

INŻ. I. STELLA-SAWICKI

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM 1.

PODREĆCZNIK
TEORYI MOSTÓW

CZĘŚĆ I., TOM II.

BELKI PROSTE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE,
(Belki hipersztatyczne)
DLA

INŻYNIERÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

Z 106 RYSUNKAMI W TEKŚCIE I 4 TABLICAMI

OPRACOWAŁ

Dr. MAKSYMILIAN THULLIE,

DYPLOMOWANY INŻYNIER, PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

WYDANIE DRUGIE.

Cena 8 kor.

WE LWOWIE.

NAKŁADEM AUTORA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘDARNI SEYFARThA I CZAJKOWSKIEGO.

Z I. Związkowej drukarni we Lwowie.

1906.

INŻ. I. STELLA-SAWICKI

s. 67

s. 69

s. 70

S. 73

s. 91

§ 86

1958

624.04:624.2/8



16295/1₂

195|58

PRZEDMOWA DO DRUGIEGO WYDANIA.

Drugie wydanie niniejszego dziełka nie wiele różni się od pierwszego.

W rozdziale drugim dodałem §. 18., w trzecim §. 51., omawiające kształt i sposoby wykreślenia linii wpływowych. Nowy jedynie jest cały rozdział X., obejmujący najprostsze zastosowanie prawa pracy odkształcenia, którego znajomość obecnie inżynierom jest koniecznie potrzebna.

W końcu wywiązać się muszę z miłego obowiązku podziękowania asystentom moim pp. Ursiniemu i Maćkowskiemu, którzy przeliczyli przykłady i pomagali w przygotowaniu tablic.

Dr. Maksymilian Thullie.

We Lwowie, w październiku 1906.

SPROSTOWANIE OMYŁEK.

	Zamiast:	Czytaj:
Str. 2. w. 16. z góry	$= C$	$+ C$
" 3. " 14. z dołu	$= \int_0^l X dx$	$+ \int_0^l X dx$
" 10. " 2. "	$M_2 =$	$M_3 =$
" 11. " 10. z góry	$\frac{2(n+l_{n-1})}{l_{n+1}}$	$\frac{2(l_n+l_{n-1})}{l_{n+1}}$
" 26. " 7. "	5·5	0·5
" 30. " 1. "	$g_1 l_1$	$g_1 l_1^3$
" 38. " 5. "	$4 \frac{l_2}{l_2}$	$4 \frac{l_1}{l_2}$
" 75. rys. 59.	długość fb ma być oznaczona przez t_2 nie b , zaś zamiast t	
" 80. " 65. pierwsze przęsło	u_1	u

SPIS RZECZY.

Str

§. 1. Wstęp	1
-----------------------	---

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ściance pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi	1
§. 3. Belka pochyła utwierdzona	2
§. 4. Belka poziomo utwierdzona	4
§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach	7
§. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania	8
§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone	9
§. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych	10
§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych	11
§. 10. Momenty podporowe przęsła obciążonego	14
§. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych	15
§. 12. Największe siły poprzeczne	16
§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne	17
§. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów	18
§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego	23
§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego	24

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej	25
§. 18. Linie wpływowe	26
§. 19. Ciężar własny	29
§. 20. Ciężar ruchomy	31
§. 21. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej	37
§. 22. Ciężar własny	38
§. 23. Największe siły poprzeczne	39
§. 24. Największe oddziaływania	41
§. 25. Największe momenty	42
§. 26. Przykład	46

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

§. 27. Zasada	53
§. 28. Najniekorzystniejsze obciążenia	56
§. 29. Belka trzyprzęsłowa	56
§. 30. Przykład sposobem Liebera	58

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

	Str.
§. 31. Ogólne uwagi	61
§. 32. Obciążenie zupełne jednostajne ciągle	61
§. 33. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych	63
§. 34. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych	65
§. 35. Największe siły poprzeczne i oddziaływania	66

V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy	67
§. 37. Linia ugięcia	68
§. 38. Wielobok ugięcia	70
§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych	72
§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną	73
§. 41. Przęsło nieobciążone	75
§. 42. Dwa przęsła sąsiednie nieobciążone	76
§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych	77
§. 44. Przęsło obciążone	78
§. 45. Dwa sąsiednie przęsła obciążone	79
§. 46. Dowolne obciążenie przęseł	80
§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne	82
§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe	84
§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym	84
§. 50. Wyznaczenie wykreślne linii wpływowych	86
§. 51. Własności linii wpływowych i tablice do ich wykreślenia	88
§. 52. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów	93
§. 53. Największe siły zewnętrzne	93

VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 54. Belka pochyło utwierdzona	96
§. 55. Wyznaczenie ilości pomocniczych	97
§. 56. Wyznaczenie ilości \mathcal{R}' i \mathcal{R}''	98
§. 57. Momenty podporowe belki ciągłej	99
§. 58. Punkty stałe	99
§. 59. Przykład	100

VII. Obliczenie dokładne belki kratowej ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 60. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia	101
§. 61. Zasada dokładnego obliczenia	102
§. 62. Prawo pracy przygotowanej	104
§. 63. Prawo Maxwella	106
§. 64. Linia wpływowa ugięcia	107
§. 65. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej	107
§. 66. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów	108

VIII. Wpływ podpór.

Str.

§ 67. Ogólne uwagi	109
§ 68. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach . . .	109
§ 69. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory	110
§ 70. Najkorzystniejsze wysokości podpór	111
§ 71. Belka dwu- i trzyprzęsłowa	112
§ 72. Podwójne łożyska	113
§ 73. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów	114

B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i natężenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§ 74. Pręty nadliczbowe	116
§ 75. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych	117
§ 76. Belka równoległa o kracie złożonej	121
§ 77. Belka wieloboczna	124
§ 78. Belka Howe'a	124
§ 79. Belka ciągła	125
§ 80. Wpływ zmiany ciepłoty	125

X. Zastosowanie prawa pracy odkształcenia.

§ 81. Pochodne pracy odkształcenia belki kratowej	125
§ 82. Pochodne pracy odkształcenia dźwigaru o przekroju pełnym . .	127
§ 83. Prawo najmniejszości pracy odkształcenia	131
§ 84. Zastosowanie tego prawa do belek statycznie niewyznaczalnych	132

XI. Natężenia drugorzędne.

§ 85. Określenie natężeń drugorzędnych	138
§ 86. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych	139
§ 87. Zmiana kątów w trójkącie	139
§ 88. Kąt odchylenia osi prętów	140
§ 89. Równanie momentów węzłowych	140
§ 90. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych	141
§ 91. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów	145
§ 92. Wpływ przekroju prętów	146
§ 93. Wpływ obciążenia	147
§ 94. Wpływ ustroju belki	148
§ 95. Połączenia przegibne	149

Dodatek. Literatura	150
-------------------------------	-----



Jeżeli weźmiemy belkę n -przęsłową, a więc o $n+1$ podporach, z których jedno jest stałe, a inne przesuwalne, to powstaje w belce $n+1$ pręśnów, a jedno przesunięcie oddziaływanie.

§. 1. Wstęp.

W pierwszym tomie Podręcznika teorii mostów podzieliśmy teorię belek prostych na siedm działów. Cztery pierwsze działy stanowiły tom pierwszy, w niniejszym tomie wyłożymy trzy ostatnie działy. Mówić będziemy mianowicie o belce ciągłej bezprzegubowej, o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych i o natężeniach drugorzędnych.

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

1. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ściance pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi.

Mówiliśmy już w tomie I., że belkę prostą, spoczywającą na więcej, niż dwu podporach, nazywamy belką ciągłą lub wieloprzesłową (n. *kontinuierlicher Träger*, f. *poutre continue*, *verschiebbare Träger*, a. *continuous beam*). Mówiliśmy też, że oddziaływań podpór nie możemy tu wyznaczyć zapomocą prawideł statyki, lecz badamy odkształcenie belki, które zależne jest od obciążenia i stąd otrzymujemy równania, brakujące do wyznaczenia sił zewnętrznych.

Przy wyznaczeniu odkształcenia wchodzi jednak w rachubę przekrój, przed obliczeniem belki jeszcze nieznany; stąd powstaje bardzo wielka trudność. Gdybyśmy chcieli wprowadzić w rachunek przekrój niewiadomy jako funkcją sił wewnętrznych, zadanie nie byłoby rozwiązalnem. Dlatego obliczamy belkę ciągłą najprzód w przybliżeniu, przyjmując przekrój stały. Na podstawie w ten sposób uzyskanych sił zewnętrznych obliczamy przekroje w poszczególnych punktach, a wtedy dopiero, znając w przybliżeniu przekroje, możemy przystąpić do dokładnego obliczenia belki.

Podr. Teor. mostów. II.

* Kładąc na 2 podporach spoczywającą belkę, jest (3-2) statycznie niewyznaczalna. Wobec możliwości przesuwania podporów odpowiadająca statycznie wielokrotność nie takiej, o którą zmierzamy, jest statycznie niewyznaczalna.

