tężenia byłyby ścięgami, nazywamy zastrzałami drugo-  
rzędnymi lub odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelieu*,  
a. *counterstrut*).

Jeżeli zamiast drzewa użyjemy żelaza lanego, a w pasie  
dolnym spawalnego, to otrzymamy belkę Schiffkorna, którą  
oblicza się zupełnie, jak belkę Howe'a.

Ciągnięcie sztuczne w *stłupach* wiszących ma być według  
136)  $V_0 = \frac{2}{n} najw Q$ , dla belki obciążonej jest

$$V = \frac{2}{n} najw Q - \frac{h \operatorname{st} \alpha}{n} (q_1 - q_2).$$

Według tego, czy  $q_1 \leq q_2$  jest drugi wyraz ujemny lub dodatni,  
zatem  $V_0 \leq V$ . Stosownie do tego obliczamy słupy albo dla  
belki obciążonej lub nie. Zastrzały główne obliczamy według  
rów. 137).

Z poprzedniego widzimy, że ponieważ dla jednostronnego  
obciążenia belki siła wewnętrzna w zastrzałach drugorzędnych  
jest równą zeru, więc największe siły wewnętrzne w zastrza-  
łach głównych i słupach wiszących możemy obliczać tak, jak  
gdyby zastrzałów drugorzędnych wcale nie było.

To samo stosuje się do pasów, które obliczamy dla obcią-  
żenia zupełnego, przy którym siły wewnętrzne w odstrzałach  
są bardzo małe. Obliczamy więc je, jak gdyby odstrzałów wcale  
nie było. Dla belki nieobciążonej powstaje w pasie górnym ci-  
śnienie z powodu ciężaru własnego, a ciągnięcie z powodu na-  
tężeń sztucznych wedle rów. 133).

Największa siła wewnętrzna odstrzałów jest dla belki nie-  
obciążonej  $P = -\frac{1}{2} V_0 \operatorname{siecz} \alpha + \frac{1}{n} Q_2 \operatorname{siecz} \alpha = P_1 + \frac{1}{n} Q_2 \operatorname{siecz} \alpha$ .

A więc ciśnienie w odstrzałach jest o siłę wewnętrzną  $\frac{1}{n} Q_2 \operatorname{siecz} \alpha$   
mniejsze, niż  $P_1$ . Zwykle przyjmujemy w przybliżeniu, że *najw*  
 $P = P' = \frac{1}{2} najw P_1'$ , a więc siła wewnętrzna w odstrzałach równa  
się w przybliżeniu połowie *najw* siły wewnętrznej, działającej  
w zastrzałach głównych.

Trudno jednak bardzo w praktyce śruby naciągnąć i utrzy-  
mać w naprężeniu takim, jakiego teoria wymaga. Często na-  
ciąga się śruby tak, aby oś pasu według oka była regularną

linią, trochę na górze wygiętą, wtedy jednak panuje wielka niepewność co do rzeczywistych natężeń, które nie zgadzają się z natężeniami obliczonymi na podstawie powyżej wyluszczonych przypuszczeń.

Przy dokładnem wyznaczeniu sił wewnętrznych musimy się uciec do prawideł sprężystości, robić pewne przypuszczenia, stąd wyznaczenie natężeń niepewne i bardzo zawile.

Belka Ridera jest podobną do belki Howe'a, różni się od niej jednakże tem, że tam naciągamy sztucznie przekątnie, a słupy pracują na ciśnienie. Wartość tego rodzaju belek, używanych zresztą tylko w Ameryce, jest taka sama, jak Howe'a.

## X. Ilość materiału.

### §. 49. Uwagi ogólne.

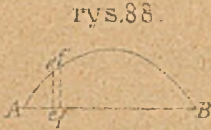
Znajomość ilości materiału potrzebna jest do obliczenia przybliżonego ciężaru własnego (§. 2) i do wyznaczenia najkorzystniejszego kształtu belki. Rozróżniamy ilość materiału teoretyczną (n. *theoretische Materialmenge*, a. *theoretical*), którąby posiadała belka, gdyby wszystkie jej części miały tyle tylko materiału, ile teoria wymaga i rzeczywistą (n. *wirklich*, a. *practical*) ilość materiału, większą z powodu, że w rzeczywistości musimy często używać przekrojów większych i z powodu połączeń, których przy teoretycznej ilości materiału nie uwzględniamy.

Aby otrzymać rzeczywistą ilość materiału musimy ilość teoretyczną pomnożyć liczbą, większą od jedności t. z. współczynnikiem ustrojowym (n. *Constructionscoefficient*). Teraz będziemy mówić tylko o ilości teoretycznej, idąc za wywodami Winklera; współczynniki ustrojowe podamy dopiero w ustrojowej części budowy mostów.

### §. 50. Objętość pasów.

Przypuścimy, że oba pasy są z jednego materiału, dla którego natężenie dopuszczalne według Winklera jest  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  i  $\tau_2$ . Nazwijmy objętość obu pasów  $V_1$ , a licząc na jednostkę długości  $v_1$ , to wyznaczamy te ilości w następujący sposób (rys. 88).

a) Ciężar stały. Niech będzie moment z powodu ciężaru stałego dla pewnej części pasu górnego  $ee'$  a dla odnośnej części dolnego pasu  $ff'$ , to siła wewnętrzna



w pasie górnym będzie  $\frac{ee'}{h}$ , a w dolnym  $\frac{ff'}{h}$ ,

zatem  $v_1 = \frac{ee' + ff'}{h\tau_0}$ . Niech będzie  $ee' + ff' = -2M$ , gdzie  $M$  jest momentem średnim, a więc ze względu na punkt średni między bardzo bliskimi punktami  $e$  i  $f$ , to otrzymamy  $\frac{2M}{h\tau_0}$ , zatem objętość całego pasu

$$V_1 = \int_A^B \frac{2M}{h\tau_0} dx, \text{ czyli } V_1 = \frac{2}{h\tau_0} \int_A^B M dx \quad . \quad . \quad 138)$$

b) Ciężar ruchomy. Dla ciężaru ruchomego otrzymamy zupełnie ten sam wzór, tylko musimy za  $M$  wstawić *najw* i *najmn*  $M$  a  $\tau_1$  i  $\tau_2$  za  $\tau_0$ . Więc cała objętość pasów będzie

$$V_1 = \frac{2}{h\tau_0} \int_A^B M dx + \frac{2}{h\tau_1} \int_A^B \text{najw } M dx + \frac{2}{h\tau_2} \int_A^B \text{najmn } M dx.$$

$$V_1 = \frac{2}{h} \left[ \frac{1}{\tau_0} \int_A^B M dx + \frac{1}{\tau_1} \int_A^B \text{najw } M dx + \frac{1}{\tau_2} \int_A^B \text{najmn } M dx \right] \quad . \quad . \quad 139)$$

Dla belki jednoprzęsłowej jest  $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$ ,  $\text{najw } M = \frac{1}{2} px(l-x)$ ,  $\text{najmn } M = 0$ ; więc  $V_1 = \frac{g}{h\tau_0} \int_A^B x(l-x) dx + \frac{p}{h\tau_1} \int_A^B x(l-x) dx$ , a stąd

$$V_1 = \frac{l^3}{6h} \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 140)$$

I tak n. p. dla  $h=0,1l$  jest  $V_1 = \frac{5l^2}{3} \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \quad . \quad . \quad 141)$

a n  $h = \frac{1}{8}l$  n  $V_1 = \frac{4l^2}{3} \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right)$

### §. 51. Objętość kraty z jednego materiału.

Niech będą oba rzędy krzyżulców z tego samego materiału. Dla kraty  $n$ -krotnej jest siła wewnętrzna w  $CD$  (rys. 89)

$P_1 = \frac{1}{n} Q$  siecz  $\alpha$ , zaś siła wewnętrzna w  $AB$  będzie

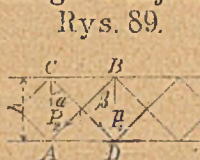
$P_2 = \frac{1}{n} Q'$  siecz  $\beta$ . A więc



przekrój krzyżulca  $CD$  będzie...  $\frac{1}{n}$  siecz  $\alpha \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right)$ ,

zaś " "  $AB$ .  $\frac{1}{n}$  siecz  $\beta \left( \frac{Q_0'}{\tau_0} + \frac{Q_1'}{\tau_1} + \frac{Q_2'}{\tau_2} \right)$ ,

gdzie  $Q_0, Q_1$  i  $Q_2$  oznaczają siły poprzeczne w skutek ciężaru własnego i największe i najmniejsze w skutek ciężaru ruchomego.



Rys. 89. Długość krzyżulców jest:  $CD = h$  siecz  $\alpha$ ,

zaś  $AB = h$  siecz  $\beta$ , a w przybliżeniu możemy też przyjąć  $Q_0 = Q_0'$ ,  $Q_1 = Q_1'$ ,  $Q_2 = Q_2'$ .

Objętość dwu krzyżulców równa się więc  $\frac{h}{n} \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) (\text{siecz}^2 \alpha + \text{siecz}^2 \beta)$ . Na

długości  $AD$  mamy  $\frac{1}{2}n$  krzyżulców każdego rzędu, gdy  $n$  oznacza liczbę podziału; chcąc więc mieć ilość materiału wszystkich krzyżulców, musimy pomnożyć objętość obu krzyżulców przez  $\frac{n}{2}$ , zatem  $\frac{n}{2} \frac{h}{n} \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) (\text{siecz}^2 \alpha + \text{siecz}^2 \beta)$  przedstawia objętość wszystkich krzyżulców na długości  $AD = \frac{1}{2}h (\text{st} \alpha + \text{st} \beta)$ . Więc na jednostkę długości otrzymamy:

$$v_2 = \frac{2}{h} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{h}{n} \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{siecz}^2 \alpha + \text{siecz}^2 \beta}{\text{st} \alpha + \text{st} \beta}$$

czyli 
$$v_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{siecz}^2 \alpha + \text{siecz}^2 \beta}{\text{st} \alpha + \text{st} \beta} \dots \dots \dots 142)$$

Z równania tego widzimy, że ani wysokość belki  $h$ , ani liczba podziału  $n$  nie mają wpływu na objętość  $v_2$ .

Dla najmniejszości tej funkcji ze względu na  $\alpha$  i  $\beta$  muszą być jej pochodne  $=0$ , a że wyraz ten jest dla  $\alpha$  i  $\beta$  symetryczny, więc dla mniejszości musi być  $\alpha = \beta$ , a wtedy

$$v_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{siecz}^2 \alpha}{\text{st} \alpha} = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{2}{\text{wst} 2 \alpha} \dots \dots \dots 143)$$

$v_2$  będzie najmniejszym, gdy  $\text{wst} 2 \alpha$  będzie największą, mianowicie gdy  $\text{wst} 2 \alpha = 1$  czyli  $\alpha = 45^\circ$ , a więc krata równoramienna, dla której  $\alpha = 45^\circ$ , wymaga najmniej materiału. Wstawivszy w równ. 143)  $\alpha = 45^\circ$ , otrzymamy

$$\text{najmn } v_2 = 2 \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \dots \dots \dots 144)$$

Dla kraty prostokątnej jest  $\beta=0$ , a zatem wstawivszy to w rów. 142) otrzymamy  $v_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{siecz}^2 \alpha + 1}{\text{st } \alpha}$ ,

$$v_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{st}^2 \alpha + 2}{\text{st } \alpha} \dots \dots \dots 145)$$

Niech  $\text{st } \alpha = x$ , to podstawivszy tę wartość w równ. 145) otrzymamy  $v_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{x^2 + 2}{x}$ . Z tego wzoru widzimy, że

$v_2$  będzie najmniejszym, gdy wyraz  $\frac{x^2 + 2}{x}$  będzie najmniejszym.

Zróbmy pochodną tego wyrażenia równą zeru, to  $\frac{2x^2 - (2 + x^2)}{x^2} = 0$ ,

a stąd  $x = \sqrt{2} = \text{st } \alpha$ . Zatem  $\alpha = 54^\circ 44' 8'' \dots \dots \dots 146)$

Wstawmy tę wartość w równ. 146), a otrzymamy dla kraty prostokątnej najmn  $v_2 = 2\sqrt{2} \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \dots \dots \dots 147)$

Porównawszy równ. 144) i 147), widzimy, że dla kraty prostokątnej potrzebujemy 1,41 razy tyle, czyli 41% więcej materiału dla najkorzystniejszego  $\alpha$ , niż dla kraty równoramiennej i kąta nachylenia  $45^\circ$ . Jeżeli  $\alpha = 45^\circ$  a  $\beta = 0$ , to według rów. 145)

$$v_2 = 3 \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \dots \dots \dots 148)$$

Tu więc potrzeba o 50% więcej materiału, niż dla kraty równoramiennej. Dla jakiegokolwiek bądź kąta  $\alpha$  i  $\beta$  możemy napisać

$$v_2 = C \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) , \dots \dots \dots 149)$$

gdzie  $C$  jest spółczynnikiem stałym, wahającym się między granicami 2 a 3. Objętość całej kraty otrzymamy więc

$$V_2 = C \int_A^B \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) dx, \dots \dots \dots 150)$$

przyczem mamy całkować od początku aż do końca belki, albo, co lepiej, od początku do środka, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2. Dla belki jednoprzęsłowej otrzymamy następane wartości dla  $Q_0$ ,  $Q_1$  i  $Q_2$ :

$$Q_0 = \frac{1}{2} g (l - 2x), \quad Q_1 = \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} \frac{px^2}{l}, \text{ więc}$$

$$V_2 = 2 \left( \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} g (l - 2x) dx + \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l} dx + \right.$$

*Skąd to wzięto  
wzrosty, wogólnie.*

$$+ \frac{1}{\tau_2} \int_0^l \frac{1}{2} \frac{px^2}{l} dx$$

$$V_2 = \frac{Cl^2}{4} \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{7p}{6\tau_1} + \frac{p}{6\tau_2} \right) \dots \dots \dots 151)$$

Dla żelaza możemy przyjąć  $\tau_2 = 2,35\tau_1$ , więc

$$V_2 = Cl^2 \left( 0,25 \frac{g}{\tau_0} + 0,31 \frac{p}{\tau_1} \right) \dots \dots \dots 152)$$

### §. 52. Objętość kraty z różnego materiału.

Jeżeli krata składa się z krzyżulców z rozmaitego materiału, to dla ocenienia najlepszego ustroju potrzebujemy znać nie tylko objętość, ale także i koszt, które otrzymamy, pomnożywszy objętość przez odnośną cenę jednostki objętości materiału  $c$  i  $c'$ .

Analogicznie do równ. 142) otrzymamy koszt kraty na jednostkę długości

$$c_2 = \frac{\left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \left( \frac{Q_0'}{\tau_0'} + \frac{Q_1'}{\tau_1'} + \frac{Q_2'}{\tau_2'} \right) c' \operatorname{siecz}^2 \beta}{\operatorname{st} \alpha + \operatorname{st} \beta} \dots \dots 153)$$

Przypuśćmy, że  $\tau_0' = a\tau_0$ ,  $\tau_1' = a\tau_1$ ,  $\tau_2' = a\tau_2$ , a następnie, że  $Q_0 = Q_0'$ ,  $Q_1 = Q_1'$ ,  $Q_2 = Q_2'$ , to otrzymamy

$$c_2 = \left( \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{siecz}^2 \beta}{\operatorname{st} \alpha + \operatorname{st} \beta} \dots \dots 154)$$

Chcąc wyznaczyć najmniejsze  $c_2$ , różniczkujemy równ. 154) według  $\alpha$  i  $\beta$  i pochodne robimy równe zeru. W ten sposób otrzymamy

$$(\operatorname{st} \alpha + \operatorname{st} \beta) \cdot 2c \operatorname{siecz}^2 \alpha \operatorname{st} \alpha - (c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{siecz}^2 \beta) \operatorname{siecz}^2 \alpha = 0 \quad 155)$$

$$(\operatorname{st} \alpha + \operatorname{st} \beta) \frac{2c'}{a} \operatorname{siecz}^2 \beta \operatorname{st} \beta - (c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{siecz}^2 \beta) \operatorname{siecz}^2 \beta = 0 \quad 156)$$

Podzielimy rów. 155) przez rów. 156), to otrzymamy

$\frac{\operatorname{st} \alpha}{\operatorname{st} \beta} = \frac{c'}{ac}$ ,  $\operatorname{st} \beta = \frac{ac}{c'} \operatorname{st} \alpha$ . Wstawmy tę wartość w rów. 154) a zamiast  $\operatorname{siecz}^2 \alpha = 1 + \operatorname{st}^2 \alpha$ , to otrzymamy

$$2c \operatorname{st}^2 \alpha \left(1 + \frac{ac}{c'}\right) = c(1 + \operatorname{st}^2 \alpha) + \frac{c'}{a} \left(1 + \frac{a^2 c^2}{c'^2} \operatorname{st}^2 \alpha\right), \text{ a stąd}$$

$$\operatorname{st} \alpha = \sqrt{\frac{c'}{ac}} \dots \dots \dots 157)$$

Wstawiwszy  $a = \frac{r_0'}{r_0}$ , otrzymamy  $\operatorname{st} \alpha = \sqrt{\frac{r_0 c'}{r_0' c}} \dots \dots \dots 158)$

Podobnie otrzymamy  $\operatorname{st} \beta = \sqrt{\frac{r_0' c}{r_0 c'}} \dots \dots \dots 159)$

Z porównania równań 158) i 159) widzimy, że

$$\operatorname{st} \alpha = \frac{1}{\operatorname{st} \beta}, \text{ czyli że } \alpha = 90 - \beta \dots \dots \dots 160)$$

A więc dla najmniejszości kosztów krzyżulce mają stać na sobie prostopadle. Z równ. 158) widzimy też, że  $\operatorname{st} \alpha < 1$ , gdy  $\frac{r_0}{c} < \frac{r_0'}{c'}$ , więc ten rząd krzyżulców ma być więcej stromy, którego materyał jest droższy, a natężenie dopuszczalne mniejsze.

Dla  $\alpha = \beta = 45^\circ$  otrzymamy jednak nie o wiele większą objętość, niż przy najkorzystniejszym nachyleniu krzyżulców.

### §. 53. Objętość narożników.

Przy zakończeniu regularnem kraty (rys. 90) siła wewnętrzna w narożniku wynosi przy podporze  $\frac{1}{2}(p+g)l$  i zmniejsza się aż do B, gdzie jest równa prawie zero.



W przybliżeniu więc średnia siła wewnętrzna będzie  $\frac{1}{4}(p+g)l$ , zatem objętość obu

narożników  $V_3 = 2 \frac{lh}{4} \left(\frac{g}{r_0} + \frac{p}{r_1}\right) = \frac{lh}{2} \left(\frac{g}{r_0} + \frac{p}{r_1}\right) \dots \dots \dots 161)$

Przy zakończeniu nieregularnem kraty  $n$ -krotnej równoramienniej (rys. 91) narożnik znajduje się w  $\frac{n}{2}$  układach, a więc siła wewnętrzna w słupie AB jest  $= \frac{1}{2} O_1 = \frac{1}{4}(p+g)l$ , zatem dla obu narożników, jak poprzednio, będzie

$$V_3' = \frac{1}{2} lh \left(\frac{g}{r_0} + \frac{p}{r_1}\right) \dots \dots \dots 162)$$

Przy zakończeniu nieregularnem kraty  $n$ -krotnej prostokątnej (rys. 92) jest siła wewnętrzna w narożniku  $= O_1$ , więc 2 razy większa, niż poprzednio, zatem dla obu narożników

$$V_3^n = 1h \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \dots \dots \dots 163)$$

§. 54. Objętość całej belki kratowej.

Jeżeli dodamy objętość pasów, kraty i narożników, otrzymamy objętość całej belki  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , czyli

$$V = \left( A_1 \frac{l}{h} + B_1 + C_1 \frac{h}{l} \right) \frac{gl^2}{\tau_0} + \left( A_2 \frac{l}{h} + B_2 + C_2 \frac{h}{l} \right) \frac{pl^2}{\tau_1} + B_3 \frac{pl^2}{\tau_2}, \quad 164)$$

gdzie  $A$ ,  $B$  i  $C$  oznaczają współczynniki, które poniżej dla belki jednoprzęsłowej podajemy.

Dla pasów jest  $A_1 = A_2 = 0,167 = \frac{1}{6}$ .

Jeżeli krata jest równoramienną i  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , to  $B_1 = \frac{1}{2} = 0,5$ ,  $B_2 = \frac{1}{2} = 0,58$ ,  $B_3 = \frac{1}{2} = 0,083$ .

Jeżeli krata jest prostokątną, a  $\alpha = 45^\circ$  i  $\beta = 0$ , to  $B_1 = 0,75$ ,  $B_2 = 0,87$ ,  $B_3 = 0,14$ .

Nakoniec otrzymamy dla narożnika, jeżeli uwzględnimy większą ilość materiału dla kraty przy końcu belki, dla kraty równoramiennej  $C_1 = C_2 = 0,5$  dla zakończenia regularnego,  $C_1 = C_2 = 0,5$  do  $0,63$  dla zakończenia nieregularnego. Dla kraty prostokątnej mamy  $C_1 = C_2 = 1,0$  do  $1,13$ .

Jeżeli przyjmiemy średnie wartości tych wszystkich współczynników, to otrzymamy w przecięciu dla belki o kracie równoramiennej

$$V = 0,17 l^2 \left( \frac{l}{h} + 3,3 + 3,3 \frac{h}{l} \right) \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \dots \dots 171)$$

a dla belki o kracie prostokątnej

$$V = 0,17 l^2 \left( \frac{l}{h} + 5 + 6,2 \frac{h}{l} \right) \left( \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \dots \dots 172)$$

Z tego widzimy, że objętość pasów, kraty i narożników ma się dla belki o kracie równoramiennej jak  $\frac{l}{h} : 3,3 : 3,3 \frac{h}{l}$ ,

" " " " prostokątnej "  $\frac{l}{h} : 5 : 6,2 \frac{h}{l}$ ,

więc dla

$h = \frac{l}{10}$  i kraty równoramiennej jak  $10 : 3,3 : 0,33$  czyli  $30 : 10 : 1$

" " " " prostokątnej "  $10 : 5 : 0,62$  "  $16 : 8 : 1$

a dla

$h = \frac{l}{8}$  i kraty równoramiennej jak 8:3,3:0,41 czyli 20:8 :1

" " " " prostokątnej " 8:5 :0,78 " 10:6,4:1

Wzorów tych jednak wprost zastosowywać nie możemy do obliczenia ciężaru własnego, gdyż musimy pojedyncze wyrazy jeszcze pomnożyć współczynnikami ustrojowymi.

## D. Belka kratowa wieloboczna.

*(Gitterträger mit polygonalen Fächern)*

### XI. Belka o kracie pojedynczej.

#### §. 55. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy  $M_1$  moment sił zewnętrznych ze względu na punkt  $A$  (rys. 93),  $S_1$  siłę wewnętrzną w części pasu  $BE$  a  $S_2$  w części  $CA$ , to  $M_1 + S_1 r_1 = 0$ , więc

$$S_1 = -\frac{M_1}{r_1} \quad \dots \quad 173)$$

podobnie ze względu na punkt  $B$ .

$$S_2 = +\frac{M_2}{r_2} \quad \dots \quad 174)$$

Z rysunku widzimy, że  $(h_1 = r_1 \text{ siecz } \sigma$ ,  
zatem  $\left. \begin{matrix} h_2 = r_2 \text{ siecz } \tau, \end{matrix} \right\}$

$$S_1 = -\frac{M_1}{h_1} \text{ siecz } \sigma \quad 175)$$

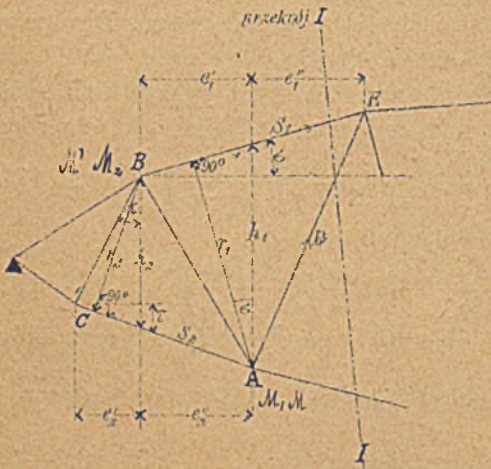
$$S_2 = +\frac{M_2}{h_2} \text{ siecz } \tau \quad 176)$$

Tych wzorów użyjemy, jeśli wyznaczymy  $M_1$ , przyjmując ciężar działający w węzłach, a więc z uwzglę-

dnieniem poprzecznie. Mając jednak moment wyznaczony dla ciężaru jednostajnie rozłożonego bez uwzględnienia poprzecznic, musimy zrobić poprawkę podobnie, jak przy belce równoległej (§. 34), a mianowicie

*Ze względu na punkt obróty każdego pasu, jest moment sił zewnętrznych, wykonują i siły wewnętrznej pasu, równy, względ: Aby siły wewnętrzne, są w przeciw wyznaczyl, ualezy moment, sił wewnętrznych ze względu na punkt obróty, podzielić przez, atępas pasu od punktu obróty.*

rys. 93.





Nazwijmy  $\alpha$  kąt nachylenia krzyżulca  $HC$  do pionu, to także kąt między  $z$  i poziomą  $LF$  będzie  $\alpha$ , zatem  $b \text{ dost } \alpha = z$ , jeżeli  $FL = b$ . Wstawiliśmy to w rów. 178), otrzymamy

$$D = \frac{Qc}{b \text{ dost } \alpha} \text{ lub } D = Q \frac{c}{b} \text{ siecz } \alpha \dots 179)$$

Nazwijmy dla skrócenia  $\frac{Qc}{b} = Y$ , . . . . . 180)

to  $D = Y \text{ siecz } \alpha$  . . . . . 181)

podobnie, jak dla belki równoległej (§. 35) tylko że tu zamiast  $Q$  mamy  $Y$ , dlatego też nazywamy  $Y$  sprowadzoną siłą poprzeczną.

Z rów. 181) wypływa  $Y = D \text{ dost } \alpha$ , zatem  $Y$  jest równe i wprost przeciwne pionowej składowej siły wewnętrznej, działającej w krzyżulcu. Siłę  $Y$  możemy jeszcze inaczej wyznaczyć. Nazwijmy  $M$  moment sił zewnętrznych ze względu na punkt  $F$ , to z rysunku widzimy, że  $M = Q\xi$ , więc  $\xi = \frac{M}{Q}$ . A ponieważ

$\xi = b - c$ , zatem  $b - c = \frac{M}{Q}$ , a stąd  $c = b - \frac{M}{Q}$ . Wstawiliśmy tę

wartość za  $c$  w rów. 180), otrzymamy  $Y = \frac{Q}{b} \left( b - \frac{M}{Q} \right)$ , czyli

$$Y = Q - \frac{M}{b} \dots 182)$$

Z rysunku widzimy dalej, że  $h = b (st \sigma + st \tau)^*$ , czyli  $\frac{1}{b} = \frac{1}{h} (st \sigma + st \tau)$ , po wstawieniu tej wartości w rów. 182) otrzymamy

$$Y = Q - \frac{M}{h} (st \sigma + st \tau) \dots 183)$$

Nazwijmy  $M'$  moment sił zewnętrznych ze względu na punkt  $C$ , to z rysunku widzimy, że  $M' = Q(\xi - e) = Q\xi - Qe$ , a ponieważ  $Q\xi = M$ , więc  $M' = M - Qe$ , a stąd  $Q = \frac{M - M'}{e}$ .

Dalej widzimy z rysunku, że  $h - h' = e(st \sigma + st \tau)$ . Podstawiliśmy te wartości w rów. 183), otrzymamy

$$Y = \frac{M - M'}{e} - \frac{Mh - h'}{h} \frac{1}{e}, \text{ czyli } Y = \left( \frac{M}{h} - \frac{M'}{h'} \right) \frac{h'}{e} \dots 184)$$

\*) Jeżeli punkt  $L$  jest po prawej stronie przekroju, to kąty  $\sigma$  i  $\tau$  są ujemne.



Nazwijmy wreszcie  $h''$  wysokość belki w punkcie  $H$ , a  $M''$  moment sił zewnętrznych ze względu na punkt  $H$ , to  $S_1 h''$  dost  $\sigma + M'' = 0$ . Ze względu na punkt  $C'$  będzie  $S_1 h'$  dost  $\sigma + Dh' = \alpha + M' = 0$ . Z porównania tych dwóch równań otrzymamy

$$D = \left( \frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \text{ dosiecz } \alpha, \dots \dots \dots 185)$$

więc

$$Y = \left( \frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \text{ dot } \alpha \dots \dots \dots 186)$$

Chcąc obliczyć  $Y$  w przybliżeniu, przyjmujemy zamiast pasów wielobocznych pasy ciągle krzywe, czyli odstęp węzłów nieskończenie mały. Wtedy  $e = dx$  a  $h' = h$ , więc z rów. 184)

otrzymamy

$$Y = \frac{d \left( \frac{M}{h} \right) h}{dx} \dots \dots \dots 187)$$

Ponieważ tutaj  $h' = h = dh$ , więc  $dh = dx$  (st  $\sigma + st \tau$ ). Wstawwszy to w rów. 183) otrzymamy

$$Y = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx} \dots \dots \dots 188)$$

Dla belki równoległej jest  $\sigma = \tau = 0$ , wtedy z tych wszystkich równań dla  $Y$  otrzymamy  $Y = Q$ .

Powyżej zaznaczyliśmy, że  $Q$  i  $M$  mamy obliczyć ze względu na punkt  $F$ , założywszy ciężary, działające w węzłach.

Równanie 173) do 188) można też w przybliżeniu stosować do belki blaszanej o pasach wielobocznych, jeżeli przy obliczeniu przekroju ze względu na moment nie uwzględnimy ścianki, a żebra obliczać będziemy ze względu na siłę poprzeczną.

### §. 57. Krzyżulce gibkie.

Gdy krzyżulce mają pracować na ciśnienie i ciągnięcie, urządzamy zwykle dla kraty prostokątnej podobnie, jak w belce równoległej (§. 44), krzyżulce podwójne gibkie z żelaza płaskiego.

Z obu przekątni jednego przedziału pracuje wtedy tylko ciągniona, a druga wygina się i nie wpływa zupełnie na belkę.

Dla danego obciążenia musimy wiedzieć, która przekątnia jest ciągniona, aby przy obliczeniu sił wewnętrznych w pasach orzec, ze względu na który punkt wyznaczyć mamy moment.



Z rów. 185)  $D = \left( \frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right)$  dosiecz  $a$  wypływa, że jeżeli ma być  $D > 0$  (rys. 95), to  $\frac{M''}{h''} > \frac{M'}{h'}$ , to znaczy, że ciągniona jest ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz  $\frac{M}{h}$  jest większy; druga przekątnia wcale nie pracuje.

Jeżeli  $\frac{M''}{h''} > \frac{M'}{h'}$ , to przekątnia, spadająca na prawo,  $CG$  jest ciągniona, więc

*z uwzględnieniem 9.* 
$$S_1 = -\frac{M''}{h''} \text{ siecz } \sigma, \quad S_2 = +\frac{M'}{h'} \text{ siecz } \tau. \quad \text{z uwzględnieniem 9}$$

Gdy zaś  $\frac{M''}{h''} < \frac{M'}{h'}$ , to przekątnia, spadająca na lewo  $EB$  jest ciągniona, więc  $S_1 = -\frac{M'}{h'} \text{ siecz } \sigma, \quad S_2 = \frac{M''}{h''} \text{ siecz } \tau. \quad \text{z uwzględnieniem 10.}$

A więc, aby obliczyć siłę wewnętrzną w pasie górnym, uwzględniamy zawsze większy iloraz  $\frac{M}{h}$ , zaś dla dolnego pasu zawsze iloraz mniejszy z dwóch ilorazów odnośnych do słupów, ograniczających ten przedział.

### §. 58. Ogólne wykreślne sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych.

Ogólny sposób wielobokowy zapomocą planu sił (§. 36), da się tu także zastosować zwłaszcza do wyznaczenia ciężaru stałego. Drugi sposób ogólny jest sposób Culmanna\*), którego użyć można, jeśli znamy wielkość i położenie siły  $Q$ , co łatwo otrzymać z wieloboku sznurowego.\*

3) Trzeci sposób podał Zimmermann, który polega na tem, że siłę poprzeczną  $Q$  zastępujemy dwiema siłami  $P_1$  i  $P_2$  (rys. 96), zaczepiającemi w obu końcach przeciętego krzyżulca  $CF$ . Ażeby  $Q$  było wypadkową sił  $P_1$  i  $P_2$ , musi być ( $e$  = poziomy odleg.  $P_1$  i  $P_2$  od  $C$ )

$$\left. \begin{aligned} P_1 e &= Q c_2 = M_2 \\ \text{i } P_2 e &= Q c_1 = M_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 189)$$

a stąd otrzymamy  $P_1 = Q \frac{c_2}{e} = \frac{M_2}{e}, \quad P_2 = Q \frac{c_1}{e} = \frac{M_1}{e} \dots \dots \dots 190)$

\*) p. Podr. Statyki Budowli II, wyd. str. 380.



Pondel. str. 124.

$$Q = P_1 - P_2 = \frac{M_2}{e} - \frac{M_1}{e} \dots \dots \dots 191)$$

Na podstawie rów. 189) łatwo wyznaczmy siły  $P_1$  i  $P_2$  wykreślne w sposób, uwidczniony na rysunku, lub też na podstawie znanych momentów.

Na rysunku mamy

$$Q:mn_1 = e:c_2 \text{ i } Q:mm_1 = e:c_1,$$

a zatem

$$mn_1 = \frac{Qc_2}{e} = P_1, \quad mm_1 = \frac{Qc_1}{e} = P_2.$$

Dla równowagi między siłami  $P_1, P_2, S_1, D$  i  $S_2$  kreślimy zamknięty wielobok sił osobno lub też, jak to czyni Zimmermann, w wykresie belki, wykreślonym w dość wielkiej podziałce, zaczynając od punktu  $F$  lub też od węzła pasu górnego.

Z tych pięciu sił trzy  $P_1, S_1$  i  $D$  przechodzą przez  $C$ , dwie  $S_2$  i  $P_2$  przez  $F$ , więc wypadkowa z  $S_2$  i  $P_2$  będzie miała kierunek  $FC$ , kreślimy więc  $P_2 = OF$ ,  $OL$  poziomą  $\parallel$  do  $S_2$ , to  $LO$  jest  $S_2$ . Gdy  $FH = P_1$ ,  $HG \parallel S_1$ , to  $HG = S_1$ , a  $GL = D$ . Dla wyróżnienia kreskujemy powierzchnię tego wieloboku sił

Jeżeli  $e$  jest stałe, to możemy do wykresu użyć wprost rzędnych linii momentów. Jeżeli przyjmiemy do jej wykreślenia odległość biegunową  $a = ae$ , to  $\frac{M_1}{e} = \frac{ay_1}{e} = ay_1$  i podobnie  $\frac{M_2}{e} = ay_2$ .

### §. 59. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w pasach.

Szczegółowe sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach są następujące:

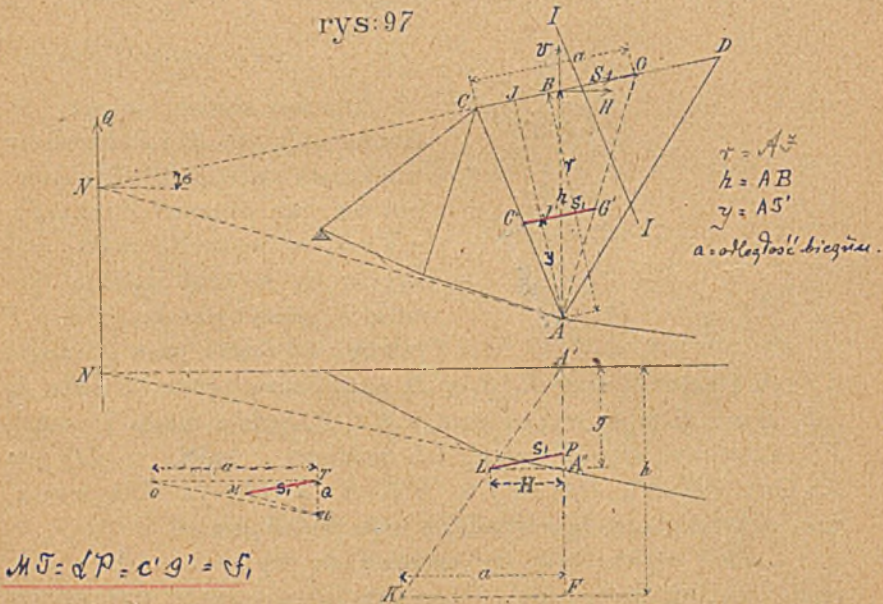
a) Możemy tu użyć z korzyścią sposobu Culmanna. Przetnijmy tylko belkę według  $H$  (rys. 97) i wyznaczmy odnośną siłę poprzeczną. Przedłużmy dwa odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie  $N'$ , przez który przechodzi wypadkowa  $Q$ . Przedłużmy następnie część pasu  $CD$ , aż się przetnie z siłą poprzeczną  $Q$  w punkcie  $N$ , to wypadkowa z  $S_1$  i  $Q$  musi mieć kierunek  $NA$ .

\* *Siła poprzeczna Q, dla jakiegokolwiek przecięcia I-I otrzymamy (rys. 97), jeżeli przesunąć boki wieloboku sznurowego przedłużony aż do przecięcia się N' i w wieloboku sił poprowadzimy to tych boków prociwnie równo, także ON; wtedy Q = FN, potem gdy N' jest punktem momentu siły poprzecznej:*

Wielokąt siłowy zamknięty Zimmermanna jest to, że siły wewnętrzne w odcinkach pionowych nie wymiarują, zgodnie z Równaniem 191, (podobnie jak w górnym, lecz zmieniają je do 189) i 190) (189-190)

Zróbmy w wieloboku siłę  $OT \parallel N'A'$ , zaś  $OU \parallel N'A''$ , to jak wiemy, będzie  $TU = Q$ . Wykreślmy  $TM \parallel CD$  a  $UM \parallel AN$ , to  $UTM$  jest zamkniętym wielobokiem sił i  $MT = S_1$ .

Jeżeli chcemy użyć sposobu Culmanna, trzeba, aby punkt  $N$  znajdował się jeszcze na papierze. Jeżeli punkt  $N$  wypada poza papier, użyć musimy innego sposobu.



b) Wykreślmy z punktu  $A$  pionową  $AB$  i siłę  $S_1$  rozłożmy na dwie składowe, poziomą  $H$  i pionową  $V$ . Wtedy ze względu na punkt  $A$  pionowa składowa  $V$  nie daje żadnego momentu, więc możemy napisać  $Hh + M = 0$ , więc  $H = -\frac{M}{h}$ , lub bez względu na znak  $H = \frac{M}{h}$ . Nazwijmy rzędną  $A'A'' = y$ , to  $M = ay$ , jeżeli  $a$  oznacza odległość biegunową, zatem  $H = \frac{ay}{h}$ , czyli  $H : y = a : h$ . Ten stosunek możemy wykreślnie wyznaczyć. Zróbmy  $A'F = h$  i wykreślmy z punktów  $A''$  i  $F$  poziome, następnie zróbmy  $FK = a$  i połączmy punkt  $A'$  z  $K$ , a otrzymamy dwa trójkąty podobne  $A'A''L$  i  $A'FK$ , więc  $A''L : y = a : h$ , zatem  $A''L = \frac{ay}{h} = H$ .

Wykreślmy dalej  $LP \parallel CD$ , to

$$LP = H \text{ siecz } \sigma = -\frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma = S_1.$$

c) Według rów. 173) jest  $S_2 = \frac{M}{r} = \frac{ay}{r}$ . Wykreślmy  $AI \perp CD$ , to  $AI = r$ , zrobmy dalej  $CG = a$ ,  $AI = y$ , połączmy  $A$  z  $G$  i wykreślmy  $C'G' \parallel CG$ , to  $C'G' : CG = y : r$ , a stąd  $C'G' = \frac{ay}{r} = S_2$ .

Sposób ten podał Müller Breslau.

d) Jeżeli odstęp poziomy węzłów jest stały (rys. 98), to dogodnieby było przyjąć odległość biegunową  $a$  równą temu odstępowi, jeżeli to w ogóle jest możliwe ze względu na wielkość rysunku i przyjęte podziałki. Znajdziemy wtedy najprzód  $\frac{M}{h} = \frac{ay}{h}$ , a wykreśliwszy w  $A$

rys:98.



pionową  $AB = h$ , to  $CD = a$  siecz  $\sigma$ , teraz zrobimy  $AB' = y$  i przez  $B'$  kreślmy  $C'D' \parallel CD$ , to  $C'D' : CD = y : h$ ,  $C'D' = \frac{CDy}{h} = \frac{ay}{h}$  siecz  $\sigma = \frac{M}{h}$  siecz  $\sigma = S_1$ .

### §. 60. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w krzyżuleach.

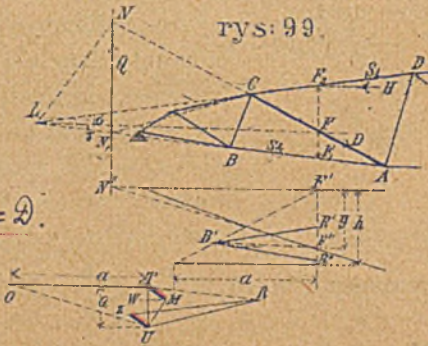
I. Pierwszy sposób według Culmanna. Przedłużwszy przecięte części pasów  $CD$  i  $BA$  do punktu przecięcia się

$L$  (rys. 99), kreślimy z punktu tego poziomą, aż przetnie przecięty krzyżulec  $CA$  w punkcie  $F$ , z którego kreślimy pionową  $F_1F_2$ .

W znany sposób otrzymamy punkt  $N'$ , przez który przechodzi siła poprzeczna, i przedłużamy  $AC$ , aż

się przetnie z siłą  $Q$  w punkcie  $N$ . Wypadkowa sił  $D$  i  $Q$  będzie więc miała kierunek  $NL$ .

rys:99.



$$FM = HU = D.$$

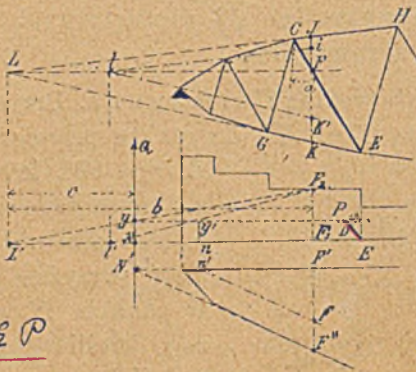
Jeżeli teraz z wieloboku sił  $TU=Q$ , to poprowadziwszy  $TM \parallel AC$  i  $UM \parallel LN$ , otrzymamy trójkąt  $TMU$ , w którym  $TM=D$ .

✦ Ten sposób wymaga, aby punkty  $L$  i  $N$  były jeszcze na papierze. Jeżeli punkt  $L$  wypada poza papier, a  $Q$  jest jeszcze na papierze, to możemy przedłużyć  $S_2$  aż do przecięcia się z  $Q$  w  $N_1$ , w wieloboku sił wykreślić  $TR \parallel S_2$ ,  $UR \parallel N_1C$ , to  $UR$  jest wypadkowa z  $S_1$  i  $D$ . Zrobiwszy  $RZ \parallel S_1$  i  $UZ \parallel AC$ , otrzymamy  $ZU=D$ .

Jeżeli oba punkty  $L$  i  $N$  wypadają poza papier, to używamy następnego sposobu.

II. Drugi sposób. Według równ. 183)  $D$  dost  $a=Y=Q-\frac{M}{h}$  (st  $\sigma$  + st  $\tau$ ). Nazwijmy, jak w poprzednim paragrafie bez względu na znak iloraz  $\frac{M}{h}=H$  i wykreślmy najprzód w ten sam sposób, co pierwej,  $H=F''B'$  i z punktu  $B'$  poprowadźmy równoległe do obu pasów  $B'R'$  i  $BR''$ . Z konstrukcyi widzimy, że  $R'R''=H(st \sigma + st \tau)=\frac{M}{h}(st \sigma + st \tau)$ , a więc  $Y=Q-\frac{M}{h}(st \sigma + st \tau)=TU-R'R''$ . Zróbmy  $UW=R'R''$ , to  $Y=TU-UW=TW$ .

rys:100.



$Q = \varepsilon P$

Jeżeli teraz wykreślmy  $TM \parallel CA$ , a z punktu  $W$  poziomą, to

$TM=Y$  siecz  $\alpha=D$ ,

III. Trzeci sposób (rys. 100). Jeżeli dla danego obciążenia wyznaczyliśmy nie tylko momenty lecz i siły poprzeczne, lub jeśli znamy wielkość i położenie siły  $Q=F_1F_2$ , to użyć możemy trzeciego sposobu.

Połączmy  $L'$ , rzut punktu  $L$  przecięcia się odnośnych części pasów z  $F_2$ , a otrzymamy  $Ny=F_1F_2\frac{c}{b}=Q\frac{c}{b}=Y$  według równ. 180). *Ład'  $EF_2$   $Y$  siecz  $\alpha=D$ .*

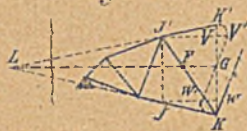
✦ Jeżeli punkty  $L$  i  $N$  wypadają poza papier, to robimy

$$Fi = \frac{1}{n} FJ, FK' = \frac{1}{n} FK, F'f' = \frac{1}{n} F'F''$$

i kreślimy  $il \parallel CH$ ,  $K'l \parallel KE$  i  $fn' \parallel F''N'$ , w skutek czego  $F_1l' = \frac{1}{n} F_1L'$  i  $F_1n = \frac{1}{n} F_1N$ . W punkcie  $n$  wykreślamy pionową, łączymy  $l'$  z  $F_2$ , to  $ny' = Ny = Y$  na mocy konstrukcyi.

Czasem może powstać trudność wyznaczenia punktu  $F$ , a mianowicie, jeśli punkt  $L$  wypada poza papier (rys. 101). Prowadźmy w obu końcach krzyżulca  $IK$  pionowe, a z punktów

rys: 101



$L$ ,  $I'$  i  $I$  poziome, to otrzymamy następujące trójkąty podobne:  $LK'G \sim I'K'V$ , zatem  $K'G : K'V = LG : I'V$ . Z podobieństwa zaś trójkątów  $LKG$  i  $IWK$  wynika, że  $LG : IW = KG : KW$ . Porównawszy te dwie proporcye, otrzymamy

$$(K'G - K'V) : K'V = (KG - KW) : KW, \text{ czyli } VG : K'V = WG : KW.$$

Zróbmy  $VV' = VK'$ ,  $WW' = WK$  i połączmy punkty  $V'$  i  $W'$  z punktem  $G$ , to otrzymamy  $VV'G \sim WW'G$ , bo dwa boki są proporcjonalne, mianowicie  $VG : VV' = WG : WW'$ , a kąt naprzeciw większego boku leżący prosty. Z tego wynika, że  $\sphericalangle VGV' = \sphericalangle WGW'$ , zatem  $V'W'$  jest linią prostą. A więc chcąc wyznaleść punkt  $F$ , robimy  $VV' = VK'$  i  $WW' = WK$ , następnie łączymy punkt  $V'$  z  $W'$  i w ten sposób otrzymujemy punkt  $G$ , z którego kreślimy poziomą aż do przecięcia się z linią  $IK$  w punkcie  $F$ .

IV. sposób. Możemy tu użyć także ogólnego sposobu Zimmermanna (§. 58). Co do zastosowania jego do wyznaczenia sił wewnętrznych w 'słupach, musimy

rys: 102



tu zrobić jednak jeszcze pewną uwagę. Jeżeli pomost jest u góry, a w dolnych węzłach nie działają żadne ciężary, to według sposobu

Zimmermanna robimy (rys. 102.)  $EK = \frac{M'}{e}$ ,

$$Ff = \frac{M''}{e}, \text{ gdy } M' \text{ i } M'' \text{ oznaczają momenty}$$

sił zewnętrznych w  $E$  i  $F$ . Kreślimy dalej  $Kg \parallel S_2$  i  $fh \parallel S_1$ , to  $fh = S_1$ ,  $hi = D$ ,  $ig = S_2$ . Dla równowagi w punkcie  $F$  musimy wykreślić wielobok sił  $S_2$ ,  $S_2'$ ,  $D$  i  $V$ , a że  $S_2$  i  $D$  są znane, więc otrzymamy szukany wielobok, kreśląc  $hl \parallel S_2'$ , to  $hl = S_2'$  i  $gl = V$ .  $V$  jest tu ciśnieniem.

Jeżeli w punkcie  $F$  działa jeszcze ciężar  $C$  (rys. 103), to  $V$  i  $C$  mają ten sam kierunek,  $lg$  jest więc sumą  $-V+C$ . Zrobiwszy  $mg=C$ , otrzymamy  $lm=V$ . A zatem chcąc uwzględnić ciężar węzłowy  $C$ , dodajemy do siły  $V$  ciężar  $+C$  (bo  $V$  jest ujemne).

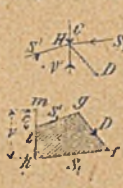
rys: 103



rys: 104



rys: 105



Dla wypadku, gdy pomost jest u dołu, konstrukcją podobną uwidoczniliśmy w rys. 104). Jeżeli w  $H$  działa jeszcze ciężar  $C$  (rys. 105), to dodać musimy do  $V$  ciężar  $-C$  (bo tu  $V$  ujemne jest wskutek ciężaru  $C$  większe).

### §. 61. Linie wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach.

W celu wyznaczenia linii wpływowych dla krzyżulców, zastosujemy rów. 182)  $Y=Q-\frac{M}{b}$ . Przypuściwszy, że ciężar  $P$  działa w odstępnie  $x$  od lewej podpory  $A$  (rys. 106), otrzymamy oddziaływanie  $O_1=P\frac{l-x}{l}$ . Dla  $0 < x < x'$ , tj. gdy ciężar  $P$  znajduje się między  $A$  i  $G$ , będzie  $Q=-P\frac{x}{l}$ . Ponieważ moment  $M$  ze względu na punkt  $F$  równy jest  $Q\xi$ , więc możemy napisać  $Y=Q\left(1-\frac{\xi}{b}\right)$ . Ponieważ  $Q$  jest wypadkową z  $O_1$  i  $P$ , musi więc dla równowagi być równą sile  $O_2$  i działać w punkcie  $B$ , więc  $\xi=-(l-x_1)$ . Podstawmy tę wartość w rów. 182), a otrzymamy

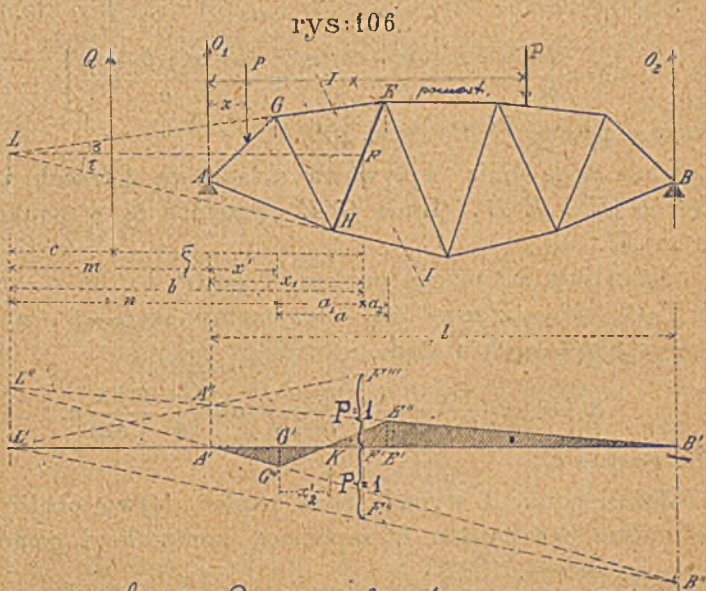
$$Y=-\frac{xP}{l}\left(1+\frac{l-x_1}{b}\right)=-\frac{Px}{l}\frac{b+l-x_1}{b}=-\frac{Px}{l}\frac{m+l}{b} \quad 192)$$

Dla danego krzyżulca  $EH$  zmienia się  $Y$  tylko według  $x$ , zatem to równanie jest równaniem linii prostej.



Jeżeli w równ. 192) założymy  $x=0$ , to będzie  $Y=0$ , dla  $x=l$  będzie  $Y=-P\frac{l+m}{b}$ , co możemy łatwo wykreslić. Zrobimy  $F'F''=P$  i przedłużymy  $L'F''$  aż do  $B''$ , otrzymamy  $L'B'B'' \sim L'F'F''$ , z czego wynika, że  $B'B'' : P = (l+m) : b$ , więc  $B'B'' = -P\frac{l+m}{b}$ . A zatem dla  $x=0$  otrzymamy punkt  $A'$ , dla  $x=l$   $B''$  jako punkt linii wpływowej, która jednak jest tylko ważną od  $A'$  do  $G''$ .

Dla  $l > x > x_1 + a_2$  będzie  $Q = P\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ , zaś  $\xi = x_1$ , a więc według rów. 182)  $Y = P\frac{l-x}{l}\left(1 - \frac{x_1}{b}\right) = P\frac{l-x}{l} \frac{m}{b}$  . . . . . 193)



*Linia wpływowa dla przyczółka 2H.*

Znów więc otrzymujemy równanie linii prostej, dla wykreślenia której potrzebujemy wyznaczenia dwóch punktów i tak dla  $x=0$  będzie  $Y = P\frac{m}{b}$ , zaś dla  $x=l$  będzie  $Y=0$ . Wykreślmy  $F'F'''=P$ , połączmy  $L'$  z punktem  $F'''$ , a otrzymamy

$A'A'' = \frac{Pm}{b}$ ;  $A''B'$  jest więc prostą, wyznaczoną rów. 193). Według założenia z prostych  $A'B''$  i  $A''B'$  zatrzymać możemy tylko części  $A'G''$  i  $E''B'$ . Z rów. 192) i 193) otrzymamy dla  $x = -m$   $Y = \frac{Pm}{l} \frac{m+l}{b} = L'L''$ , zatem proste  $A'B''$  i  $A''B'$  przecinają się w  $L''$  nad punktem  $L'$ .

Pozostaje teraz jeszcze tylko wykreślenie linii wpływowej, gdy ciężar działa w przedziale  $GE$  (rys. 106), którą otrzymamy według §. 25, połączywszy  $G''$  z  $E''$  prostą. Aby otrzymać równanie tej prostej, założmy, że  $x_1 - a_1 < x < x_1 + a_2$  (rys. 107) i zrobmy  $x = x_1 - a_1 + x_2$ , to  $Q = P \frac{l-x}{l} - P \frac{a-x_2}{a}$ , więc według równania 182)

$$Y = P \frac{l-x}{l} \frac{m}{b} - P \frac{a-x_2}{a} \left( \frac{b-a_1}{b} \right)$$

albo 
$$Y = \frac{P}{b} \left[ \frac{(l-x_1+a_1-x_2)m}{l} - \frac{(a-x_2)(b-a_1)}{a} \right] \quad . \quad . \quad 194)$$

równanie prostej  $G''E''$  (rys. 106).

*Wyznaczenie punktu obrotowego.*

Cała więc linia wpływowa składa się z trzech prostych  $A'G''$ ,  $G''E''$  i  $E''B'$ . Linia  $G''E''$  przecina oś w punkcie obrotowym  $K$ .

Nazwijmy  $x_2'$  odstęp punktu  $K$  od  $G'$ , to dla  $x_2 = x_2'$  musi być  $Y=0$ , więc z rów. 194) otrzymamy  $am(l-x_1+a_1-x_2') = (a-x_2')(b-a_1)l$ , a stąd

$$x_2' = - \frac{(x_1 - a_1)(m+l)}{a(b-x_1) - l(b-a_1)} a = \frac{(1+m)x'}{ln - am} a, \quad . \quad . \quad 195)$$

jeżeli  $n = b - a_1$ .

*Wyznaczenie linii wpływowej na przemieszczalności.*

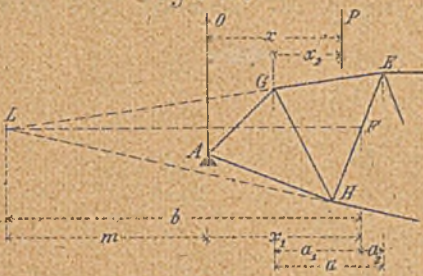
Jeżeli punkt  $L$  wypada poza papier, łatwo obejść się będzie można bez punktu  $L'$  zapomocą konstrukcyi pomocniczej, wskazanej w rys. 108).

Na pionowej linii  $FF_1$  odcinamy  $Ff = \frac{1}{n} FF_1$ , przyczem  $n$  jest dowolną liczbą całą. Wykreślmy teraz  $f \parallel F_1E$ , to  $Ff = \frac{1}{n} FL$ .

Połączmy punkt  $f'$  z  $F''$  i  $F'''$  prostymi, zrobmy  $F'a' = \frac{1}{n} F'A'$  i  $F'b' = \frac{1}{n} F'B'$ , wyprowadźmy w  $a'$  i  $b'$  prostopadłe, a otrzymamy  $a''$  i  $b''$ . Poziome, wykreślone przez te punkty,

wyznaczają punkty  $A''$  i  $B''$ , odpowiadające takimże punktom w rys. 106, poczem wykreślamy linię wpływową, jak poprzednio.

rys:107.

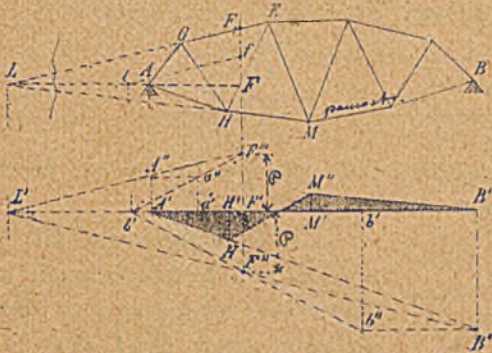


Punkt obojętny możemy wyznaczyć też w inny sposób, podany przez Culmanna (rys. 109). *Wyznaczenie punktu obojętnego.*

Jeżeli ciężar  $P$  znajduje się w przedziale  $CG$ , rozkłada się na siły  $P_1$  i  $P_2$ , działające w węzłach sąsiednich pasu, na którym znajduje się pomost (tu

dolnego). Ciężar ten wywołuje siłę wewnętrzną  $D$  w krzyżulcu  $HG$ . Dla pewnego położenia tego ciężaru  $D=0$ . Punkt obojętny, w którym gdy działa  $P$ ,  $D$  jest  $=0$ , znajdziemy w następujący sposób. Przedłużamy przeciętą część pasu górnego  $HM$

rys:108



do pionowych podporowych, łączymy  $A'$  z  $C$  i  $B'$  z  $G$  i przedłużamy te proste do przecięcia się w  $E$ , to  $E$  jest właśnie punktem obojętnym. Aby tego dowieść, założmy, że w  $E$  działa siła  $P$  i uważajmy wielobok  $A'CG B'$ , jako wielobok sznurowy, to, jeżeli  $st=P$ , gdy zrobimy  $sO \parallel A'E$ ,  $tO \parallel EB'$ ,

i  $Or \parallel GC$ , to  $sr=P_1$ ,  $rt=P_2$ . Jeżeli teraz wykreślimy  $Ou \parallel HM$ , to  $su=O_1$ ,  $ut=O_2$ . Położenie siły poprzecznej  $Q=O_1 - P_1$  otrzymamy, przedłużwszy odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie  $L$ . Z rów. 179) widzimy, że jeżeli siła poprzeczna zaczepia w  $L$ , czyli jeśli  $c=0$ ,  $D=0$ , a więc rzeczywiście  $E$  jest punktem obojętnym.]

Jeżeli pomost jest na pasie prostym, to zamiast powyższej konstrukcyi dla wyznaczenia punktu obojętnego, możemy użyć innej, podanej na rys. 110. dla kraty prostokątnej. *Wyznaczenie punktu obojętnego.*

Według powyższej konstrukcyi należałoby dla wyznaczenia punktu obojętnego dla siły  $D$  w  $ED$  przedłużyć  $EG$  do przecięcia się z pionowami podporowemi w  $A'$  i  $B'$  i wykreślić  $A'C$  i  $B'D$  do przecięcia się w  $M$ . Zamiast tego łatwiej

rys: 109.



Wyznaczenie punktu obojętnego 9. dla Krzyżulka H 9.

jest wykreślić proste  $AE$  i  $BG$  do przecięcia się w  $M'$ , które leży ponad punktem  $M$ , jakto zaraz udowodnimy. Z rysunku mamy

$$\begin{aligned} M'K : EC &= (x_1 + a_1') : x_1, \\ GD : M'K &= x_3 : (x_3 + a_2') \\ \hline GD : EC &= x_3 (x_1 + a_1') : x_1 (x_3 + a_2') \end{aligned} \quad \dots \quad 196)$$

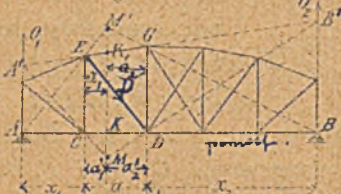
Zaś dla pierwszej konstrukcyi jest

$$\begin{aligned} K_1M : EC &= (x_1 + a_1) : x_1 \\ GD : K_1M &= x_3 : (x_3 + a_2). \\ \hline GD : EC &= x_3 (x_1 + a_1) : x_1 (x_3 + a_2) \end{aligned} \quad \dots \quad 197)$$

a więc

Z porównania rów. 196) i 197) wynika, że  $a_1 = a_1'$ , że więc punkt  $M'$  wyznacza punkt obojętny.

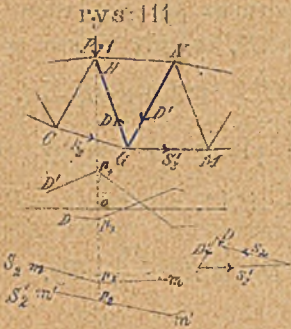
rys: 110.



Linie wpływową sił wewnętrznych w krzyżulcach możemy też wyznaczyć w sposób podany przez Müllera Breslaua, jeżeli znamy linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Niech będą linie  $nm$  i  $m'n'$ , liniami wpływowemi sił wewnętrznych w częściach pasów  $CG$  i  $GM$  (rys. 111), to z nich możemy łatwo wyznaczyć linie wpływowe dla sił wewnętrznych  $D$  i  $D'$  w krzyżulcach  $HG$  i  $GN$ . Załóżmy, że siła  $P=1$  działa w  $H$ , to  $S_2 = op_1$ ,  $S'_2 = op_2$ . Siły wewnętrzne, zaczepiające w węzle  $G$  muszą być w równowadze, da się więc wykreślić zam-

Wyznaczenie linii wpływowej

knięty wielobok sił, z którego otrzymamy wielkości sił wewnętrznych —  $D$  i  $+D'$ .



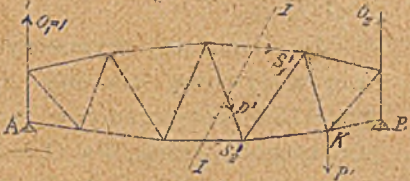
Zróbmy teraz  $op_3 = -D$  i  $op_4 = +D'$ , to punkty  $p_3$  i  $p_4$  będą punktami linii wpływowych  $D$  i  $D'$ . Jeśli przypuścimy, że siła  $P=1$  działa w innych punktach, to wyznaczmy w ten sam sposób inny punkt linii wpływowych  $D$  i  $D'$ . Ponieważ linia wpływowa składa się w tym wypadku z trzech prostych, więc wystarczy w ten sposób wyznaczyć 2 lub 3 punkty, aby całą linię wykreślić.

**§. 62. Ogólny sposób wykreślenia linii wpływowych według Müllera Breslaua.** *(z pomocą linii planów i profilu).*

Linie wpływowe sił wewnętrznych jakichkolwiek belki statycznie wyznaczalnej dadzą się wedle Müllera Breslaua jeszcze inaczej wyznaczyć.

Przypuśćmy, że w punkcie  $K$  ostatnim węźle przed  $B$  zaczepia siła  $P'$  tak wielka, że oddziaływanie  $O_1=1$  (rys. 112).

rys. 112



Siły wewnętrzne w przeciętych trzech prętach niech będą  $S_1'$ ,  $D'$  i  $S_2'$ , dadzą się one łatwo wyznaczyć zapomocą sposobu Cullmanna, lub, gdy nam chodzi też o siły w innych prętach, planu sił, który kreślimy, zaczawszy od  $A$ .

Podobnie zaczepiamy w węźle  $K_1$  najbliższym  $A$  (rys. 113) siłę  $P''$  tak wielką, aby  $O_2=1$ . Dla tego wypadku wyznaczmy zapomocą sposobu Cullmanna lub planu sił, siły  $S_1''$ ,  $D''$

rys. 113.



i  $S_2''$ , przyczem wyznaczamy siły, począwszy od  $B$ , nie wyznaczając jednak w żadnym wypadku sił  $P'$  i  $P''$ . Jeżeli belka jest

symetryczna, to plan sił dla przypadku  $O_1 = 1$  i dla  $O_2 = 1$  będą zupełnie podobne tak, że wystarczy wykreślenie jednego planu sił.

Przypuścimy teraz, że siła  $P=1$  porusza się po belce od  $A$  do  $B$  (rys. 114) i szukajmy n. p. siły  $D$ , to gdy  $P$  stoi w  $F$ ,

$$O_1 = P \frac{b}{l}. \text{ Gdyby } O_1 = 1, \text{ to}$$

$$\text{wedle planu sił byłoby } D = D' = A'A'', \text{ ale że } O_1 = P \frac{b}{l},$$

$$\text{więc } D = A'A'' \cdot \frac{Pb}{l} = Py,$$

$$\text{bo } y = A'A'' \frac{b}{l}.$$

A zatem  $B'A''$  jest linią wpływową dla  $D$  i to aż do  $H''$ . Jeżeli teraz  $B'B''$  jest  $D''$ , to jest to siła w  $D$  dla  $O_2 = 1$ , a z tego samego powodu jest  $A'B''$  linią wpływową dla  $D$  od  $A'$  do  $G''$ . Jeśli teraz połączymy  $G''$  z  $H''$  prostą, otrzymamy linię wpływową  $A'G''H''B'$ .

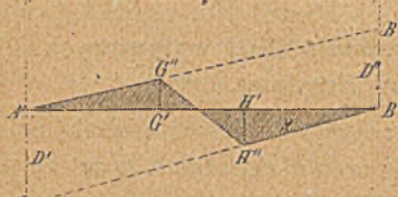
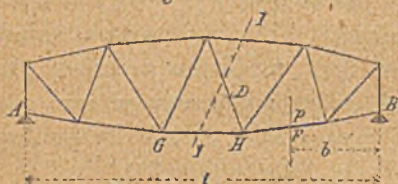
Jeżeli chcemy wyznaczyć linię wpływową dla siły  $S_1$  (rys. 115), postępujemy w ten sam sposób. Jeżeli dla  $O_1 = 1$  wyznaczymy  $S_1'$  i zrobimy  $A'A'' = S_1'$ , to wedle powyższego jest  $B'H''$  linią wpływową dla  $S_1$ . W tym wypadku wiemy, że po lewej stronie linia wpływowa jest  $A'H''$ ,

ogólnie jednak będzie  $B'B'' = S_1''$  dla  $O_2 = 1$ .

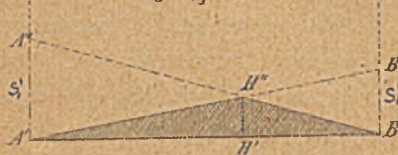
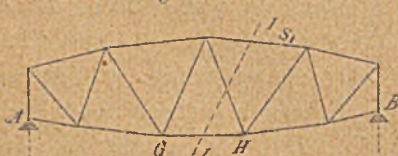
### §. 63. Wyznaczenie analityczne największych sił wewnętrznych w krzyżulcach.

1. Obciążenie ciągle. Dla *najw* +  $Y$  musi belka być obciążona na prawo od punktu obojętnego na długości  $KB'$

rys:114.



rys:115.



(rys. 106), a nie powinna być obciążona na długości  $A'K$  na lewo od punktu obojętnego.

A zatem, jeżeli ciężar jednostkowy jest  $p$ , będzie

$$najw (+Y) = p \cdot \frac{1}{2} KB' \cdot E'E'' = \frac{p}{2} (l - x' - x_2') E'E''.$$

Z rysunku widzimy, że  $E'E'' : A'A'' = (l - x' - a) : l$ , zaś  $A'A'' : l = m : b$ . Pomnożmy obie te proporcje, a otrzymamy  $A'A'' \cdot E'E'' : A'A'' = m(l - x' - a) : bl$ , a stąd  $E'E'' = \frac{m(l - x' - a)}{bl}$ .

Wstawivszy tę wartość i wartość za  $x_2'$  z rów. 195) w rów. dla  $najw (+Y)$ , otrzymamy

$$najw (+Y) = \frac{p}{2} \left( l - x' - \frac{(l+m)x'}{ln - am} a \right) \frac{m(l - x' - a)}{bl},$$

czyli zważywszy, że  $m + x' = n$

$$najw (+Y) = \frac{(l - a - x')^2 mn p}{ln - am} \frac{1}{2b} \dots \dots \dots 198)$$

Podobnie otrzymamy  $najw (-Y) = -\frac{1}{2} p A'K \cdot G'G'' = -\frac{1}{2} p (x' + x_2') G'G''$ . Z rysunku widzimy, że  $G'G'' : B'B'' = x' : l$  i  $B'B'' : l = (m+l) : b$ . Pomnożywszy obie te proporcje, otrzymamy  $G'G'' \cdot B'B'' : B'B'' = x'(m+l) : bl$ , więc  $G'G'' = \frac{(m+l)x'}{bl}$ .

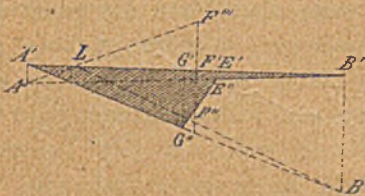
Wstawivszy w równ. dla  $najw (-Y)$  tę wartość za  $G'G''$  i za  $x_2'$  z rów. 195), otrzymamy

$$najw (-Y) = -\frac{1}{2} p \left( x' + \frac{(m+l)x'}{ln - am} a \right) \frac{(m+l)x'}{bl}, \text{ czyli}$$

$$najw (-Y) = -\frac{(a+n)(l+m)x'^2 p}{ln - am} \frac{1}{2b} \dots \dots \dots 199)$$

2. Dla obciążenia ciężarami skupionymi postępujemy według ogólnych prawideł. Nazwijmy  $P'$  wypadkową sił

rys. 116.



na długości  $KE'$  (rys. 106), zaś  $P''$  na długości  $E'B'$ , to wiemy, że dla największości ciężary jednostkowe mają być, ile możności, równe. Jeden ciężar stać więc musi na prawej poprzecznicy.

Zupełnie tak samo postępujemy dla  $najmn.$  natężenia.

Ozasem, zwłaszcza dla dachów, punkt  $L$  wpada na podporę, albo też między podpory. Konstrukcya linii wpływowej

*co to najwięk. Równowagi jest obciążenia Równowagi na dachy, jeżeli waznacze punkt obrót d. Zatem nie my punkt obrót d. Równowagi też waznacze czy też waznacze obu Równowagi, jest Równowagi należący naj. bardziej przy obciążeniu skupionem lub rozciągionem.*

zostaje wtedy ta sama (rys. 116), a z niej widzimy, że wtedy niema wcale punktu obojętnego i najw. siła wewnętrzna jest wtedy dla zupełnego obciążenia.

Jeżeli punkt  $L$  wpada na punkt  $A$ , to  $A''$  wpada na  $A'$  i  $E''$  na  $E'$  i otrzymujemy długość obojętną  $EB'$ . Wtedy obciążenie prawej strony belki jest obojętne, gdyż nie wywołuje żadnych sił wewnętrznych w krzyżulcach lewej strony belki.

### §. 64. Linie wpływowo sił wewnętrznych w pasach. Największe i najmniejsze siły.

Wiemy z §. 55, że siła wewnętrzna w pasie według 175)

$$S = \pm \frac{M}{h} \text{ siecz } a.$$

Ponieważ  $h$  i  $\sigma$  są dla pewnej części pasu stałe, to zmienny jest tylko moment, jak dla belki równoległej. Linie wpływowe dla  $S$  będą więc po odpowiedniej zmianie podziałki takie same, jak dla momentów. Wyznaczywszy w znany sposób największe momenty dla obciążenia stałego i zmiennego, otrzymamy w ten sposób największe i najmniejsze siły wewnętrzne w pasach. <sup>↑</sup>

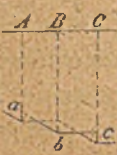
### §. 65. Wyznaczenie wykreślne największych sił wewnętrznych.

a) Pasy. Dla ciężaru stałego najlepiej użyć tu sposobu wielobokowego lub Culmanna, lub też któregośkolwiek innego szczegółowego, podanego w §. 59.

Jeżeli ciężar ruchomy jest ciągły, to z powodu, że obciążenie zupełne jest najniekorzystniejsze, postępujemy, jak dla ciężaru stałego.

Dla obciążenia układem ciężarów skupionych jest najniekorzystniejsze położenie dla każdego węzła inne. Jeżeli mamy dokładnie wyznaczone największe momenty (§. 26), to dla

rys. 118.



najniekorzystniejszego obciążenia dla punktu  $B$  (rys. 118), sprawiającego w tym punkcie największy moment, mamy wykreśloną część wieloboku sznurowego  $abc$ , która potrzebna <sup>jest</sup> do wyznaczenia położenia i wielkości siły poprzecznej  $Q$ . Znając  $Q$  i  $M$  wyznaczymy siłę wewnętrzną w pasie wedle §. 58. i 59.

b) Krzyżulce. Tu wyznaczymy siły wewnętrzne osobno dla ciężaru stałego, a osobno dla ciężaru ruchomego.

*\* Najw. siły wewnętrzne w pasach otrzymujemy skonstruując statek pasu, do. Najm. zaś siły powstają, gdy belka jest nieobciążona, wzgl. gdy trójkąt byłoby ciężar stały.*

Rys. 118. str. 139

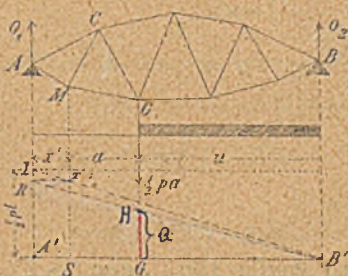


Dla ciężaru stałego używamy tu wprost jednego ze sposobów, podanych w §. 58 lub §. 60; dla ciężaru ruchomego możemy ich także użyć, tu musimy jednak zrobić jeszcze parę uwag i podamy kilka innych sposobów.

### §. 66. Największe siły wewnętrzne w krzyżulcach a) dla obciążenia ciągłego.

Z kształtu linii wpływowych wiemy, że dla *najw.* sił wewnętrznych w krzyżulcach dla ciężaru zmiennego musi być obciążona prawa strona belki od punktu obojętnego.

rys: 119.



Jeżeli ciężar jest ciągły, to najlepiej wykreślić wyznaczmy *najw.* siłę wewnętrzną, obliczając powierzchnię wpływową. Licząc w przybliżeniu, możemy przyjąć, że belka jest obciążona od węzła prawego G do prawej podpory B (rys. 119), a oprócz tego w węzle prawym

*Uważać siły poprzecznej A.*  
*prof. Dr. Herrig*

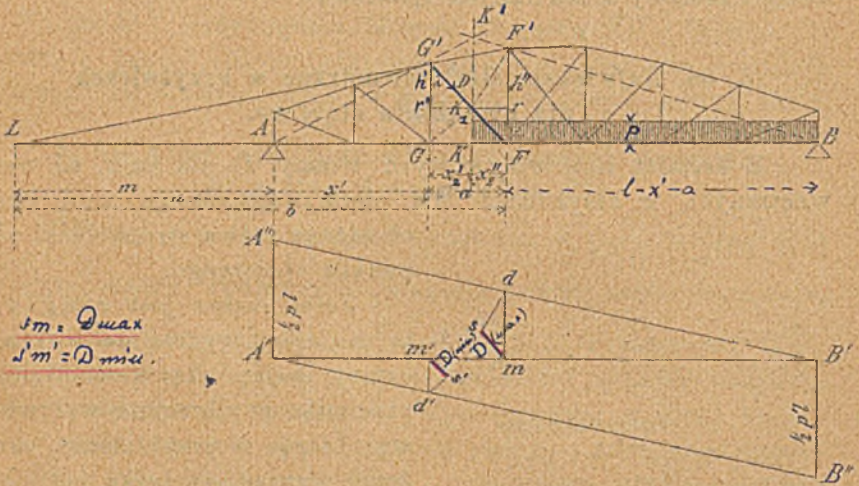
ciężarem  $\frac{pa}{2}$ , jeżeli  $a$  oznacza długość przedziału. Otrzymujemy wtedy siłę poprzeczną nieco większą, niż przy obciążeniu najniekorzystniejszym. Wtedy mamy ze względu na punkt B

$$O_1 l - \frac{pa}{2} u - \frac{pu^2}{2} = 0, \text{ a stąd } O_1 = \frac{pu}{2l} (u + a) = Q. \quad (200)$$

Siłę poprzeczną otrzymamy wtedy wykreślić według Müllera Breslaua w następujący sposób. Robimy  $A'I = \frac{1}{2} pl$  i łączymy  $B'$  z  $I$ . Z obu sąsiednich węzłów  $M$  i  $G$  spuszczaemy pionowe, z punktu  $T$  na lewej pionowej kreślimy  $TR$  poziomo, to  $A'R = ST = \frac{A'I(a+u)}{l} = \frac{1}{2} pl \frac{a+u}{l}$ . Jeżeli teraz, połączymy  $B'$  z  $R$ , to  $GH = \frac{A'Ru}{l} = p \frac{(a+u)u}{2l} = Q.$

Możemy teraz użyć któregoś z sposobów podanego w § 60, przyczem zauważyć należy, że  $Q$  przechodzi przez  $A$ . Dokładniejsze i prostsze są sposoby podane przez Velflika i Melana.

c) Velflik podał łatwy sposób wyznaczania największych sił wewnętrznych dla kraty przedziałowej. Jeżeli chodzi o siłę  
rys 120.



$m = D_{max}$   
 $m' = D_{min}$

$D$  w przekątnej  $G'F'$  (rys. 120), to wedle 198) najw (+Y) =  $\frac{(l-a-x')^2 mn p}{ln-am} \frac{p}{2b'}$  więc gdy przez  $d$  oznaczymy słabość krzywej, to:

$$\begin{aligned} \text{najw (+D)} &= \text{najw (+Y)} \text{ siecz } a = \text{najw (+Y)} \frac{d}{h'} = \\ &= \frac{(l-a-x')^2 mn pd}{ln-am} \frac{pd}{2bh'} \dots \dots \dots 201) \end{aligned}$$

Wedle 195)  $x_2' = \frac{(l+m)x'}{ln-am} a$ , więc

$$x_2'' = a - x_2' = a - \frac{(l+m)x'}{ln-am} a = \frac{ln-am - lx' - mx'}{ln-am} a =$$

a że  $m = n - x'$ , więc

$$x_2'' = \frac{l(n-x') - an - mx'}{ln-am} a = \frac{(l-a-x')m}{ln-am} a, \text{ a stąd}$$

$$ln-am = \frac{(l-a-x')am}{x_2''}. \text{ Jeżeli tę wartość i } h' = h'' \frac{n}{b} \text{ wstawimy}$$

w rów. 201), to

$$\text{najw (+D)} = \frac{(l-a-x') p d x_2''}{2h'' a} \dots \dots \dots 202)$$

α) Sposób Velflika. \* Aby wyznaczyć najw (+D) w Krzywej  $G'F'$  rotacji  $\alpha' = \alpha'' = \frac{1}{2} \alpha$ , wystarczy spojrzeć na podłużny widok przedmiotu i wyznaczyć punkt abscysy  $K'(K'K)$ . Doznany punkt  $F'_2 K'$  prowadzimy do  $i$  równoległą do  $s$  i wyznaczamy na  $s$  równoległą do  $K'F'_2$ , to ma być  $i$  nasz punkt wyznaczenia najw (+D) (rys. 120)

Wielkość *najw* (+*D*) według rów. 202) możemy wyznaczyć wykreślnie. Zróbmy  $A'A'' = \frac{1}{2}pl$ , to

$$md = \frac{1}{2} \frac{pl(l - x' - a)}{l} = \frac{p(l - x' - a)}{2}.$$

Poprowadźmy teraz z  $K_1$  poziomą  $K_1r$ , to  $K_1rF \sim FGG'$ , a stąd  $x_2' : K_1F = a : d$ , więc  $K_1F = \frac{x_2'd}{a}$ .

Połączmy teraz  $F'$  z  $K_1$  i poprowadźmy  $ds \parallel F'K_1$  i  $ms \parallel D$ , to  $FF'K_1 \sim mds$ . Zatem  $md : ms = h'' : K_1F$ , więc  $ms = \frac{md \cdot K_1F}{h''}$ , a gdy wstawimy wartość za  $K_1F$  i  $md$ , to

$$ms = \frac{p(l - x' - a)}{2} \cdot \frac{x_2'd}{ah''} = \text{najw} (+D),$$

wedle 202) zatem  $ms$  przedstawia *najw* (+*D*).

Jeżeli chodzi o wyznaczenie *najw* (-*D*),\* to mamy wedle

rów. 199) *najw* (-*Y*) =  $-\frac{(a+n)(l+m)x'^2 p}{ln-am} \frac{p}{2b'}$  stąd (rys. 120, tylko obciążenie części lewej belki to  $\mathcal{K}$ ).

$$\text{najw} (-D) = (\text{najw} - Y) \frac{d}{h'} = -\frac{(a+n)(l+m)x'^2}{ln-am} \frac{pd}{2bh'}.$$

Wstawmy w to równanie  $a+n = b' \frac{1}{2}$  z rów. 195)

$$ln - am = \frac{(l+m)x'a}{x_2'}.$$

to otrzymamy

$$\text{najw} (-D) = -\frac{b(l+m)x'^2 x_2' pd}{(l+m)x'a} = -\frac{pd x' x_2'}{2a h'} \quad 203)$$

Jeżeli teraz wykreślimy  $m'd'$ , to  $m'd' : \frac{1}{2}pl = x' : l$ , więc  $m'd' = \frac{px'}{2}$ . Połączmy  $G$  z  $K_1$  i wykreślimy  $K_1r' \parallel GF$ , to  $K_1r'G' \sim GG'F$ , więc  $x_2' : K_1G' = a : d$ , stąd  $K_1G' = \frac{x_2'd}{a}$ . Teraz wykreślimy  $d's' \parallel GK_1$  i  $m's' \parallel G'F$ , to  $GG'K_1 \sim m'd's'$ , więc  $m'd' : m's' = h' : G'K_1$  stąd  $m's' = \frac{m'd' \cdot G'K_1}{h'} = \frac{px' x_2' d}{2 ah'} = \text{najw} (-D)$  wedle 203).

Jeżeli liczymy na podstawie ciężaru zastępczego, to  $p$  musimy przyjąć wedle długości obciążonej, więc  $A'A'' = \frac{1}{2}pl$ , przy czem  $p$  odpowiada długości obciążonej  $KB$ , zaś  $B'B'' = \frac{1}{2}p'l$ , przy czem  $p'$  odpowiada długości obciążonej  $AK$ .

\* Aby wyznaczyć *najw* (-*D*) robimy  $B'B'' = \frac{1}{2}p'l$ , wykreślamy  $m'd'$  w pionowej pod lewym węzłem przedziału, Dalej łączymy  $G$  z  $K_1$  kreślimy też równoległą  $d's'$  zaś następnie  $m's'$  równoległą do kątyłka  $G'F$ , to  $m's'$  przedstawia *najw* (-*D*). (rys. 120)

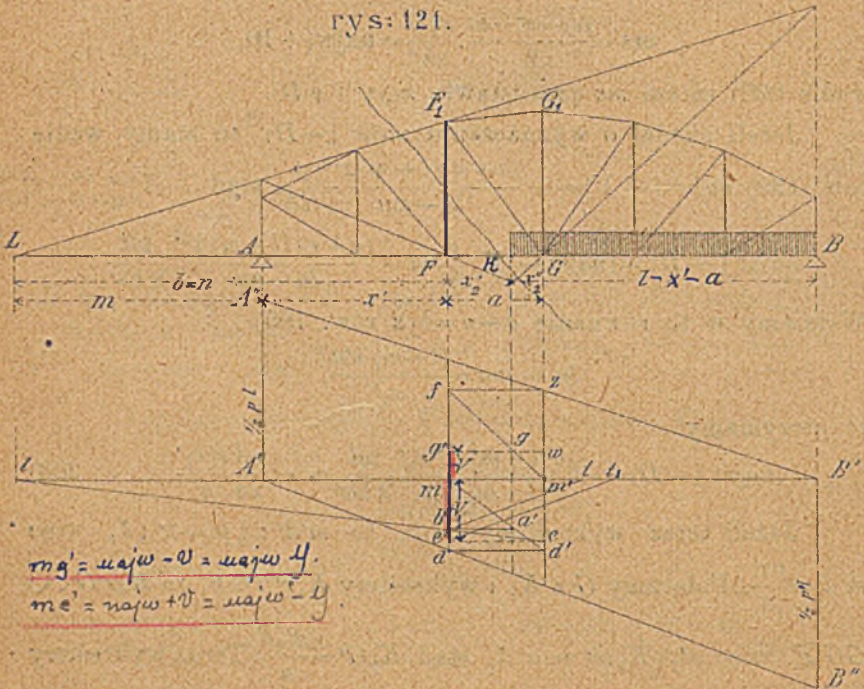
Dla słupów konstrukcję widzimy podaną na rys. 121.  
Tu  $b=n=m+x'$ . Wedle 198) mamy (patrz strona 120 rów. 181)

$$\text{najw (+Y)} = \frac{(l-a-x')^2 mn p}{ln-am} = \text{najw (-V)} \text{ (ciężar)}.$$

Wedle 195) jest  $x_2' = \frac{(l+m)x'}{ln-am} a$ , a że  $x_2'' = a - x_2'$ , więc

$$\begin{aligned} x_2'' &= a - \frac{(l+m)x'}{ln-am} a = \frac{a}{ln-am} [l(n-x') - am - mx'] = \\ &= \frac{am(l-a-x')}{ln-am} \end{aligned}$$

rys. 121.



$mg' = \text{najw} - V = \text{najw} - Y$   
 $me' = \text{najw} + V = \text{najw} - Y$

stąd  $ln - am = \frac{am(l-a-x')}{x_2''}$ . Wstawiliśmy to w rów. dla najw (-V), otrzymamy

$$\text{najw (-V)} = \frac{(l-a-x')^2 mn p x_2''}{am(l-a-x') 2b} = \frac{(l-a-x') p x_2''}{2a} \quad (204)$$

Jeżeli spuścimy z F.K. i G pionowe, z punktu z poprowadzimy poziomą i wykreślimy m'f, z g zaś znów poziomą g'w, to

\* Aby wyznaczyć najw(+Y) = najw(-V) (ciężar) w słupie FF<sub>1</sub> (rys. 121) rysujemy jak pierwej FF<sub>1</sub> = 1/2 pl i BB<sub>1</sub> = 1/2 p'l oraz spuszczamy z F K. i G pionowe. Z punktu z prowadzimy poziomą zf i wykreślamy fm', która musi wyznaczyć środek mg' = najw(-V)

$m'gw \propto m'fz$ . Zatem  $m'w : x_2'' = m'z : a$ , więc  $m'w = mg' = \frac{x_2'' \cdot m'z}{a}$ .

Z trójkąta  $m'zB' \propto B'A'A'$  mamy  $m'z : (l - x' - a) = \frac{1}{2} p'l : l$ , więc  $m'z = \frac{(l - x' - a)p}{2}$ . Wstawivszy to w poprzednie równanie, otrzymamy

$$m'w = \frac{x_2'' (l - x' - a)p}{2a} = \text{najw} (-V).$$

W podobny sposób znajdziemy  $\text{najw} (+V)$ . <sup>\*</sup>

Wedle 199) jest

$$\text{najw} (-Y) = \frac{(a+n)(l+m)x'^2 p}{ln - am} \frac{p}{2b} = + \text{najw} (+V).$$

Wedle 195) jest  $x_2' = \frac{(l+m)x'}{ln - am} a$ , więc  $ln - am = \frac{(l+m)x'a}{x_2'}$

więc  $\text{najw} (+V) = \frac{(a+n)(l+m)x'^2 p x_2'}{(l+m)x'a \cdot 2b} = \frac{(a+n)x'_2 p}{2an}$ . . . . 205)  
bo  $b = n$ .

Na tej podstawie mamy następną konstrukcyę. Wykreślmy  $B'B'' = \frac{1}{2} p'l$ , tu bowiem w ogólności może być inne  $p$ , niż dla  $\text{najw} (-V)$ . Połączmy  $A'$  z  $B''$ , wykreślmy pionowe przez  $F$ ,  $K$  i  $G$ , przez  $d$  poziomą, połączmy  $m$  z  $d'$  przez  $a'$  wykreślmy poziomą  $a'b'$ , to  $ma'b' \propto mdd'$  więc  $b'm : x_2' = dm : a$ , stąd  $b'm = \frac{x_2' dm}{a}$ .

Dalej mamy  $A'dm \propto A'B'B''$ , więc  $dm : x' = \frac{1}{2} p'l : l$ , więc  $dm = \frac{x' p'}{2}$ , zatem  $b'm = \frac{x_2' x' p'}{a \cdot 2}$ . Połączmy teraz  $l$  z  $b'$  i przedłużmy prostą do  $e$ , to  $lmb' \propto lme'$ , więc  $m'e : mb' = (n + a) : n$ , stąd  $me' = \frac{mb'(n+a)}{n} = \frac{(n+a)x'_2 x' p'}{2an} = \text{najw} (+V)$  wedle 205).

Jeżeliby punkt  $l$  wypadł poza papier, możemy inaczej postąpić. Zróbmy  $mt = FF_1$ ,  $mt_1 = GG_1$ , to  $FF_1$  do  $GG_1 = mt : mt_1 = n : (n+a)$ . Jeżeli połączymy  $t$  z  $b'$  i poprowadzimy  $t_1 e' \parallel tb'$ , to  $me' : mb' = (n+a) : n$ , jak pierwej. <sup>\*\*</sup>

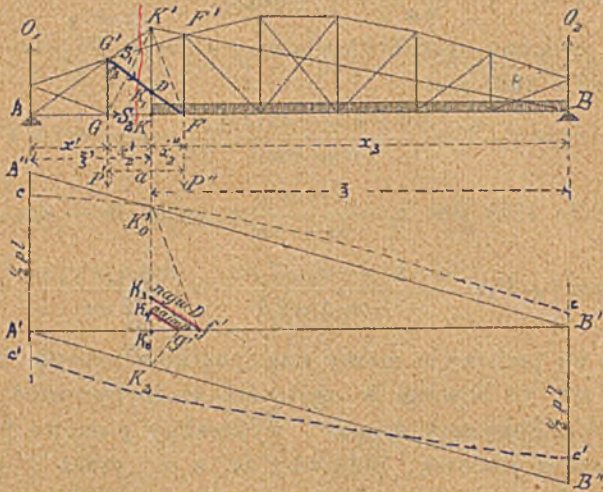
β) Teraz omówimy sposób Melana. Niechaj znowu  $p$  będzie ciężar jednostajnie rozłożony, więc dla mostów kolejowych ciężar zastępczy (według skali  $b$ ) odpowiadający długości obciążonej. Wyznaczamy w zwykły sposób punkt obojętny  $K$  (rys. 122) i obciążamy dla  $\text{najw} D$  długość  $KB$ .

\* Aby wyznaczyć  $\text{najw}(+V) = \text{najw}(-Y)$  w stopie  $FF$ , kreśli z punktu  $d$  poziomą  $dd'$  i linij  $md'$  która mi wyznacza długość  $mb'$ . Wyznaczamy w końcu  $d_1 l_1$  prowadzimy  $l_1 b'$  aż to  $e$ , który odina długość  $me' = \text{najw}(+V)$   $H$ . ciągłowiec (rys. 121)

\*\* Osterr. Reich. Monatschrift f. d. öff. Baukunst 1899. Heft 157.

Przypuśćmy najprzód, że obciążenie sięga od  $B$  tylko do  $F$ , to da się ono rozłożyć na dwie siły  $\frac{1}{2}px_3$ , działające w  $F$  i  $B$ . Siły  $S_1, D, S_2$  i  $O_1$  muszą być w równowadze. Siły  $S_1$  i  $D$

rys: 122.



przecinają się w  $G', O_1$  i  $S_2$  w  $A$ , więc wypadkowa z obu tych sił musi mieć kierunek  $AG'$ . Jeżeli teraz zauważymy prawą stronę belki, to siły  $S_2, D$  wst  $\beta, O_2$  i  $\frac{1}{2}px_3$  przecinają się w  $B$ , zaś  $-D$  dost  $\beta, -S_1$  i  $\frac{1}{2}px_3$  w  $F'$ , więc wypadkowa ich ma kierunek  $BF'$ . A więc wypadkowa z  $S_1$  i  $D$  ma kierunek  $AG'$ , wypadkowa z  $S_1, D$  dost  $\beta$  i  $\frac{1}{2}px_3$  kierunek  $BF'$ . Te dwie wypadkowe dadzą się złożyć w jedną wypadkową, przechodzącą przez  $K'$  i  $F'$  a wielkość jej równa wypadkowej z  $D$  wst  $\beta$  i  $\frac{1}{2}px_3$ . Jeżeliby więc  $KK'$  było  $=\frac{1}{2}px_3$  toby  $K_1F$  było równe  $D$ .

Ale my mamy tu jeszcze obciążenie na długości  $KF=x_2''$ . Rozłóżmy ciężar  $px_2''$  na dwie składowe  $P'$  i  $P''$ , zaczepiające w węzłach  $G$  i  $F$ , to podobnie  $AG'$  jest wypadkową z  $S_1, D$  i  $P'$ , a  $BF'$  wypadkowa z  $-S_1, -D$  dost  $\beta$  i  $P''$ , więc wypadkowa ze sił  $D$  wst  $\beta$  i  $px_2''$  będzie przechodzić przez  $K'$  i przez punkt zaczepienia siły  $px_2''$  w połowie  $KF$ . Jeżeliby więc  $KK'=px_2''$ , to  $K_1F$  byłoby równe  $2D$  wst  $\beta$ , więc  $K_1F=2D$ . Zatem gdyby  $KK'$  było równe  $\frac{1}{2}px_2''$ , to  $K_1F$  byłoby  $=D$ . Jeżeli więc teraz obciążymy belkę od  $K$  do  $B$ , to gdy  $KK'=\frac{1}{2}p(x_2''+x_3)$ , to

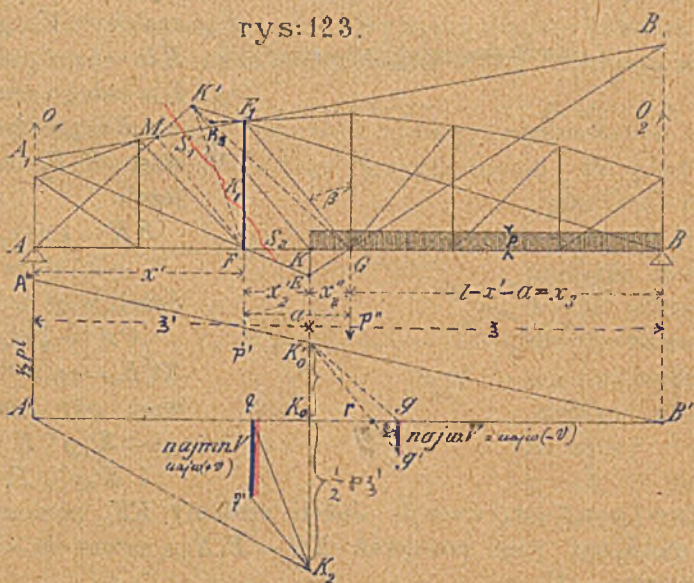
B.) Wyznaczenie najw. i najm. siły wewnętrznej w trygwie 9'F sposobem Melana. Wyznaczyć przez przecięcie się linii AG' i BF' punkt obrotowy K'; kreślinę przez koniec siły D i K' K'0 = 1/2 p beta; K'0 K'2 = 1/2 p beta; proste K'0 F'; K'2 g' równoległe do K'0 F' i K'0 G'. Linie p' K'3 i g' K'4 poprowadzone przez F' i g' równoległe do kreślin 9'F przedstawiają najw. i najm. siły wewnętrzne.

$K_1F = D$ . Konstrukcję robimy na dole. Wykreślamy  $A'A'' = \frac{1}{2} p l$ , to  $K_0K_0' = \frac{1}{2} p (x_2'' + x_3)$ . Kreślimy  $K_0'f' \parallel K'F$  a z  $f' f'K_3 \parallel D$ , to  $f'K_3 = najw (+D)$ .

Pełnie w ten sam sposób da się udowodnić konstrukcja dla  $najw (-D)$ . Tu odcinamy  $B'B'' = \frac{1}{2} p' l$ , bo tu  $p$  może być inne. Kreślimy  $A'B''$ , wtedy  $K_0K_2 = \frac{1}{2} p' (x' + x_2')$ . Kreślimy  $K_2g' \parallel K'G$  i  $g'K_4 \parallel D$ , to  $g'K_4 = najw (-D)$ .

Ponieważ  $p$  dla mostów kolejowych zmienia się wraz z długością obciążoną, więc dla rozmaitych przedziałów punkty  $K_0'$  i  $K_2$  będą leżeć na linii krzywej.  $cc' : c'a'$ .

rys: 123.

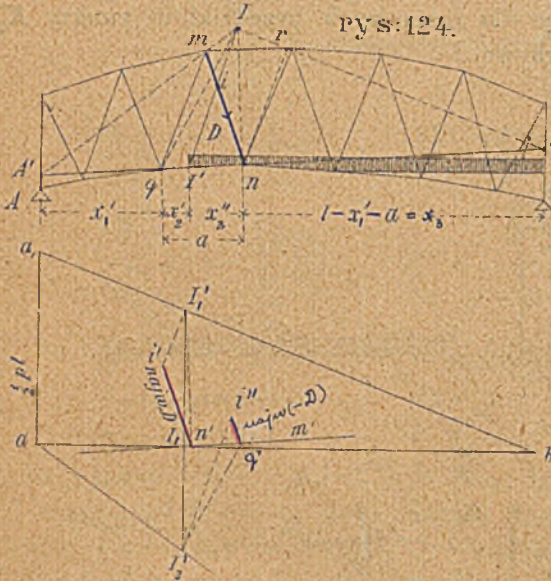


Jeżeli chodzi o wyznaczenie sił największych w słupie  $FF_1$  (rys. 123), to najprzód wyznaczamy sposobem Cullmanna (str. 134) punkt obojętny  $E$  względnie  $K$  i kreślimy  $KK' \parallel F_1G$ , dalej  $BF_1$ , aż do przecięcia się w  $K'$ . Punkt ten można wyznaczyć i w inny sposób, podany przez Melana. Kreślimy  $FM \parallel GF_1$ , dalej proste  $AM$  i  $BF_1$  do przecięcia się w  $K'$ . Udowodnić to można podobnie jak w §. 61.

Tu tak samo pomyślimy najprzód, że długość  $GB$  jest obciążoną ciężarem  $p$ . Rozłożymy  $px_3$  na dwie siły  $\frac{1}{2} px_3$ , działające w  $G$  i  $B$ . Jeżeli przetniemy belkę w kierunku  $KK'$ , to można rozłożyć wszystkie siły w kierunku poziomym i ukośnym rów-

*Wyznaczenie siły wewnętrznej w słupie  $FF_1$  według Melana. Kreślimy proste  $F$  i linijki równoległe do trójkąta  $F_1G$  i wyznaczamy je jako przecięcia się prostych  $AK$  i  $B'F_1$ , punkt  $K'$ , który odpowiada linii  $KK'$  równoległej do  $F_1G$  wyznacza punkt obojętny  $K$ . Teraz kreślimy proste  $AM$  i  $BF_1$  do przecięcia się w  $K'$ .  $K_0K_0' = \frac{1}{2} p x_3$  i  $K_0K_2 = \frac{1}{2} p x_3$  równoległe  $K_0G$  i  $K_2G$  to kierunki  $K_0G$  i  $K_2G$  i dwie trójki równoległe  $K_0'g'$  i  $K_2'f'$  do trójkąta  $F_1G$ , to proste  $g'g' = najw (-D)$  i  $f'f' = najw (+D)$ .*

noległym do  $GF_1$ . W kierunku  $AM$  działa wtedy wypadkowa z  $S_1$  i  $V$  siecz  $\beta$ , zaś w kierunku  $BF_1$  wypadkowa z  $-S_1 - V$  i  $\frac{1}{2}px_3$  siecz  $\beta$ . Wypadkowa obu tych sił przechodzi przez punkt  $K'$  i równa się wypadkowej z poziomej  $V \text{ st } \beta$  i  $px_3$  siecz  $\beta$ , a więc przechodzi przez  $G$ . Gdyby  $KK'$  było równe  $\frac{1}{2}px_3$  siecz  $\beta$ , toby  $KG$  było  $= V \text{ st } \beta$ , a więc  $K_1F_1 = V$ . Teraz przychodzi jeszcze obciążenie  $px_2''$ , które znowu rozkładamy na  $P'$  i  $P''$ , działające w  $F$  i  $G$  i w ten



sam sposób, co poprzednio, znajdujemy, że  $K_1F_1$  oznaczałoby  $V$ , gdyby  $KK' = \frac{1}{2}px_2''$  siecz  $\beta$ . Dla całego obciążenia  $KB$  przedstawia więc  $K_1F_1$  siłę  $V$ , jeżeli

$$KK' = \frac{1}{2}p(x_2'' + x_3) \text{ siecz } \beta.$$

Jeżeli więc zrobimy

$$A'A'' = \frac{1}{2}pl, \text{ to}$$

$K'_0K_0 = \frac{1}{2}p(x_2'' + x_3)$ , więc gdy zrobimy

$$K'_0g \parallel K'G$$

$$\text{ i } K'_0g' \parallel F_1G,$$

to  $K'_0g = \frac{1}{2}p(x_2'' + x_3)$  siecz  $\beta$ . Jeżeli zrobimy  $E'K_3$  poziome, to  $GE'K_3 \sim K'_0rg$ , więc ponieważ  $KG = F_1K_3$ , zatem  $rg = V \text{ st } \beta$  a  $gg' = najw(-V)$ .

Podobnie otrzymamy  $najmn V$ , jeżeli wykreślimy  $K_0K_2 = \frac{1}{2}p'(x_1' + x_2')$ ,  $K_2f \parallel FK'$ ,  $ff'$  poziomą i  $K_2f' \parallel F_1G$ , to  $ff' = najw(+V)$ .

Nakoniec podajemy tu już bez dowodu konstrukcyę dla wypadku, gdy oba pasy są zakrzywione (rys. 124). Przedłużwszy część pasu obciążonego  $qn$  do  $A'$  i  $B'r$  aż do przecięcia się  $I$ , zrobiwszy  $II' \parallel mq$ , otrzymamy punkt obojętny. Jeżeli  $aa_1 = \frac{1}{2}pl$ , to  $I_1I'_1 = \frac{1}{2}p(x_3 + x_2'')$ . Zróbmy  $I_1m' \parallel A'B'$ , połączmy  $I$  z  $q$  i  $n$ , i wykreślimy  $I_1'n' \parallel In$ ,  $I_1i' \parallel mq$ ,  $i'i' \parallel mn$ , to  $i'i' = najw + D$ .

Gdy  $I_1I'_2 = \frac{1}{2}p'(x_1' + x_2')$ , to wykreślimy  $I_2'q' \parallel Iq$ ,  $I_2'i'' \parallel mq$ ,  $q'i'' \parallel mn$ , to  $q'i'' = najw(-D)$ .

$\sqrt{B'}$ , a następnie wykreślimy prostą  $Am$  i



§. 67. Największe siły wewnętrzne w krzyżulcach  
 b) dla układu ciężarów skupionych.

Jeżeli belka jest obciążona układem ciężarów skupionych, to dla największych sił wewnętrznych w krzyżulcach wedle poprzedniego (§. 63) ma stać na prawej poprzecznicy jeden ciężar; może to być pierwszy ciężar, ale może być także drugi lub trzeci. Konstrukcyja znacznie się upraszcza, jeżeli przypuszczamy, że pierwszy ciężar stoi na prawym węźle i dlatego robimy zwykle to przypuszczenie. Że jednak obliczone w ten sposób siły nie byłyby zawsze największemi, chociaż nie wiele różnią się od największych, więc Müller Breslau<sup>41</sup> radził przyjmować w tym wypadku dla wyrównania pierwszą siłę nieco większą n. p. 15 t zamiast 13 t, co zresztą nie daje dokładnych wyników.

\*) Podamy tu więc najprzód sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w kracie dla tego przypuszczenia, że pierwszy

ciężar stoi na prawym węźle. Siła poprzeczna równa się wtedy oddziaływaniu  $O_1$ , które otrzymujemy wykreślnie, kreśląc wielobok sznurowy według §. 14. i zaczepia w lewej podporze.

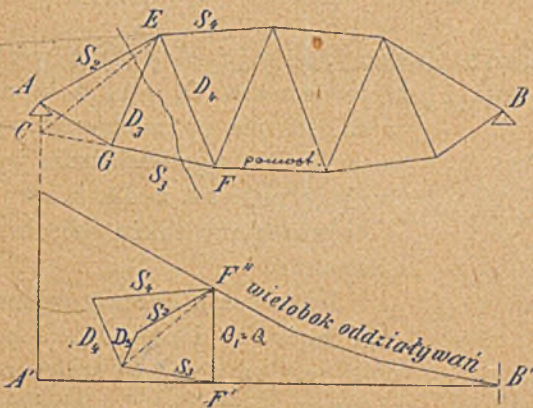
I. Sposob Culmanna (§. 60. I) użyć tu możemy z korzyścią. Konstrukcyja upraszcza się tu o tyle, że nie

potrzebujemy szukać punktu  $N'$ , (rys. 99), bo wiemy, że siła poprzeczna zaczepia na podporze. W rys. 125. przypuściliśmy pomost u dołu i wyznaczyli odrazu najw  $D_3$  i najw  $D_4$ , które powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi w  $F$ .

II. Drugi sposób odpowiada sposobowi, opisanemu w §. 60. pod l III. i opiera się na równ. 180)  $Y = Q \frac{c}{s}$ . Ponie-

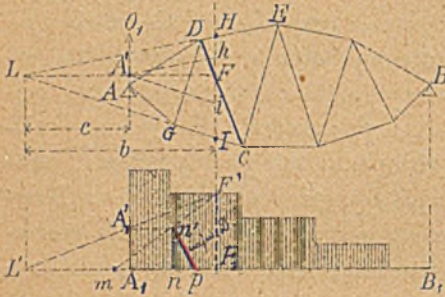
rys: 125.

2 C II & H.



waż tu przyjmujemy, że siła poprzeczna  $Q$  (rys. 126.) zaczepia w punkcie  $A$ , więc  $L'A_1=c$ , a zatem  $A_1A_1'=Q\frac{c}{b}=Y$ . *obliczmy zaś n'p=najw D*

rys. 126.

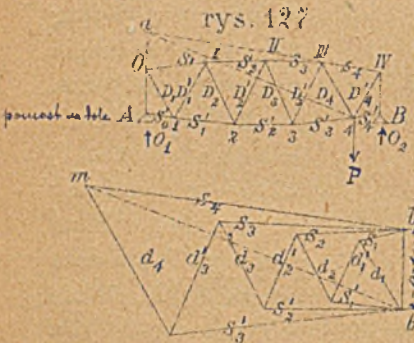


Jeżeli  $L$  wypada za papier, to możemy sobie w następujący sposób poradzić. W punkcie  $F$  kreślimy pionową  $HI$ , a z punktu  $A'$   $A'h \parallel DE$  i  $A'i \parallel GC$ . Z rysunku wypływa, że  $HI : hi = b : (b - c)$ , więc  $(HI - hi) : HI = c : b$ . Zróbmy  $F_1m = HI$  i  $F_1n = hi$ , następnie wykreślimy  $F'm$  i pionową w punkcie  $n$ , a otrzymamy  $nn' : Q = mn : mF_1$ , stąd  $nn' = Q \frac{HI - hi}{HI}$ , a wstawimy wartość

za  $\frac{HI - hi}{HI} = \frac{c}{b}$ , dostaniemy  $nn' = Q \frac{c}{b} = Y$ . Wreszcie, gdy  $n'p \parallel DC$ , to  $n'p = najw D$ .

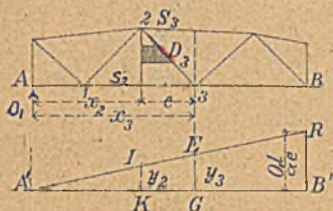
III. Trzeci sposób. Załóżmy, że w przedostatnim węźle 4 (rys. 127.) zaczepia siła  $P$ , która sprawia  $O_1 = 1$ , a której wielkości nie potrzebujemy wyznaczać. Dla tego obciążenia wy-

rys. 127



IV. Sposób Zimmermanna (§. 58. i 60. ust. 4) da się tu także zastosować. Dla wyznaczenia *najw*  $D_3$  (rys. 128) przy-

rys. 128.



puszczamy, że pierwszy ciężar stoi w 3. Oddziaływanie w  $A$  niech będzie wtedy  $O_1$ , to otrzymamy momenty  $M_3 = O_1 x_3 = \alpha e y_3$ ,

$$M_2 = O_1 x_2 = \alpha e y_2,$$

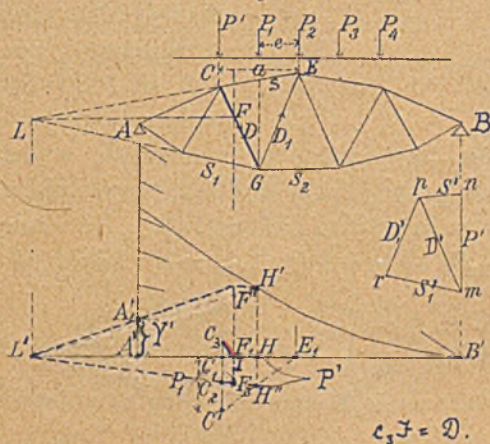
jeżeli  $\alpha e$  jest odległością biegunową. Stąd otrzymamy

$$y_3 = \frac{O_1 x_3}{\alpha e} = \frac{O_1 l}{\alpha e} \cdot \frac{x_3}{l}, \quad y_2 = \frac{O_1 l}{\alpha e} \cdot \frac{x_2}{l}.$$

Jeżeli kreśląc wielobok sznurowy dla oddziaływania, przyjmujemy biegun nie w  $B$ , lecz w odległości  $\alpha e$  od  $A'$ , to otrzymamy wprost wielobok  $\frac{O_1 l}{\alpha e}$ . Zróbmy teraz  $B'R = \frac{O_1 l}{\alpha e}$ , to  $GE = y_3$ ,  $KI = y_2$ . Znając  $y_3$  i  $y_2$  możemy łatwo według Zimmermanna znaleźć *najw*  $D_3$ .

a) Zastanówmy się teraz nad zmianą, jaka powstaje w konstrukcyi, jeżeli przypuścimy, że drugi ciężar, stojąc na prawej poprzecznicy, sprawia największą siłę wewnętrzną w krzyżulcu.

rys. 129



Siła poprzeczna składa się wtedy z oddziaływania i z siły  $P'$ , działającej na dół w punkcie  $C$ , przyczem

$$P' = P_1 \frac{e}{a} \quad (\text{rys. 129}).$$

Wyznamy więc najprzód wpływ oddziaływania  $O_1$ , a potem siły  $P'$ .

Jeżeli liczymy według drugiego sposobu, to robimy  $F_1 F' =$

$= HH'$ , t. j. rzędnej wieloboku sznurowego  $O_1$  w pionowej przez punkt zaczepienia pierwszej siły i w znany sposób znajdujemy  $Y' = A'A_1'$ . Siłę  $P'$  wyznaczmy, robiąc  $C_1 C' = P_1$  i łącząc  $E_1$  z  $C'$ , to  $HH' = P'$ , a ponieważ siła ta działa w  $C$ , więc potrze-



### §. 68. Podwójne krzyżulce gibkie.

Bardzo często urządzamy w kracie prostokątnej podwójnej krzyżulce gibkie. Chcąc zbadać, czy krzyżulec jaki gibki pracuje czy nie, należy według §. 57. utworzyć  $\frac{M''}{h''}$  i  $\frac{M'}{h'}$ . W danym przedziale pracuje ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz  $\frac{M}{h}$  jest większy. Aby zbadać, czy dla danego położenia  $\frac{M''}{h''} \geq \frac{M'}{h'}$ , najlepiej wykreślić linię wpływową dla  $M$  w zwykły sposób, poczem możemy rozstrzygnąć, który krzyżulec działa, a który nie, uwzględniając przytem także momenty, powstałe w skutek ciężaru własnego.

rys. 131

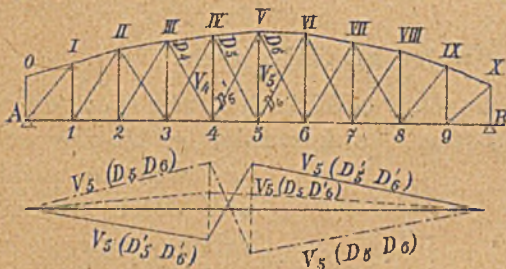


Dla największego ciągnięcia w danym krzyżulcu należy obciążyć prawą lub lewą stronę belki od punktu obojętnego (rys. 131). Na ciśnienie

nie obliczamy krzyżulców gibkich, bo przypuszczamy, że się wyginają w takim razie.

Ponieważ dla krzyżulca spadającego w prawo jest  $F'$  gdzieś indziej, niż dla spadającego w lewo, więc linie wpływowe będą dla obu krzyżulców różne, punkt obojętny będzie jednak ten

rys. 132



sam, jak to się można z konstrukcyi Culmana łatwo przekonać. Z obu linii wpływowych zatrzymujemy tylko te części, które odnoszą się do ciągnięcia danego krzyżulca.

Trudniejsza jest rzecz ze słupami. Tu

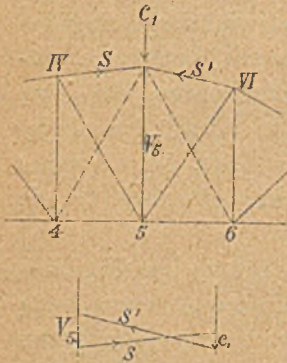
możliwe są rozmaite wypadki działania przekątnei. Np. w rys. 132. wykreślono linie wpływowe siły wewnętrznej w słupie  $V_5$  dla trzech wypadków, gdy działają przekątnei  $D_5$  i  $D_6$ ,  $D_5'$  i  $D_6'$  i  $D_5$  i  $D_6'$ . W pierwszych dwóch wypadkach słup pracuje na ciśnienie, w trzecim na ciągnięcie.

W pierwszych dwu wypadkach linie wpływowe dadzą się w zwykły sposób łatwo wykreślić i największe natężenie wyznaczyć. Trzeci wypadek, ważny ze względu na ciągnięcie, powstające w słupie (jeżeli liczymy według Weyraucha), powstaje wtedy, gdy  $\frac{M}{h}$  dla danego słupa jest większe, niż dla sąsiednich.

Dla tego położenia najlepiej wtedy wyznaczyć siły wewnętrzne w częściach pasu IV V i V VI, z których za pomocą wieloboku sił łatwo otrzymamy  $V_5$ .

Jeżeli  $C_1$  jest ciężar węzłowy górny, to siły  $S$ ,  $S'$ ,  $C_1$  i  $V_5$  muszą być w równowadze (r. 133). Jeżeli mamy  $S$ ,  $S'$  i  $C_1$ , to

rys. 133



$V_5$  łatwo da się wyznaczyć. Jeżeli  $C_1=0$ , co jest zwykle dla obciążenia ruchomego, to zamiast wieloboku sił otrzymujemy trójkąt. Wyznaczenie jednak najniekorzystniejszego położenia w tym razie jest dość żmudne.

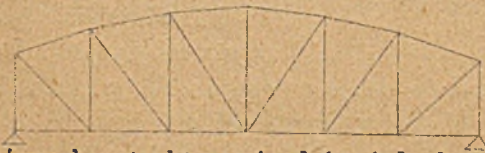
Najlepiej zrobimy to za pomocą prób. Przyjmujemy pewne położenie obciążenia ruchomego, wyznaczamy dlań momenty, do tego dodajemy momenty wskutek ciężaru własnego i tworzymy ilorazy,  $\frac{M}{h}$ . Dla którego słupa  $\frac{M'}{h'} < \frac{M}{h} > \frac{M''}{h''}$

dla tego mamy wypadek, przedstawiony w r. 132, wtedy otrzymamy  $najw + V_5$ .

### §. 69. Podwójne krzyżulce tęgie.

Użycie na pewnej długości belki krzyżulców podwójnych gibkich uzasadnione jest tem, że krzyżulce gibkie nie mogą

rys. 134



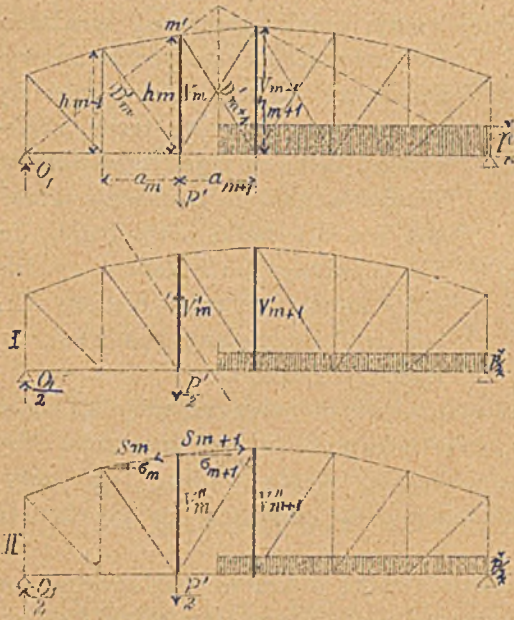
pracować na ciśnienie. Jeżeli krzyżulce robimy tęgie, to nie zachodzi wcale potrzeba

urządzenia krzyżulców podwójnych (rys. 134). Nie-

którzy konstruktorowie dają jednak na tej długości, na której  $Y$  zmienia znak, krzyżulce podwójne i tęgie. Jest to zupełnie

nieuzasadnionem, a przytem robimy belkę statycznie niewyznaczalną. Siły wewnętrzne w krzyżulcach dadzą się wyznaczyć wtedy tylko w przybliżeniu.

rys. 135.



W takim razie musimy rozróżnić dwa wypadki:

a) Słup w pierwszym przedziale z podwójnemi przekątniami (rys. 135). Tu rozkładamy belkę kratową na dwa układy I i II, na które działa połowa ciężaru i wyznaczamy w każdym z nich siłę w słupie  $m$ -tym.

Całkowita siła  $V_m = V'_m + V''_m$  . 208)

W układzie I otrzymamy wedle rów. 183)

$$V'_m = - \left( Q - \frac{M_m}{h_m} \frac{h_m - h_{m-1}}{a_m} \right) \dots \dots \dots 209)$$

W układzie II mamy ze względu na równowagę sił, działających na punkt  $m'$

$$V''_m + S_m \text{ wst } \sigma_m - S_{m+1} \text{ wst } \sigma_{m+1} = 0, \text{ więc}$$

$$V''_m = \frac{M_m}{h_m} (\text{st } \sigma_m - \text{st } \sigma_{m+1}) = \frac{M_m}{h_m} \left( \frac{h_m - h_{m-1}}{a_m} - \frac{h_{m+1} - h_m}{a_{m+1}} \right) \dots \dots \dots 210)$$

Zważyć przytem musimy, że  $Q$  i  $M$  w rów. 209) i 210) obliczać należy dla obciążenia ciężarem  $\frac{p}{2}$ .

b) Słup między dwoma przedziałami z podwójnemi przekątniami. Tu w słupie działa mała tylko siła, jak to widzieliśmy w kracie złożonej. Największą siłę otrzymamy dla obciążenia zupełnego; mamy wtedy

$$V_{m+1} = V'_{m+1} - V''_{m+1} \dots \dots \dots 211)$$

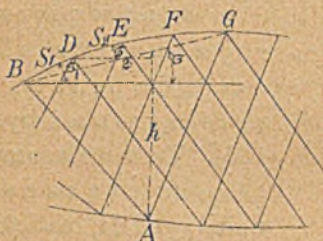
przyczem  $V'$  wyznaczyć należy dla układu I,  $V''$  dla układu II.

## XII. Belka o kracie wielokrotnej.

### §. 70. Zasada obliczenia.

Niechaj rysunek 136. przedstawia belkę wieloboczną o kracie wielokrotnej. Z ogólnej teorii belek kratowych wiadomo,

rys. 136



że jestto układ statycznie niewyznaczalny. W przybliżeniu możemy wyznaczyć siły wewnętrzne, rozłożywszy belkę na pojedyncze układy. Tu dokładność jest znacznie mniejsza, niż dla belki równoległej, bo dla pojedynczych układów np. dla  $BAG$  musimy przyjąć cięciwę  $BG$  zamiast rzeczywistego pasu zakrzywionego  $BDEFG$ .

Dla dokładnego obliczenia takich belek musimy się uciec do prawideł sprężystości, więc musimy znać już przekroje. Aby zaś wyznaczyć przekroje, obliczamy belkę według tego przybliżonego sposobu, rozkładając belkę kratową na pojedyncze układy.

Będziemy więc rozkładać belkę o kracie wielokrotnej na pojedyncze układy i w każdym węźle umieścimy takie ciężary, jakie działają w odpowiednich węzłach danego układu i przyjmiemy zamiast pasu wielobocznego cięciwę między dwoma węzłami tego samego układu.

### §. 71. Wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy  $h$  pionowy odstęp cięciwy  $BG$  od punktu  $A$ , to wiemy, że  $S = -\frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$ , gdzie  $S$  oznacza siłę działającą w cięciwie  $BG$ .

Chcąc znaleźć siłę wewnętrzną  $S_1$  w części pasu  $BD$ , nachylonego do poziomu pod kątem  $\sigma_1$ , otrzymamy  $S_1$  dost  $\sigma_1 = S$  dost  $\sigma$ , zatem  $S_1 = S \frac{\text{dost } \sigma}{\text{dost } \sigma_1} = -\frac{M}{h}$  siecz  $\sigma_1$  . . . . . 211)

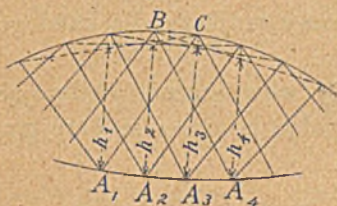
Dalej nazwijmy  $S_2$  siłę wewnętrzną w pasie  $DE$ , a  $\sigma_2$  odnośny kąt nachylenia części  $DE$  do poziomu, to

$$S_2 = -\frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma_2 \text{ i t. d.}$$



A więc siła wewnętrzna w pasie dla poszczególnego układu równa się ilorazowi  $\frac{M}{h}$ , pomnożonemu przez sieczną kąta nachylenia tej części pasu. Wyznaczamy przytem  $M$  ze względu

rys. 137



na punkt  $A$ , zaś  $h$ , jak wspomniano, jest to wysokość belki w punkcie  $A$ , liczona do cięciwy  $BG$ .

Rzeczywistą siłę wewnętrzną otrzymamy dopiero wtedy, gdy dodamy siły wewnętrzne, jakie dla każdego poszczególnego układu otrzymaliśmy, więc dla pasu  $BC$  (rys. 137.) będzie

$$S_2 = - \left( \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} + \frac{M_4}{h_4} \right) \text{ siecz } \sigma \quad . . . \quad 212)$$

Wykreślona konstrukcyja dla każdego układu z osobna jest taka sama, jak dla kraty pojedynczej.

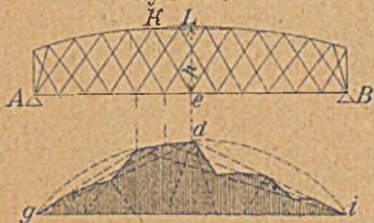
### §. 72. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach i krzyżulcach.

a.) Chcąc dokładnie obliczyć siły wewnętrzne w pasach, wyznaczyć musimy linie wpływowe. Na podstawie rów. 212) konstrukcyja linii wpływowych jest podobna do konstrukcyi dla belki równoległej.

Równ. 212) możemy też tak napisać:

$$Sh_1 = - \left( M_1 + M_2 \frac{h_1}{h_2} + M_3 \frac{h_1}{h_3} \right) \text{ siecz } \sigma \quad . . . \quad 213)$$

rys. 138



Linia wpływowa dla pasu  $Kd$ .

Ponieważ w każdym układzie mamy tu inny punkt obrotu, a zatem i inne  $h$ , więc musimy linie wpływowe każdego układu sprowadzić na jednakową wysokość  $h_1$  (rys. 138). Wiemy według §. 12, że wierzchołki trójkątów dla kraty pojedynczej leżą na paraboli; tutaj leżą one

na krzywej  $gdi$ , którą otrzymamy, dzieląc w każdym punkcie  $M$  przez odnośne  $h$ . Dalej postępujemy zupełnie według §. 43.

i otrzymamy w ten sposób linię wpływową dla siły wewnętrznej w pasie  $KL$  podobną, jak dla belki równoległej.

6.) Każdy krzyżulec należy tylko do jednego układu, siły wewnętrzne w krzyżulcach wyznaczamy więc zapomocą linii wpływowych, które otrzymujemy zupełnie w ten sam sposób, jak dla kraty pojedynczej, przypuszczając zawsze ciężki zamiast pasów wielobocznych. Potem wyznaczamy trójkąty dla każdego układu, jak dla belki równoległej.

W przybliżeniu wyznaczamy siły wewnętrzne, obliczając siłę  $Y$  jak dla kraty pojedynczej i dzieląc ją przez  $n$ , przyjmując zatem  $Y' = \frac{Y}{n}$ .

### §. 73. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

Czasem wystarczające jest przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych, zwłaszcza dla oceny wpływu kształtu pasów. Podamy tu więc także przybliżone wzory:

1. Pas  $s$ y. Według równ. 212) mamy *dla pasu górnego*:

$$S = - \left( \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} \right) \text{ siecz } \sigma = - \frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma, \dots \quad 214)$$

jeżeli  $M$  i  $h$  wyznaczymy ze względu na punkt średni, który otrzymamy, jeżeli środek danej części połączymy z wierzchołkiem trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu.  $M$  oznacza przytem moment całego ciężaru, działającego na belkę.

Podobnie otrzymamy dla pasu dolnego

$$S_2 = + \frac{M}{h} \text{ siecz } \tau \dots \dots \dots \quad 215)$$

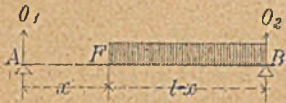
1. Krzyżulce. Jeżeli krata jest  $n$ -krotna, to w przybliżeniu  $\frac{1}{n}$  część ciężaru działa na jeden układ, więc:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{n} Y \text{ siecz } \alpha \\ D' &= \frac{1}{n} Y \text{ siecz } \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad 216)$$

Według równ. 187) jest  $Y = \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} h$ . Dla *najw*  $Y$ , odpowiadającego punktowi  $F$  (rys. 139), jest  $Q = O_1$ , więc  $M = Qx$ ,

a zatem  $d\left(\frac{M}{h}\right) = Qd\left(\frac{x}{h}\right)$ , bo  $Q$  dla danego obciążenia jest stałym, a mianowicie  $Q = p\frac{(l-x)^2}{2l}$ . A zatem mamy  $najw(+Y) =$

rys.139



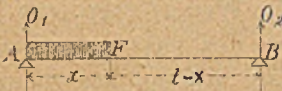
$$= p\frac{(l-x)^2}{2l}h\frac{d\left(\frac{x}{h}\right)}{dx}, \text{ a ponieważ } d\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{xdh - hdx}{x^2}, \text{ a } d\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{hdx - xdh}{h^2}, \text{ za-}$$

tem  $d\left(\frac{x}{h}\right) = -d\left(\frac{h}{x}\right)\frac{x^2}{h^2}$ , więc podstawivszy tę wartość w równanie dla  $najw(+Y)$ , otrzymamy

$$najw(+Y) = -\frac{px^2(l-x)^2}{2lh}\frac{d\left(\frac{h}{x}\right)}{dx} \dots \dots 217)$$

Dla  $najw(-Y)$  otrzymamy  $Q = O_1 - px = O_2$  (rys. 140). A zatem  $M =$

rys.140



$-Q(l-x)$ ,  $d\left(\frac{M}{h}\right) = -Qd\left(\frac{l-x}{h}\right)$ , przy-

czem  $Q = -\frac{px^2}{2l}$ ,

więc  $najw(-Y) = \frac{px^2h}{2l}\frac{d\left(\frac{l-x}{h}\right)}{dx}$ , a wreszcie

$$najw(-Y) = -\frac{px^2(l-x)^2}{2lh}\frac{d\left(\frac{h}{l-x}\right)}{dx} \dots \dots 218)$$

### XIII. Belka kratowa paraboliczna.

#### §. 74. Kształt pasów.

Kształt pasów belki wielobocznej może być rozmaity; aby go bliżej określić, możemy stawiać różne warunki.

Postawmy warunek, aby przy obciążeniu zupełnem siła wewnętrzna w krzyżulcach była równą zeru, a więc cały ciężar przenosił się przez pasy. Według założenia

dla obciążenia zupełnego będzie więc według równ. 187)  $Y = \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)h}{dx} = 0$ , a zatem  $\frac{M}{h}$  musi być stałą liczbą.

Niechaj będzie  $\frac{M}{h} = \frac{1}{C}$ , to  $h = CM$  . . . . . 219)

Dla obciążenia zupełnego jednostajnego  $M = \frac{1}{2}qx(l-x)$ , jeżeli  $q$  oznacza ciężar jednostkowy, zatem  $h = \frac{1}{2}Cqx(l-x)$ .

Niechaj wysokość we środku belki będzie  $h_1$  (rys. 141), to dla  $x = \frac{l}{2}$ ,  $h_1 = \frac{1}{8}Cql^2$ . Porównawszy ostatnie dwa równania dla  $h$  i  $h_1$ , otrzymamy  $h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}$ . . . 220)

Jestto równanie paraboli; widzimy więc, że, jeżeli dla obciążenia zupełnego krata niema wcale pracować, pasy muszą mieć kształt paraboliczny i dlatego belka ta nazywa się belką paraboliczną (n. *Parabelträger*, fr. *poutre parabolique*, a. *parabolic truss*, cz. *parabolický nosník*). Według tego, czy jeden pas, czy też oba pasy są zakrzywione, rozróżniamy następujące rodzaje belki parabolicznej.

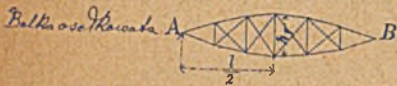
a) Belka górnoparaboliczna (n. *Bogensehenträger*, fr. *poutre en bowstring*, a. *bowstring girder*, cz. *nosník hornoparabolický*) (rys. 142) o pasie dolnym prostym, a górnym parabolicznie zakrzywionym.

b) Belka dolnoparaboliczna (n. *Fischbauchträger*, a. *inverted bowstring*, *fish bellied girder*, cz. *nosník dolnoparabolický*) (rys. 143) o pasie górnym prostym a dolnym zakrzywionym.

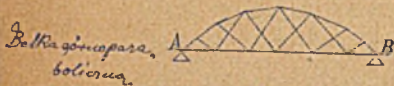
c) Belka ośelkowata (n. *Fisch oder Linsenträger* a. *the bowstring suspension girder*, cz. *nosník dvěparabolický*) (rys. 141) o obu pasach symetrycznie parabolicznie zakrzywionych.

d) Belka sierpowata (rys. 144) (n. *Sichelträger*) o obu pasach w jednym kierunku zakrzywionych, używana zwłaszcza do dachów.

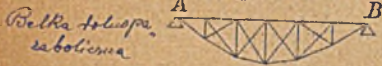
rys. 141



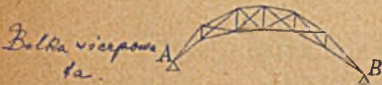
rys. 142



rys. 143



rys. 144



Nagrobienie i typowa belka

§. 75. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

1. Pasy. Według równ. 214) jest  $S = -\frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$ , zaś według równania 219)  $h = CM$ , więc dla zupełnego obciążenia  $S = -\frac{1}{C}$  siecz  $\sigma$ . Niechaj  $\frac{1}{C} = C_1$ , to

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -C_1 \text{ siecz } \sigma \\ S_2 &= +C_1 \text{ siecz } \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 221)$$

Według poprzedniego paragrafu jest też  $h_1 = \frac{1}{8} Cql^2$ , więc

$$\frac{1}{C} = C_1 = \frac{ql^2}{8h_1} \dots \dots \dots 222)$$

Kąty  $\tau$  i  $\sigma$  są zwykle bardzo małe, zatem siecz  $\tau$  i siecz  $\sigma$  mało się różnią od jedności. Jeżeli jeden pas jest poziomy, to dla niego  $\sigma$  lub  $\tau = 0$ , więc siecz  $\sigma$  lub siecz  $\tau = 1$ . A więc siły, działające w pasach, są prawie stałe, w pasie prostym zupełnie stałe.

2. Krata. Dla zupełnego obciążenia i dla ciężaru stałego  $Y = 0$  według założenia. Chodzi jeszcze tylko o obciążenie częściowe najniekorzystniejsze. Wedle równ. 220).

$$h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}, \text{ stąd } d\left(\frac{h}{x}\right) = -\frac{4h_1}{l^2} dx,$$

$$\text{zaś } d\left(\frac{h}{l-x}\right) = \frac{4h_1}{l^2} dx.$$

Wstawmy te wartości i wartość za  $h$  w równ. 217) i 218), a otrzymamy

$$n_{ajw} (+Y) = -\frac{px^2(l-x)^2}{2l \cdot 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}} \cdot \frac{-4h_1}{l^2} = \frac{px(1-x)}{2l} \dots \dots \dots 223)$$

Dalej otrzymamy

$$n_{ajw} (-Y) = -\frac{px^2(l-x)^2}{2l \cdot 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}} \cdot \frac{4h_1}{l^2} = -\frac{px(1-x)}{2l} \dots \dots \dots 224)$$

Widzimy więc, że  $Y$  jest w każdym przekroju dodatnie i ujemne i że  $n_{ajw} (+Y) = -n_{ajw} (-Y)$ .

Nazwijmy moment dla obciążenia zupełnego  $M_z$ , to  $M_z = \frac{1}{2} q x (l - x)$ , a wtedy *najw*  $(\pm Y) = \pm \frac{p M_z}{l q}$ , a ponieważ  $M_z = \frac{h}{C}$ ,  $C = \frac{8 h_1}{q l^2}$ , więc  $M_z = \frac{q l^2 h}{8 h_1}$ , a zatem

$$\text{najw } (\pm Y) = \pm \frac{1}{8} \frac{p h l}{h_1} \dots \dots \dots 225)$$

*Najw*  $(\pm Y)$  jest więc proporcjonalne do wysokości belki w danym przekroju, a ponieważ  $D = Y$  siecz  $a$ , więc

$$\text{najw } (\pm D) = \pm \frac{p l}{8 h_1} h \text{ siecz } a = \pm \frac{p l l_1}{8 h_1} \dots \dots \dots 226)$$

gdzie  $l_1$  jest długością krzyżulca. A zatem siła, działająca w krzyżulcach jest proporcjonalna do długości krzyżulców, jeżeli  $p$  jest stałym.

§. 76. Linie wpływe belki górnoparabolicznej.

Z rozmaitych rodzajów belki parabolicznej jest belka górnoparaboliczna najczęściej używaną, zastanowimy się więc nad nią bliżej i wyznaczmy najprzód dla niej linie wpływowe.

rys. 145.



1. Pasy. Siła wewnętrzna w pasie dolnym jest dla ciężaru jednostajnego stałą, więc powierzchnie wpływowe (rys. 145) dla rozmaitych  $x$  muszą być równe, a zatem wierzchołki  $c, c'$  leżą na linii poziomej. Jeżeli siła  $P$  działa w punkcie  $C$ , to ze względu na punkt  $C$

$$M = P \frac{x(l-x)}{l}, \text{ a ponieważ } h = 4 h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}, \text{ więc}$$

$$\frac{M}{h} = \frac{P l}{4 h_1} = S_1 = c d \dots \dots \dots 227)$$

Pas górny jest zakrzywiony, więc

$$S_2 = \frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma = \frac{P l}{4 h_1} \text{ siecz } \sigma \dots \dots \dots 228)$$

Chcąc wykreślić linię wpływową dla części  $D'C'$  pasu górnego, jeżeli bierzemy moment ze względu na punkt  $C$ , kreślimy z punktu  $d'$   $d'e$  prostopadłą do części pasu  $D'C'$  aż do przecięcia

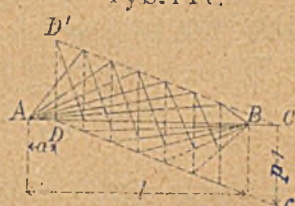
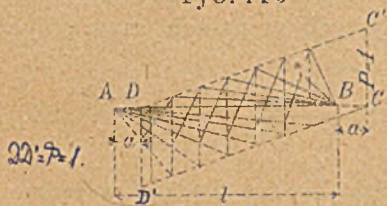
się z poziomą przez  $c_1$  w punkcie  $e$ , to  $c_1d' = \frac{Pl}{4h_1}$ , zaś  $ed' = = c_1d'$  siecz  $\sigma = \frac{Pl}{4h_1}$  siecz  $\sigma$ . Zróbmy teraz  $c_2d' = d'e = \frac{Pl}{4h_1}$  siecz  $\sigma$  i połączmy  $c_2$  z  $a'$  i  $b'$ , to  $a'c_2b'$  jest linią wpływową dla części pasu górnego  $C'D'$ .

2. Krzyżulce. Linie wpływowe dla krzyżulców możemy wykreślić według ogólnego sposobu, lecz dla belki parabolicznej o kracie pojedynczej uzyskujemy pewne uproszczenia, jakto Melan\*) wykazał. Udowodnił on mianowicie, że wierzchołki trójkątów wpływowych leżą na linii prostej. Dowód Melana, jako dość długi, opuszczamy i podajemy tylko wyniki.

Chcąc wyznaczyć linie wpływowe sił wewnętrznych w przekątniach belki parabolicznej, przedłużmy belkę  $AB$  (rys. 146) do  $C$  o długość  $a$ , równą odstępowi poziomemu dwóch węzłów i wykreślmy pionową w punkcie  $C$ , zróbmy  $CC' = P = 1$  i połączmy  $C'$  z  $D$ , to na  $C'D$  leżą wierzchołki trójkątów wpływowych. Wystawmy w punkcie  $D$  pionową  $DD' = P = 1$ , to  $DD'$  posłuży nam do wyznaczenia drugiego szeregu wierzchołków w sposób, uwidoczony na rysunku.

rys. 146

rys. 147.



Linie wpływowe dla krzyżulców.

Linie wpływowe dla słupów.

Z rów. 223) i 224) wynika, że powierzchnie wpływowe ujemne i dodatnie będą równe.

Jeżeli mamy gibkie przekątnie podwójne, to postępujemy według §. 68.

Dla słupów otrzymujemy także linie wpływowe w podobny sposób (rys. 147). Przy podwójnych krzyżulcach uwzględniamy wywody §. 68, przyczem przy obciążeniu częściowym

\*) Melan. Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerkträger. Zeitschrift des Hann. Ing. u. Arch. Vereines 1880.



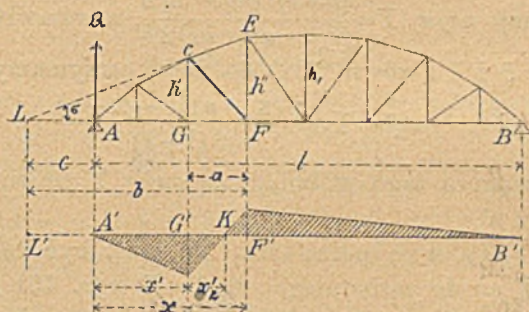


a) Obciążenie jednostajne.

α) Krata pojedyncza. Niech rys. 150. przedstawia linię wpływową siły wewnętrznej w przekątnej, to według rów. 195)

*siła przekłbi obojętne:* 
$$x_2' = \frac{(l+m)x'}{ln - am} a.$$

rys.150



*Linia wpływowa na przekłbi CF.*

Podstawmy w tem równaniu  $m=c$ ,  $x'=x-a$ , a otrzymamy

$$x_2' = \frac{(l+c)(x-a)}{l(b-a)-ac} \dots \dots \dots 231)$$

Dla największej siły wewnętrznej w krzyżulcu CF jest więc obciążona belka na prawo od p. F, jeżeli nie uwzględnimy ciężaru od F aż do punktu obojętne, a wtedy siła poprzeczna działa w A, więc  $LA=c$ .

Według równ. 220) jest  $h'' = \frac{4x(l-x)}{l^2} h_1$ , więc

$$h' = \frac{h_1}{l^2} 4(x-a)(l-x+a).$$

Z rysunku widzimy, że  $b=h''$  dot  $\sigma = h'' \frac{h'' - h'}{a}$ ,  $c=b-x$ . Podstawiając wartości w tych równaniach, otrzymamy

$$b = \frac{4x(l-x)h_1}{l^2} \cdot \frac{l^2}{4(l-2x+a)h_1} = \frac{x(l-x)}{l-2x+a} \dots \dots 232)$$

stąd 
$$b-a = \frac{(x-a)(l-x+a)}{l-2x+a} \dots \dots \dots 233)$$

$$c = \frac{x(x-a)}{l-2x+a} \dots \dots \dots 234)$$

Wstawmy teraz w rów. 231) wartości za  $(b - a)$  i  $c$  z rów. 233) i 234), a otrzymamy *ścisły pierwiastek obojdzego*:

$$x_2' = \frac{1 - x + a}{1 + a} a \dots \dots \dots 235)$$

Najw (+ Y) otrzymamy według rów. 198)

$$\text{najw } Y = \frac{(l - a - x')^2 mn p}{ln - am} \frac{p}{2b}$$

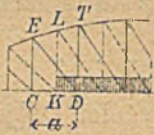
Wstawmy znowu wartości za  $x' = x - a$ ,  $n = b - a$ ,  $m = c$ , a otrzymamy najw  $Y = \frac{(l - x)^2 c (b - a) p}{[l(b - a) - ac] 2b}$ , a wstawiwszy wartości za  $(b - a)$ ,  $b$  i  $c$  z równ. 232) do 234), otrzymamy

$$\text{najw } Y = \frac{p(x - a)(1 - x + a)}{2(1 + a)} \dots \dots \dots 236)$$

Z równania tego widzimy, że najw Y zmienia się według paraboli.

β) Krata wielokrotna. Tu musi być belka obciążona dla najw Y aż do sąsiedniego węzła K (rys. 151.), a ponieważ w węzle C nie działa wtedy żadna siła i siła poprzeczna Q zaczeplia w lewej podporze,

rys. 151.

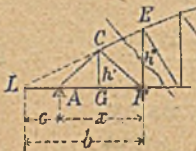


otrzymamy według rów. 180) najw  $Y = Q \frac{c}{b}$ , a ze względu na rów. 232) i 234),

$$\text{najw } Y = \frac{x - a}{1 - x} Q \dots \dots \dots 237)$$

b) Obciążenie układem ciężarów skupionych. Tu obliczamy najw Y najlepiej zapomocą linii wpływowych lub według jednej z metod ogólnych.

rys. 152



2. Słupy. Słupy obliczamy tylko dla układu, dla którego ścięgna pracują na ciągnienie. Tu zostają rów. 232), 233) i 234) ważne, jeżeli zastosujemy je do rys. 152). a) *Krata pojedyncza*

Podstawmy w równ. 195)  $m = c$ ,

$$x' = x, n = b, \text{ a otrzymamy } x_2' = \frac{(l + c)x}{lb - ac} a,$$

a jeśli wstawimy w to równanie wartości za  $b$  i  $c$  z rów. 232) i 234), otrzymamy

$$x_2' = \frac{(1 - x)(1 + a - x)}{1(1 - x) - a(x - a)} a \dots \dots \dots 238)$$

Wstawivszy te same wartości za  $m$ ,  $x'$  i  $n$  w równ. 198), otrzymamy najw  $Y = \frac{(l - a - x)^2 c}{lb - ac} \cdot \frac{p}{2}$ , a wstawivszy jeszcze wartości za  $b$  i  $c$  z równ. 232) i 234),

$$\text{najw } Y = \frac{p(1 - a - x)^2(x - a)}{2(1 - x) - a(x - a)} \dots 239)$$

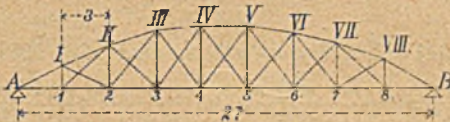
b) Dla kraty wielokrotnej otrzymamy zupełnie w ten sam sposób, jak dla przekątni, najw  $Y = \frac{x - a}{1 - x} Q \dots 240)$

### §. 79. Przykład.

Dane. Most jednotorowy o rozpiętości 27m. Belki główne górnoparaboliczne z kratą prostokątną o podwójnych, gibkich przekątniach. Wysokość belki 4m, odstęp węzłów 3m. Ciężar własny belek głównych wynosi wedle §. 2.  $30l = 30 \cdot 27 = 810 \text{ kg/m}$ , ciężar podłużnic  $26 + 44 \cdot 3 = 158 \text{ kg/m}$ , ciężar jednej poprzecznicy  $G = 29(4,6 - 0,88 \cdot 1,5)(3 + 4,3) = 711 \text{ kg}$ , więc na 1 m b.  $\frac{711}{3} = 237 \text{ kg/m}$ , ciężar pomostu niech będzie  $460 \text{ kg/m}$ , zatem ciężar całkowity na jedną belkę  $g = \frac{1}{2}(810 + 158 + 237 + 460) = 832 \text{ kg/m}$ , ciężar własny jednej belki  $405 \text{ kg/m}$ , z czego przypada połowa na pas górny, a połowa na dolny. Ciężar pomostu wynosi na jedną belkę  $0,225 \text{ t/m}$  i działa na pas dolny podobnie jak i ciężar pokładu  $\frac{1}{2}(158 + 237) = 197 \text{ kg/m}$ . Ciężar węzłowy dolny jest więc  $G_1 = 3(0,2025 + 0,225 + 0,1975) = 1,875 \text{ t}$ , zaś ciężar węzłowy górny  $G_2 = 3 \cdot 0,2025 = 0,608 \text{ t}$ . Ciężar ruchomy przyjmujemy wedle rozporządzenia austriackiego dla momentów  $6185 \text{ kg/m}$ , na jedną belkę  $3,0925 \text{ t/m}$ . (Stala a s. 18.)

Obliczenie. Wysokości słupów (rys. 153.) dadzą się obliczyć z rów. 220)  $h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 4 \cdot 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ . Wstawivszy  $x = ma$ ,  $l = na = 9a$ ,  $a = 3m$ , otrzymamy  $h = \frac{16}{81} m(n - m) = 0,1975 m \times (n - m)$ .

rys. 153



A zatem otrzymamy dla  $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$   
 $h = 1,580 \quad 2,745 \quad 3,555 \quad 3,950 \text{ m}$ .

1. Pasy. Największe siły wewnętrzne powstają w pasach przy obciążeniu zupełnem, a zatem  $q = p + g = 3,0925 + 0,832 = 3,925 \text{ t/m}$ . Siła wewnętrzna w pasie dolnym jest stała i wynosi według rów. 230)  $S_2 = \frac{ql^2}{8h_1} = \frac{3,925 \cdot 27^2}{8 \cdot 4} = 89,4 \text{ t}$ . Siła wewnętrzna w pasie górnym jest  $S_1 = 89,4$  sicz  $\sigma$ .

Natężenie dopuszczalne jest wedle rozporządzenia austriackiego  $754 \text{ kg/cm}^2$ , więc przekrój teoretyczny pasu dolnego  $A_2 = \frac{89,4}{0,754} = 118,6 \text{ cm}^2$ .

Dla pasu górnego otrzymamy  $\text{st } \sigma = \frac{h_m - h_{m-1}}{3} = \frac{0,1975}{3} [m(n-m) - (m+1)(n-m+1)] = 0,0658 (10 - 2m)$ . Sicz  $\sigma = \sqrt{1 + \text{st}^2} \sigma$ . Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę.

Część pasu górnego	st $\sigma$	sicz $\sigma$	$S_1$	Przekrój teoretyczny $A_1$
			$t$	$\text{cm}^2$
A I	0,526	1,180	101,0	134,0
I II	0,895	1,075	96,1	127,5
II III	0,132	1,008	90,1	119,5
III IV	0	1	89,4	118,6

2 Przekątnie. Ciężar własny nie sprawia w przekątniach żadnych natężeń. Największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy w przybliżeniu z rów. 226) najw  $D = \frac{pl_1}{8h_1} = \frac{27 \cdot pl_1}{8 \cdot 4} = 0,8437 pl_1$ , przytem jest dla

*l<sub>1</sub> = 27 m, przyspieszenie* przekątni, spadających na prawo,  $l_1 = \sqrt{h^{2m-1} + 3^2} = \sqrt{9 + h^{2m-1}}$ , a  $p$  trzeba przyjąć dla długości  $(l - ma)$  według rozporządzenia ministerialnego (Koda 6) i podzielić przez 2. Na tej podstawie obliczyliśmy następującą tabliczkę: str. 67.

Przekątnie	$l_1$	$l - ma$	$p$	najw $D$
	$m$	$m$	$t/m$	$t$
I 2	3,390	21	3,765	10,75
II 3	4,065	18	3,980	13,63
III 4	4,651	15	4,250	16,65
IV 5	4,900	12	4,700	19,64
V 6	4,960	9	5,400	22,55
VI 7	4,651	6	6,600	25,85
VII 8	4,065	3	8,600	29,45

Dokładniej obliczymy najw  $D$  według rów. 235) i 236), a więc

$$x_2' = \frac{l - x + a}{l + a} a = \frac{n - m + 1}{n + 1} a = \frac{10 - m}{10} a.$$

$$\text{Najw } Y = \frac{p(x - a)(l - x + a)}{2(l + a)} = 3p \frac{(m - 1)(10 - m)}{20},$$

$$\text{st } \alpha = \frac{a}{h_{m-1}}, \quad \text{sicz } \alpha = \sqrt{1 + \text{st}^2} \alpha.$$

Na tej podstawie obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Przekątnie	m	$x_2'$	$l - (x + -a + x_2')$	p	najw Y	st $\alpha$	siecz $\alpha$	najw D	Przekrój teor. $\Delta$
		m	m	t/m	t			t	cm <sup>2</sup>
I 2	2	2,4	21,6	3,744	4,49	1,900	2,147	9,64	12,8
II 3	3	2,1	18,9	3,899	8,19	1,093	1,481	12,13	16,1
III 4	4	1,8	16,2	4,142	11,18	0,844	1,808	14,62	19,4
IV 5	5	1,5	13,5	4,475	13,44	0,759	1,254	16,85	22,2
V 6	6	1,2	10,8	5,380	16,14	0,759	1,254	20,24	26,7
VI 7	7	0,9	8,1	5,760	15,55	0,844	1,308	20,34	27,0
VII 8	8	0,6	5,4	6,840	14,36	1,093	1,481	21,23	28,2

Z porównania obu tabliczek widzimy, że wyniki przybliżone różnią się bardzo od dokładnych zwłaszcza z powodu, że ciężar zastępczy zmienia się bardzo wraz z długością obciążoną. Jeżeli więc już chcemy używać sposobu przybliżonego, należy ciężar zastępczy obliczać dla długości obciążonej od punktu obojętnego do podpory, uwzględniając rów. 235).

W przekątniach, spadających na lewo, działają te same siły wewnętrzne, lecz w przeciwnym porządku n. p. siła wewnętrzna w VIII 7 jest taka sama, jak w I 2.

3. Słupy. Ciężar własny sprawia według rów. 229) ciągnięcie  $V_g = 1,875 t$ . Najw. ciągnięcie wskutek ciężaru ruchomego powstaje także przy obciążeniu zupełnem i wtedy także ciągnięcie równa się ciężarowi węzłowemu. Jako ciężar zastępczy przyjmijmy tu ciężar zastępczy dla momentów dla rozpiętości  $2a = 6 m$ , zatem  $p = \frac{1}{2} 10,9 = 5,45 t/m$ . Ciężar węzłowy wynosi więc  $3 \cdot 5,45 = 16,35 t$ , zatem  $najw (+ V_p) = 16,35 t$ . (Stala 24.12)

Największe ciśnienie otrzymamy dla obciążenia jednostronnego. Gdy przyjmijmy jako działające krzyżulce na prawo spadające, to dla m-go słupa wyznaczmy  $x_2'$  według rów. 238), mianowicie

$$x_2' = \frac{(l-x)(l+a-x)}{l(l-x) - a(x-a)} a.$$

Wstawivszy  $l = 27$ ,  $a = 3$ ,  $x = 3 m$ , otrzymamy

$$x_2' = \frac{(9-m)(10-m)}{9(9-m) - (m-1)} 3,$$

a  $najw Y$  według rów. 239)

$$najw Y = \frac{p(l-a-x)^2(x-a)}{4l(l-x) - a(x-a)} = \frac{3p(8-m)^2(m-1)}{4 \cdot 9(9-m) - (m-1)}$$

Nakoniec mamy  $najw (-V) = -najmn Y$ .

Przekroje dla porównania obliczyliśmy także na podstawie wzoru Weyraucha  $\tau = 700(1 \pm \frac{1}{2} \zeta)$ , przyczem  $\zeta = \frac{najmn P}{najw P} = \frac{P_0 + 1,3 najmn P_2}{P_0 + 1,3 najw P_1}$ , gdyż tu  $najmn P_1$  jest ujemnem.

Z porównania przekrojów, obliczonych według obu sposobów, widzimy, że przekroje słupów, obliczone na podstawie natężenia dopuszczalnego, przyjętego według rozporządzenia austriackiego, są za małe.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę:

Słup	m	$x_2'$	$l-x+-x_2'$	p	najw ( $-V_p$ )	najw ( $+V_p$ )	$V_g$	V		Przekrój teoretyczny		$\tau$ we- dług Weyr.
								najw	najmn	wedle rozp. aust.	wedlc. Weyr.	
1 I	1	3,0	21,0	7,530	0	+16,35	+1,875	+18,23	+1,88	24,2	25,0	728
2 II	2	2,7	18,3	7,906	-3,44	+16,35	+1,875	+18,23	-1,56	24,2	28,7	634
3 III	3	2,4	15,6	8,392	-6,05	+16,35	+1,875	+18,23	-4,17	24,2	30,7	593
4 IV	4	2,1	12,9	9,130	-7,83	+16,35	+1,875	+18,23	-5,95	24,2	35,0	522
5 V	5	1,8	10,2	9,940	-8,39	+16,35	+1,875	+18,23	-5,51	24,2	41,0	444
6 VI	6	1,6	7,4	12,080	-8,24	+16,35	+1,875	+18,23	-6,36	—	—	—
7 VII	7	1,5	4,5	14,800	-5,55	+16,35	+1,875	+18,23	-3,67	—	—	—

Ponieważ założywszy działanie przekątni, spadających na lewo, otrzymamy najw  $V_p$  takie samo, lecz w przeciwnym porządku, więc dla słupów symetrycznie położonych należy wybrać wartości większe, uwydatnione tłustym drukiem.

## XIV. Odmiany belki parabolicznej.

### §. 80. Zasada belki Paulego.

W belce parabolicznej jest siła wewnętrzna w pasach prawie stała, zmienia się tylko według siecz  $\sigma$ . Dla belki osełkowatej i dla  $\frac{h}{l} = \frac{1}{8}$  siecz  $\sigma = 1,03$ , więc siła zmienia się tylko o 3%.  
*Wielka ośrodek belki*

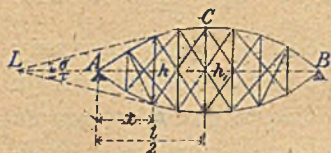
Pauli starał się wynaleść taki kształt belki, aby siły wewnętrzne w pasach były zupełnie stałe. Wtedy może też być przekrój pasów na całą długość belki jednakowym.  
*Wielka ośrodek belki*

Belka taka musi być przedawszystkiem ze względu na środek belki symetryczną, bo niema powodu, aby lewa strona belki była inną, niż prawa.  
*Wielka ośrodek belki*  
 W belce takiej będą oba pasy w środku poziome, tam musi też być siła wewnętrzna w obu pasach jednakowo wielką, bo  $\frac{M}{h}$  jest takie samo dla obu pasów, a  $\sigma = \tau = 0$ . Ponieważ siła wewnętrzna ma być w pasach wszędzie jednaka, więc musi być także w każdym innym przekroju dla obu pasów jednaka, chociaż pasy nie są równoległe. To jest tylko możliwem, gdy  $\sigma = \tau$ , więc, gdy belka będzie miała kształt osełkowaty, gdyż  $-S_1 = \frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$  może być równe  $S_2 = \frac{M}{h}$  siecz  $\tau$  tylko, gdy  $\sigma = \tau$ .

§. 81. Kształt belki Paulego.

Siły wewnętrzne w pasie otrzymamy w przybliżeniu bez względu na znak według rów. 175) i 176)  $S = \frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$ . Dla cię-

rys. 154



żaru jednostajnie ciągłego mamy  $M = \frac{1}{2} qx(l-x)$ , a z rys. 154:

$$\text{siecz } \sigma = \sqrt{1 + \text{st}^2 \sigma} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{2 dx}\right)^2},$$

$$\text{zatem } S = \frac{qx(l-x)}{2h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}.$$

Dla  $x = \frac{l}{2}$  jest

$$S = \frac{ql^2}{8h_1}, \text{ zatem } \frac{ql^2}{8h_1} = \frac{qx(l-x)}{2h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2},$$

albo 
$$\frac{l^2}{4h_1} = \frac{x(l-x)}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \dots \dots \dots 241)$$

Ponieważ belka ta jest bardzo zbliżona do belki parabolicznej, więc dla wyznaczenia  $\frac{dh}{dx}$  możemy w przybliżeniu przyjąć,

jak dla paraboli,  $h = \frac{4h_1 x(l-x)}{l^2}$ , więc  $\frac{dh}{dx} = \frac{4h_1}{l^2} (l-2x)$ .

Dalej wiemy, że gdy  $a$  jest bardzo małą liczbą, wyraz  $\sqrt{1+a}$  możemy rozwinąć w szereg i po opuszczeniu dalszych potęg napisać  $\sqrt{1+a} = 1 + \frac{1}{2} a^2$ , a zatem

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{2h_1^2 (l-2x)^2}{l^4}.$$

Wstawiliśmy to w rów. 241), otrzymamy

$$\frac{l^2}{4h_1} = \frac{x(l-x)}{h} [1 + 2 \frac{h_1^2}{l^4} (l-2x)^2], \text{ a stąd}$$

$$h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2} \left[ 1 + \frac{2h_1^2}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right] \dots \dots 242)$$

Rów. 242) jest czwartego stopnia i daje  $h$  dla tego samego  $h_1$  nieco większe, niż dla paraboli. Siły wewnętrzne najlepiej obliczać według ogólnych sposobów powyżej podanych.

§. 82. Belka paraboliczna niezbieżna (*Abgekrümmte Parabolträger*)

Oprócz belek parabolicznych zbieżnych (rys. 155), o których dotychczas mówiliśmy, używane są także belki para-

boliczne niezbieżne (rys. 156.) (n. *Halbparabelträger*), których pasy w obu końcach belki nie schodzą się i które już na podporze mają pewną wysokość  $h_0$ .

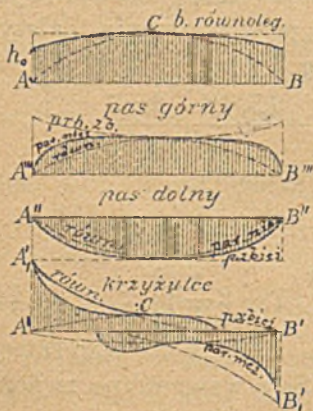
rys. 155



rys. 156.



rys. 157



Jeżeli pas dolny jest prosty, to równanie linii pasu górnego jest wtedy (*wysokość h. długość belki*)

$$h = h_0 + 4(h_1 - h_0) \frac{x(l-x)}{l^2} \quad . \quad 243$$

Powód, dla czego używamy belek tego kształtu, leży w ustroju mostów. Często potrzebujemy na podporze pewnej wysokości, choćby tylko dla poprzecznic, czasem chcemy mieć większą wysokość belki, aby urządzić górą tężniki.

W porównaniu z równie wysoką belką równoległą potrzebuje belka paraboliczna niezbieżna mniej materiału, więcej jednak, niż belka paraboliczna zbieżna.

Siły wewnętrzne i tu wyznaczać będziemy według ogólnych sposobów, podanych powyżej. Dla porównania podamy tu siły wewnętrzne w pasach i krzyżulcach dla trzech rodzajów belek: równoległej, parabolicznej, zbieżnej i niezbieżnej (rys. 157) o równej wysokości. W belce parabolicznie niezbieżnej jest siła wewnętrzna w pasach dla małego  $h_0$  prawie stałą, dopiero przy podporach nagle spada do zera.

Siła  $Y$  w  $A$  i  $C$  jest taka sama, jak dla belki równoległej. Z punktu  $A_1'$  spada tem szybciej, im mniejsze jest  $h_0$ .



§. 83. Przykład. Obliczenie dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Tabl. III

Ponieważ dla belki parabolicznej niezbieżnej nie dają się uprościć wzory ogólne, więc obliczamy siły wewnętrzne wedle wzorów ogólnych. Przykład, który tu podajemy, będzie więc zarazem przykładem dla belek o pasach dowolnie zakrzywionych.

Dane. Most kolejowy dwutorowy o rozpiętości 36 m i dwu belkach parabolicznych niezbieżnych. Wysokość na podporze  $h_0 = 3$  m, we środku 5 m (tabl. III). Odstęp węzłów 3,6 m. Każdą belkę należy obliczyć dla obciążenia jednego toru pociągiem normalnym austriackim. Ciężar własny przyjmujemy według §. 2.  $g = 0,49 l^2 + 12 l + 1800$ . Dla  $l = 36$  otrzymamy  $g = 2857$  kg/m, a dla jednej belki  $\frac{1}{2} 2857 = 1428$  kg/m. Z tego wypada 450 kg/m na pomost, ciężar pokładu wedle str. 10.  $98 + \frac{700}{3,6} = 98 + 194 = 292$  kg/m, więc ciężar belki głównej wynosi 686 kg/m. Na pasie górnym cięży więc  $g_1 = \frac{1}{2} 686$  kg = 0,343 t/m, a na dolnym  $0,343 + 0,450 + 0,292 = 1,085$  t/m, a ciężary węzłowe są  $G_1 = 0,343 \cdot 3,6 = 1,235$  t,  $G_2 = 1,085 \times 3,6 = 3,906$  t.

A. Obliczenie:

Wysokości obliczymy z rów. 243)  $h = 3 + 4(5 - 3) \frac{x(l-x)}{l^2}$ , albo, jeżeli  $x = ma = 3,6$  m,  $h = 3 + 8 \frac{m(n-m)}{n^2} = 3 + 0,08 m(10 - m)$ . Stąd otrzymamy:

dla $m =$	1	2	3	4	5
$h =$	3,72	4,28	4,68	4,92	5,0 m.

1. Pasy. Dla ciężaru własnego otrzymamy oddziaływania  $4,5(1,235 + 3,906 = 23,14$  t. Moment ze względu na punkt  $m$  jest  $M_g = 23,14 m \cdot 3,6 + (m-1) 5,14 \frac{m}{2} \cdot 3,6 \approx 92,558 m - 9,254 m^2 = 9,254 m(10 - m)$ .

Dla ciężaru ruchomego obliczono najw  $M$  według §. 16, przyczem dla węzła drugiego stała na węźle 2 os, zaś dla następnych węzłów 3 os parowozu. Dla węzła 5. otrzymaliśmy

$$O_1 = \frac{1}{3,6} [52(34,2 + 18,6 + 3,0) + 30(26,4 + 0,8)] = 111,6$$

$$M = O_1 \cdot 18 - 52 \cdot 16,2 - 30 \cdot 8,4 - 26 \cdot 1,8 = 2008,8 - 842,4 - 252 - 46,8 = 867,6$$
 tm.

Dalej mamy  $st \sigma = \frac{h_m - h_{m-1}}{3,6} = \frac{1}{3,6} (3 + 0,08 m(10 - m) - 3 - 0,08 \times (m-1)(10 - m + 1)) = \frac{1}{0,5} (0,22 - 0,04 m)$ , siecz  $\sigma = \sqrt{1 + st^2 \sigma}$ .

Siła wewnętrzna  $S = \frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$ , a przekrój  $A = \frac{S}{\tau}$ , przyczem  $\tau = 700 + 2,36 = 772$  kg/cm<sup>3</sup> wedle rozporządzenia austriackiego.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę:

Część pasu	Siła stojąca na węźle	$M_p$	$M_g$	$M_q$	$h$	$\frac{M_q}{h}$	Siecz $\sigma$ dla pasu górnego	Siła wewnętrzna $S$ w pasie		Przekrój teoretyczny $A$ pasu	
								górnym	dolnym	górnego	dolnego
		<i>tm</i>	<i>tm</i>	<i>tm</i>	<i>m</i>	<i>t</i>		<i>t</i>	<i>t</i>	<i>cm<sup>2</sup></i>	<i>cm<sup>2</sup></i>
A I	—	—	—	—	—	—	—	0	0	0	0
12 i 0 I	2	835,9	83,8	419,2	3,72	112,7	1,020	114,9	112,7	148,8	146,0
23 i I II	3	570,5	148,1	718,6	4,28	167,9	1,012	169,9	167,9	220,1	217,5
34 i II III	3	754,8	194,8	949,1	4,68	202,8	1,006	204,0	202,8	264,2	262,7
45 i III IV	3	829,4	222,0	1051,4	4,92	213,7	1,002	214,1	213,7	277,3	276,9
IV V	3	867,6	231,4	1099,0	5,0	219,8	1,000	219,8	219,8	284,7	284,7

2. Przekątnie. Dla ciężaru własnego jest dla przekątnei, na lewo spadających,  $m$  tego przedziału  $Q_p = 23,14 - (m - 1) 5,141$ ,  $M_g$  obliczyliśmy już poprzednio.

Dla ciężaru ruchomego obliczamy siły poprzeczne na podstawie §. 14, przyczem stawiamy dla pierwszego przedziału drugą oś na prawym węźle, dla innych przedziałów pierwszą oś. W pierwszym wypadku jest  $M = O_1x - P_1e$ , w drugim  $M = O_1x$ .

Według równ. 183) jest  $Y = Q - \frac{M}{h} \text{st } \sigma$ , bo  $\tau = 0$ .  $h$  i  $\text{st } \sigma$  znamy z poprzedniego, mianowicie  $h = 3 + 0,08 m (10 - m)$ ,  $\text{st } \sigma = \frac{1}{0,9} (0,22 - 0,04 m)$ .

Nareszcie  $D = Y \text{ siecz } \alpha$ , przyczem  $\text{st } \alpha = \frac{3,6}{h_{m-1}}$ ,  $\text{siecz } \alpha = \sqrt{1 + \text{st}^2 \alpha}$ .

Dla przekątnei 01 otrzymamy  $Q_p = 97,63 - \frac{13 \cdot 1,2}{3,6} = 93,3 \text{ t}$ , dalej według poprzedniego  $M = 835,9$ ,  $h = 3,72$ ,  $\text{st } \sigma = 0,2$ , więc  $\frac{M}{h} \text{st } \sigma = \frac{835,9}{3,72} 0,2 = 18,1$ ;  $Y_p = 93,3 - 18,1 = 75,2 \text{ t}$ .

Dla przekątnei 12 otrzymamy  $O_1 = \frac{1}{3} [52(27 + 11,4) + 30(19,2 + 3,6)] = 74,5 = Q_p$ .  $M = 74,5 \cdot 7,2 = 536,1$ ,  $h = 4,28$ ,  $\text{st } \sigma = 0,1555$ ,  $\frac{M}{h} \text{st } \sigma = 19,5$ ,  $Y_p = 74,5 - 19,5 = 55,0 \text{ t}$ .

Przekątnie na lewo spadające urządzamy tak daleko, dopóki jeszcze otrzymujemy ciągnięcie.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę:



Słup		$Q_p$	$M_p$	$-\frac{M_p}{h} \text{ st } \sigma$	$Najw$ $Y_p$	$Q_g$	$\frac{M_g}{h} \text{ st } \sigma$	$Y_g$	$-Y_g =$ $= najw$ $(-V)$	Po· ciąg sięga do węzła	$M_p$	$M_g$	$\frac{M}{h}$	st $\sigma$	$Najic$ $(+V)$	$A$
		$t$	$tm$	$t$	$t$	$t$	$t$	$t$	$t$		$tm$	$tm$	$t$		$t$	
A	0	93,3	—	—	+93,3	+24,4	0	+24,4	-117,7	—	—	—	—	—	-24,5	152,5
1	I	74,5	268,2	-14,4	+60,1	+19,2	-4,5	+14,7	-74,8	—	—	—	—	0,2	-9,9	96,9
2	II	58,5	421,2	-15,4	+48,1	+14,1	-5,5	+8,6	-51,7	2	210	146	84	0,156	+3,7	67,1
3	III	46,3	515,4	-12,2	+34,1	+9,0	-4,6	+4,4	-38,5	4	465	191	141	0,111	+6,3	50,0
4	IV	31,7	457,3	-6,3	+25,4	+3,8	-3,0	+0,8	-26,3	7	756	219	199	0,067	+8,6	34,1
5	V	22,2	399,6	-1,3	+20,4	-1,3	-1,0	-2,3	-18,1	B	868	228	219	0,022	+9,7	23,4
6	VI	14,1	304,1	+1,3	+17,4	-6,5	+1,0	-5,5	-11,9	—	—	—	—	-0,022	—	—
7	VII	7,8	196,5	+2,7	+10,5	-11,6	+2,8	-8,8	-1,7	—	—	—	—	—	—	—

*Najw* (+*V*) otrzymamy wtedy, gdy żadna z przekątni, u odnośnego słupa u góry się schodzących, nie działa. Jeśli belka jest zupełnie obciążona, to działają w lewej połowie belki przekątnie, spadające na prawo. Jeżeli pociąg nie sięga aż do *B*, lecz do węzła 9, 8 lub 7, to wskutek tego ciągnięcie w przekątniach tych się zmniejsza. Ciągnięcie to spadnie w przekątni (*m m* + 1) do zera, jeśli  $\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$ . Dla tego położenia otrzymamy

$najw (+V_m) = \frac{M_m}{h_m} (st \sigma_{m+1} - st \sigma_m)$ , przyczem *M<sub>m</sub>* oznacza moment w skutek ciężaru ruchomego i własnego. Cofamy więc pociąg tak, aby pierwsza oś znajdowała się w 9, w 8, w 7 itd. i dla słupów 2, 3, 4, 5 wyznaczamy  $\frac{M}{h}$ . I tak np., gdy pociąg sięga od *A* do 7, otrzymamy

w węzle	<i>M<sub>p</sub></i>	<i>M<sub>g</sub></i>	<i>M</i>	<i>h</i>	$\frac{M}{h}$
2	510	146	656	3,72	153
3	675	191	866	4,28	185
4	756	219	975	4,68	198
5	774	228	1002	4,92	200

Siła więc *D* w przekątni IV 5 jest prawie równą zeru. Przy bardzo małym jeszcze cofnięciu pociągu, otrzymalibyśmy w węzłach 4 i 5  $\frac{M}{h} = 199$ . Dla tego obciążenia otrzymamy  $najw (+V_4) = 199 (0,0667 - 0,0222) = + 8,6$ .

*Najw* (+*V<sub>5</sub>*) otrzymamy dla tego samego obciążenia, co *najw* *S* w IV V i V VI, więc  $\frac{M}{h} = 219$ .

Słup 1 I musimy osobno obliczać. Najniekorzystniej na ciągnięcie jest, gdy długość A I jest obciążoną, a pierwsza oś parowozu stoi na 1. Wtedy  $O_1 = \frac{52 \cdot 34,2}{56} = 49,4 t$ ,  $Q_p = 49,4 - 52 = - 2,6 t$ ,  $M_p = 49,4 \cdot 3,6 - 52 \cdot 18 = = 84,2 tm$ ,  $Y_p = - 2,6 - \frac{84,2}{5,72} \cdot 0,2 = - 5,1 t$ . Więc  $najmn V = - 15,0 + 5,1 = = - 9,9 t$ .

Przekroje obliczyliśmy wedle wzoru  $A = \frac{V}{0,772}$ . Właściwiej byłoby tu zastosować wzór Weyraucha.

### B. Konstrukcja (tabl. III).

I. P a s y. Dla ciężaru ruchomego wyznaczaliśmy momenty zapomocą wieloboku sznurowego. Przyjęliśmy przytem podziałkę I dla długości  $\frac{1 cm}{2 m}$  dla sił podziałkę II  $\frac{1 cm}{20 t}$  i odległość biegunową 150 t, zatem dla podziałki III dla momentów będzie  $\frac{1 cm}{2 \cdot 150 tm} = \frac{1 mm}{30 tm}$ .

W tym samym wieloboku sił wykreśliliśmy dla ciężaru własnego ciężary węzłowe i na tej podstawie wielobok sznurowy, poczem dodaliśmy momenty wskutek ciężaru własnego i ruchomego.

Siły wewnętrzne w pasach wyznaczyliśmy według §. 59 *b*) (rys. 97), przyczem zamiast całej odległości biegunowej  $a$ , użyliśmy do konstrukcyi tylko  $\frac{1}{2} a$ , wskutek czego musimy wyniki, otrzymane dla  $S$ , pomnożyć jeszcze przez 2. Jeżeli wykreślimy podziałkę IV, w której 1 *cm* przedstawia

$\frac{2}{0,772} = 2,59$  razy więcej jednostek, niż podziałka II, a więc w której  $\frac{1 \text{ cm}}{20 \cdot 2,59} = \frac{1 \text{ cm}}{51,8 \text{ cm}^2}$ , to na niej odczytamy przekroje teoretyczne.

2. Przekątnie. Na rys. 5. wykreśliliśmy wielobok oddziaływania  $O_1$  (według §. 14 p. 3) i wyznaczyliśmy największe siły wewnętrzne *najw*  $D$  według sposobu Culmanna (§. 6 f. I.) (rys. 125), przypuszczając, że pierwsza lub druga oś parowozu stoi na prawym węźle. Jeżeli druga oś stoi na prawym węźle, np. 1, to pierwsza oś stoi w  $a$ , więc  $P' = aa_1$ ,  $O_1 = aa_2$ . Siła wewnętrzna w  $O_1$  jest wtedy  $D_1 = D_1' - D_1''$ . W zwykły sposób otrzymamy  $D_1' = ab$ , zaś  $D_1''$  wyznaczyliśmy na rys. 6 w poczwórnej podziałce,  $ed = P'$  i kreśląc  $dg \parallel O_1$ ,  $eg \parallel O_1$ . Więc  $dg = D_1''$ , a według podziałki II  $D_1'' = bc$ . Zatem  $D_1 = ab - bc = ac$ . Tutaj  $ac > 1 \text{ m}$  dla wypadku, gdy pierwsza oś stoi na prawym węźle, więc *najw*  $D_1 = ac$ . Dla innych przekątni otrzymujemy zawsze *najw*  $D$  dla położenia pociągu pierwszą osią na prawym węźle.

Dla ciężaru własnego wyznaczyliśmy  $D$  na rys. 1. sposobem Zimmermanna (§. 58 rys. 96).  $M_1$  i  $M_2$  mamy już wyznaczone na rys. 4 przy użyciu odległości biegunowej  $a = 150 \text{ t}$ . Tu potrzeba  $\frac{M_2}{e}$  i  $\frac{M_1}{e}$ , gdzie  $e = 3,6 \text{ m}$ . Dzielenie to wykonaliśmy na rys. 3, robiąc  $Ou = e = 3,6 \text{ m}$ , odcinając na  $Ou$   $M$  i kreśląc równoległe do  $mu$ ; odcinki na  $Om$  przedstawiają  $\frac{M}{e}$ , za pomocą nich wyznaczyliśmy  $D_p$  na rys. 1.

Zmieniwszy podziałkę II w stosunku 1 : 0,772, wykreśliliśmy podziałkę V, na której  $\frac{1 \text{ cm}}{20 \cdot \frac{1}{0,772}} = \frac{1 \text{ cm}}{25,9 \text{ cm}^2}$ . Odczytywać możemy na niej wprost przekroje teoretyczne.

3. Słupy. Na rysunku 7 wykreśliliśmy raz jeszcze wielobok  $O_1$ , a to dlatego, aby rys. 5 nie uczynić niewyraźnym. Siły *najw* ( $-V_p$ ) wyznaczyliśmy tu także sposobem Culmanna. Tu jednak przecinamy belkę ukośnie, np. dla słupa 3 III w kierunku  $mm_1$  (rys. 1). Najniekorzystniejsze obciążenie jest dla tego słupa, gdy 1 oś stoi na 4, wtedy  $O_1 = 44'$  (rys. 7). Kreślimy teraz  $4'a \parallel A \text{ IV}$  (rys. 1), a potem  $ab \parallel A \text{ IV}$  i  $4'b \parallel III \text{ III}$ , a  $ab = \text{najw} (-V_p)$  w słupie 3 III.

Chcąc wyznaczyć *najw* ( $+V_p$ ), postępujemy, jak powyżej, obciążamy belkę do 9, 8, 7 itd. i szukamy, czy dla którego przedziału przy tem obciążeniu nie jest  $\frac{M}{h}$  dla obu słupków równe, więc  $Y = 0$ .

N. p. gdy pierwsza oś stoi na 7 (lub na 8, a zato obciążamy prawą stronę belki zamiast lewej), to zamykająca jest  $rr_1$ , a odnośne momenty w węzłach 3, 4, 5 będą  $gg_1$ ,  $hh_1$  i  $ii_1$ . Dodajemy do nich momenty wskutek ciężaru własnego z rys. 4, dzielimy sumy przez odnośne  $h$  i przekonujemy się,

że  $\frac{M}{h}$  dla węzła 4 i 5 są prawie równe, mianowicie  $\approx 199 t$ . Dla tego  $\frac{M}{h}$  kreśliśmy III IV i IV V (rys. 9), zamykamy wielobok sił i otrzymujemy w ten sposób *najw* ( $+V_4$ ). W rys. 10 i 11 zrobiliśmy to samo dla *najw* ( $+V_3$ ) i *najw* ( $+V_2$ ). *Najw* ( $+V_5$ ) otrzymamy dla obciążenia zupełnego. W rys. 8 robimy więc  $ab = ac = najw S$  w IV V i V VI i otrzymujemy  $bc = najm$  ( $+V_5$ ).

Siły  $V_g$  wskutek ciężaru własnego wyznaczyliśmy na rys. 1 według Zimmermanna (§. 60 IV sposób).

Na rysunku 12 wyznaczyliśmy oprócz tego siły wewnętrzne, wywołane ciężarem własnym zapomocą planu sił, który wykreśliłiśmy według podziałki VI  $\frac{1 cm}{5 t}$ .

### §. 84. Przykład. Obliczenie dla obciążenia ciężarem zastępczym.

*Tabl. 17.*

Zrobimy teraz ten sam przykład, przypuszczając obciążenie ciężarem zastępczym, wedle rozporządzenia ministeryalnego austriackiego.

Dla ciężaru własnego pozostaną siły, otrzymane w poprzednim paragrafie, chodzi tylko o obliczenie sił wewnętrznych, wywołanych ciężarem ruchomym.

1. P a s y. Ciężar zastępczy dla pasów wyznaczamy wedle skali  $a$  (str. 19). Dla  $l = 20$  jest  $p = 6,5 t$ , dla  $l = 40$   $p = 5,6 t$ , więc dla  $l = 36$ ,  $p = 5,6 + \frac{1}{4}(6,5 - 5,6) = 5,78 t$ . Ponieważ most jest dwutorowy, więc na jeden tor wypada cały ciężar  $5,78 t$ .

Otrzymamy więc momenty wedle wzoru  $M = \frac{1}{2} px(l-x)$  lub też na podstawie równ. 83) i tabliczki na str. 65.  $M_1 = \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{2} 5,78 \cdot 36^2 = 986,36 tm$ .

Dla punktu 1 będzie  $M = 986,26 \times 0,36 = 337,1 itd$ . Otrzymamy więc następującą tabliczkę:

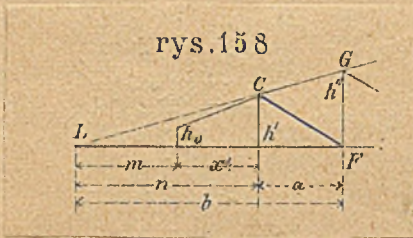
Część pasu	$M_p$	$M_g$	$M_q$	$h$	$\frac{M_q}{h}$	Siła $\sigma$ dla pasu górnego	Siła wewnętrzna S w pasie		Przekrój teoretyczny A pasu	
							górnym	dolnym	górnego	dolnego
							$t$	$t$	$t$	$t$
0 I i 12	337,1	83,3	420,4	3,72	113,0	1,020	115,3	113,0	149,3	146,4
I II i 23	599,3	148,1	747,4	4,28	175,0	1,012	177,1	175,0	229,4	226,7
II III i 34	786,5	194,3	980,8	4,63	211,3	1,006	212,5	211,3	275,3	273,7
III IV i 45	899,9	222,0	1121,9	4,92	228,0	1,002	228,5	228,0	296,0	295,4
IV V	986,4	231,4	1167,8	5,0	233,6	1,000	233,6	233,6	302,6	302,6

2. Przekątnie. Ciężar ruchomy przyjmujemy wedle skali  $b$  (str. 67), wedle długości obciążonej. Musimy więc najprzód wyznaczyć punkty obojętne. Według równ. 195) jest  $x_2' = \frac{(l+m)x'}{ln-am} a$ . Tu punkt  $F$  leży zawsze w pasie dolnym, otrzymamy więc dla dowolnego krzyżulca  $CF$  (rys. 158)

$$b : h'' = (b-a) : h'$$

$$b : h'' = a : (h'' - h'), \text{ stąd}$$

$$b = \frac{ah''}{h'' - h'} \quad . \quad . \quad 244)$$



Dalej mamy  $n = b - a$ ,  $m = n - x'$ . Zważywszy, że  $a = 3,6$  a  $l = 36$ , możemy napisać

$$x_2' = \frac{(36+m)x'}{36n-3,6m} 3,6 = \frac{(36+m)x'}{10n-m} \quad . \quad 245)$$

Dla 01 jest  $x' = 0$ , więc  $x_2' = 0$ , zaś wedle 198)  $najw (+Y) =$

$$= \frac{(l-a-x')^2 mn}{ln-am} \frac{p}{2b}. \text{ Tu dla } l_1 = l = 36 m, p = 6,480, b = \frac{3,6 \cdot 3,72}{3,72 - 3,0} = 18,56, n = m = 18,56 - 3,6 = 14,96, a = 3,6, l = 10 \cdot 3,6, \text{ więc } najw (+Y) =$$

$$= \frac{(36-3,6)^2 14,56}{(10-1) 3,6} \cdot \frac{6,48}{2 \cdot 18,6} = 82,2. \text{ Dla I 2 jest } b = \frac{3,6 \cdot 4,28}{4,28 - 3,72} = 27,51, \text{ więc}$$

$$n = 27,51 - 3,6 = 23,91, x' = 3,6, m = 20,31 m, \text{ zatem } x_2' = \frac{(36+20,31) 3,6}{10 \cdot 23,91 - 20,31} =$$

$= 0,927 m$ . Długość obciążona  $l_1 = l - x' - x_2' = 36,0 - 3,6 - 0,927 = 31,473$  zatem  $p = 6,797 t$ . Wedle 198) otrzymamy dalej

$$najw (+Y) = \frac{(36-3,6-3,6)^2 20,31 \cdot 23,91}{3,6(10 \cdot 23,91 - 20,31)} \cdot \frac{6,797}{2 \cdot 27,51} = 63,17.$$

Na tej podstawie obliczyliśmy tabliczkę, umieszczoną na następnej stronie.

3. Słupy. Punkty obojętne wyznaczamy jak dla przekątnej według równania 245)  $x_2' = \frac{(36+m)x'}{10n-m}$ , przyczem według rys. 158 i równ. 244),

$$n = b - \frac{ah''}{h'' - h'} \quad (\text{słup } GF).$$

$$\text{N. p. słup VII 7 = III 3, } b = \frac{3,6 \times 4,68}{4,68 - 4,28} = 42,12 = n, x' = 10,80, m = b - x' = 31,32, \text{ zatem } x_2' = \frac{(36,0 + 31,32) 10,80}{421,2 - 31,32} = 1,82 m. \text{ Długość, którą}$$

mamy obciążyć dla  $najw (-Y)$   $l_1 = l - x' - x_2' = 36,0 - 10,8 - 1,86 = 23,34 m$ ; według skali  $b$  odpowiada tej długości  $p = 7,37 t$ . zatem rów. 198)

$$najw (+Y) = \frac{(l-a-x')^2 mn}{ln-am} \cdot \frac{p}{2} = \frac{(36,0-3,6-10,8)^2 31,32 \cdot 42,12}{3,6(42,12-31,32)} \cdot \frac{7,37}{2} = 38,33 t.$$

Wyniki dla innych słupów zestawione w tabliczce na str. 178.



Przekątnie	$b$	$n$	$x'$	$x_2'$	$l_1$	$p$	$N_{ajw}$ $Y_p$	$Q_g$	$\frac{M_g}{h} \text{ st } \sigma$	$Y_g$	$N_{ajw}$ $Y_q$	Siecz $\alpha$	$N_{ajw}$ $D$	$A$
	$m$	$m$	$m$	$m$	$m$	$t/m$	$t$	$t$	$t$	$t$	$t$		$t$	$cm^2$
0 1	18.6	15.0	0	0	36.0	6.480	82.2	+23.1	-4.5	+18.6	100.8	1.562	157.50	208.0
I 2	27.51	23.91	3.6	0.927	31.47	6.797	63.2	+18.0	-5.5	+12.5	75.7	1.392	105.40	139.2
II 3	42.12	38.52	7.2	1.370	27.43	7.080	50.03	+12.9	-4.6	+8.3	58.33	1.307	76.24	100.7
III 4	73.80	70.20	10.8	1.603	23.60	7.348	41.87	+7.7	-3.0	+4.7	46.57	1.262	58.78	77.7
IV 5	225.0	221.4	14.4	1.744	19.86	7.625	34.82	+2.6	-1.0	+1.6	36.42	1.239	45.12	59.6
V 6	-221.4	-225.0	18.0	4.856	16.14	8.295	29.39	-2.6	+1.0	-1.6	27.79	1.292	34.24	45.2
VI 7	-70.20	-73.8	21.6	1.997	12.40	9.280	23.46	-7.7	+2.8	-4.9	18.56	1.239	23.00	30.3
VII 8	-38.52	-42.12	25.2	2.230	8.57	11.144	16.66	-12.9	+3.8	-9.1	7.56	1.262	9.54	12.6

Slupy	$x'$	$b=n$	$m$	$x_2'$	$l_1$	$p$	$N_{ajw}$ $Y_p$	$Q_g$	$\frac{M_g}{h} \text{st } \sigma$	$Y_g = n_{ajw}$ $(-V)$	$N_{ajw}$ $Y_q$	$A$
	$m$	$m$	$m$	$m$	$m$	$t/m$	$t$	$t$	$t$	$t$	$t$	$cm^2$
0 0	0	0	0	0	36.00	6.48	+104.90	+24.4	0	+24.40	-129.30	167.5
I 1	3.6	18.60	15.00	1.07	31.22	6.82	+73.79	19.2	-4.5	+14.70	-88.49	115.0
II 2	7.2	27.51	20.31	1.80	27.00	7.10	+47.20	14.1	-5.5	+8.60	-55.80	72.3
III 3	10.8	42.12	31.32	1.86	23.34	7.37	+38.33	9.0	-4.6	+4.40	-42.73	55.4
IV 4	14.4	73.80	59.40	2.12	19.48	7.70	+28.00	3.8	-3.0	+0.80	-28.80	37.3
V 5	18.0	225.0	207.00	2.14	15.86	8.40	+24.52	-1.3	-1.0	-2.30	-22.22	28.7
VI 6	21.6	-221.40	-243.00	2.26	12.14	9.30	+22.00	-6.5	+1.0	-5.50	-16.50	-
VII 7	25.2	-70.20	-95.40	2.4	8.40	11.10	+13.50	-11.6	+2.8	-8.80	-4.70	-

**Wykreślenie (tabl. IV).**

Dla ciężaru stałego wyznaczone już zostały siły wewnętrzne na tabl. III. Pozostają do wyznaczenia siły wewnętrzne dla ciężaru ruchomego.

1. Pasy. Dla obciążenia całkowitego mostu ciężarem zastępczym według skali  $a$ ), wykreśliliśmy parabolę jako linię największych momentów, przyjmując odległość biegunową  $a = 100 t$ . Następnie dla każdej części pasu wyznaczyliśmy siły wewnętrzne. (W rys. 2. zamiast 01 — ma być: 01 — 12, zamiast 12 — ma być: 23, zamiast 23 — ma być: 34, zamiast 34 — ma być: 45).

2. Przekątnie. Punkty obojętne wyznaczone sposobem, podanym w §. 61, dają długości obciążone ciężarem  $p$  według skali  $b$ ).

Odcinając na podporze  $\frac{1}{2} pl$ , wyznaczyliśmy siły wewnętrzne sposobem Velfika (według §. 66). Zamiast odcinać oddziaływania na podporze, wyznaczyliśmy wprost  $\frac{1}{2} p \xi$  dla każdej przekątnej, gdzie  $\xi = l - x' - a$ , upraszczając przeto wykres.

3. Słupy. Dla przejrzystości rysunku wyznaczyliśmy punkty obojętne dla prawej strony belki sposobem Melana (według §. 61). Upraszczając podobnie jak dla przekątnej wykres, wyznaczyliśmy siły wewnętrzne sposobem Melana (według §. 66).

## XV. Belka Schwedlera.

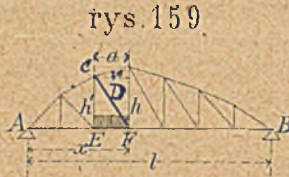
### §. 85. Określenie belki.

W belce parabolicznej pracuje każdy krzyżulec na ciągnięcie i ciśnienie, przyczem obie największości są sobie równe. W belce równoległej pracują tylko niektóre krzyżulce środkowe na ciśnienie i na ciągnięcie, a ich największości nie są równe. Schwedler obliczył pośredni kształt belki, dla której najmniejszość sił wewnętrznych krzyżulców jest wszędzie równa zeru, więc natężenie krzyżulców nie zmienia znaku. W ten sposób obejdziemy się bez podwójnych przekątni, używanych w belce parabolicznej i w środkowej części belki równoległej, a zarazem *najw* siły wewnętrzne w krzyżulcach będą w pobliżu podpór mniejsze, niż w belce równoległej. A więc kształt pasów musi być taki, aby *najmn*  $Y$  dla każdego krzyżulca przy obciążeniu jednostronnem było równe zeru.

### §. 86. Przybliżone wyznaczenie kształtu pasów.

Pas dolny belki Schwedlera przyjmujemy zawsze poziomy, chodzi więc tylko jeszcze o wyznaczenie kształtu pasu górnego, przyczem isó będziemy za wskazówkami Melana.

Jeżeli prawa strona belki (rys. 159) jest obciążona od  $F$  do  $B$ , to dla przedziału  $EF$   $Q = \frac{p(l-x)^2}{2l}$ , a  $M = Qx$ .



rys. 159

Nazwijmy siłę  $Y$ , gdy długość  $FB$  jest obciążona,  $Y_1$ , to według równ. 183)  $Y_1 = Q - \frac{M}{h} \operatorname{st} \sigma$ , a wstawiając za  $Q$  i  $M$  wartości i za  $\operatorname{st} \sigma = \frac{h-h'}{a}$ , otrzymamy

$$Y_1 = p \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{(l-x)^2}{2l} \quad 246)$$

Gdy lewa strona belki jest obciążona na długości  $AE$ , to

$$Q = -p \frac{(x-a)^2}{2l}, \quad M = -(l-x)Q, \quad \text{więc}$$

$$Y_2 = -p \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \cdot \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{(x-a)^2}{2l} \quad \dots \quad 247)$$

Jeżeli obciążony jest tylko dany przedział  $EF$ , to połowa tego ciężaru przenosi się na  $E$  a druga połowa ciężaru na węzeł  $F$  i sprawia składowa w punkcie  $F$  ciągnienie w krzyżulcu  $CF$ , a składowa w  $E$  ciśnienie.

Wskutek ciężaru  $\frac{1}{2}pa$ , działającego na punkt  $F$ , mamy  $Q = \frac{pa(l-x)}{2l}$ , zaś  $M = Qx$ , więc

$$Y_3 = p \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} a \frac{l-x}{2l}, \quad \dots \quad 248)$$

a wskutek ciężaru  $\frac{1}{2}pa$ , działającego na punkt  $E$ , mamy

$$Q = -pa \frac{x-a}{2l}, \quad M = -(l-x)Q, \quad \text{więc}$$

$$Y_4 = -p \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} a \frac{x-a}{2l} \quad \dots \quad 249)$$

Ciężarem własnym jest cała belka obciążona, więc dodawszy te cztery wartości dla  $Y$  i zmieniając  $p$  na  $g$ , otrzymamy

$$Y_g = g \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{(l-x)(l-x+a)}{2l} + \\ - g \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{x(x-a)}{2l} \quad \dots \quad 250)$$

Największe ciśnienie otrzymujemy, gdy ciężar będzie sięgał od  $A$  do punktu obojętnego, ale takie dokładne obliczenie kształtu doprowadza do zawyłych równań. A że nam tu chodzi o przybliżone wyznaczenie, dlatego przyjmujemy obciążenie pełne wszystkich węzłów z lewej strony, podczas gdy wszystkie węzły z prawej strony nie są wcale obciążone.

Wtedy otrzymamy

$$\text{najmn } Y_p = Y_2 + Y_4 = -p \left( 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{x(x-a)}{2l}.$$

Według zasady belki Schwedlera ma być

$$\text{najmn } Y = \text{najmn } Y_p + Y_g = 0, \text{ więc}$$

$$0 = g \left( 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{(l-x)(l-x+a)}{2l} +$$

$$-(g+p) \left( 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{x(x-a)}{2l}, \text{ stąd}$$

$$h \left[ g \frac{a}{x} (l-x+a) - (g+p) \frac{a(x-a)}{l-x} - g(l-x+a) + \right. \\ \left. - (g+p)(x-a) \right] = -h' \{ (g+p)(x-a) + g(l-x+a) \},$$

$$\text{dalej } g(l-x+a) \frac{x-a}{x} + (g+p)(x-a) \frac{l-x+a}{l-x} =$$

$$= \frac{h'}{h} [(g+p)(x-a) + g(l-x+a)],$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{l-x+a}{l-x} - \frac{g(l-x+a)}{(g+p)(x-a) + g(l-x+a)} \frac{al}{x(l-x)}, \text{ czyli}$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{l-x+a}{l-x} \left[ 1 - \frac{a}{x} \frac{gl}{gl + p(x-a)} \right]. \quad \dots \quad 251)$$

Widzimy więc, że dla zmiennej  $a$  jest to równanie hyperboli, zatem pas górny będzie hyperbolicznie zakrzywiony, a belkę Schwedlera nazywamy też belką hyperboliczną (*n. Hyperbelträger*). (*z. w. Elephanträger*)

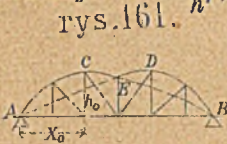
☞ Równanie belki Schwedlera możemy także króciej otrzymać wedle Steinera w następujący sposób. Niechaj  $ac'd'b$  (rys. 160) będzie linią wpływową siły  $D$ , to dla obciążenia całej belki ciężarem własnym  $g$  a lewej części ciężarem  $p$ , otrzymamy

$$D = \frac{1}{2} g \cdot (y'' x_2 - y' x_1) - \frac{1}{2} p x_1 y' = 0, \text{ stąd}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{g y''}{(g+p) y'} = \alpha \cdot \frac{y''}{y'}, \text{ jeżeli } \alpha = \frac{g}{g+p} \dots \dots 252)$$



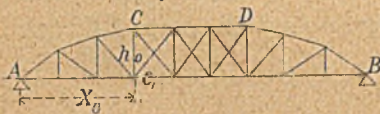
Na podstawie tego równania możemy dla danego  $a$  obliczyć kolejno  $z = \frac{h''}{h'}$ , a więc po kolei wysokości belki.



Równania 251) i 254) wyznaczają hyperbolę  $ACB$  (rys. 161). Jeżeli zaś nie lewe lecz prawe obciążenie nie ma sprawiać żadnego ciśnienia w krzyżulcach, to kształt belki będzie symetryczny  $ADB$ . Ponieważ

belka musi być symetryczną ze względu na środek, więc zatrzymujemy górne linie  $ACEDB$ . Z powodu, że kształt ten jest nie-

rys. 162



estetycznym, więc przyjmujemy pas górny prosty na długości  $CD$  (rys. 162). Wtedy na tej długości mamy belkę równoległą i musimy urządzić podwójne giętkie przekątnie.

Zwykle mamy dane  $h_0$  (najw) wysokość belki i chodzi nam o wyznaczenie odnośnego  $x_0$ . Jeżeli  $h$  jest największością, to dla  $a$  bardzo małego musi być  $h' = h_0$ , zatem z rów. 251) otrzymamy

$$\frac{h'}{h_0} = \frac{l - x_0 + a}{l - x_0} \left\{ 1 - \frac{a}{x_0} \frac{gl}{gl + p(x_0 - a)} \right\} = 1, \text{ stąd}$$

$$l - x_0 = l - x_0 + a - \frac{a}{x_0} \frac{gl(l - x_0 + a)}{gl + p(x_0 - a)}, \text{ albo}$$

$$x_0 gl + px_0^2 - apx_0 = gl^2 - glx_0 + agl, \text{ a więc}$$

$$x_0 = \frac{(ap - 2gl) + \sqrt{(ap - 2gl)^2 + 4pgl(l + a)}}{2p} \quad . \quad . \quad 255)$$

Jeżeli przyjmiemy  $a = 0$ , otrzymamy przybliżony wzór Winklera

$$x_0 = \frac{gl}{p} \left( \sqrt{\frac{p}{g} + 1} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad 256)$$

Dla mostów kolejowych jednotorowych otrzymamy po wstawieniu wartości  $\frac{p}{g}$  dla

$l =$	10	30	50	100	150 m.
$x_0 =$	0,24	0,33	0,38	0,44	0,45 l

Widzimy więc, że część środkowa belki równoległa jest tem dłuższą, im mniejszą jest rozpiętość.

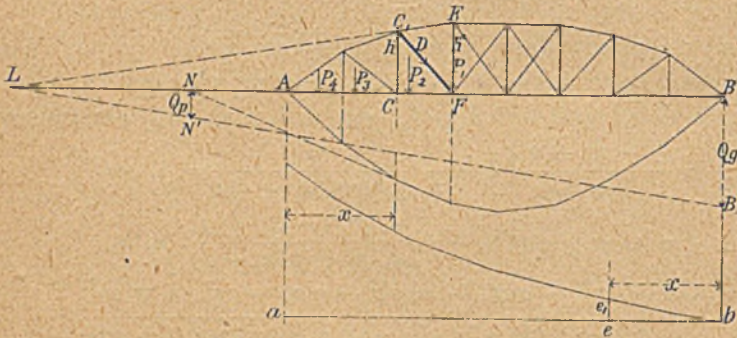
Jeżeli do obliczenia używamy ciężaru zastępczego, to  $p$  należałoby brać jako ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, który znów zależy od  $x_0$ . Przyjąwszy tymczasowo  $x_0$  i  $p$ , należy potem obliczenie powtórzyć dla dokładnego  $x_0$  i  $p$ .

Słup  $CC_1$  obieramy dla punktu, którego  $x$  w przybliżeniu leży w połowie między  $x_0$  i  $x_0 - a$ , dalsze wysokości  $h'$  wyznaczamy według równ. 251) lub 254) po kolei.

Mając dane  $a$  możemy też inaczej postępować. Z równ. 251) obliczamy naprzód  $h_2$ , przyczem  $h = h_2$ , a  $h' = h_1$ , potem  $h_3$ ,  $h_4$  i wyrażamy wszystkie te wysokości przez  $h_1$  i w ten sposób łatwo znajdziemy największą wysokość.

Wykreślić da się kształt belki wyznaczyć według Rittera w następujący sposób. Chcąc wyznaczyć wysokość  $h$  słupa  $CC_1$  (rys. 163),

rys. 163



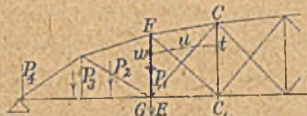
obciążamy lewą stronę belki  $AF$ , stawiając pierwszy ciężar  $P_1$  na  $F$ . Oprócz tego belka obciążona jest ciężarem własnym. Dla obciążenia własnego wyznaczamy linię momentów, a za pomocą niej punkt  $N$  zaczepienia siły poprzecznej  $Q_g$ , której wielkość w zwykły sposób wyznaczamy. Siłę poprzeczną  $Q_p$  z powodu ciężaru ruchomego otrzymamy z wieloboku oddziaływań, robiąc  $be = x$ , to  $ee_1 = -Q_p$ . Teraz składamy siły  $Q_g$  i  $-Q_p$ . Ponieważ  $Q_p$  zaczepia w  $B$ , więc punkt zaczepienia znajdziemy, jeśli wykreślimy  $BB' = Q_g$  i  $NN' = -Q_p$ , połączymy  $B'$  z  $N'$  prostą, która przecina się z osią w  $L$ . Jeżeli  $D$  ma być dla tego obciążenia zerem, to muszą się pasy





Do wyznaczenia dokładnego najniekorzystniejszego położenia i wykreślenia linii wpływowych potrzebne są wysokości belki, których jeszcze nie znamy, wyznaczamy więc tymczasowo

rys. 166.



w przybliżeniu kształt belki, przyjmując obciążenie do punktu  $F$  (rys. 165), albo dla obciążenia układem ciężarów skupionych ustawiamy pierwszą oś na  $F$ . Potem dodatkowo możemy zbadać, czy druga oś, stojąc na  $F$ , nie sprawi najw

(— $Y$ ) lub, co na jedno wychodzi, czy  $h'$  nie będzie większe. Z tego wynika, że dla rozmaitych położen ciężarów należy przyjąć do obliczenia takie  $h'$ , dla którego  $\frac{M'}{M}$  jest największe.

Przy obliczaniu kształtu belki trzeba ciężar własny raczej przyjmować za mały, niż za wielki. Jeżeli bowiem ciężar własny w rzeczywistości jest mniejszy, niż przyjęto w rachunku, to może powstać w krzyżulcu  $CE$  ciśnienie, na które nie został obliczony. Aby tego uniknąć, lepiej jest przy obliczeniu przyjąć ciężar własny trochę mniejszy, niż z wzorów przybliżonych wynika.

Tabl. V.

### §. 88. Przykład.

Dane. Most drogowy I. klasy szeroki  $7,5\text{ m}$  ma dwie belki głównego układu Schwedlera o rozpiętości  $20\text{ m}$  (tabl. V). Wysokość belki wynosi  $3,0\text{ m}$ , odstęp węzłów  $\frac{20}{8} = 2,5\text{ m}$ . Ciężar własny mostu przyjmujemy według równ. 4) w §. 2.  $g = 730 + 32 \cdot 20,0 + 0,028 \cdot 20^2 = 805\text{ kg/m}^2$ , z czego wypada na pomost żwirowany z kształtówek według §. 2. str. 11.  $420 + 80 = 500\text{ kg/m}^2$ , a na pokład (według §. 2. str. 10.)  $42 + 35\text{ kg/m}^2$ . A więc ciężar belki głównej, który rozkłada się po połowie na pas dolny i górny, będzie  $\frac{7,5}{2} (805 - 500 - 77) = 855\text{ kg/m} = 0,855\text{ t/m}$ . Na pasie dolnym leży oprócz tego ciężar pokładu i pomostu  $\frac{7,5}{2} \times 577 = 2160\text{ kg/m} = 2,16\text{ t/m}$ . A więc całkowity ciężar na pas górny  $g_1 = 0,427\text{ t/m}$ , na pas dolny  $g_2 = 2,588\text{ t/m}$ , a ciężary węzłowe  $G_1 = 1,067\text{ t}$ ,  $G_2 = 6,470\text{ t}$ .

Obliczenie. I. Kształt pasu górnego obliczymy najpierw: a) wykreślnie sposobem Rittera, podanym w §. 86; b) analitycznie według §. 86, oba sposoby dla ciężarów skupionych (wozów); wreszcie c) sposobem Steinera według §. 86 dla ciężarów zastępczych jednostajnie rozłożonych.

Według §. 3 dla drogi I klasy i  $l > 19,68 m$  niekorzystniej działa ciężar zastępczy (tłum ludzi). W naszym wypadku nie wiemy z góry, który ciężar będzie niekorzystniejszy, dla tego wyznaczamy kształt pasu górnego dla jednego i drugiego wypadku.

a) Dla ciężarów węzłowych  $G_1 + G_2 = 7,537 t$ , powyżej wyznaczonych, wykreśliłiśmy wielobok sił (rys. 2), wielobok sznurowy i siły poprzeczne (rys. 3); dla ciężaru ruchomego (ciężaru wozów, przyczem należy zauważyć, że na jedną belkę wypada półtora ciężaru wozów) wyznaczyłiśmy siły poprzeczne wielobokiem Winklera (rys. 4). Daną wysokość belki = 3,0 odcinam w rys. 1. w węźle środkowym (4) i próbuję, czy i o ile w następnych węzłach wysokości słupów będą się zmieniać. Według Rittera trzeba odciąć na podporze B siłę  $Q_{\theta}$ , a w punkcie przecięcia się skrajnych boków wieloboku sznurowego siłę  $Q_p$ . Ponieważ z rysunków 3 i 4 widoczna, że  $Q_{p_3} > Q_{\theta_3}$ , zatem wysokość słupa w węźle 3 będzie 3,0 m, jak w węźle 4. Wysokość słupa w węźle 2. znajduję, odcinając  $Q_{\theta_2}$  na podporze B, a  $Q_{p_2}$  na pionowej w punkcie, gdzie się przecina część wieloboku sznurowego (23) z zamykającą. Proste przez te punkty wyznacza punkt  $L_2$ , który połączony z punktem III, odcina na pionowej w węźle 2. wysokość słupa II 2. W ten sam sposób wyznaczyłiśmy wysokość słupa I 1.

b) Liczebnie otrzymujemy momenty dla ciężaru stałego i węzła 1.  $M_{\theta_1} = O_1 \cdot 2,5 \times 1 = 65,95 tm$ , przyczem

$$O_1 = \frac{8-1}{2} (G_1 + G_2) = \frac{7}{2} 7,537 = 26,379 t.$$

„ 2.  $M_{\theta_2} = O_1 \cdot 2,5 \times 2 - (G_1 + G_2) \times 2,5 = 113,06$ ,

„ 3.  $M_{\theta_3} = O_1 \cdot 2,5 \times 3 - (G_1 + G_2) \times 2,5 \cdot 3 = 141,33$ ,

„ 4.  $M_{\theta_4} = O_1 \cdot 2,5 \times 4 - (G_1 + G_2) \times 2,5 \cdot 6 = 150,76$ .

Dla ciężaru ruchomego, którym obciążamy lewą stronę belki od danego węzła, przyczem pierwszy ciężar stoi w węźle, otrzymujemy:

dla węzła 1.  $O_1' = \frac{1}{2} (9 \times 20,0 - 2,5) = 7,875 t$ ,  $M_{p_1} = O_1' \cdot 2,5 = 19,7 tm$ ,  
 $M_{p_2}' = (9 - 7,875) \cdot 15 = 16,9 tm$ ;

„ „ 2.  $O_2'' = \frac{1}{2} (9 \times 5 + 9 \times 1,2) = 2,792 t$ ,  $M_{p_2} = O_2'' \cdot 15,0 = 41,8 tm$ ,  
 $M_{p_3}' = 2,79 \cdot 12,5 = 34,9 tm$ ;

„ „ 3.  $O_3''' = \frac{1}{2} (9 \times 7,5 + 9 \times 3,7) = 5,040 t$ ,  $M_{p_3} = O_3''' \cdot 12,5 = 63,0 tm$ ,  
 $M_{p_4}' = 5,04 \cdot 10 = 50,4 tm$ .

Według równania 257) dla danego obciążenia, n. p. do węzła 1:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_{p_1} + M_{\theta_1}}{M_{p_2}' + M_{\theta_2}} = \frac{19,70 + 65,95}{16,90 + 113,06} = \frac{85,65}{129,96} = 0,659,$$

przy obciążeniu do węzła 2:

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{41,80 + 113,06}{34,90 + 141,33} = \frac{154,86}{176,23} = 0,879,$$

przy obciążeniu do węzła 3:

$$\frac{h_3}{h_4} = \frac{63,0 + 141,33}{50,4 + 150,76} = \frac{204,33}{201,16} = > 1,$$

zatem  $h_3$  pozostaje równe  $h_4 = 3,0 m$ , a wysokości następnych słupów

$$h_2 = 0,879 \cdot 3,0 = 2,64 m,$$

$$h_1 = 0,659 \cdot 2,64 = 1,74 m.$$

c) Według równania 254) otrzymujemy dla słupa w węźle 1:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\alpha x_2 - x_1}{x_2 + \alpha} \left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \alpha \frac{x_1 + \alpha}{x_2 + \alpha} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2,$$

czyli ponieważ

$$\alpha = \frac{g}{p + g} = \frac{3,015}{(0,46 \times \frac{7,5}{2}) + 3,015} = 0,636$$

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{15}{2,5} \cdot \frac{0,636 \cdot 15 - 2,5}{15 + 2,5} \left(\frac{h_2}{h_1}\right) = 0,636 \frac{2,5 + 2,5}{15,0 + 2,5} \left(\frac{15}{2,5}\right)^2,$$

$$\frac{h_2}{h_1} = -1,2 \pm 2,824 = 1,62.$$

Podobnie znajdujemy

$$\frac{h_3}{h_2} = 1,154, \text{ i } \frac{h_4}{h_3} = 0,859,$$

zatem widoczna, że  $h_3$  będzie największą wysokością belki, którą zostawiamy równą  $h_4$ , tak że  $h_3 = h_4 = 3,0 m$ ;  $h_2 = 2,60$ ;  $h_1 = 1,60 m$ .

Kształt pasu górnego przyjmujemy według obliczenia a) i b), a więc dla obciążenia wozami, a jeżeliby się z następnego obliczenia okazało, że niekorzystniej działa tłum ludzi, należałoby zmienić kształt według obliczenia c).

II. Siły wewnętrzne, wywołane działaniem ciężaru stałego (ciężaru mostu) zestawione na str. 194 i 195.

a) wykreślnie wyznaczylismy planem sił (rys. 5);

b) liczebnie wyznaczamy:

$$1. \text{ w pasach według równ. 175) i 176) } S_{g\text{órn}} = \frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma, S_{d\text{oln}} =$$

$$= + \frac{M}{h}, \text{ przyczem siecz } \sigma = \sqrt{1 + st^2 \sigma} = \sqrt{1 + \left(\frac{h_{m+1} - h_m}{2,5}\right)^2}, \text{ a } M \text{ i } h \text{ po-}$$

dane pod I b). N. p. dla części pasu górnego AI:

$$Mg_1 = 65,95 tm, h_1 = 1,74, st^2 \sigma = \left(\frac{1,74 - 0,00}{2,5}\right)^2 = 0,696^2 = 0,484, \text{ siecz } \sigma =$$

$$= \sqrt{1 + 0,484} = 1,212$$

zatem

$$S_{AI} = 65,95 \cdot \frac{1,212}{1,74} = 46,165 t, S_{I2} = 65,95 \cdot \frac{1}{1,74} = 37,91 t.$$

2. w słupach otrzymamy według równ. 183)  $Y = Q - \frac{M}{h} st \sigma$ , przy-

czem  $Qg_m = O_1 - (m - 1)(G_1 + G_2)$ , a inne wymiary podane pod II b). N. p. dla słupa 2 II, dla którego według §. 56 punkt F leży na węźle 2,

$$Qg_2 = 26 - 1 \times 7,537 = 18,842, \quad Mg_2 = 113,05, \quad h = 2,64, \quad \text{st } \sigma = 0,36$$

$$Y_{II2} = 18,842 - \frac{113,05}{2,64} \cdot 0,36 = 3,467 t.$$

Zauważyć należy, że słup I 1 zostaje tylko pod działaniem dolnego ciężaru węzłowego, zatem  $Y_{I1} = G_2 = 6,47 t$ .

3. Siły działające w przekątniach otrzymamy z rów. 181) i 183)

$$D = Y \text{ siecz } \alpha = \left[ Q - \frac{M}{h} \text{st } \sigma \right] \text{ siecz } \alpha,$$

przyczem

$$\text{siecz } \alpha = \sqrt{1 + \text{st}^2} \alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{2,5}{h}\right)^2},$$

inne wymiary podane pod II. 1 i 2. N. p. dla przekątnej 1 2, dla której według §. 56 p.  $F$  leży w węźle 2:

$$Qg_2 = 18,842 t, \quad Mg_2 = 113,06 tm, \quad h = 2,64, \quad \text{st } \sigma = 0,36, \quad \text{siecz } \alpha = \\ = \sqrt{1 + \left(\frac{2,5}{1,74}\right)^2} = 1,75,$$

zatem

$$D_{I2} = \left[ 18,842 - 113,06 \times \frac{0,36}{2,64} \right] \times 1,75 = 3,42 \times 1,75 = + 5,985 t.$$

III. Siły wewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym wyznaczamy za pomocą linii wpływowych.

a) Linie wpływowe:

1. dla pasów wyznaczymy: a) sposobem Müllera-Breslaua według §. 62 zaczepiając raz na podporze  $A$ , drugi raz na podporze  $B$  oddziaływanie równe  $1 t$  i dla obu tych wypadków kreśląc plany sił (rys. 6 i rys. 7). Następnie n. p. dla części pasu górnego  $AI$ , odcinam na podporze  $A$ , długość  $a_A$  z rys. 7 a długość  $a_B$  z rys. 6 na podporze  $B$ , a obie te długości wyznaczają kształt linii wpływowej dla  $AI$ , jak widoczne z rysunku 9 a;  $\beta$ ) dla sprawdzenia wyznaczaliśmy jeszcze rzędną linii wpływ. według §. 64 i §. 12. A mianowicie kreśliłyśmy (rys. 8) parabolę, na której leżą wierzchołki linii wpływowych momentów, przyjmując największą rzędną  $gg' = \frac{1}{4} \cdot 1' \cdot 1m = 5 tm = 5 cm$ , a ponieważ podziałka długości jest  $\frac{1 m}{1 cm}$ , zatem po-

działka sił  $\frac{1 t}{1 cm}$ . Następnie chcąc otrzymać rzędną linii wpływowej

musimy rzędną paraboli pomnożyć dla pasu dolnego przez  $\frac{1}{h}$ , dla pasu górnego przez  $\frac{1}{h} \cdot \text{siecz } \sigma$ . N. p. dla części pasu górnego  $AI$  wyznaczam siłę

ze względu na moment w węźle (1), zatem wykreślam w tym punkcie rzędną paraboli  $mo$ , a na osi  $X$ ów odcinam  $h_1 = on$  i  $pn = 1 t$ . Pionowa z punktu  $p$  przecina  $mn$  w punkcie  $r$ , a wtedy  $on : np = om : pr$ , czyli  $rp = \frac{1 \times M}{h_1}$ ,

a wykreślając z punktu  $r$  prostopadłą do kierunku  $AI$ , otrzymujemy  $rs =$  rzędną linii wpływowej dla pasu  $AI$ , którą odcinamy w rys. 9 a na prostopadłej z węzła 1. Podobnie dla pasu 12 wyznaczę rzędną linii wpływowej w węźle 1 odcinek  $rp$ .

2. Dla słupów użyjemy:  $\alpha$ ) jak wyżej planów sił (rys. 6 i 7) odcinając w rys. 10  $a$  n. p. dla słupa VI 6 = II 2 na podporze  $A$  długość  $b_A$ , a długość  $b_B$  na podporze  $B$ ;  $\beta$ ) dla sprawdzenia wyznaczyliśmy dla tego słupa (w rys. 10  $a$ ) linię wpływową, sposobem, podanym w §. 61, a wreszcie zastosowaliśmy trzeci  $\gamma$ ) sposób kontroli, wyznaczając dla danego słupa punkt obojętny w rys. 1, wtedy ten punkt musi leżeć na pionowej, wyprowadzonej z punktu obojętnego linii wpływowej. [Dla przejrzystości rysunku wyznaczyliśmy linie wpływowe dla słupów prawej połowy belki].

Przy słupach V 5 = III 3 i IV 4 linie wpływowe nie dają się już według poprzednich sposobów wyznaczyć, a to dlatego, że ze zmianą strony obciążenia belki zmieniają się ścięgna, które działają. Weźmy pod uwagę słup V 5 = III 3. Jeżeli obciążymy lewą część belki od słupa, wtedy działa ścięgno 4 V i słup pracuje na ciśnienie. Ponieważ przy kreśleniu rysunków 6) i 7) wzięliśmy pod uwagę to ścięgno 4 V, zatem możemy dla takiego obciążenia wyznaczyć linię wpływową zwykłymi sposobami, pamiętając jednak, że jest ona ważną tylko w części ujemnej do punktu obojętnego ścięgna 4 V (rys. 10  $a$ ). Jeżeli obciążymy prawą stronę belki od słupa V 5, wtedy działa ścięgno IV 5, a nie działa V 4 i słup pracuje na ciągnięcie. Z chwilą gdy ciężar przekracza punkt obojętny ścięgna V 4, to ścięgno V 4 zaczyna działać i słup zaczyna pracować na ciśnienie, a zatem punkt obojętny ścięgna V 4 będzie punktem obojętnym linii wpływowej słupa V 5. Ponieważ przy kreśleniu rysunków 6) i 7) wzięliśmy pod uwagę ścięgno 3 IV, odpowiadające ścięgnu IV 5, a opuściliśmy III 4 = V 4, możemy więc w rys. 10  $a$  odciać na podporze  $A$  rzędnę III 3 $_B$  z rys. 6) i otrzymamy łącząc ten odcinek z drugą podporą, dodatnią część linii wpływowej dla słupa V 5 = III 3. Możemy jeszcze w inny sposób wyznaczyć dodatnią część linii wpływowej, wychodząc z założenia, że dla równowagi siły w węźle V, a więc IV V, V VI i V 5 muszą tworzyć wielobok zamknięty. Jeżeli więc odetniemy (rys. 12) na równoległej do V VI odcinek  $w = t$  (z rys. 9  $a$ ) to jest siłę w V VI, jaką wywołuje  $1 t$ , stojąc w węźle V VI i z końca tego odcinka wykreślimy równoległą do IV V i do 5 V, to odcinek równoległy do słupa daje wielkość rzędnej linii wpływowej dla słupa w węźle 5.

Słup IV 4. Przy obciążeniu n. p. lewej strony słupa IV 4 pracuje ścięgno 3 IV, a nie 4 III, ten sam zachodzi stosunek przy obciążeniu prawej strony zatem słup zawsze tylko pracuje na ciśnienie. Ponieważ przy obciążeniu całkowitem siła w słupie = 0, zatem linia wpływowa wykreślona zwykłymi sposobami będzie ważną tylko w części ujemnej, a punkt obojętny będzie w węźle 4.

3. Dla ścięgien wyznaczamy linie wpływowe (rys. 11  $a$ ) jak dla słupów, a więc raz  $\alpha$ ) z planów sił, drugi raz  $\beta$ ) według §. 61, przyczem należy zauważyć, że tym sposobem otrzymane rzędne n. p. dla I 2. 1' 1" i 2' 2" należy jeszcze pomnożyć przez siecz  $a$ , czyli wykreślić 1" 1" i 2" 2" równoległe do ścięgna I 2.  $\gamma$ ) Dla sprawdzenia wyznaczyliśmy punkty obojętne dla krzyżulców lewej połowy belki w rys. 1, kreśląc dla tej połowy i linie wpływowe.

$b$ ) Siły wewnętrzne na podstawie wykreślonych linii znajdziemy, obciążając belkę albo ciężarami skupionymi wozów łącznie z obciążeniem

tłumem ludzi, albo tylko tłumem ludzi (ciężarem jednostajnie rozłożonym), który dla naszego przypadku wynosi  $\frac{0,46 \times 7,5}{2} = 1,725 \frac{t}{m}$ .

Dla rozpiętości, przy których z góry wiemy, który ciężar działa niekorzystniej, tym ciężarem tylko belkę obciążamy, przy rozpiętościach pośrednich jak w danym wypadku należy spróbować, które obciążenie wywoła większe siły i te wprowadzić w rachunek. Wyniki zestawiliśmy w tablicy na str. 194 i 195.

1. N. p. dla pasu A I okazuje się, że: a) ustawiając w węźle 1 przednie koło wozu, a za wozem tłum ludzi, otrzymujemy siłę: (rys. 9 a)

$$A I_w = (1,6 + 1,2) \times 9,0 t + \frac{11,72 \times 1,02}{2} \times 1,725 = 35,35 t.$$

b) obciążając zaś cały most tłumem ludzi, otrzymujemy siłę:

$$A I_t = \frac{20 \times 1,6}{2} \times 1,725 = 27,52 t,$$

w rachunek więc wprowadzamy wartość większą  $A I_w = 35,35 t$ .

2. Ponieważ słupy są narażone pod wpływem ciężaru ruchomego raz na ciągnięcie, a raz na ciśnienie, zatem obciążamy raz jedną, raz drugą stronę od punktu obojętnego.

N. p. dla słupa VI 6 (rys. 10 b) obciążając na prawo od punktu obojętnego:

a) wozami, przyczem tylne koło stoi na węźle 6 i tłumem ludzi, otrzymujemy siłę:

$$VI 6_w = (0,80 + 0,15) \times 9,0 t = + 8,55 t;$$

b) tłumem ludzi:

$$VI 6_u = \frac{0,80 \times 7,0}{2} \times 1,725 = + 4,810 t.$$

Obciążając zaś na lewo od punktu obojętnego:

a) wozami i tłumem ludzi, otrzymujemy siłę:

$$VI 6_w = (0,25 + 0,15) \times 9 + (0,06 + 0,03) 2,25 = - 4,80 t;$$

b) tłumem ludzi:

$$VI 6_u = \frac{0,23 \times 13,0}{2} \times 1,725 = 2,578 t,$$

obciążenie wozami działa więc w obu wypadkach niekorzystniej.

3. Ściągna mogą działać tylko na ciągnięcie, zatem ustawiamy ciężary tylko na dodatniej części linii wpływowej (rys. 11 b).

N. p. dla ścięgna I 2 obciążamy na prawo od punktu obojętnego:

a) wozami, stawiając ostatnie koło wozu na węźle 2 i otrzymujemy siłę

$$I 2_w = (0,3 + 0,45) \times 9 + (0,2 + 0,03) \times 2,25 + \frac{0,05 + 1,5}{2} \times 1,725 = + 8,71 t.$$

b) tłumem ludzi:

$$I 2_u = \frac{0,45 \times 16,0}{2} \times 1,725 = + 6,228 t.$$

IV. Siły wewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym a zestawione w tablicy na str. 194 i 195, wyznaczmy jeszcze sposobem analitycznym, przyjmując jako najniekorzystniejsze ustawienie ciężarów, znalezione według linii wpływowych.

1. W pasach według wzorów 175) i 176)  $S_g = -\frac{M}{h}$  siecz  $\sigma$ ,  $S_d = +\frac{M}{h}$  otrzymujemy:

n. p. dla węzła 1 (według linii wpływ. dla AI i 12 rys. 9 b)

$$O_1 = \frac{1}{20} \left( 9(17,5 + 13,7) + 11,7 \times 1,725 \times \frac{11,7}{2} \right) = 19,96 t,$$

$$M_{p_1} = 19,96 \times 2,5 = 49,9 tm, \text{ zatem}$$

$$S_{12} = \frac{49,9}{1,74} = 28,9 t, \quad S_{AI} = \frac{49,9}{1,74} \times 1,218 = 35,258 t.$$

2. W słupach wyznaczmy znowu siły wedł. równ. 183)

$$Y = Q - \frac{M}{h} \text{ st } \sigma \text{ i dla rozkładu ciężarów według rys. 10 b,}$$

N. p. dla słupa VI 6 = II 2

$$O_1 = \frac{1}{15} 9(5 + 1,2) = 2,79 t, \text{ więc } Q_{p_1} = -O_1 = -2,79 t, M_{p_1} = 2,79 \times 15 = 41,85 tm,$$

$$\text{a zatem } Y_{2II} = - \left( -2,79 - \frac{41,85}{2,64} \times 0,36 \right) = +8,48 t.$$

Słup I 1 pracuje tylko na ciągnięcie, równe ciężarowi węzłowemu.

Dla słupa V 5 = III 3 widoczna z linii wpływowej, że ciągnięcie wywołuje obciążenie na prawo od punktu obojętnego przekątni IV 5, która wtedy działa, a nie działa przekątnia 4 V. Siła w słupie musi dla równowagi z siłami w pasach VIV i IV V, jakie wywołują najniekorzystniejsze obciążenie dla słupa, tworzyć wielobok zamknięty, a więc:

$$Y_{5V=3III} = S_{IVV} \times \text{st } \sigma, \quad S_{IVV} = \frac{O_1 \times 12,5}{3,0} = \frac{5,04 \times 12,5}{3,0} = \frac{63,00}{3,0} = 21,0 t$$

$$Y_{5V=3III} = 21,0 \times 0,144 = +3,024 t.$$

Największe ciśnienie zaś w słupie III 3 = V 5 będzie przy obciążeniu lewej strony belki do punktu obojętnego słupa V 5, wtedy działa ścięgono 4 V, a nie działa 5 IV.

$$O_2 = 7,504 t, \quad Q_p = -O_2 = -7,504 t, \quad M_p = -7,504 \times 7,5 = -56,25 tm$$

$$Y_{5V=III3} = -7,504 + \frac{56,25}{3} \times 0,144 = -7,504 + 2,7 = -4,8 t.$$

Dla słupa IV 4 największe ciągnięcie pod wpływem ciężaru ruchomego będzie zawsze = 0; zaś największe ciśnienie wypadnie przy obciążeniu lewej lub prawej strony belki do węzła 4. N. p. przy obciążeniu lewej strony działa ścięgono 3 IV i 4 V, a ścięguna III 4 i IV 5 nie.

$$O_1 = 5,0, \quad Q_p = -5, \quad M_p = -50,0, \quad \frac{M_p}{h} \text{ st } \sigma = 0,$$

$$Y_{IV4} = -5,0 t.$$

3. W ścięgnach otrzymamy siły z równ. 181) i 183)  $D = Y$  siecz  $\alpha$ , a dla rozkładu ciężarów według rys. 11 b. N. p. dla ścięgna I 2:



$$O_1 = \frac{1}{20} \left[ 9(15 + 11,2) + 2,25(6,9 + 3,3) + 1,4 \times 1,725 \times \frac{1,4}{2} \right] = 13,022 \text{ t.}$$

$$M_p = \frac{13,922 \times 5}{65,10}, \quad Q_p = O_1 = 13,022 \text{ t,}$$

$$Y_{I2} = \left( 13,022 - \frac{65,10}{2,64} \times 0,36 \right) = 4,058,$$

$$D_{I2} = 4,058 \times 1,75 = 7,102 \text{ t.}$$

Do obliczenia przekrojów w następującej tabliczce VI wprowadziliśmy wyniki z obliczenia IV jako dokładniejsze od III.

V. Wreszcie dla sprawdzenia, czy kształt pasu górnego był odpowiednio obrany, obciążamy dla ściegów I2 i II3 lewą część belki od punktów obojętnych i otrzymujemy według linii wpływowych:

dla I2 obciąż. wozami . . . . . =  $-0,65 \times 9 = -5,85 \text{ t.}$

obciąż. tłumem ludzi . . . =  $-\frac{0,65 \times 4,0}{2} \times 1,725 = -2,420,$

a ponieważ I2 ciężar stały =  $+5,985$ , zatem wypadkowa =  $+0,105 \text{ t.}$

dla II3 obciąż. wozami . . . . . =  $-(0,50 + 0,16) \times 9 = -5,94 \text{ t,}$

obciąż. tłumem ludzi . . . . . =  $\frac{0,50 \times 6,3}{2} \times 1,725 = -2,94 \text{ t,}$

a ponieważ II3 ciężar stały =  $+6,238$ , zatem wypadkowa =  $+0,298 \text{ t.}$

VI. Teoretyczne wymiary części składowych belki są umieszczone na str. 194 i 195.

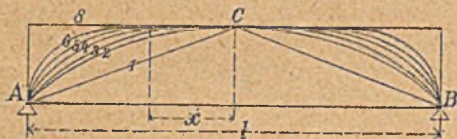
## XVI. Inne jednoprzęsłowe belki kratowe.

### §. 89. Belki Winklera. *Trägerform mit der kleinsten Materialmenge.*

Ważnem jest pytanie, jaki kształt nadać belce kratowej, aby ilość materiału była najmniejszą. Potrzebaby w tym celu obliczyć teoretyczną i rzeczywistą ilość materiału dla belki równoległej, parabolicznej i belki o pasach dowolnie krzywych

i ją jako funkcję kształtu pasów wyrazić. Zadanie tak ogólnie postawione nie da się rozwiązać. Musimy je więc bliżej określić. Winkler, który starał się rozwiązać powyższe pytanie, przy-

rys.167.



puszcza, że belki kratowe, które porównujemy, mają wszystkie w środku rozpiętości tę samą wysokość największą, dalej przyjmuje on pas dolny prosty a górny zakrzywiony według parabol

## VI. Teoretyczne wymiary części składowych belki (do przydatku 332)

z. 188.

bez uwzględnienia straty materiału na połączenia i na wyboczenie.

Według rozp. minist. natężenie dopuszczalne =  $750 + 2l$ , czyli dla rozp. 20 00 m  $\tau = 790 \text{ kg/cm}^2$ , zatem przekrój =  $\frac{S \text{ kg}}{790} \text{ cm}^2$ .

Części belki	$M_g$	$h$	st $\sigma$	siecz $\sigma$	$Q_g$	$Y_g$	st $\alpha$	siecz $\alpha$
	<i>tm</i>	<i>m</i>			<i>t</i>	<i>t</i>		
AI = VII B	65,95	1,74	0,696	1,218	—	—	—	—
III = VI VII	113,06	2,64	0,360	1,068	—	—	—	—
II III = V VI	141,33	3,00	0,144	1,010	—	—	—	—
III IV = IV V	150,76	3,00	0,000	1 000	—	—	—	—
AI = 12 = 67 = 7 B	65,95	1,74	—	—	—	—	—	—
23 = 56	113,06	2,64	—	—	—	—	—	—
34 = 45	141,33	3,00	—	—	—	—	—	—
I 1 = VII 7	—	—	—	—	—	—	—	—
II 2 = VI 6	113,06	2,64	0,360	—	+ 18,842	3,467	—	—
III 3 = V 5	141,33	3,00	0,144	—	+ 11,305	4,522	—	—
IV 4 = IV 4	150,76	3,00	0,000	—	+ 3,769	3,769	—	—
I 2 = VII 6	113,06	2,64	0,360	—	+ 18,842	+ 3,467	1,487	1,750
II 3 = VI 5	141,33	3,00	0,144	—	+ 11,305	+ 4,522	0,947	1,880
III 4 = V 4	—	—	—	—	+ 3,769	+ 3,769	0,833	1,300
IV 5 = IV 3	—	—	—	—	— 3,769	— 3,769	0,833	1,300

Części belki	Siły wewnętrzne w tonnach							Przekrój <i>cm</i> <sup>2</sup>	<i>M<sub>p</sub></i> <i>t</i>	<i>Q<sub>p</sub></i> <i>t</i>
	ciężar staly		ciężar wozów		tłum ludzi		najw. działające			
	+	+	—	+	—	+	—			
· AI = VII B	— 46,165	—	35,258	—	27,520	—	81,423	103,07	49,90	—
III = VI VII	— 45,224	—	32,640	—	26,600	—	77,864	97,08	78,30	—
II III = V VI	— 48,052	—	33,450	—	27,520	—	75,502	94,16	99,66	—
III IV = IV V	— 49,750	—	33,813	—	28,462	—	83,563	104,20	102,57	—
A 1 = 12 = 67 = 7 B	+ 37,910	28,900	—	21,672	—	66,810	—	83,76	49,90	—
23 = 56	+ 42,850	30,780	—	24,500	—	73,630	—	91,81	78,30	—
34 = 45	+ 47,100	33,220	—	27,520	—	80,320	—	100,00	99,66	—
II I = VII 7	+ 6,470	9,086	—	4,312	—	15,556	—	19,40	—	—
II 2 = VI 6	+ 3,167	8,480	4,810	4,830	2,578	11,947	1,343	14,99	41,85	2,79
III 3 = V 5	+ 4,522	3,04	4,800	4,761	3,131	7,562	0,278	15,62	56,25	7,504
IV 4 = IV 4	+ 3,769	0	5,000	5,025	2,886	3,769	2,231	13,93	50,00	5,000
I 2 = VII 6	+ 5,985	7,102	5,850	6,228	2,420	13,087	—	18,32	65,00	13,022
II 3 = VI 5	+ 6,233	8,025	5,940	7,152	2,940	14,263	—	17,78	—	10,100
III 4 = V 4	+ 4,901	9,754	—	7,024	—	14,655	—	18,75	—	7,500
IV 5 = IV 3	— 4,001	6,552	—	3,720	—	1,651	—	2,86	—	5,000

\*

$n$  ego rzędu. Wtedy będzie wysokość  $h$  w odstępnie  $x$  od środka belki (rys. 167) 
$$h = \left[ 1 - \left( \frac{2x}{l} \right)^n \right] h_1 . . . . . 258)$$

Dla  $n=1$  otrzymujemy trójkąt  $ACB$ , dla  $n=2$  mamy pas górny zakrzywiony podług paraboli zwykłej, dla  $n > 2$  według paraboli wyższego stopnia, naraście dla  $n = \infty$  według linii prostej, więc belkę równoległą. Winkler wyznaczył wykreslinie objętość materiału dla rozmaitych wartości  $n$  i otrzymał najmniejszą teoretyczną ilość materiału dla  $n=4$  do  $n=6$ . Rzeczywista najmniejsza ilość materiału będzie dla nieco mniejszego  $n$ .

rys.168.



Belka taka ma pas górny na znacznej długości bardzo mało zakrzywiony, dopiero przy podporach spada on nagle. Nazywamy ją belką Winklera,

nie używamy jej jednak w praktyce, tylko zamiast niej używamy belek o kształtach przybliżonych i tak najprzód belkę z parabolicznem zakończeniem (rys. 168).

(*Parallelträger mit parabolischen Enden*). Jestto belka, której pas dolny jest prosty, a górny także prosty w części środkowej, przy końcach zaś za-

rys.169.



krzywiony parabolicznie. Siły wewnętrzne obliczamy na długości  $CD$  jak dla belki równoległej, dla końców zaś  $AC$  i  $DB$  według sposobów ogólnych, używanych dla belki wielobocznej.

Kształt przybliżony do belki Winklera ma także belka trapezowa (n. *Trapezträger*) (rys. 169), używana często w Ameryce, w Europie wprowadzona przez Köstlina i Battiga. Tu zakończenie pasu górnego jest proste, co wielce ułatwia robotę belki.

Na długości  $AC$  punkt przecięcia się pasów  $L$  wpada na podporę  $A$ , zatem otrzymujemy dla krzyżulców długość obojętną, największe siły wewnętrzne będą zatem dla obciążenia zupełnego, jak dla dachów.

§. 90. Belka eliptyczna.

Belka eliptyczna (n. *Elipsenträger*) (rys. 170.) jest używana także jako belka kształtem zbliżona do belki Winklera.

Równanie linii pasu górnego jest  $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{h^2}{h_1^2} = 1$ , więc

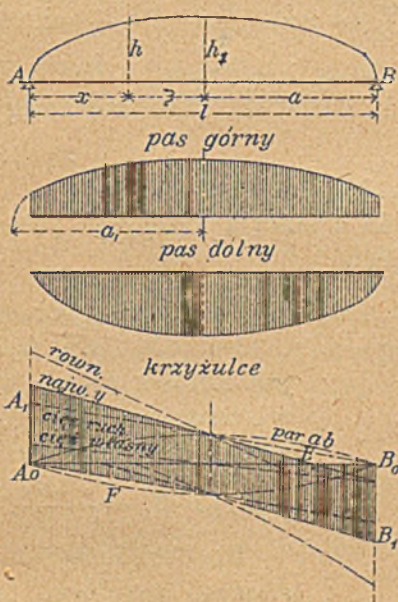
$$h = h_1 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}, \text{ a ponieważ}$$

$$\xi = \frac{l}{2} - x, \text{ a } a = \frac{l}{2}, \text{ zatem}$$

$$h = \frac{2h_1}{l} \sqrt{x(l-x)}. \quad (259)$$

Winkler oblicza dla tej belki w przybliżeniu siły wewnętrzne w pasie górnym i dolnym  $S_1$  i  $S_2$  i otrzymuje dla obydwóch wartości równania elipsy. Podajemy tu tylko wyniki, bo belka ta jest mało używana, a przy dokładnem obliczeniu trzeba używać wzorów ogólnych. Na rys. 170. przedstawiliśmy siły zewnętrzne w obu pasach, przyczem

rys. 170.



$$a_1 = a \sqrt{\frac{2a^2}{2a^2 - h_1^2}} \quad (260)$$

Dla kraty otrzymamy wedle Winklera

dla ciężaru własnego  $\frac{M_g}{h} = \frac{gx(l-x)l}{2 \cdot 2 h_1 \sqrt{x(l-x)}} = \frac{gl}{4 h_1} \sqrt{x(l-x)}$ .

Według równ. 187) jest

$$Y_g = \frac{d}{dx} \frac{M_g}{h} h = \frac{gl(l-2x)}{8 h_1 \sqrt{x(l-x)}} \sqrt{x(l-x)}, \text{ więc}$$

$$Y_g = \frac{g}{4} (l-2x) = \frac{1}{2} g \xi \quad (261)$$

\*) p. Winkler: Theorie der gegliederten Balkenträger, II. wydanie, str. 211.

Dla ciężaru ruchomego jest

$$\text{najw } (+Y) = Q - \frac{M}{h} \operatorname{st} \alpha = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}. \text{ Wstawiwszy wartości}$$

*M. dx.*

$$Q = \frac{p(l-x)^2}{2l}, \quad M = \frac{px(l-x)^2}{2l}, \quad \frac{dh}{dx} = \frac{h_1}{l} \frac{l-2x}{\sqrt{x(l-x)}}, \text{ otrzymamy}$$

$$\text{najw } (+Y) = \frac{1}{4} p(l-x), \quad \dots \quad 262)$$

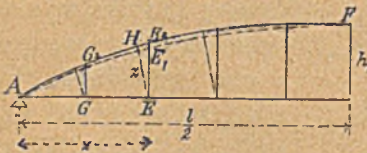
$$\text{a najw } (-Y) = Y_s - \text{najw } (=Y) = \frac{p}{4}(l-2x) - \frac{p}{4}(l-x) = -\frac{1}{4} px \quad 263)$$

Równania 262) i 263) wyznaczają linie proste  $A_1B_0$  i  $A_0B_1$ . Dla porównania wykreśliśmy  $Y$  także dla belki równoległej i parabolicznej.

### §. 91. Belka górnoparaboliczna o stałym przekroju pasu górnego.

Jeżeli  $z$  (rys. 171) oznacza oddalenie części pasu górnego od odnośnego węzła pasu dolnego  $n$ . p. jeżeli dla pasu  $G_2E_2$

rys. 171.



jest  $EH = z$ , to siła wewnętrzna w pasie górnym jest według równania 173)  $S_1 = -\frac{M_1}{z}$ .

Dla obciążenia jednostajnego zupełnego jest

$$M_1 = \frac{qx(l-x)}{2},$$

więc  $S_1 = -\frac{qx(l-x)}{2z}$ . Jeżeli  $S_1$  ma być stałym, to musi mieć

taką samą wartość także dla  $x = \frac{l}{2}$ , przyczem  $z = h_1$ , więc

$$S_1 = -\frac{qx(l-x)}{2z} = -\frac{ql^2}{8h_1}, \text{ a zatem } z = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad 264)$$

Jestto równanie paraboli. Jeżeli więc  $AE_1F$  jest parabolą, to zataczamy rzędnemi paraboli łuki o promieniu równym  $z$ , a pas górny kreślimy stycznie do tych łuków. Przybliżone równanie pasu górnego otrzymamy podobnie, jak dla belki Paulego (§. 81).

$$h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2} \left[ 1 + 8 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad \dots \quad 265)$$

Belkę tę nazywamy belką górnoparaboliczną o stałym przekroju w pasie górnym (n. *Bogensehnenträger mit constanter Spannung der Obergurtes*). Ritter\* pisał o niej już w r. 1870, później Haberkalt w r. 1878.

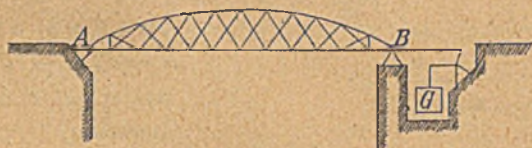
Dobłą stroną tej belki ma być to, że przekrój pasu górnego jest stały, podczas gdy w belce górnoparabolicznej przekrój zmienia się ze siecz  $\sigma$ . Łatwo jednak zrozumiemy, że w belce Haberkalta pas górny ma wprawdzie przekrój stały, ale za to pas dolny ma przekrój zmienny. Poprawką tą pasu górnego więc nie zyskujemy.

### §. 92. Belka z ciężarem pomocniczym.

Köpeke wpadł w r. 1865 na myśl zmniejszenia siły wewnętrznej w pasie dolnym prostym sztucznym obciążeniem. Myśl tę wykonano w r. 1878 w moście pod Rieżą na Łabie (rys. 172.).

Najwięcej korzyści sprawia ciężar pomocniczy (n. *supplementäres Gewicht*) dla belki parabolicznej, bo tu siła wewnętrzna w pasie dolnym  $S_2$  jest stałą, a ponieważ wielkość ciężaru pomocniczego  $G$  i stosunki ramion dźwigni od nas zależą, więc możemy wywołać

rys.172.



tak wielkie ciśnienie, jak wielkie jest ciągnięcie  $S_{20}$  z powodu ciężaru własnego. Dla mostu nieobciążonego będzie więc siła wewnętrzna w pasie dolnym równa zeru; pas dolny obliczamy wtedy według siły  $S_{2p}$ , powstałej z ciężaru ruchomego.

Jeżeli pas dolny jest tęgi, to możemy wywołać jeszcze większe ciśnienie i znieść połowę  $S_{2p}$ , wtedy przy moście nieobciążonym pas dolny jest ciśniony.

Sily wewnętrzne w kracie i pasie górnym nie zmieniają się wcale z powodu sztucznego ciśnienia, bo obliczając je, jak wiemy, tworzymy momenty sil zewnętrznych ze względu na węzły pasu dolnego, a dla tych punktów moment sztucznego ciśnienia jest zerem.

\* Ritter. Graph. Statik II Teil. 1. 85.

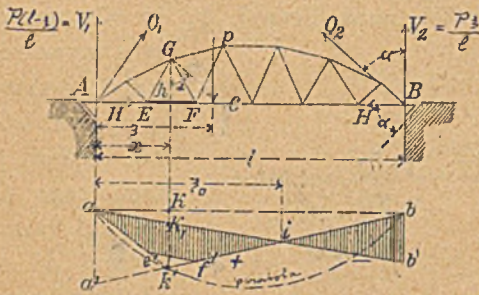
Belka ta wykazuje znaczną oszczędność materiału dla pasu dolnego, zato jednak potrzebujemy też materiału dość dla ciężaru pomocniczego i silniejszych przyczółków tak, że ostatecznie koszt całego mostu mało będzie mniejszy i to tylko przy wielkich rozpiętościach. Korzyść ta może być znaczną dla belki o kilku przęsłach, bo jeden ciężar pomocniczy wystarcza na wszystkie przęsła.

Köpccke proponował też wywoływać sztuczne ciągnięcie w prostym pasie górnym, w takim razie pas dolny byłby parabolicznym.

### §. 93. Belka rozporowa prosta.

Foeppl proponował w r. 1878 urządzenie łożysk pochyłych dla belki prostej. Wskutek łożysk pochyłych powstają pochyłe oddziaływania, belka staje się więc rozporową, dlatego nazywamy ją belką rozporową prostą (n. *Träger mit schiefer Auflagerung*) (rysunek 173).

rys. 173.



Powstaje tu oddziaływanie  $O_2$ , prostopadłe do łożyska wałkowego, które rozłożyć możemy na  $H$  i  $V_2$ , przyczem  $H = V_2 \operatorname{st} \alpha$ .

Gdy siła  $P$  działa w punkcie  $C$ , to  $V_2 = \frac{P\xi}{l}$ , więc  $H = P \frac{\xi}{l} \operatorname{st} \alpha$ .

Dla części  $EF$  pasu dolnego między  $A$  i  $C$  otrzymamy, tworząc momenty ze względu na punkt  $G$ ,

$$S_2 = \frac{1}{h} \left[ \frac{P(l-\xi)x}{l} - Hh \right] = \frac{P}{lh} [lx - \xi(x + h \operatorname{st} \alpha)] \quad . \quad 266$$

Dla  $\xi = \xi_0$  jest  $S_2 = 0$ , więc



$$\xi_0 = \frac{lx}{x + h \operatorname{st} \alpha}, \quad \dots \quad 267)$$

przyczem  $\xi_0$  wyznacza punkt obojętny.

Jeżeli  $x > \xi$ , otrzymamy podobnie

$$S_2 = \frac{1}{h} \left[ \frac{P(l - \xi)x}{l} - P(x - \xi) - Hh \right] = \frac{P\xi}{lh} (l - x - h \operatorname{st} \alpha) \quad 268)$$

Na podstawie tych równań możemy wykreślić linię wpływową  $S_2$ . Równ. 266) i 268) są równaniami linii prostych ze względu na  $\xi$ , należy więc wyznaczyć tylko po dwa punkty tych linii. Mianowicie przyjmąwszy  $P=1$ , mamy z równ. 266.) dla  $\xi=0$

$S_2 = \frac{x}{h}$ , albo  $S_2' = S_2 h = x = ak = aa'$ . Dla  $\xi=l$  jest  $S_2 = \operatorname{st} \alpha$ , więc  $S_2' = h \operatorname{st} \alpha = bb'$ . Jeżeli  $a$  połączymy z  $b'$  i  $a'$  z  $b$ , otrzymamy punkt obojętny  $i$ . Prosta  $ak'$  odpowiada równ. 268).

Z rys. 173.) widzimy, że dodatni trójkąt wpływowy  $ak'b$  odpowiada wyrazowi  $\frac{P(l - \xi)x}{l}$  w rów. 266) i 268), zaś ujemny

trójkąt  $abb'$  wyrazowi  $-Hh = -\frac{P\xi h}{l} \operatorname{st} \alpha$  w równ. 266). Z tego łatwo poznamy, że punkt  $k'$  leży na paraboli, jak dla linii wpływowej momentów.

Jeżeli ciężary działają za pośrednictwem poprzecznic, to gdy spuścimy pionowe z  $E$  i  $F$ , otrzymamy  $e'$  i  $f'$ , a linia wpływowa będzie  $ae'f'ib' \dot{u}a$ .

Dla ciężaru własnego jest  $V_1 = V_2 = \frac{1}{2} gl$ ,  $H = \frac{1}{2} gl \operatorname{st} \alpha$ , więc

$$S_{2p} = \frac{gx(1-x)}{2h} - \frac{1}{2} gl \operatorname{st} \alpha \quad \dots \quad 269)$$

Nie zważając na poprzecznicę otrzymamy

$$\text{najw } S_{2p} = \frac{p}{h} \frac{1}{2} \xi_0 k_1 k' = \frac{p\xi_0}{2h} \left[ \frac{x(l-x)}{l} - \frac{xh \operatorname{st} \alpha}{l} \right], \text{ a wstawiwszy}$$

$$\text{wartość za } \xi_0 \text{ z równ. 267) najw } S_{2p} = \frac{px^2 l - x - x \operatorname{st} \alpha}{2h(x + h \operatorname{st} \alpha)} \quad 270)$$

Podobnie otrzymamy

$$\text{najw } (-S_{2p}) = -\frac{p}{h} \frac{1}{2} (l - \xi_0) h \operatorname{st} \alpha = -\frac{plh \operatorname{st}^2 \alpha}{2(x + h \operatorname{st} \alpha)} \quad 271)$$

Dla belki parabolicznej jest  $h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}$ . Jeżeli wsta-

wimy tę wartość w powyższe wzory, otrzymamy wzory dla siły wewnętrznej  $S_2$  wskutek ciężaru własnego i ruchomego i da się łatwo udowodnić, że, aby  $\text{najw } (-S_2) \geq 0$ , musi być

$$\text{st } \alpha < \frac{l}{4h_1} \sqrt{\frac{g}{g+p}} \dots \dots \dots 272)$$

Z równ. 269) widzimy nakoniec, że  $S_{2g} = 0$ , gdy  $\text{st } \alpha = \frac{x(l-x)}{hl}$ , a dla belki parabolicznej  $\text{st } \alpha = \frac{l}{4h_1}$ . . . . . 273)

a zatem, jeżeli ciężar własny niema sprawiać w pasie dolnym wcale żadnego ciągnięcia, powinno oddziaływanie  $O_2$  być styczne do pasu górnego, a zatem łożysko wałkowe ma być prostopadłe do pasu górnego w  $B$ .

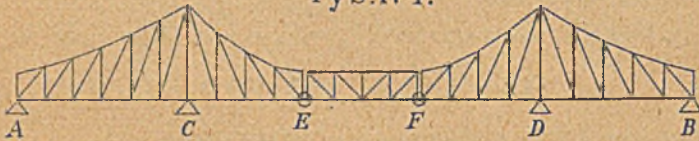
Siły wewnętrzne w pasie górnym i w kracie pozostają niezmiennie.

## XVII. Belka wspornikowa. (*Stützende Fachwerkträger*)

### §. 94. Belka dwupasowa.

W rozdziale VI mówiliśmy o belce ciągłej przegubowej. Może ona być blaszaną lub kratową. W ostatnim wypadku może być kratową równoległą lub wieloboczną. Dla obliczenia sił działających w belce blaszanej lub kratowej równoległej wystarczy wyznaczenie momentów i sił poprzecznych wedle rozdziału VI. Belkę

rys. 174.



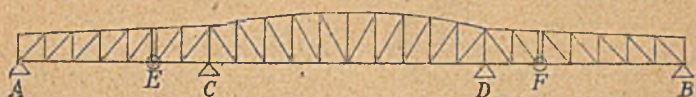
ciągłą przegubową wieloboczną nazywamy belką wspornikową (n. *Consolträger, Kragträger, Träger mit freischwebenden Stützpunkten*, a. *cantilever*, fr. *port à faux*, cz. *nosnik konsolowy, krakorcowy*) (rys. 174.). Przeguby mogą być przytem umieszczone albo w przęsłach skrajnych lub w środkowym, co częściej się zdarza.

Jeżeli belka jest równoległą, to siły wewnętrzne obliczamy wedle *najw M* i *najw Q*, o wyznaczeniu których mówiliśmy już w rozdz. VI (str. 77). Tu zastanawiać się będziemy tylko nad

belką wieloboczną. Siły wewnętrzne w pasach są wedle rów. 175)

$$S_1 = -\frac{M_1}{h_1} \text{ siecz } \sigma \text{ i } S_2 = +\frac{M_2}{h_2} \text{ siecz } \tau, \text{ a że } h, \sigma \text{ i } \tau \text{ są dla danej}$$

rys.175.

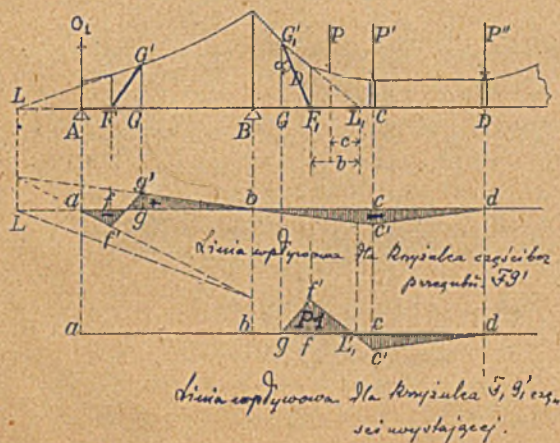


części pasu stałe, więc siły są proporcjonalne do momentów, linie wpływowe są takie same jak dla momentów. Chodzi więc jeszcze tylko o siły wewnętrzne w kracie.

### §. 95. Linie wpływowe dla sił wewnętrznych w kracie.

Jeżeli chodzi o krzyżulec  $FG'$  w przęśle bez przegubu, to linie wpływowe siły wewnętrznej w  $FG'$  w danym przęśle kre-

rys.176.



ślimy w sposób znany nam z §. 61. Jeżeli ciężar wychodzi poza  $B$  i znajduje się na długości  $BC$ , to otrzymujemy prostą  $bc'$  jako przedłużenie prostej  $g'b$ , bo siła poprzeczna równa się tu jak przedtem oddziaływaniu  $O_1$ ,

które otrzymujemy z tego samego równania, jak gdyby siła była na długości  $GB$ . Jeżeli siła znajduje się na  $CD$ , to rozkłada się według prawa linii prostej na siły  $P'$  i  $P''$  w  $C$  i  $D$ , zatem linia wpływowa będzie  $c'd$ .



Jeżeli chodzi o krzyżulec  $G_1'F_1$  w części wystającej, to jasną jest rzeczą, że siła  $P$ , znajdując się po lewej stronie  $G$ , nie sprawia w krzyżulcu żadnego nateżenia.

Jeżeli siła znajduje się na długości  $F_1C$ , to

$$D = Q \frac{c}{b} \text{ siecz } \alpha, \text{ więc } Y = Q \frac{c}{b} = P \frac{c}{b} \quad . \quad . \quad 274)$$

Dla  $c = 0$ ,  $Y = 0$ , dla  $c = b$ ,  $Y = P$ .

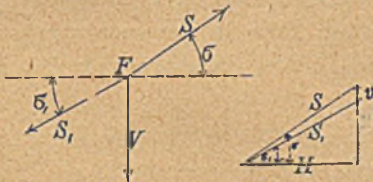
Aby więc wyznaczyć linię wpływową, robimy  $f' = P = 1$  i łączymy z  $L_1'$  aż do  $c'$ , kreślimy  $c'd$  i  $f'g$ .

### §. 96. Belki trzypasowe równoległe.

Belki wspornikowe mogą też być trzypasowe. Jeden pas ma kształt wieszaru, na nim zawieszona jest belka albo równoległa albo wieloboczna kratowa (rys. 177).

Na rysunku przyjęliśmy belkę równoległą i wyznaczyliśmy najprzód linię wpływową oddziaływania  $O_1$ , która jest w przęśle bez przegubu taka sama, jak dla belki zwykłej, w części wystającej jej przedłużeniem, a kończy się prostą  $c'd$ .

rys.178.



Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć siły wewnętrzne w pasie wieszarowym, to dla równowagi w punkcie  $F$  (rys. 178.) otrzymamy  $S$  dost  $\sigma = S_1$  dost  $\sigma_1 = H$  275)

Widzimy więc, że składowa pozioma sił wewnętrznych w pasie wieszarowym jest stała.

Gdy na belkę działa siła  $P=1$  w przęśle  $AB$ , to dla przekroju I-I otrzymamy ze względu na punkt  $B$

$$O_1 l - P(l-x) + S_0 h_1 \text{ dost } \sigma_0 = 0, \text{ stąd}$$

$$S_0 = \frac{P(l-x) - O_1 l}{h_1} \text{ siecz } \sigma_0.$$

Ale ponieważ  $O_1 l = P(l-x)$ , więc  $S_0 = 0$ . A zatem dla obciążenia przęsła bez przegubu siły wewnętrzne w pasie wiszącym są równe zeru.

Jeżeli siła  $P$  przekroczy punkt  $B$ , to

$$O_1 l + S_0 h_1 \text{ dost } \sigma_0 = 0, \text{ a stąd}$$

$$S_0 = - \frac{O_1 l}{h_1} \text{ siecz } \sigma_0, \text{ albo poniewa\z}z O_1 = \frac{l-x}{l} P,$$

$$S_0 = P \frac{x-l}{h_1} \text{ siecz } \sigma_0 = H \text{ siecz } \sigma_0. \quad . \quad . \quad 276)$$

więc

$$H = P \frac{x-l}{h_1} . . . . . 277)$$

Dla  $x = l$ ,  $H = 0$ , dla  $x = l + l_1$ ,  $H = P \frac{l_1}{h_1}$ .

Na tej podstawie wykreślamy linię wpływową w następnym sposobie. Robimy  $be = h_1$ ,  $ee' = P = 1$ , łączymy  $b$  z  $e'$ , to  $cc' = P \frac{l_1}{h_1}$ , wreszcie kreślimy  $c'd$ .

Przychodząc do słupów widzimy, że

$$S \text{ wst } \sigma - S_1 \text{ wst } \sigma_1 = V, \text{ (rys. 178), zatem}$$

$$H (\text{st } \sigma - \text{st } \sigma_1) = V . . . . . 278)$$

Wynika stąd, że linie wpływowe dla  $S_0$  i  $V$  są podobne do linii wpływowej dla  $H$ , otrzymamy je, jeżeli wykreślimy pomnożymy rzędne  $cc'$  przez siecz  $\sigma_0$ , względnie przez  $(\text{st } \sigma - \text{st } \sigma_1)$ .

### §. 97. Linie wpływowe pasów i krzyżuleców belki równoległej.

Ponieważ dla obciążenia przęsła  $AB$  (rys. 177) siła w pasie wieszarowym jest równa zeru, zatem linie wpływowe wszystkich prętów przęsła  $AB$  są na długości  $AB$  takie same, jak dla belki w dwu punktach podpartej.

Jeżeli chcemy wyznaczyć linię wpływową dla  $D_1$  w razie, gdy  $P$  przekroczy  $B$ , to dla przekroju I-I otrzymamy

$$D_1 \text{ dost } \alpha - S_0 \text{ wst } \sigma - O_1 = 0, \text{ stąd}$$

$$(D_1) = D_1 \text{ dost } \alpha = (O_1 + S_0 \text{ wst } \sigma) = P(x-1) \left( \frac{\text{st } \sigma}{h_1} - \frac{1}{1} \right) . \quad . \quad . \quad 279)$$

Dla  $x = l + h_1$  otrzymamy  $(D_1) = P \text{st } \sigma - \frac{P}{l} h_1$ , kreślimy  $ee' = 1$ ,  $e'e_2 \perp S_0$ , to  $ee_2 = P \text{st } \sigma$ . Dalej  $bf = l$ ,  $ff' = 1$ , to  $ee_1 = \frac{h_1}{l}$ , więc  $ee'' = ee_2 - ee_1 = P \text{st } \sigma - P \frac{h_1}{l} = (D_1)$ .

Jeżeli teraz przejdziemy do części wystającej i zechcemy wyznaczyć linię wpływową dla  $D_1'$ , to dla przekroju II-II możemy napisać jeżeli  $x - l > \xi_2$

$$D_1' \text{ dost } \alpha - S_0' \text{ wst } \sigma_0 + P = 0.$$

Stąd  $D_1' = -(P - S_0' \text{ wst } \sigma_0)$  siecz  $\alpha = -(P - H \text{ st } \sigma_0)$  siecz  $\alpha$

$$D_1' = -P \left( 1 - \frac{x-l}{h_1} \text{ st } \sigma_0 \right) \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 280)$$

$$(D_1') = D_1' \text{ dost } \alpha = -P \left( 1 - \frac{x-l}{h_1} \text{ st } \sigma_0 \right) \quad . \quad . \quad 281)$$

Widzimy więc, że rzędne linii wpływowej dla  $(D_1')$  składają się z różnicy rzędnych prostej poziomej w odległości  $P=l$  i prostej wyrażonej równaniem  $y = \frac{x-l}{h_1} \text{ st } \sigma_0$ . Dla  $x=l, y=0$ , dla  $x-l=h_1, y=\text{st } \sigma_0$ . Więc jednym punktem tej prostej jest  $b$ , drugi otrzymamy robiąc  $ee_1 = P=1$ , kreśląc  $e_1 m \perp S_0'$ ,  $ee_2 = em$ , to  $e_2$  jest tym drugim punktem, z czego wypływa podana na rysunku konstrukcja.

∞ Zastanówmy się teraz nad siłami w pasie średnim  $S_1$ . Dla obciążenia w przeszle  $AB$  jest linia wpływowa taka sama, jak dla belki zwykłej. Jeżeli  $P$  jest w drugim przeszle, to  $S_1 h + O_1 \xi_1 + H h' = 0$ , czyli  $S_1 h - P \frac{x-l}{l} \xi_1 + P \frac{x-l}{h_1} h' = 0$ , stąd

$$S_1 = P \frac{x-l}{h} \left( \frac{\xi_1}{l} - \frac{h'}{h_1} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 282)$$

Zróbmy  $x-l=h$ , to  $S_1 = P \left( \frac{\xi_1}{l} - \frac{h'}{h_1} \right)$ . W punkcie  $e$  możemy więc wyznaczyć rzędną, jeżeli wykreślnie wyznaczymy  $\frac{\xi_1}{l}$  i  $\frac{h'}{h_1}$  i utworzymy różnicę tych rzędnych  $= ee_1$ . Wykreślenie linii wpływowej nie podlega wtedy trudności.

∞ Dla przęsła  $BC$  otrzymamy ze względu na punkt  $E$ , jeżeli  $x-l > \xi_1'$ .

$$-S_1' h - H h'' + P(x-l - \xi_1') = 0, \text{ zatem}$$

$$-S_1' h - P \frac{(x-l) h''}{h_1} + P(x-l - \xi_1') = 0, \text{ stąd}$$

$$S_1' = \frac{P(x-l - \xi_1')}{h} - \frac{P(x-l) h''}{h h_1} \quad . \quad . \quad . \quad 283)$$

Według równ. 283.) są rzędne linii wpływowej różnicą rzędnych dwu prostych  $S_1' = y' - y''$ ,  $y' = P \frac{x-l - \xi_1'}{h}$ , więc dla  $x-l - \xi_1' = h$ , czyli  $x-l = \xi_1' + h$ , jest  $y' = P=1$ , dla  $x-l = \xi_1'$   $y' = 0$ . Zaś  $y'' = P \frac{(x-l) h''}{h h_1}$ . Dla  $x-l = h_1$ ,  $y'' = \frac{h''}{h}$ , dla  $x-l = 0$   $y'' = 0$ . Stąd łatwa konstrukcja, podana na rysunku.

~ Nakoniec mamy wyznaczyć jeszcze linie wpływowe dla pasu dolnego.

Dla siły  $S_2$  utworzymy równanie momentu ze względu na  $G$ , gdy siła  $P$  jest w drugim przęśle:

$$- S_2 h + O_1 \xi + H(h' - h) = 0, \text{ czyli}$$

$$S_2 h = P \frac{x-l}{h_1} (h' - h) + P \frac{l-x}{l} \xi.$$

Stąd 
$$S_2 = P \frac{x-l}{h} \left( \frac{h' - h}{h_1} - \frac{\xi}{l} \right) \dots \dots \dots 284)$$

Według równ. 284.) jest  $S_2 = y' - y''$ , przyczem

$$y' = P \frac{x-l}{h} \frac{h' - h}{h_1}. \text{ Dla } x-l = h, y' = P \frac{h' - h}{h_1}, y'' = P \frac{\xi}{l}.$$

Wykreślnie wyznaczamy więc  $\frac{\xi}{l}$  i  $\frac{h' - h}{h_1}$  i różnicę  $= mm'$  odcinamy dla  $x-l = h$ .

Dla przęsła  $BC$  otrzymamy ze względu na punkt  $G'$

$$S_2' h - H(h'' - h) + P(x-l - \xi') = 0,$$

$$S_2' h - P \frac{x-l}{h_1} (h'' - h) + P(x-l - \xi') = 0, \text{ stąd}$$

$$S_2' = P \left( \frac{(h'' - h)(x-l)}{h_1 h} - \frac{(x-l - \xi')}{h} \right) \dots \dots 285)$$

Równanie to jest zupełnie analogiczne do równ. 283.), stąd więc i konstrukcyja ta sama.

$$y' = \frac{h'' - h}{h_1} \frac{(x-l)}{h}, \text{ więc dla } x-l = h, y' = \frac{h'' - h}{h_1}, \text{ dla } x=l, y' = 0,$$

$$y'' = \frac{x-l - \xi'}{h}, \text{ więc dla } x-l = h + \xi' y'' = 1, \text{ dla } x-l = \xi' y'' = 0.$$

Według tego wykreśliliśmy linię wpływową na rysunku.

### §. 98. Belka trzypasowa wieloboczna.

Jeżeli zamiast belki równoległej zawiesimy belkę wieloboczną na pasie wieszarowym, otrzymamy belkę trzypasową wieloboczną, jak n. p. belkę mostu na Salzachu między Oberndorf a Laufen (rys. 179).

Wzory 275) do 278) pozostają tu te same, bo nie są one zależne od kształtu pasu średniego i dolnego, zmieniają się tylko linie wpływowe dla krzyżulców i pasów dolnego i średniego o tyle, o ile różnią się linie wpływowe dla belki wielobocznej



od linii dla belki równoległej. Nie podajemy tu tych linii, odsyłając czytelników do rozprawy Wacława Balickiego\*) w tym przedmiocie.

rys.179.



Zresztą linie wpływowe możemy też wykreślić sposobem ogólnym Müllera Breslaua, wyłożonym w §. 62 zapomocą dwu planów sił\*\*).

## E. Ugięcie belki.

### XVIII. Analityczne i wykresne wyznaczenie ugięcia.

#### §. 99. Ogólne uwagi.

Przy mostach nowo zbudowanych urządzamy zwykle próbę obciążenia i badamy wtedy ugięcie belki (n. *Durchbiegung*, fr. *deflection*) czyli pionowe przesunięcie poszczególnych punktów belki (węzłów) wskutek obciążenia. Próby takie obciążenia powtarza się w pewnych odstępach czasu, a wielkość ugięcia może nam dać pewne wskazówki co do dobroci roboty mostu, a później co do jego stanu. Mówimy tylko „pewne wskazówki“, bo ugięcie większe od obliczonego wskazuje nam, że natężenia są większe od obliczonych, a w niektórych prętach może przekroczyły granicę sprężystości; należy więc miejsce słabe wynaleść i je wzmocnić. Z drugiej strony jedno takie słabe miejsce tak mało wpływa na ugięcie ogólne, że nie da się istnienie jego po-

\*) Balicki: „Linie wpływowe dla belek trzypasowych wspornikowych“. „Czasopismo Techniczne“ 1903.

\*\*) Haberkalt podał w „Allg. Bauzeitung“ 1902 przy opisie mostu na Salzachu jeszcze trzeci sposób wyznaczenia linii wpływowych.

znać przy próbie obciążenia, a pomimo tego może być bardzo niebezpiecznym dla mostu. Próby obciążenia byłyby lepszą gwarancją wytrzymałości, gdyby do obciążenia przyjęto ciężar znacznie większy od obciążenia, dla którego belkę liczone. Tego się jednak zwykle nie robi przy mostach kolejowych z powodu trudności dostarczenia obciążenia większego, niż najcięższe parowozy, przy drogowych, aby zanedbano materiału nie natężyć. Przy próbach mostów drogowych kanału Dortmund-Ems użyto jednak piasku, ziemi i kamieni w ten sposób, aby największy moment był o 30% przekroczony. Wyznaczenie ugięcia mostu jest także z tego powodu pożyteczne, że za pomocą ugięcia dają się wyznaczyć oddziaływania w belkach statycznie niewyznaczalnych, o czem mówić będziemy w następnym tomie.

Na niedokładności pomiarów ugięcia ma wpływać trudność wyznaczenia prawdziwego ciężaru obciążenia przy zmiennej wilgotności i zmiennej gęstości i zmiana ciepłoty powietrza podczas 1 do 3 dni potrzebnych do próby.

O wartości prób obciążenia mostów żelaznych J. E. Robertson, naczelnik biura technicznego kolei egipskich\*) wyrażając się ujemnie, podaje na udowodnienie swych zapatrywań fakt następujący: Most na Nilu pod Embabek obok Kairu próbowano w r. 1892 obciążając pięciu parowozami. W roku 1896 przerwała się blacha stojąca pasu górnego mostu ruchomego przy środkowym filarze. Wymieniono tę blachę na silniejszą, poddano próbie i oddano do użytku. W miesiąc później pękł dźwigar drugi zupełnie na tem samym miejscu. Jestto jeden dowód więcej, że próby obciążenia robione w ten sposób, jak dotychczas, są bezpożyteczne.

Ugięcie może być trwałe (n. *bleibend*) albo sprężyste. Trwałe powstaje wskutek małych przesunięć, wżarcia się stykających przekrojów i błędów wykonania i okazuje się tylko przy pierwszym obciążeniu mostu. Ugięcie trwałe, okazujące się dopiero przy następnych próbach, wskazywałoby na przekroczenie granicy sprężystości. Ugięcie sprężyste (n. *elastisch*) po ustaniu obciążenia znika. To ugięcie będziemy się starali obliczyć zwłaszcza, że obliczenie to jest potrzebne do porównania wyników próby z ugięciem obliczonym.

---

\*) Por. Z. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 1898 str. 13.

Austryackie rozporząd. minister. z. r. 1887 §. 8. a) Nowo wybudowane mosty należy przed oddaniem ich ruchowi kolejowemu przez komisją zbadać i wypróbować... Zarząd kolejowy powinien... zaopatrzyć podanie w następujące załączniki:

1. Schematyczny szkic pociągów, które mają być użyte do próby, a które winny, ile możności, wywołać te same momenty, jak w §. 3. względnie §. 6.) obciążenia normowane. Pociągi te muszą się składać w miarę rozpiętości 15,0 m, 25,0 m albo ponad 25,0 m dla każdego toru z jednego dwu lub trzech zupełnie opatrzonych najcięższych parowozów, jakie na odnośnej kolei są w użyciu, jakoteż wozów ciężarowych, potrzebnych do zajęcia największego przęsła, a obciążonych zupełnie aż do przepisanej granicy obciążenia.

2. Obliczenie obciążeń, osiągniętych pociągiem próbnym dla poszczególnych rozpiętości, wyrażone w procentach przepisanego obciążenia, jakoteż wykaz obliczonych dla pociągu próbnego największych sprężystych odkształceń...

§. 9. b) Do prób z obciążeniem stałym należą pociągi próbne, o których była mowa w §. 8. lit. a), stopniowo postawić w położenie najniekorzystniejsze dla belek mostowych i w każdym z tych położen należy je tak długo pozostawić, póki dalsze odkształcenia nie dają się już spostrzegać.

Przy belkach w dwu punktach podpartych wystarcza badać most przy stopniowym obciążeniu połowy i całego przęsła.

c) Do zrobienia próby obciążeniem ruchomem należy najpierw przejechać most po każdym torze z chyżością około 20 km na godzinę pociągiem próbnym, który należy zestawić w myśl zarządzenia, zawartego w §. 8 lit. a) ustęp 1, a który składać się ma jednakowoż z dwóch parowozów.

Następnie powinna odbyć się na każdym torze z tymże samym pociągiem jazda pospieszna z chyżością 40 do 50 km na godzinę; te jazdy pospieszne można też później przedsiębrać w razie, gdyby mury albo nawierzchnia nie ułożyły się jeszcze dostatecznie.

§. 11. Peryodyczne badania: a) Zarządy kolejowe mają obok obowiązkowego stałego nadzoru przedsiębrać przynajmniej co 6 lat peryodyczne badania i próby mostów w myśl postanowień §. 9. lit. b) i d).

§. 17. a) Wybudowane przejazdy nad koleją i mosty na drogach dojazdowych należy w każdym razie zbadać komisyjnie... W tym celu należy odnieść się do c. k. generalnej inspekcji austryackiej kolei, a władza ta rozstrzygnie..., czy należy przedsięwziąć obok wyż wymienionego badania także obciążenie próbne.

b) Wybudowane mosty należy i nadal przynajmniej co 6 lat peryodycznie badać, względnie próbować.

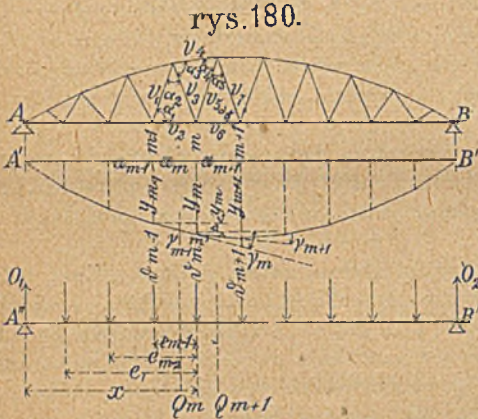
## §. 100. Wyznaczenie analityczne ugięcia belki.

*zapomocą ciżarów sprężystych ułożonych*  
*symultann. przesłania*

Najczęściej jeden pas belki kratowej jest prosty. Wyznamy więc analitycznie ugięcie belki w tym wypadku, gdy pas

dolny jest prosty i pójdziemy przytem za wskazówkami Müllera Breslaua \*).

Przypuśćmy, że dla pewnego obciążenia pas dolny prosty  $AB$  (rys. 180) ugnie się i przybierze kształt wieloboku  $A'm'B'$ .



rys.180.

Niech  $y_{m-1}, y_m, y_{m+1}$  będą ugięcia czyli pionowe przesunięcia węzłów  $m-1, m, m+1$  itd. Kąty nachylenia boków wieloboku ugięcia do poziomu nazwijmy  $\gamma$ , a kąty między dwoma następującymi bokami tego wieloboku  $\vartheta$ , to możemy

napisać  $\frac{\Delta y_m}{a_m} = \text{st } \gamma_m$ ,  
 $\frac{\Delta y_{m+1}}{a_{m+1}} = \text{st } \gamma_{m+1}$ .  $\vartheta_m = \gamma_m - \gamma_{m+1}$ . A ponieważ

waż te kąty są bardzo małe, więc możemy napisać  $\vartheta_m = \text{st } \gamma_m - \text{st } \gamma_{m+1} = \frac{\Delta y_m}{a_m} - \frac{\Delta y_{m+1}}{a_{m+1}}$ , a wreszcie

*Müller Breslau zmiast Dm używa literę Wm stał uwarunek w. D. zwilża*

$$\vartheta_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{a_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{a_{m+1}} \dots \dots \dots 286)$$

Załóżmy teraz, że we wszystkich węzłach pasu dolnego działają siły  $\vartheta_{m-1}, \vartheta_m, \vartheta_{m+1}$  itd., które wywołują oddziaływania  $O_1$  i  $O_2$ . Obliczmy siły poprzeczne i momenty, to widzimy, że  $Q_{m+1} = Q_m - \vartheta_m$ , więc  $\vartheta_m = Q_m - Q_{m+1} \dots \dots \dots 287)$

Dalej mamy moment w  $m$   $M_m = O_1 x - \sum_1^{m-1} \vartheta e$ , zaś moment w  $m-1$   $M_{m-1} = O_1 (x - a_m) - \sum_1^{m-1} \vartheta (e - a_m)$ , a więc  $M_m - M_{m-1} = O_1 a_m - a_m \sum_1^{m-1} \vartheta = a_m (O_1 - \sum_1^{m-1} \vartheta) = a_m Q_m$ .

A zatem  $Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{a_m}$ , a podobnie  $Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{a_{m+1}}$ .

\*) Müller Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen. Lipsk 1904 str. 36 i następ. Tam podany jest także analogiczny sposób obliczenia ugięcia w razie, gdy pas na którym leży pomost, jest wieloboczny.

\* \* Swindrenia. Palleprou. Dr. Thallie. Statyka Bauwerke str. 24.

Wstawivszy te wartości w równ. 287) otrzymamy

$$\vartheta_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{a_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{a_{m+1}} \quad \dots \quad 288)$$

Równanie 288) ma zupełnie ten sam kształt, co równ. 286) tylko, że zamiast  $y$  tu wszędzie znajduje się  $M$ . Z tego wynika, że jeżeli przypuścimy, że w węzłach pasu dolnego działają siły  $\vartheta$  i dla tego obciążenia pomyślanego obliczymy w każdym węzle moment  $M$ , to moment ten  $M$  przedstawia zarazem ugięcie  $y$  odnośnego węzła. Twierdzenie to da się inaczej tak wypowiedzieć. Wielobok ugięcia pasu prostego belki kratowej da się przedstawić jako wielobok sznurowy dla belki  $AB$ , obciążonej ciężarami  $\vartheta_{m-1}, \vartheta_m, \vartheta_{m+1} \dots$

rys. 181



Chodzi jeszcze teraz tylko o wyznaczenie kątów  $\vartheta$ , jakie tworzą następujące po sobie boki wieloboku ugięcia. Aby kąt ten wyznaczyć, obliczamy zmianę kątów w danym trójkącie  $ABC$  (rys. 181) po odkształceniu. Z rysunku wynika  $c_1 = c_2$  dost  $\alpha_3 + c_3$  dost  $\alpha_2$ , a zatem  $\Delta c_1 = \Delta c_2$  dost  $\alpha_3 - c_2$  wst  $\alpha_3$   $\Delta \alpha_3 + \Delta c_3$  dost  $\alpha_2 - c_3$  wst  $\alpha_2$   $\Delta \alpha_2$  albo  $\Delta c_1 = \frac{\Delta c_2}{c_2} c_2$  dost  $\alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} c_3$  dost  $\alpha_2 - h (\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3)$ . . . . 289)

Wiemy, że  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$ , więc  $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = 0$ , zatem  $\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = -\Delta \alpha_1$ . Dalej z rysunku wynika, że  $c_2$  dost  $\alpha_3 = h$  dot  $\alpha_3$ ,  $c_3$  dost  $\alpha_2 = h$  dot  $\alpha_2$ .

Wstawivszy to w równ. 289), otrzymamy

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta c_2}{c_2} h \text{ dot } \alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} h \text{ dot } \alpha_2 + h \Delta \alpha_1,$$

a więc 
$$\Delta \alpha_1 = \frac{\Delta c_1}{c_1} \cdot \frac{c_1}{h} - \frac{\Delta c_2}{c_2} \text{ dot } \alpha_3 - \frac{\Delta c_3}{c_3} \text{ dot } \alpha_2 \quad \dots \quad 290)$$

Jeżeli nateżenie, wywołane danem obciążeniem w prętach  $c_1, c_2$  i  $c_3$  nazwiemy  $v_1, v_2$  i  $v_3$ , a  $\varepsilon$  współczynnik sprężystości,

to wiemy, że 
$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{v_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\Delta c_2}{c_2} = \frac{v_2}{\varepsilon}, \quad \frac{\Delta c_3}{c_3} = \frac{v_3}{\varepsilon} \quad \dots \quad 291)$$

Dalej wynika z rysunku, że  $\frac{c_1}{h} = \text{dot } \alpha_2 + \text{dot } \alpha_3$ .

Wstawiliśmy to w równ. 290) i pomnożywszy przez  $\varepsilon$ , otrzymamy  $\varepsilon \Delta \alpha_1 = v_1 \text{ dot } \alpha_2 + v_4 \text{ dot } \alpha_3 - v_2 \text{ dot } \alpha_3 - v_3 \text{ dot } \alpha_2$ ,

albo wręście  $\varepsilon \Delta \alpha_1 = (v_1 - v_3) \text{ dot } \alpha_2 + (v_4 - v_2) \text{ dot } \alpha_3$  . . . 292)

Chcąc teraz wyznaczyć  $\vartheta_m$ , zastosujemy to równanie do trzech trójkątów, mających wspólny wierzchołek w  $m$  (rys. 180), a otrzymamy

$$\varepsilon \vartheta_m = (v_1 - v_2) \text{ dot } \alpha_1 + (v_1 - v_3) \text{ dot } \alpha_2 + (v_4 - v_3) \text{ dot } \alpha_3 + (v_4 - v_5) \text{ dot } \alpha_4 + (v_7 - v_5) \text{ dot } \alpha_5 + (v_7 - v_6) \text{ dot } \alpha_6 \quad 293)$$

*Tabl. VI.* Przykład. Wyznamy ugięcie belki Schwedlera, którąśmy obliczyli w §. 88, przypuszczając, że most obciążony jest trzema szeregami wozów w ten sposób, że tylne koła wozów stoją na 4 (tabl. VI). W tym punkcie działa więc ciężar 9 t, inne ciężary 9 t i 2,25 t musimy rozłożyć na ciężary węzłowe i otrzymamy

w węzłach	1	2	3	4	5	6	7	B
	1,89	5,04	4,32	9,0	0,63	1,62	1,89	0,36 t.

$$\text{Oddziaływanie } O_1 = \frac{1}{10} [9(10 + 13,8) + 2,25(17,1 + 5,7 + 2,1)] = 13,51 t,$$

Na podstawie tych ciężarów węzłowych i oddziaływań wyznaczymy w jakikolwiek sposób siły wewnętrzne we wszystkich prętach. Tu uskutecziliśmy to wykreślnie zapomocą planu sił i otrzymaliśmy następujące wyniki:

Pręt	Siła wewnętrzna	przekrój	natężenie $\nu$	długość $l$	przedłużenie $\Delta l$	Pręt	siła wewnętrzna	przekrój	natężenie $\nu$	długość $l$	przedłużenie $\Delta l$
0 I	-23,5	120	-196	306	-0,30	7 8	+19,7	85	+232	250	+0,29
I II	-25,2	120	-210	265	-0,28	1 I	+1,9	22	+86	176	+0,08
II III	-26,5	120	-221	252	-0,28	I 2	+5,5	20	+275	306	+0,42
III IV	-28,1	125	-225	250	-0,28	2 II	+2,0	16	+125	265	+0,16
IV V	-28,1	125	-225	250	-0,28	II 3	+3,8	22	+173	355	+0,31
V VI	-22,5	120	-186	252	-0,24	3 III	+1,3	16	+81	300	+0,12
VI VII	-19,4	120	-162	265	-0,22	III 4	+3,1	20	+155	391	+0,30
VII B	-18,3	120	-153	306	-0,23	4 IV	0	14	0	300	0
0 1	+19,2	85	+214	250	+0,27	4 V	+8,8	20	+440	391	+0,86
1 2	+19,2	85	+214	250	+0,27	V 5	-3,8	16	-238	300	-0,35
2 3	+23,6	95	+248	250	+0,31	5 VI	+6,0	22	+273	355	+0,48
3 4	+26,2	100	+262	250	+0,3	VI 6	-0,6	16	-38	265	-0,04
4 5	+22,4	100	+224	250	+0,28	6 VII	+4,1	20	+205	306	+0,31
5 6	+23,3	95	+245	250	+0,31	VII 7	+1,9	22	+86	176	+0,08
6 7	+19,7	85	+232	250	+0,39						

W trzecim rzędku tabliczki podaliśmy przekroje rzeczywiste bez odciążenia dziur, gdyż dziury sprawiają tylko miejscowe większe natężenia bez znacniejszego wpływu na odkształcenia pręta. Czwarty i piąty rząderek potrzebny nam będzie później przy wykreślnem wyznaczeniu ugięcia.

Następnie obliczyliśmy dotychczasowe kąty wszystkich u górnego pasu i naznaczyliśmy je na rys. 1. tablicy.//.

$\epsilon S_m$  obliczamy na podstawie rów. 293) i otrzymamy

$$\epsilon S_1 = (-196 - 214) 1,42 + (-196 - 86) 0,70 + (275 - 86) 0,70 + (275 + 86) 0,70 + (275 - 214) 1,42 = -551 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_2 = (86 - 275) 0,70 + (-210 - 275) 0,71 + (-210 - 125) 0,35 + (173 + 125) 1,06 + (173 - 248) 0,94 = -616 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_3 = (125 - 173) 1,06 + (-221 - 173) 0,71 + (-221 - 81) 0,14 + (155 + 81) 1,20 + (155 - 262) 0,83 = -372 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_4 = (81 - 155) 1,20 + (-225 - 155) 0,83 + (-225 - 440) 0,83 + (-230 + 440) 1,20 = -1584 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_5 = (440 - 224) 0,83 + (440 + 230) 1,2 + (-186 + 230) 0,14 + (-186 + 273) 0,71 + (-38 - 273) 1,06 = +148 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_6 = (273 - 245) 0,94 + (273 + 38) 1,06 + (-162 + 38) 0,35 + (-162 + 205) 0,71 + (86 - 205) 0,70 = -31 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_7 = (205 - 86) 0,7 + (205 - 232) 1,42 + (-153 - 86) 0,70 + (-153 + 232) 1,42 = -669 \text{ kg/cm}^2.$$

Kąty  $S$  uważamy jako siły w  $kg$  ze znakiem przeciwnym, bo tu — oznacza kierunek na dół.

Otrzymamy wtedy  $\epsilon O_1 = \frac{1}{2}(551 \cdot 7 + 616 \cdot 6 + 372 \cdot 5 + 1584 \cdot 4 - 148 \cdot 3 + 31 \cdot 2 + 669 \cdot 1) = 2004 \text{ kg/cm}^2$ .

Stąd otrzymamy momenty i ugięcia:  $\epsilon M_1 = 2004 \cdot 250$ , więc  $M_1 = 2004 \cdot \frac{250}{1000000} = 2004 \cdot \frac{1}{4000} = 0,25 \text{ cm} = y$ .

Dalej otrzymamy  $M_2 = \frac{1}{80000}(2004 \cdot 2 - 551) = 0,42 \text{ cm} = y_2$ , a podobnie także  $M_3 = 0,54 \text{ cm} = y_3$ ,  $M_4 = 0,59 \text{ cm} = y_4$ ,  $M_5 = 0,45 \text{ cm} = y_5$ ,  $M_6 = 0,33 \text{ cm} = y_6$ ,  $M_7 = 0,21 \text{ cm} = y_7$ .

Obliczenie powyższe ugięcia jest dość żmudne. Jeżeli chodzi o szybkie wyznaczenie ugięcia przybliżone, to możemy wedle Steinera\*) użyć wzoru znanego dla belki o przekroju stałym\*\*), przyjąwszy tylko inną stałą  $C$ . Mamy wtedy ugięcie

$$f = C \frac{pl^4}{\epsilon J} \dots \dots \dots 294)$$

Dla przekroju stałego jest  $C = \frac{5}{384} = 0,013021$ .

Dla belki zaś parabolicznej niezbieżnej oblicza Steiner następującą tabliczkę dla  $C$ .

$\frac{h_0}{h_1}$	$C$	$\log C$
0	0,021661	8,335675 — 10
0,1	0,019925	8,299392
0,2	0,019004	8,278854
0,3	0,018318	8,262872

\*) P. Steiner: Zur Berechnung der Durchbiegung frei aufliegender Brückenträger. Zeit. des österr. Ing. und. Arch. Verein. 1892 str. 566.

\*\*) Por. Podr. Statyki Budowli, II wyd., str. 249 równ. 388.

$\frac{h_0}{h_1}$	$C$	$\log C.$
0.4	0.017762	8.249483
0.5	0.017291	8.237818
0.6	0.016882	8.227414
0.7	0.016518	8.217970
0.8	0.016192	8.209310
0.9	0.015897	8.201306
1.0	0.015625	8.193820

Przy obliczeniu nie uwzględniono jednak wpływu kraty. Aby tę okoliczność uwzględnić po części, lepiej we wzorze 294) przyjmować  $J$  po odciążeniu dziur na nity.

### §. 101. Wyznaczenie wykreślne ugięcia belki kratowej.

W Podręczniku Statyki Budowli\*) mówiliśmy o wykreślnem wyznaczeniu ugięcia belki o ściance pełnej zapomocą wieloboku sznurowego, teraz podamy tylko sposób wykreślnego wyznaczenia ugięcia belki kratowej według Williota.

Zasada wykreślnego wyznaczenia ugięcia jest bardzo prosta. Gdy belkę obciążymy w dany sposób, powstają wskutek tego we wszystkich prętach nateżenia, które, jak wiadomo, dadzą się łatwo wyznaczyć zapomocą planu sił, jeżeli znamy przytem przekroje prętów. Znając nateżenia, łatwo obliczymy zmianę długości  $\Delta l$  prętów według wzoru  $\Delta l = \frac{lp}{\epsilon A} = \frac{lv}{\epsilon}$  . . . 295)

jeżeli  $l$  i  $A$  oznaczają długość i przekrój pręta,  $P$  siłę wewnętrzną a  $\epsilon$  współczynnik sprężystości. Jeżeli wykreślimy teraz belkę na podstawie zmienionych w ten sposób długości prętów, otrzymamy ugiętą belkę.

Ale te przedłużenia i skrócenia prętów są bardzo małe n. p. dla  $l = 600 \text{ cm}$ ,  $\nu = 600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\epsilon = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ , otrzymamy z równ. 295)  $\Delta l = \frac{600 \cdot 600}{2000000} = 0,18 \text{ cm} < 2 \text{ mm}$ . Przedłuże-

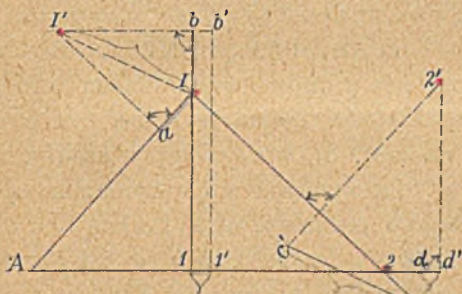
nia te lub skrócenia wynoszą więc najwięcej około 2 mm. Otóż gdybyśmy wykreślili ugiętą belkę nawet w bardzo wielkiej podziałce, otrzymalibyśmy prawie zupełnie taki sam kształt belki, jak przed ugięciem.

\*) 2 wyd. str. 261 i następne.



Aby odkształcenie belki uczynić widocznem, musimy przyjąć dla odkształceń  $\Delta l$  inną podziałkę, kreślimy je w naturalnej wielkości lub jeszcze większe. Przy kreśleniu nowego kształtu belki musimy jednak zachować jeszcze pewną ostrożność, mianowicie, kreśląc poszczególne trójkąty, nie możemy zataczać łuków długościami  $l \pm \Delta l$  właśnie z powodu różnych podziałek, *Rozprzestwienie*

rys. 182.



boków, co ze względu na bardzo małe kąty obrotu a wielkie promienie możemy śmiało uczynić. *Planu obrotu*

Przypuśmy na chwilę, że pręt  $AI$  (rys. 182.) nie zmienia swego położenia, tylko przedłuży się o  $11'$ , niechaj pręt  $AI$  skróci się o  $Ia$ , a pręt  $1I$  przedłuży się o  $Ib$ .

Z powodu przesunięcia się węzła  $1$  o  $11'$  musi się przesunąć też koniec pręta  $b$  o  $bb' \parallel 11'$ . Zatochmy teraz łuki z punktów  $A$  i  $1'$ , a raczej wykreślimy prostopadłe do odnośnych prętów  $aI' \perp AI$  i  $b'I' \perp 1I$ , a punkt ich przecięcia się  $I'$  wyznacza nam położenie nowego punktu  $I$ .

Niechaj będą  $2c$  i  $2d$  przedłużenia prętów  $I2$  i  $12$ , to musimy uwzględnić także przesunięcia początkowych punktów odnośnych prętów. Kreślimy więc  $cc' \parallel 11'$  i  $dd' \parallel 11'$ . Z punktów  $c'$  i  $d'$  kreślimy teraz prostopadłe  $c'2' \perp I2$  i  $d'2' \perp 12$ , a punkt ich przecięcia się  $2'$  wyznacza nam nowe położenie punktu  $2$ .

W ten sposób postępując możemy wyznaczyć położenie wszystkich węzłów (tabl. VI. rys. 5.), przyczem, jeżeli punkt  $B'$  nie wpada na podporę (jak n. p. tutaj), musimy belkę obrócić o kąt  $\alpha = BAB''$ , aby sprowadzić belkę na łożysko.

Aby więc wynaleść prawdziwe położenie jakiegoś punktu n. p. III po ugięciu, musimy przesunąć punkt  $III'$  o długość  $y = \frac{A III}{AB} BB''$  prostopadłe na  $A III$ , jako na promieniu obrotu.

Robimy więc  $Ae = A III$ , kreślimy  $ee' \perp AB$ , to  $ee' = \frac{Ae}{AB} BB'' = y$ .

Kreślimy zatem prostopadle do  $A III III' III'' = ee'$  i otrzymujemy  $III''$  jako prawdziwe położenie punktu  $III$  po ugięciu. Na rysunku zrobiliśmy to samo z innymi punktami i połączyliśmy poszczególne węzły prostymi. Otrzymaliśmy w ten sposób kształt ugiętej belki w spazzonej podziałce t. z., że tylko przesunięcia poszczególnych węzłów otrzymaliśmy w tej podziałce, w jakiej wykreśliliśmy odkształcenia. Kierunki jednak boków nie są prawdziwe z powodu użycia dwu różnych podziałek.

*Przyjmujemy podziałkę  
Przyjmujemy podziałkę  
pau.*

Powyższym sposobem wykreślonym wyznaczamy równocześnie poziome i pionowe przesunięcia wszystkich węzłów, podczas gdy sposobem analitycznym Müllera Breslaua wyznaczaliśmy tylko przesunięcia pionowe węzłów pasu dolnego.

*Wzrost obciążenia  
Zmniejszenie „  
Reakcji.*

Jeżeli belka jest symetryczna i symetrycznie obciążona, sposób ten znacznie się upraszcza, bo wtedy słup w środku rozpiętości pozostaje pionowym. Zaczynając więc konstrukcją od tego słupa i przyjmując go jako pionowy, otrzymujemy od razu belkę w należytem położeniu i nie potrzebujemy jej już obracać. Jeżeli belka niema słupa w środku rozpiętości, to środkowa część pasu dolnego lub górnego pozostanie po ugięciu pozioma, ten więc kierunek przyjmujemy jako stały.

Przykład. Na tabl. VI. wyznaczaliśmy wykreślnie ugięcie takiej samej i tak samo obciążonej belki Schwedlera, dla której obliczyliśmy ugięcia sposobem Müllera Breslaua. Na rys. 2. i 3. wykreśliliśmy wielobok sił i wielobok sznurowy dla obciążenia danego, w rys. 4. plan sił, rozłożywszy wszystkie ciężary na ciężary węzłowe. I tak n. p. zrobiliśmy  $2u = 9t$  i połączyliśmy z 3, to  $uw$  oznacza składową ciężaru  $9t$  działającą w 2, a  $(2n - uw)$  składową, działającą w 3. Tym sposobem otrzymaliśmy siły wewnętrzne, zestawione w tabliczce, umieszczonej w poprzednim paragrafie. Na podstawie równ. 295) obliczyliśmy dla wszystkich prętów przedłużenia i skrócenia, zestawione także w tej tabliczce. Przedłużenia te i skrócenia poszczególnych prętów oznaczyliśmy w rysunku w podziałce  $\frac{5 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$  i przyjąwszy tymczasowo kierunek boku  $A 1$  jako stały, otrzymaliśmy ugiętą belkę  $AB'$ .

Aby punkt  $B'$  sprowadzić na podporę, obróciliśmy belkę o kąt  $\alpha$  i otrzymaliśmy ostatecznie ugiętą belkę  $AB''$ . W ten sposób otrzymaliśmy pionowe i poziome przesunięcia węzłów. Największe pionowe przesunięcie, największe ugięcie czyli strzałkę belki otrzymamy z rysunku w punkcie IV równą  $6,3 \text{ mm}$ , największe przesunięcie poziome  $2,7 \text{ mm}$ . Porównując ten wynik z wynikiem liczebnym widzimy, że różnica, pochodząca z niedokładności rysunku wynosi mniej, niż  $\frac{1}{4} \text{ mm}$ . W praktyce więc sposób wykreślny daje wyniki z dokładnością zupełnie wystarczającą.

### §. 102. Dokładność wyznaczenia ugięcia.

Przy obliczeniu ugięcia mostów kratowych przypuszczaliśmy dotychczas, że niema prętów nadliczbowych, że pręty są połączone przegibnie bez tarcia, że wszystkie części mostu mają ten sam współczynnik sprężystości i nie uwzględnialiśmy nagromadzenia materiału w węzłach. Otóż uwzględnienie prętów nadliczbowych, stałych połączeń prętów, a zwłaszcza nagromadzenia materiału w węzłach może wywołać w wynikach tak wielkie różnice, że wskutek tego mniemana dokładność metody staje się zupełnie zwodniczą. Co się tyczy współczynnika sprężystości  $\epsilon$ , to nie mamy zwykle przy obliczeniu ugięcia mostu żadnych pewniejszych danych, bo przepisane próby wytrzymałości materiału nie żądają u nas zwykle wyznaczenia współczynnika sprężystości  $\epsilon$ , jakto się dzieje w Ameryce. Byłoby pożądanem, aby warunki dostawcze zawierały pod tym względem żądanie ograniczenia zmian wielkości współczynnika sprężystości. Obecnie liczyć możemy ugięcia tylko dla stałego  $\epsilon$ . Wykonane przekroje są najczęściej nieco większe od projektowanych. Wedle warunków dostawczych dopuszcza się różnicę 3%, o tyle jest też ugięcie mniejsze od obliczonego. Nagromadzenie materiału w węzłach sprawia zmniejszenie natężeń, a przeto i odkształceń. To da się w każdym wypadku przynajmniej w przybliżeniu obliczyć. Trudniejszym już jest uwzględnienie stężenia pasów przez pomost. Inż. Labes oblicza\*) wpływ tych wszystkich okoliczności na ugięcie na przykładzie i otrzymuje ugięcie o 17% mniejsze. Obliczenie to jest nadzwyczaj żmudne, nie można więc w praktyce żądać, aby w ten sposób obliczać ugięcia wszystkich mostów. Możliwoby jednak obliczwszy w ten sposób szereg mostów wyznaczyć pewne współczynniki, przez któreby należało pomnożyć wyniki, uzyskane w zwykły sposób, aby uzyskać wyniki dokładne.

Z powyższego widzimy, że rzeczywiste ugięcie będzie zawsze mniejsze od obliczonego.

\*) Por. Centr. d. Bauverw. 1894.

## D O D A T E K.

### Literatura.

Podajemy tu w chronologicznym porządku spis podręczników teorii mostów, niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.

Becker: *Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften*. 2 tom. *Der Brückenbau*. Stuttgart 1854, 4 wyd. 1873.

Rebhann: *Theorie der Holz und Eisenconstructionen*. Wiedeń 1856.

Laissle i Schübler: *Der Bau der Bruckerträger*. Stuttgart 1857, 4 wyd. 1876.

Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.

Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część. Paryż 1862.

Scheffler: *Über Gitter und Bogenträger*. Brunszwik 1862.

Culmann: *Graphische Statik*. Zurych. 1 wyd. 1866, 2 wyd. 1875.

Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.

Ritter: *Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenconstructionen*. 1870.

Heinzerling: *Die Brücken der Gegenwart*. Akwisgran 1873—1885.

Levy: *La statique graphique*. 1 wyd. 1874, 2 wyd. 1886—1886.

Jay du Bois: *The elements of graphical statics*. Nowy Jork 1875—1877.

Tetmajer: *Die äusseren und inneren Kräfte*. Zurych 1875.

Winkler: *Die Durchbiegung der Gitterträger*. *Technische Blätter* 1876.

Williot: *Notions pratiques sur la statique graphique*. Paryż 1877.

Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1877—1880.

Loewe: *Grundzüge zu Vorlesungen über eiserne Balkenträger*. Mnichów 1877.

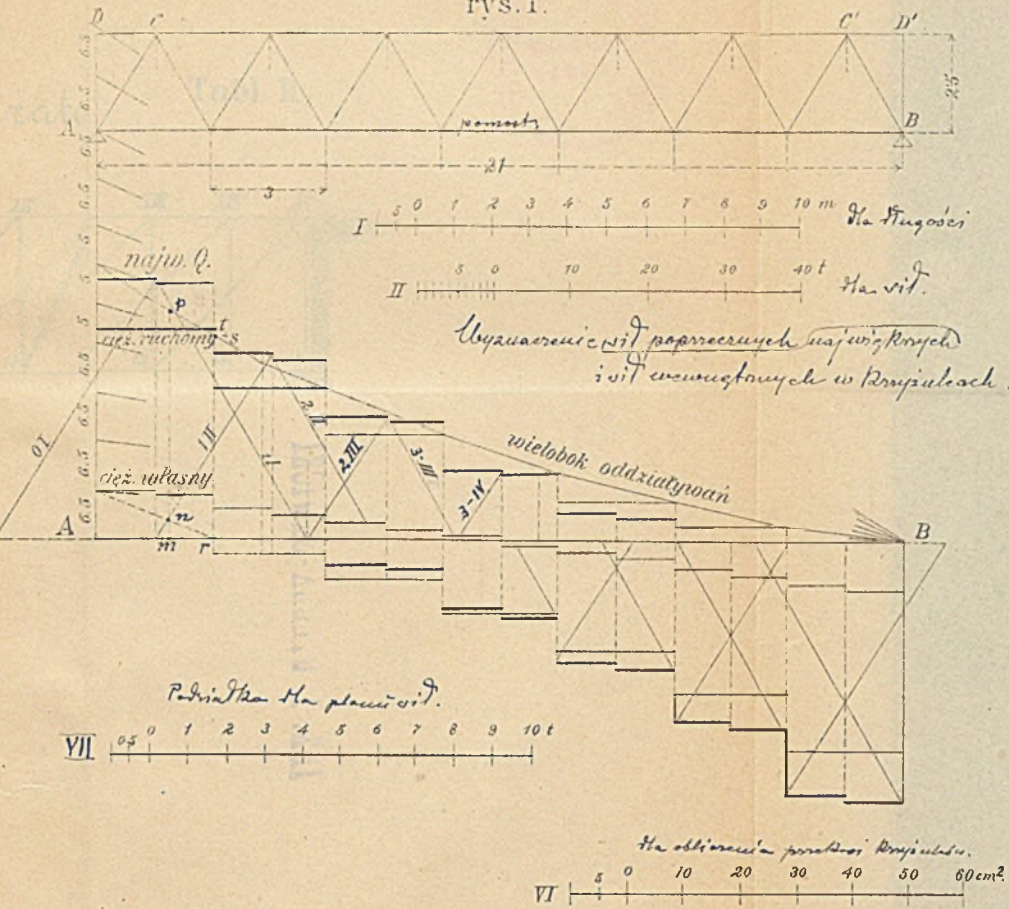
Zimmermann: *Das Momentenschema*. *Zeitschr. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1877.

- Böhlk: *Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Öffnung.* Hanower 1877.
- Thullie: O krzywych influencyjnych i ich zastosowaniu do wyznaczania graficznego sił, działających w zwykłej belce kratowej. Dźwignia 1878.
- Šolin: *Analytische Bestimmung des absoluten Maximalmomentes* *Woch. d. öst. Ing. u. Arch. Ver.* 1878.
- Hermansky: *Die elastische Durchbiegung eiserner Fachwerke.* *Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Verein.* 1878.
- Krohn: *Resultate aus der Theorie des Brückenbaues und deren Anwendung. I. Theil. Balkenbrücken.* Akwisgran 1879.
- Holzhey: *Vorträge über Baumechanik.* Wiedeń 1879.
- Foeppl: *Theorie der Fachwerkes.* Lipsk 1880.
- Melan: *Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerksträger mit Zugrundelegung des Principes der Influenzcurven.* *Zeit. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1880.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses.* Nowy York 1880.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaften.* 2 tom: *der Brückenbau.* Lipsk 1880. 2 wyd. 1886—1889.
- Stelzel: *Theorie einfacher statisch bestimmter Brückenträger.* Wiedeń 1880.
- Thullie: Oznaczenie sił, działających w belce ciągłej przegubowej zapomocą linii wpływowych. Dźwignia 1881.
- Chalmers: *Graphical determination of forces.* Londyn 1881.
- Winkler: *Theorie der Brücken.* 2 i 3 wydanie 1881—1886.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen.* 1 wyd. Berlin 1881, 2 wyd. Lipsk 1887, 3 wyd. Lipsk 1901.
- Maurer: *Graphische Statik.* 1882.
- Ott: *Graphische Statik.* 4 wyd. Praga 1883—1885.
- Thullie: O wykreślnem oznaczeniu sił, działających w belce dwuprzęsłowej na podstawie ugięcia belki. Przegląd Techniczny 1887. *Woch d. österr. Ing. u. Arch. Vereines* 1884.
- Weyrauch: *Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.* Lipsk 1885.
- Résal: *Ponts métalliques.* Paryż 1885—1889.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen.* Lipsk 1886.
- Weyrauch: *Theorie des statisch bestimmten Träger.* Lipsk 1887.
- Levy M.: *La statique graphique.* Paryż 1887.

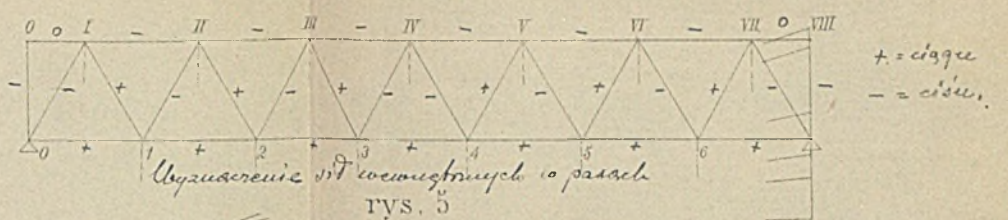
- Thullie: Analityczne wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia belki prostej układem ciężarów skupionych. Przegl. Tech. 1887 i *Woch. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.* 1887.
- Empinger: *Über die Zulässigkeit schwerer Fahrbetriebsmittel vom Standpunkte einer neuen Verordnung für Eisenbahnbrücken.* Wiedeń 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums.* Wiedeń 1888.
- Koechlin: *Applications de la statique graphique.* Paryż 1889. 2 wyd Paryż 1898.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik. II Theil: Das Fachwerk.* Zurich 1890.
- Moreau An. et Petit G.: *Congrès international des procédés des constructions.* Paryż 1891.
- Madamet A.: *Résistance des matériaux.* Paryż 1891.
- Résal Jan: *Construction métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier.* Paryż 1892.
- Keck W.: *Vorträge über Elasticitätslehre.* Hanower 1892.
- Fidler T. Claxton: *A practical treatise on bridge construction.* Londyn 1893.
- Cart A. i Portes L.: *Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence.* Paryż 1893.
- Dechamps: *Les principes de la construction des charpentes métalliques.* Paryż. Leodyum 2 wyd. 1893.
- Keck W.: *Vorträge über graphische Statik.* Hanower 1894.
- Stöckl Karol, Hauser Wilh.: *Hilfstabellen für die Berechnung eiserner Träger.* 2 wyd. Wiedeń 1899.
- Ritter A.: *Lehrbuch der Ingenieur Mechanik.* 3 wyd. Lipsk 1899.
- Föppl A.: *Vorlesungen über technische Mechanik.* Lipsk 1900.
- Landsberg: *Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II B. Brückenbau. II. Abth. Die eisernen Brücken. Theorie der eisernen Balkenbrücken.* 3 wyd. Lipsk 1901.
- Ostenfeld: *Technische Statik.* Lipsk 1904.



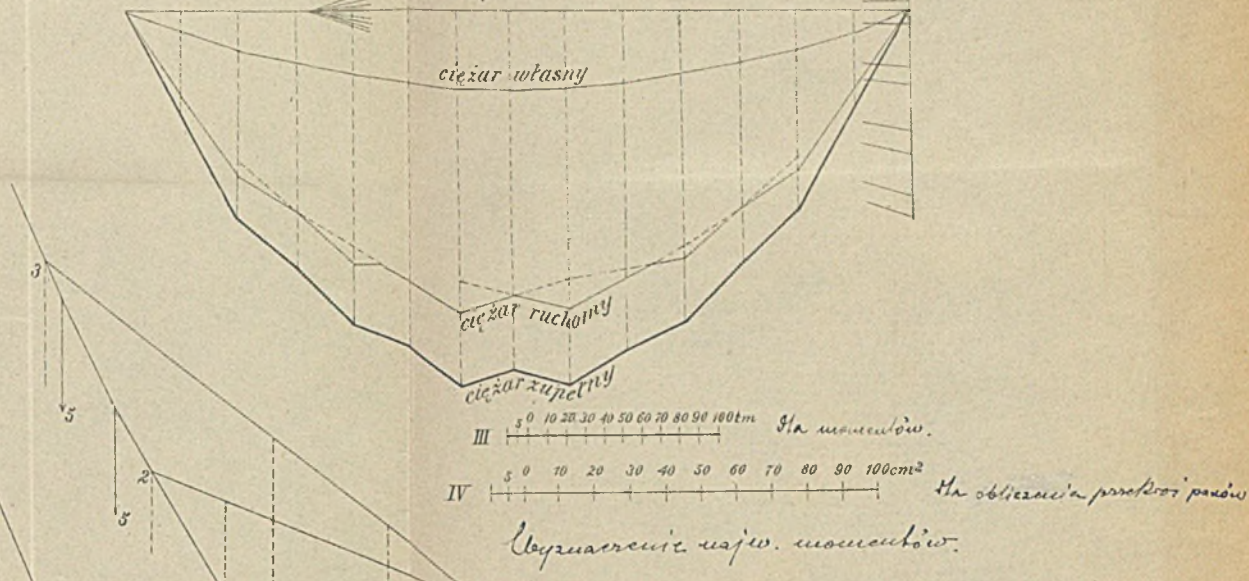
rys. 1.



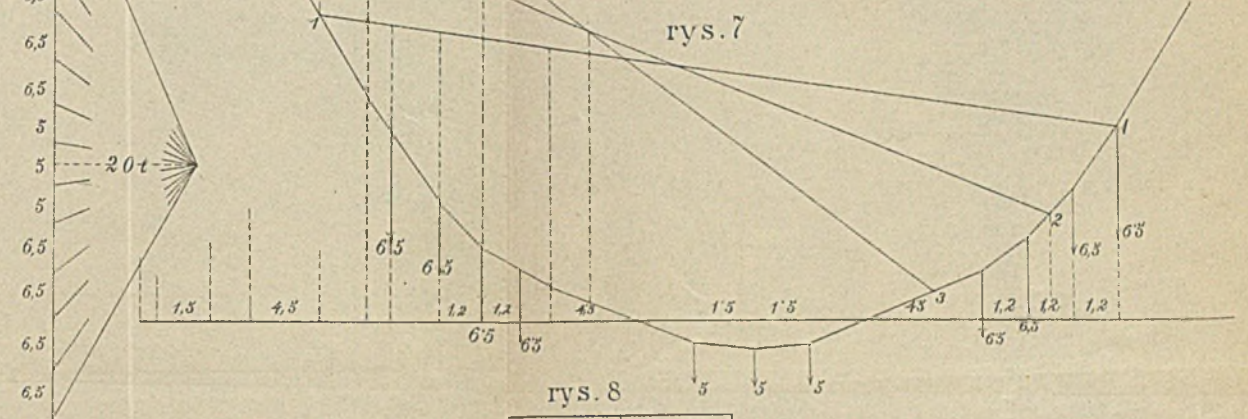
rys. 4



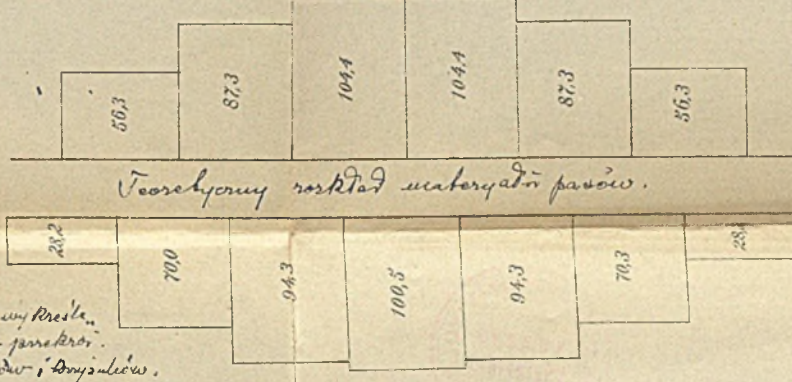
rys. 5



rys. 7



rys. 8

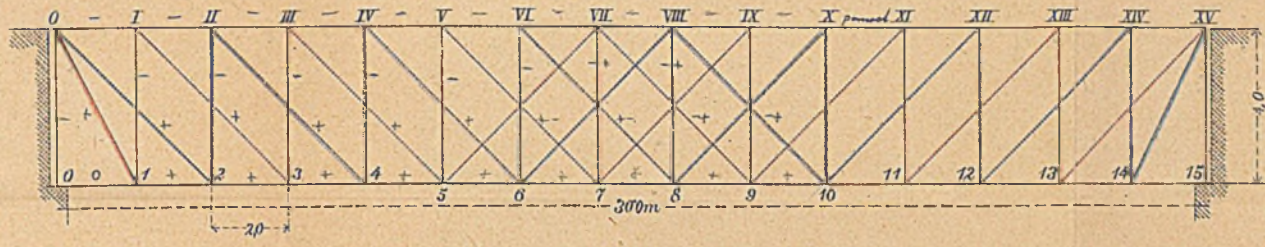


rys. 3. Przekroje krzywulców

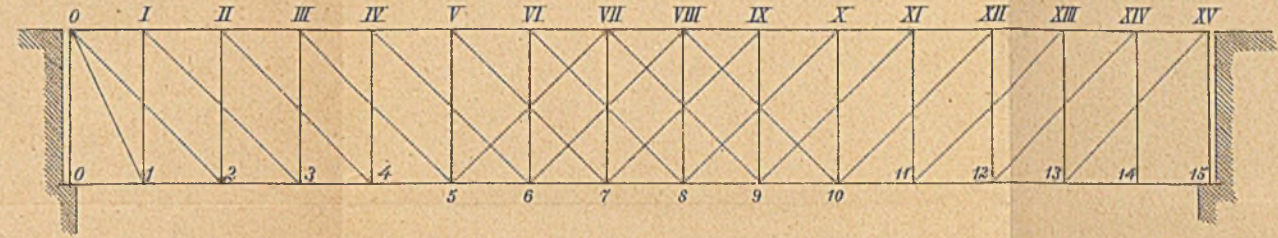


Flost drogowy kratowy o kracie podwójnej prostokątnej.

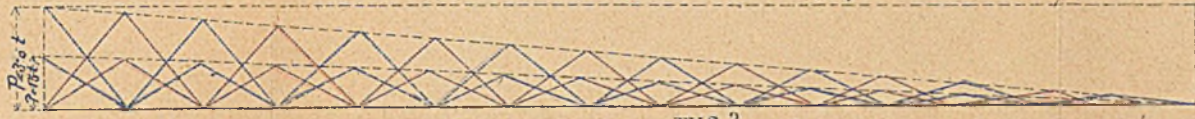
rys. 1.



rys. 5.

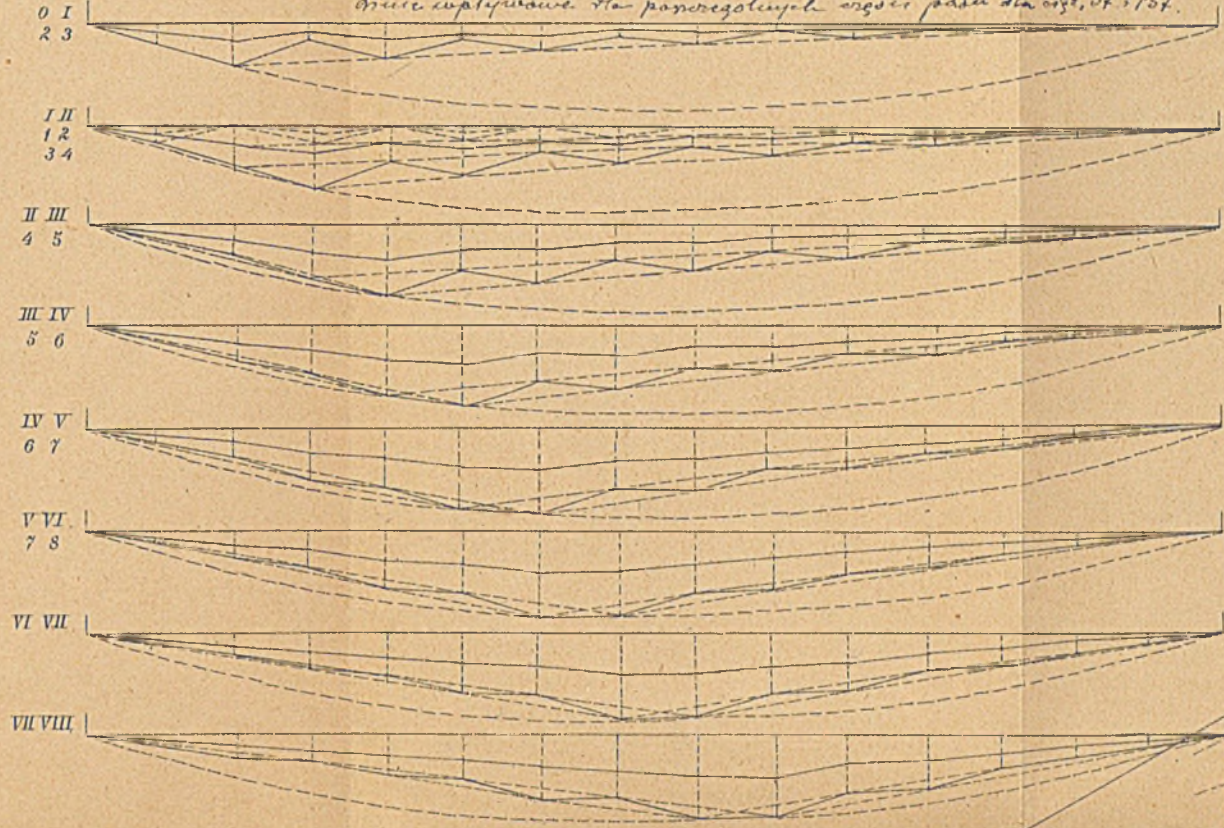


rys. 2. linia wpływową dla Kraty, dla ciężaru 3 ton, i 15 t.

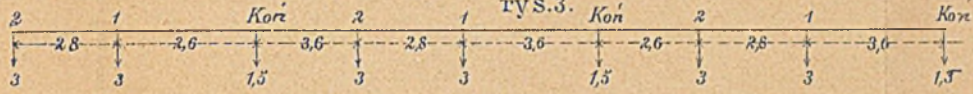


rys. 6.

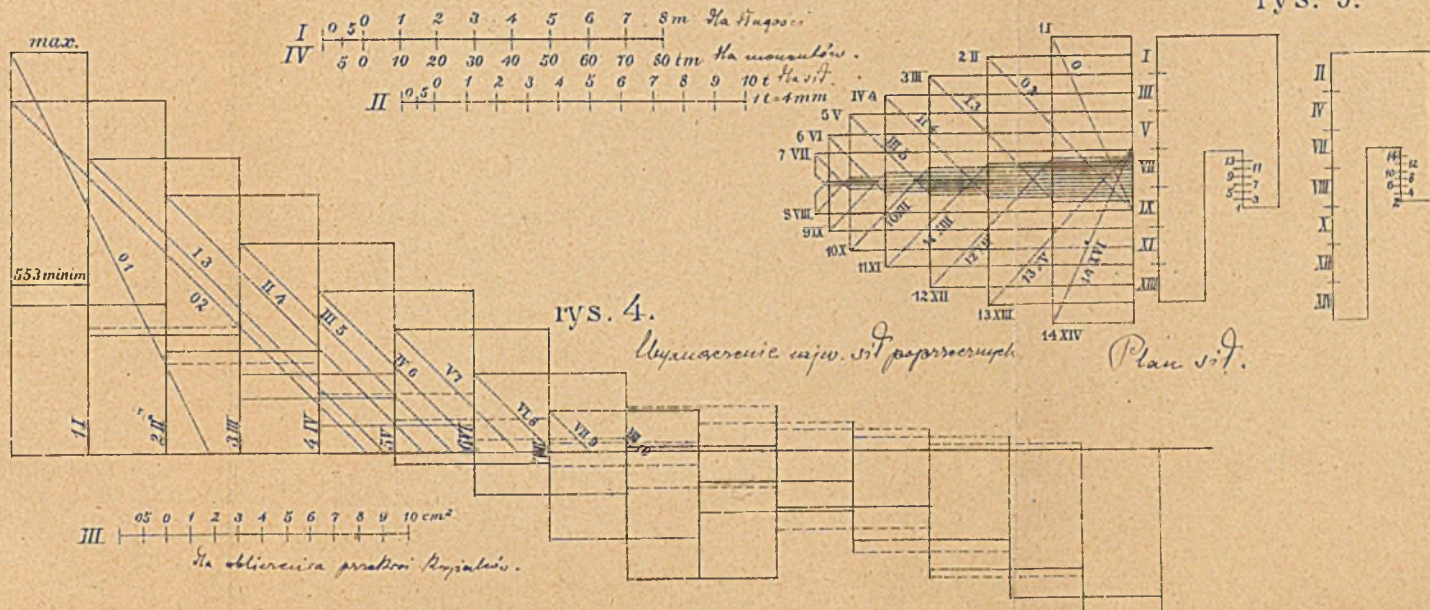
linia wpływową dla poszczególnych węzłów pasu dla cięż. 3 t i 15 t.



rys. 3. Korz. Koń



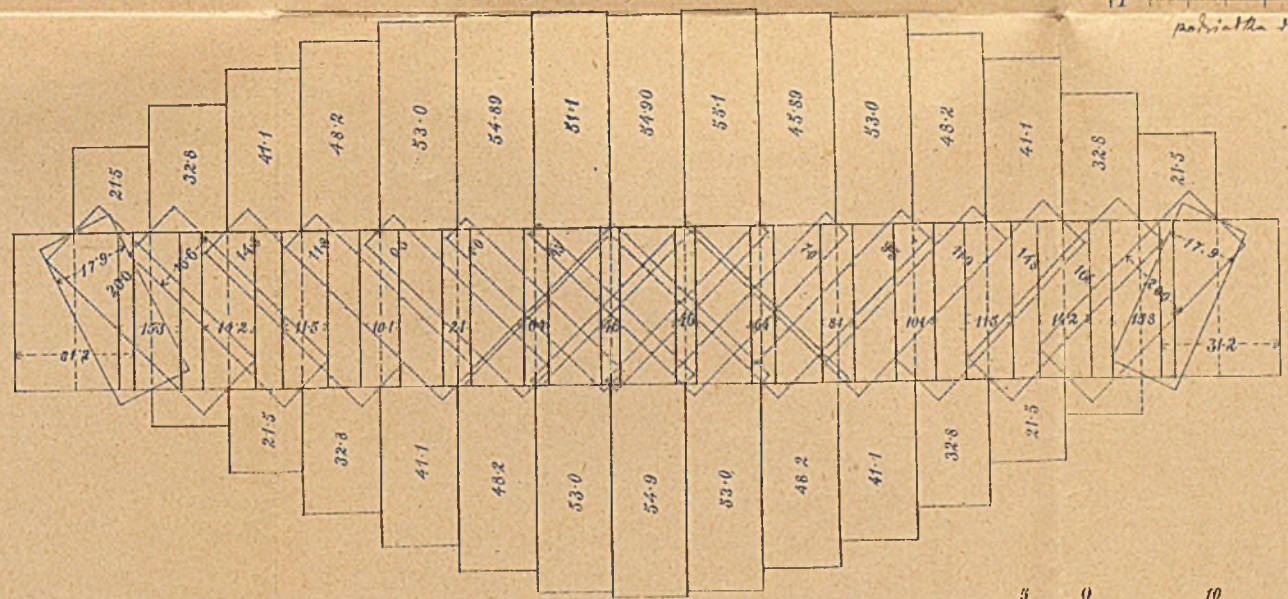
rys. 9.



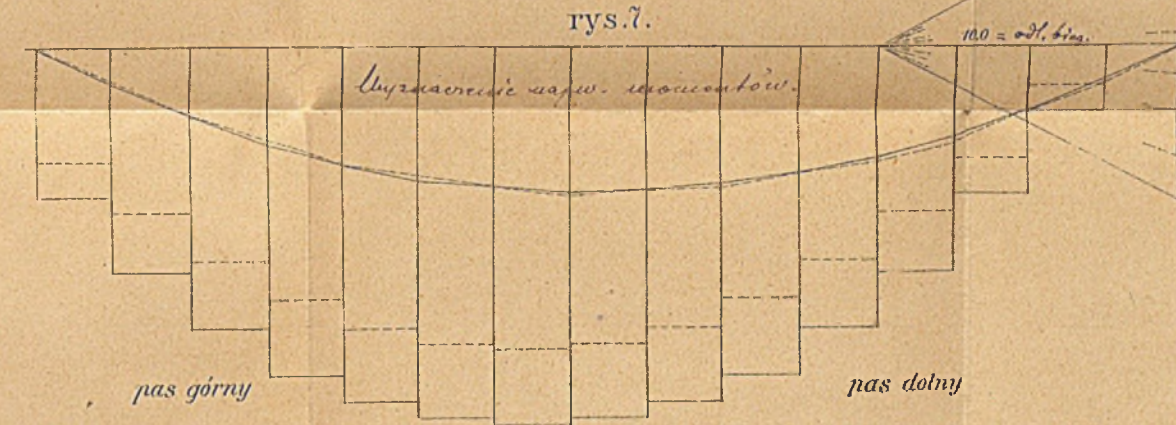
rys. 4.

Wyznaczenie napr. w śr. poprzecznych. Plan śr.

rys. 8. Rozkład materiałów w pasach i kracie.



rys. 7.



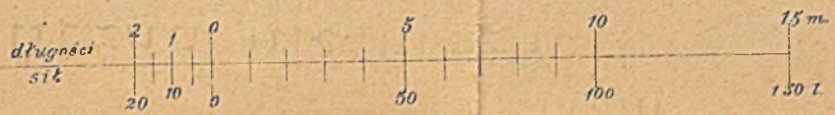
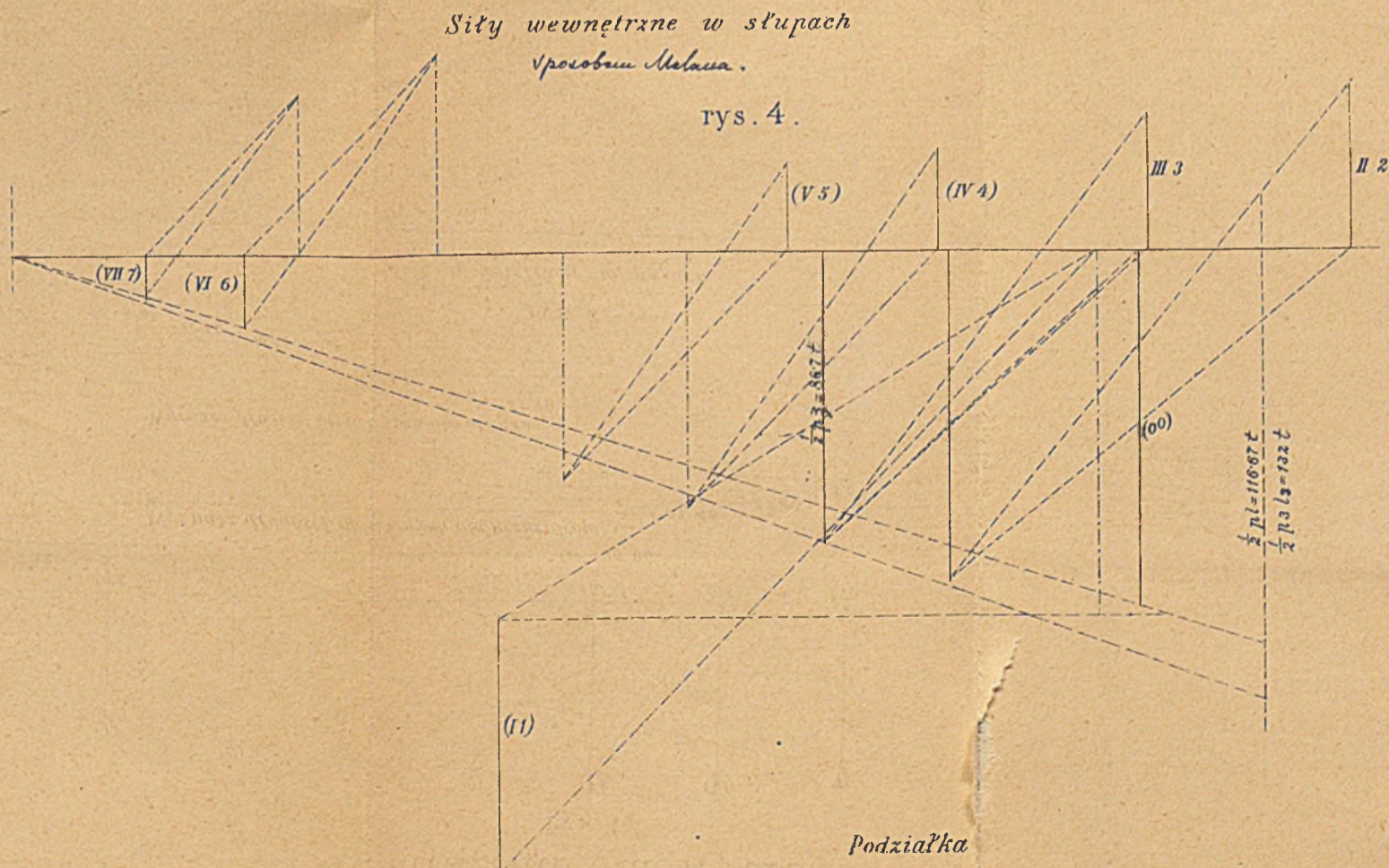
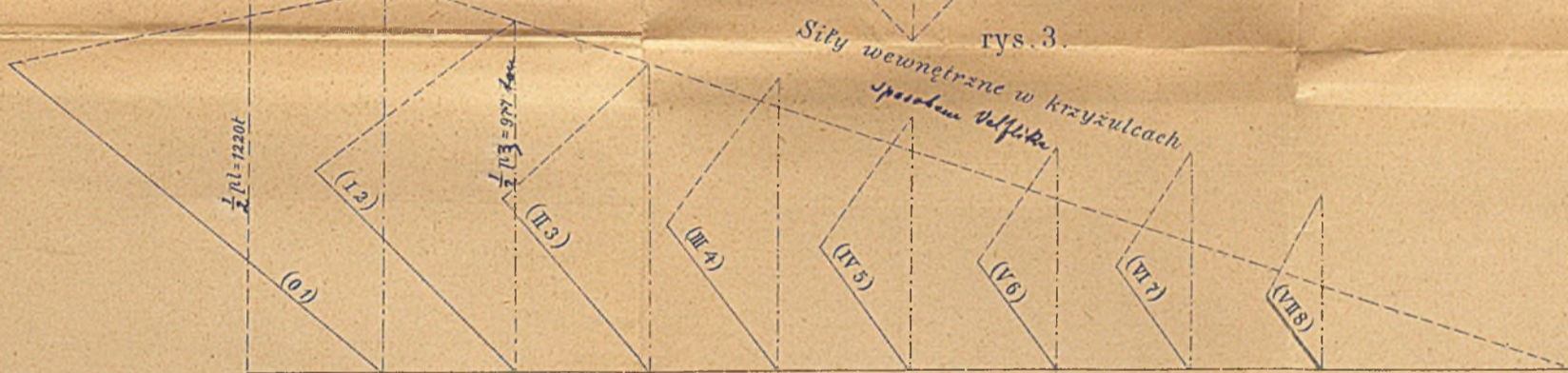
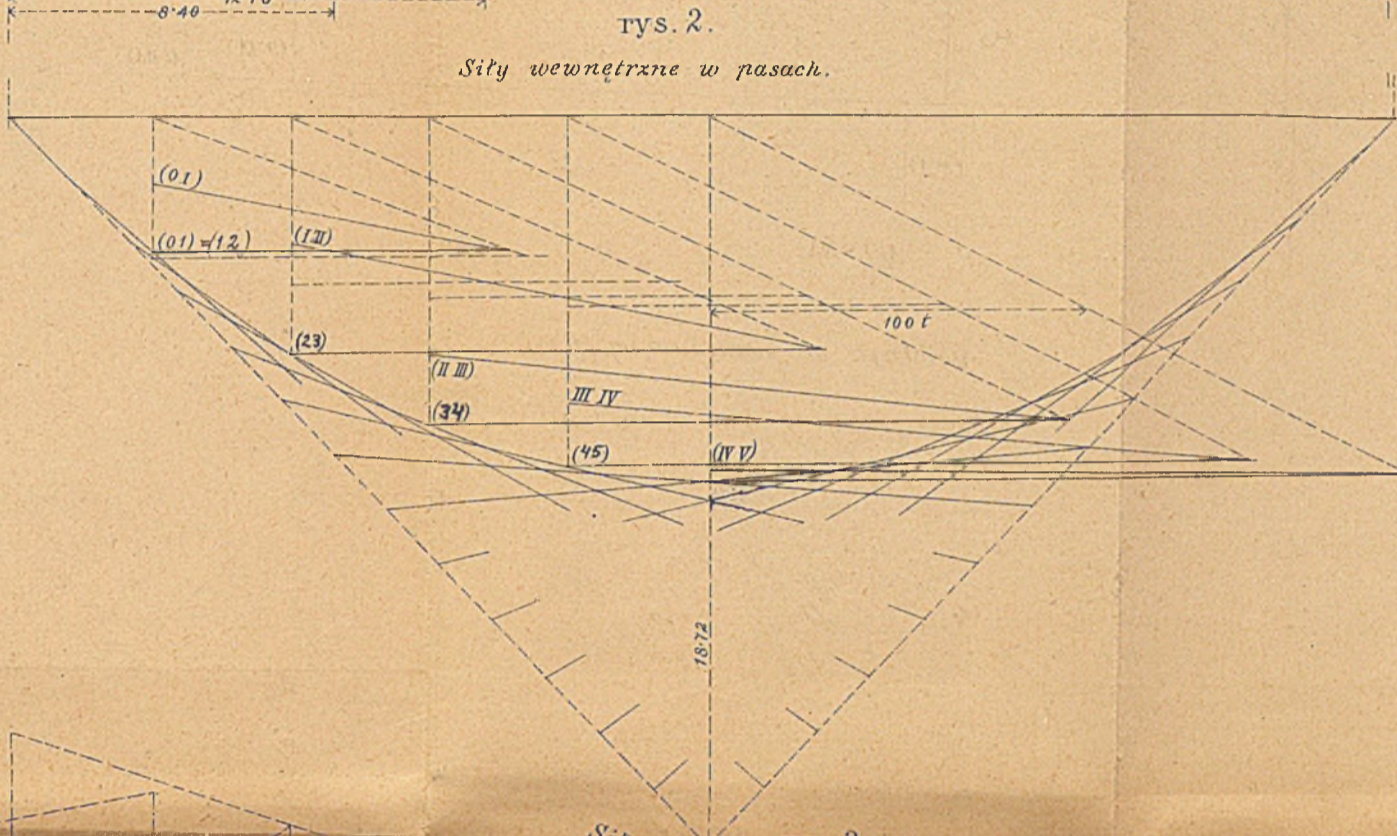
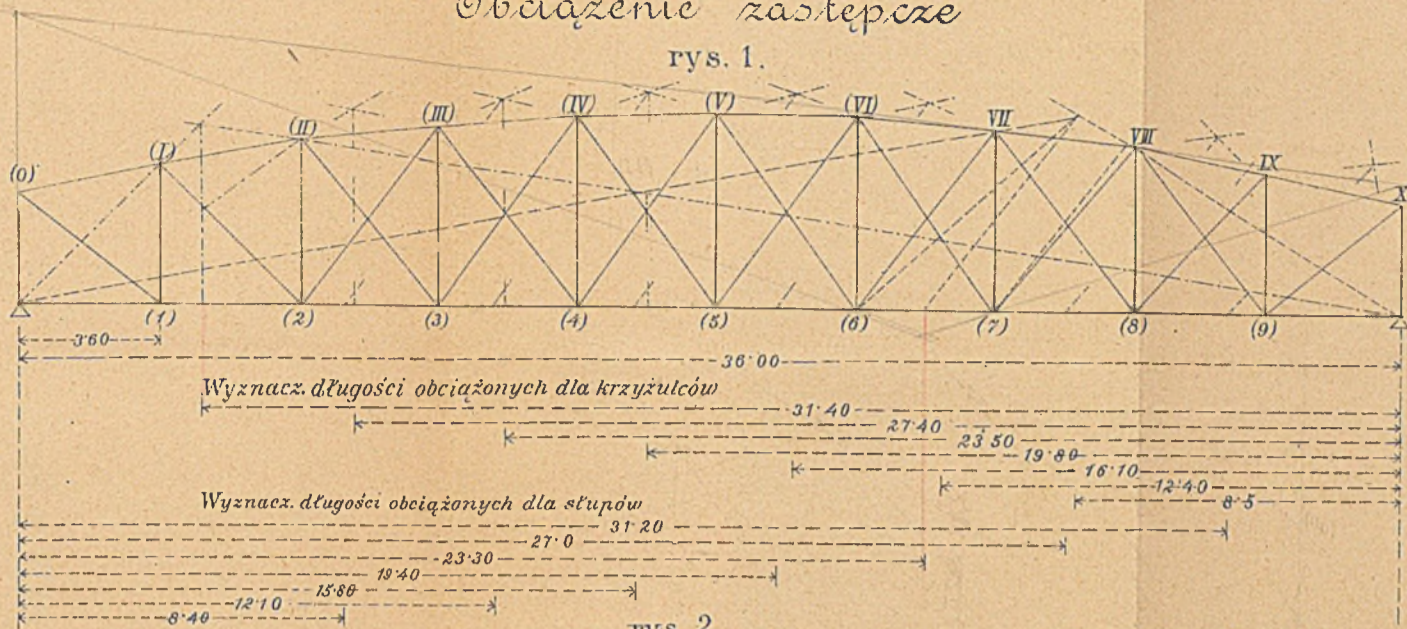
rys. 9. Podziałka dla obliczenia przekrojów pasów



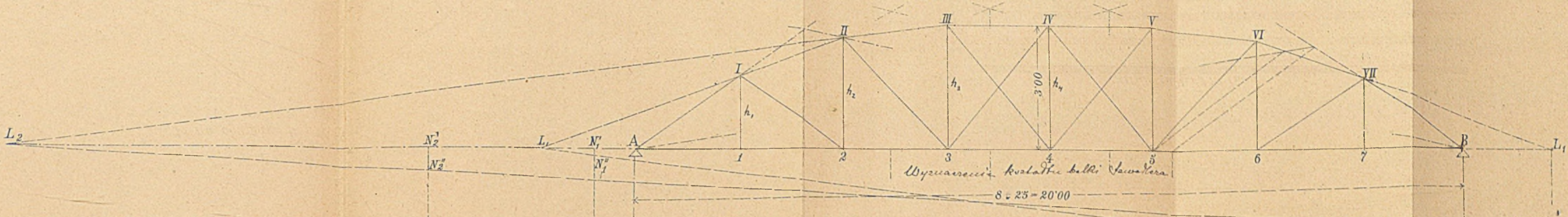


# Belka paraboliczna niezbieżna

Obciążenie zastępcze

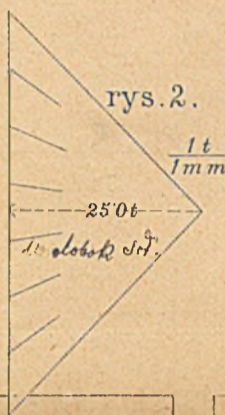


rys. 1

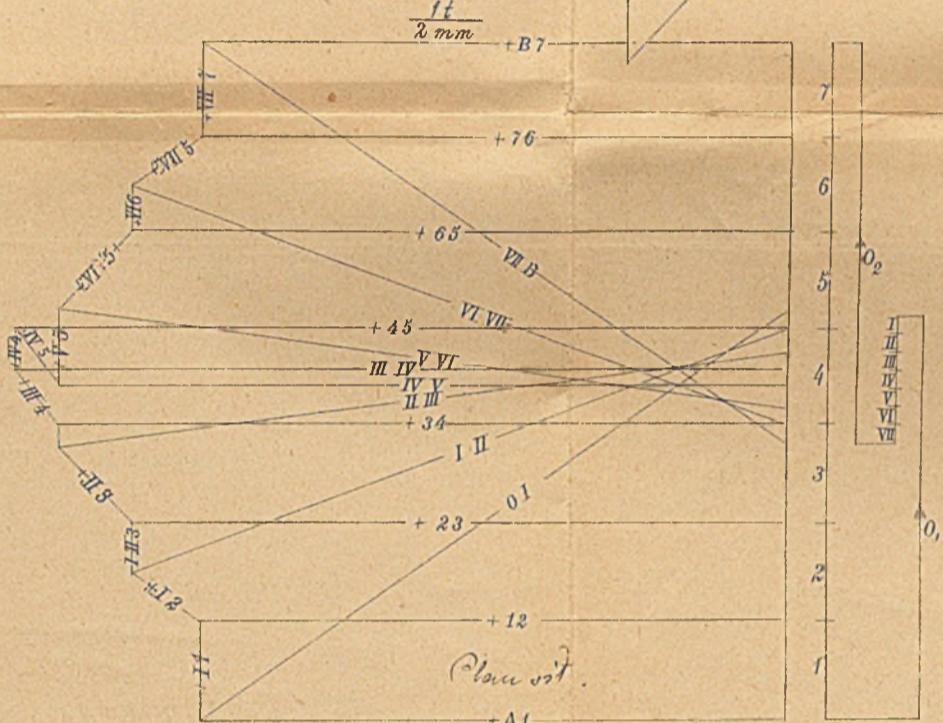


rys. 12.

$V_5$  w węzle (3)  
Wyznaczenie siły wzmocnienia w podporze 5V.



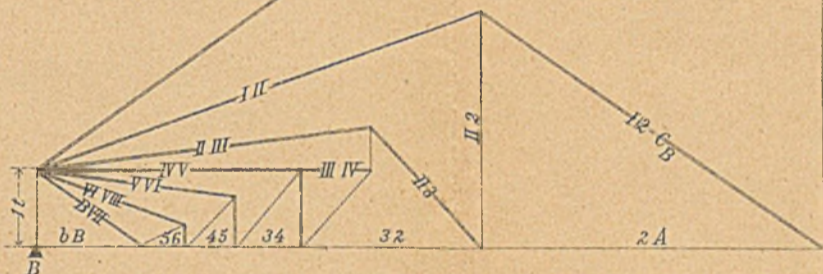
rys. 5.



Plan siły dla obciążenia Hony  
na podporze B.

rys. 6.

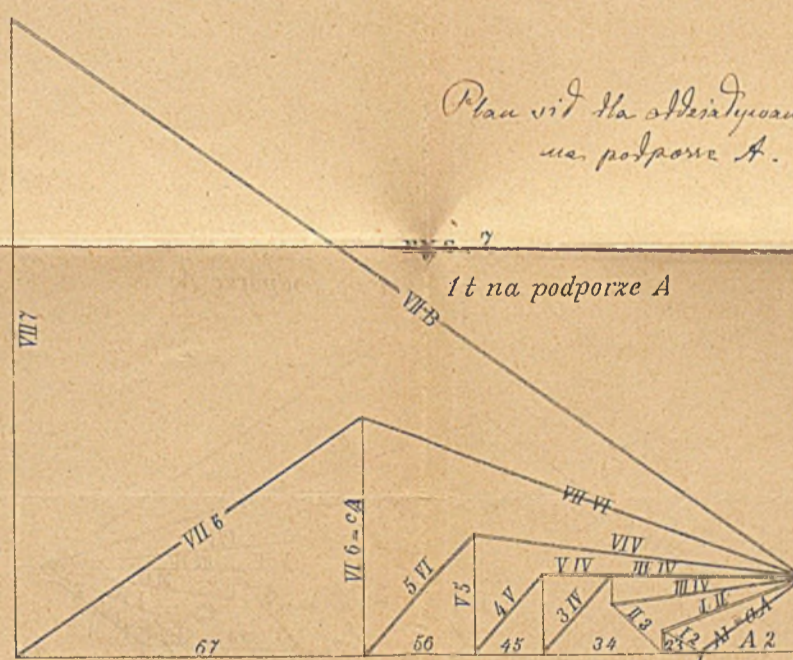
1t na podporze B



Plan siły dla obciążenia Hony  
na podporze A.

rys. 7.

1t na podporze A



Podziałki

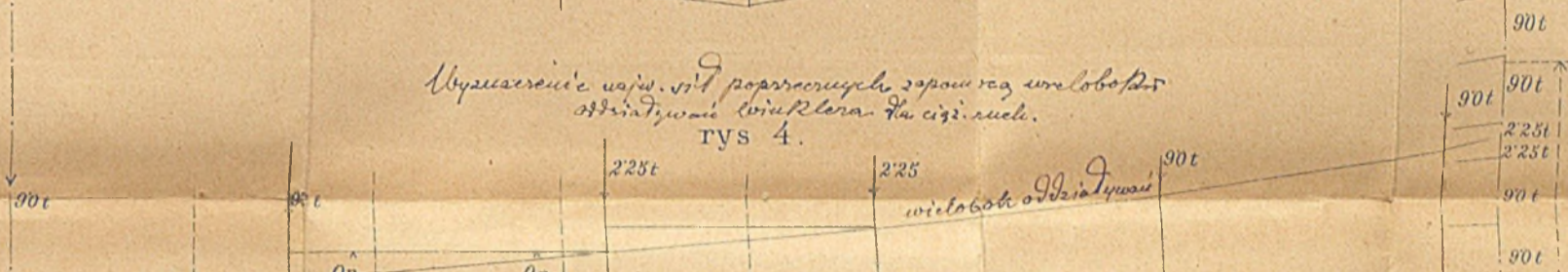


rys. 3

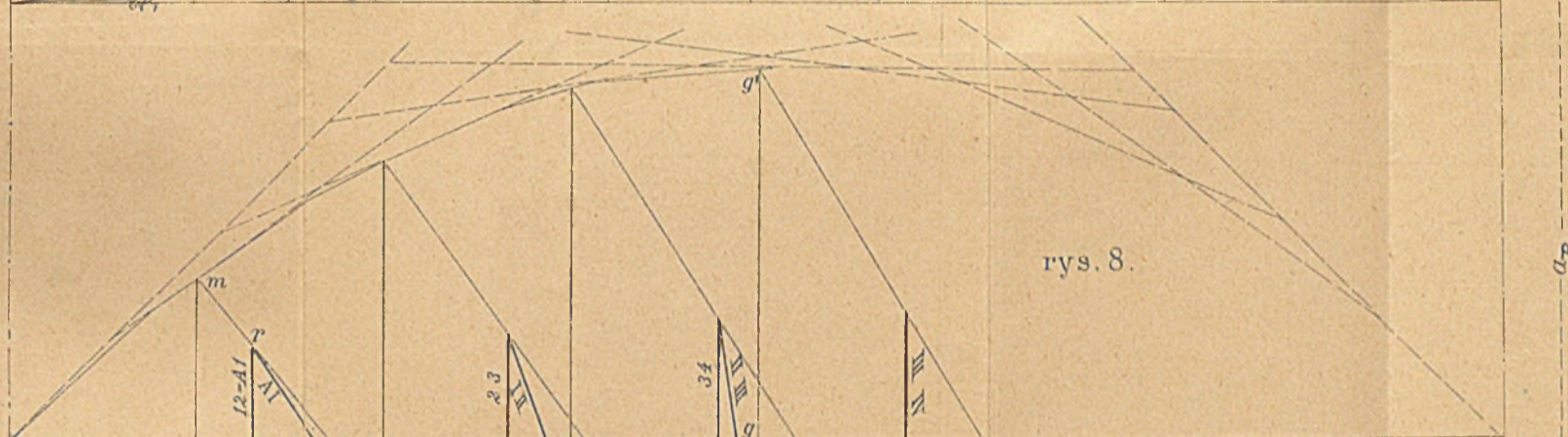
Wyznaczenie siły wzmocnienia belki w podporze 5V

Wyznaczenie siły wzmocnienia belki w podporze 5V

rys. 4.



rys. 8.



Linie wpływowe dla punktów

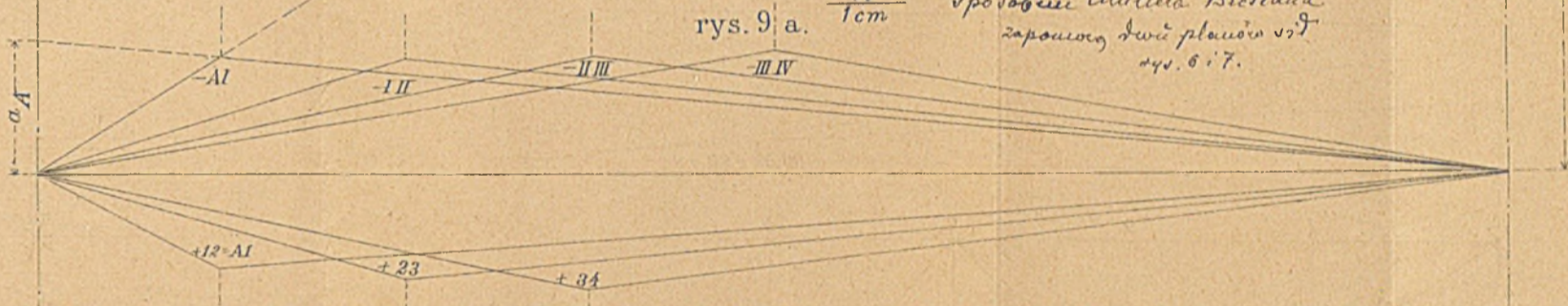
rys. 9 a.

1t/cm

sposobem Müllera Brastowa

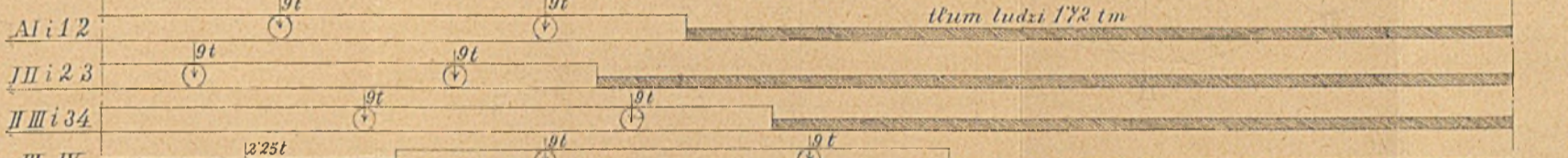
z pomocą linii planów siły

rys. 6 i 7.



rys. 9 b.

1t/m ludzi 1'72 tm



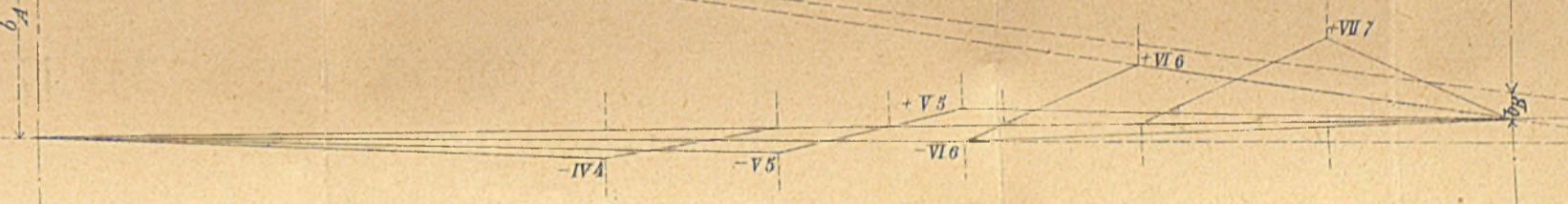
Linie wpływowe dla punktów

rys. 10 a.

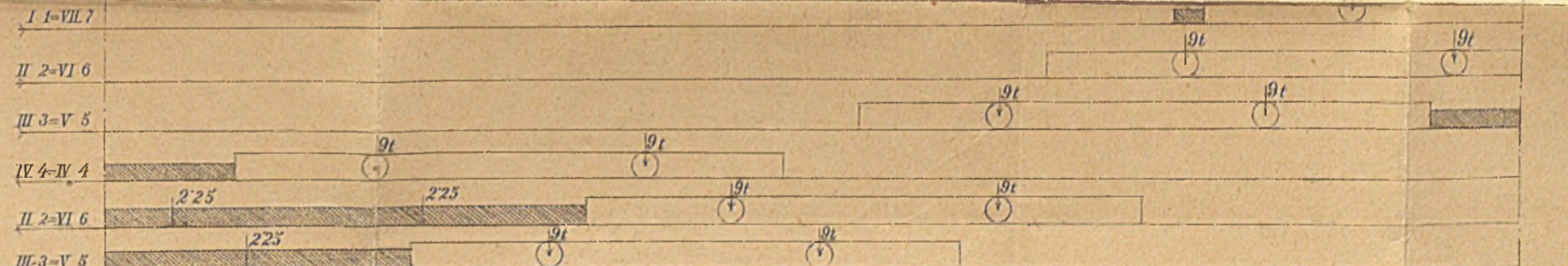
sposobem Müllera Brastowa

z pomocą linii planów siły

rys. 6 i 7.



rys. 10 b.



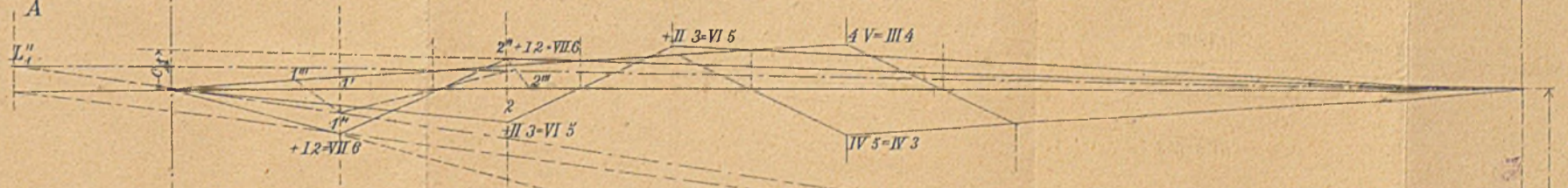
Linie wpływowe dla punktów

rys. 11 a.

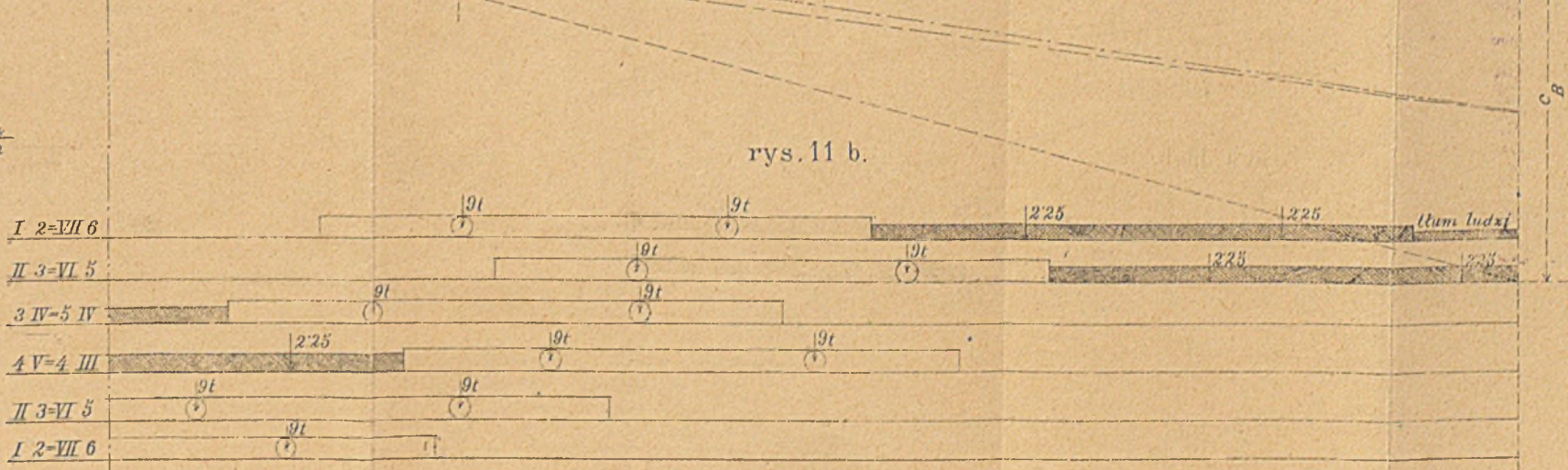
sposobem Müllera Brastowa

z pomocą linii planów siły

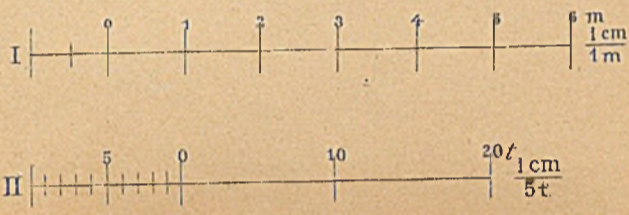
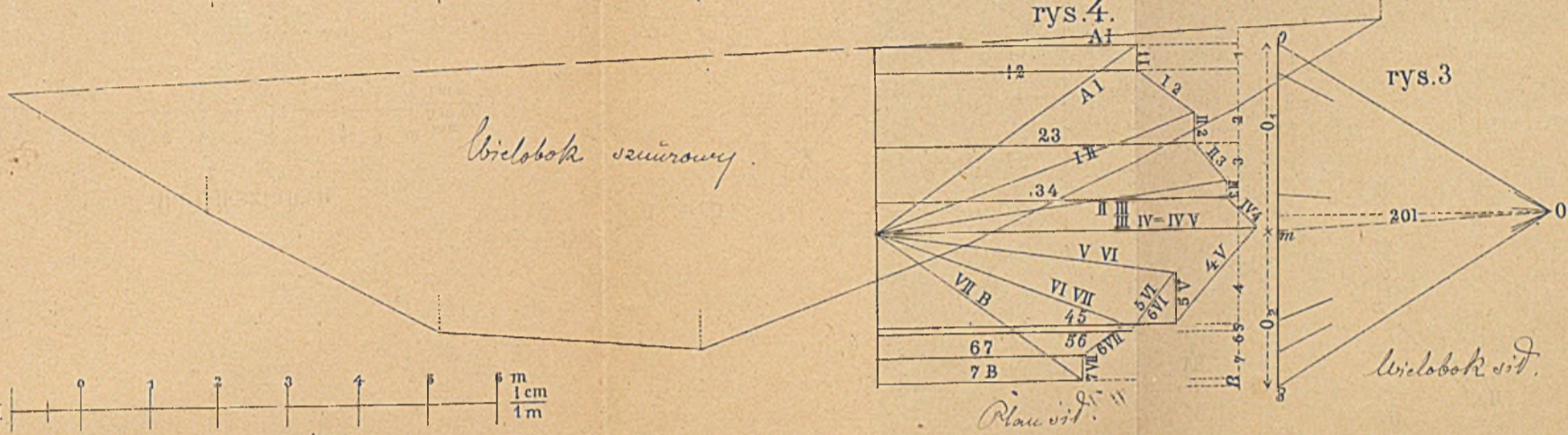
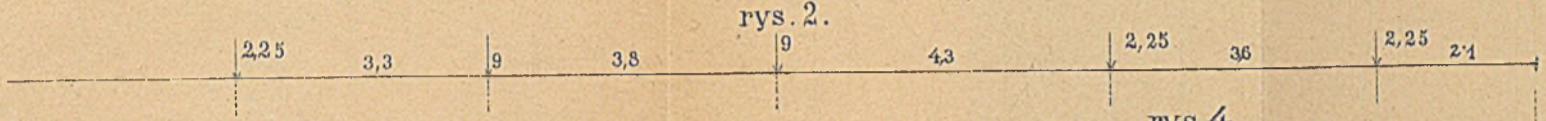
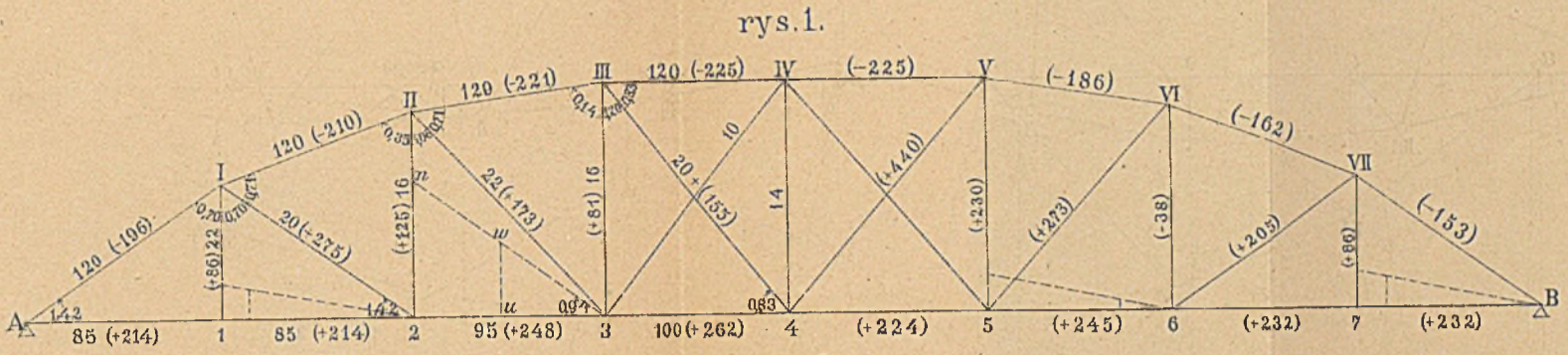
rys. 6 i 7.



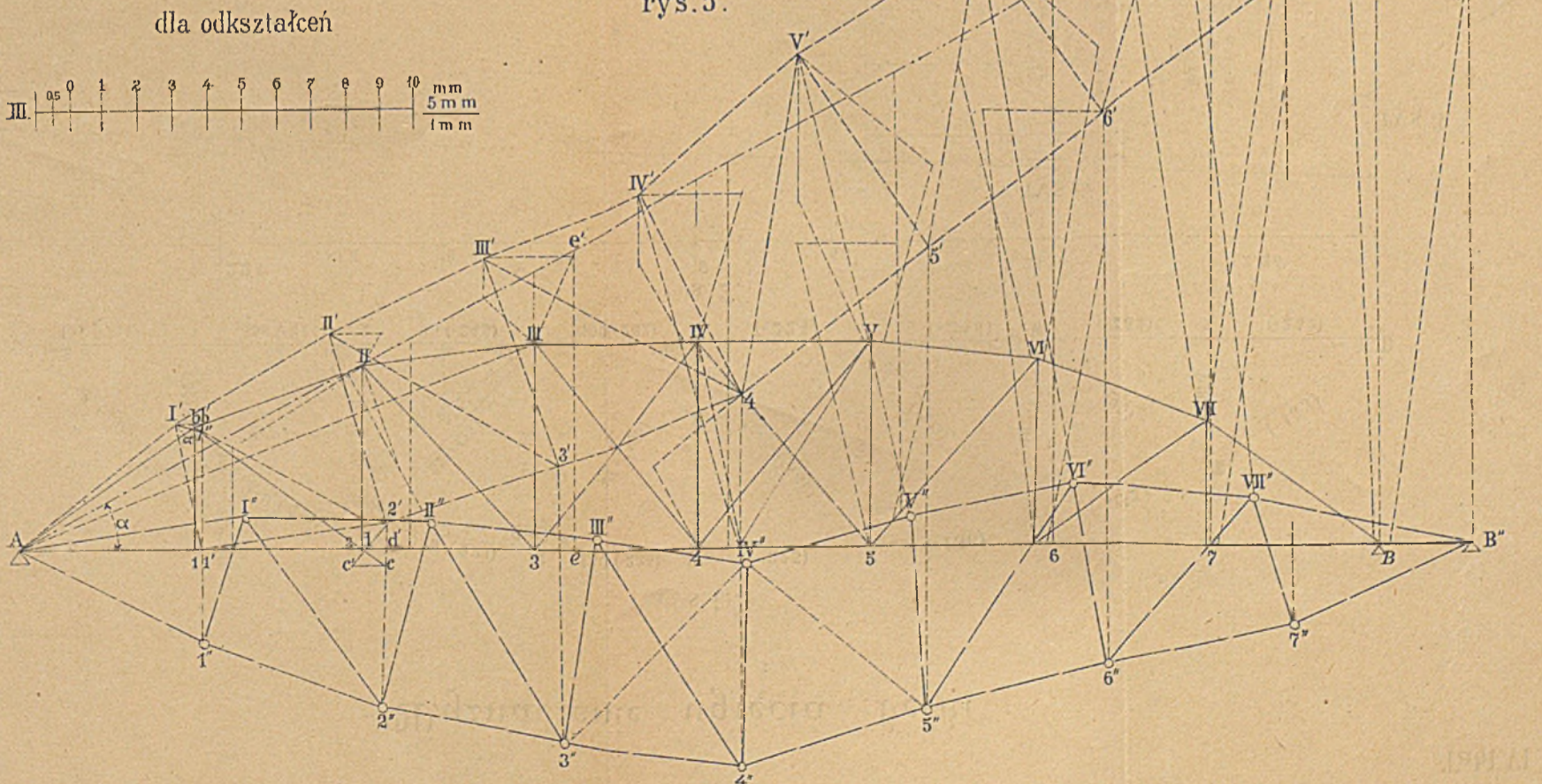
rys. 11 b.



# Wyznaczenie ugięcia belki



Uogroślenie wyznaczenia ugięcia belki.



BG Politechniki Śląskiej  
nr inw.: 11 - 13096



Dyr.1 16295/I/1