W bieżącym rozdziale wyznaczmy więc siły zewnętrzne tylko dla przekroju stałego i to w sposób analityczny, odstępając w tym wypadku wyjątkowo od równoczesnego używania obu sposobów analitycznego i wykreślonego, gdyż w tym wypadku oba te sposoby znacznie się różnią.

W następnych rozdziałach uwzględnimy zmienność przekroju. W rozdziale tym trzymać się będziemy toku dowodzenia Winklera.

§. 3. Belka pochyło utwierdzona.

Wiadomo ze statyki budowli*), że równanie różniczkowe linii ugięcia, jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\epsilon I} \quad \dots \dots \dots 1)$$

jeżeli M oznacza moment statyczny sił zewnętrznych, I moment bezwładności przekroju, ϵ współczynnik sprężystości.

Jeżeli scałkujemy równanie 1), otrzymamy:

$$\epsilon I \frac{dy}{dx} = - \int_0^x M dx + C, \text{ więc} \quad \alpha)$$

dla $x=0$ (rys. 1.) $\epsilon I st \alpha = \epsilon I \tau_1 = C$, a dla

rys. 1.

$x=l \quad \epsilon I st \beta = \epsilon I \tau_2 = - \int_0^l M dx + C,$

jeżeli $\tau_1 = st \alpha$ a $\tau_2 = st \beta,$

staąd $\epsilon I (\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx \quad \dots \dots 2)$

Scałkowawszy jeszcze raz, będziemy mieli

$$\epsilon I y = - \iint M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz $-\iint M dx^2$ możemy częściowo scałkować i otrzymamy

$$\epsilon I y = - x \int M dx + \int M x dx + Cx + C_1.$$

Jeżeli teraz za $\int M dx$ wstawimy wartość, będziemy mieli

$$\epsilon I y = \epsilon I x \frac{dy}{dx} + \int M x dx + C_1 \quad \dots \dots \dots 3)$$

Dla $x=0$ jest $y=0 = C_1,$

dla $x=l$ jest $\epsilon I s = \epsilon I l \tau_2 + \int_0^l M x dx,$

więc $\epsilon I (s - l \tau_2) = \int_0^l M x dx \quad \dots \dots \dots 4)$

Handwritten notes:
 $\int x dx = \frac{1}{2} x^2$
 $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$
 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

*) p. Podręcznik Statyki budowli II. w. str. 246 rów. 379.

Nazwijmy X' moment wypadkowej wszystkich ciężarów ^{X'' moment wypadkowej ciężarów z lewej strony belki} (bez oddziaływania) na długości AC , M moment wszystkich sił zewnętrznych (z oddziaływaniem), po lewej stronie będących, ze względu na punkt C , Q' siłę poprzeczną w A , a M' i M'' momenty w punktach A i B na podporach, które nazywamy momentami podporowymi (*Stützenmoment, Normalmoment*), ^{Pfeilmoment}
 to $M' = Q'a$, $M = Q'(a+x) + X' = M' + Q'x + X' \dots 5)$

Dla punktu B będzie

$$M'' = M' + Q'l + X'' \dots 6)$$

Stąd otrzymamy $Q' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{X''}{l}$, a wstawiając to w równanie 5.)

$$M = M' + \frac{M'' - M'}{l}x - \frac{X''x}{l} + X'$$

Dla belki, w dwu punktach podpartej, jest $M' = M'' = 0$, więc $M = X' - \frac{X''x}{l} = X$, gdy X oznacza moment sił zewnętrznych dla belki, w dwu punktach podpartej.

A więc możemy napisać $M = \frac{M'(l-x) + M''x}{l} + X \dots 7)$

Podstawiając tę wartość w równaniu 2), otrzymamy

$$\varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx + \int_0^l X dx,$$

albo ^{po sprostowaniu} $2\varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) = (M' + M'')l + 2\int_0^l X dx.$

Podstawiając zaś wartość za M w równ. 4), otrzymamy

$$\varepsilon I(s - l\tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x)x + M''x^2}{l} dx + \int_0^l X x dx,$$

a stąd ^{po sprostowaniu} $6\varepsilon I(s - l\tau_2) = (M' + 2M'')l^2 + 6\int_0^l X x dx.$

Rozwiązawszy te dwa równania ze względu na M' i M'' , będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} M'l^2 &= 2\int_0^l X(3x-2l)dx + 2\varepsilon I(2l\tau_1 + l\tau_2 - 3s) \\ M''l^2 &= 2\int_0^l X(l-3x)dx - 2\varepsilon I(l\tau_1 + 2l\tau_2 - 3s) \end{aligned} \right\} \dots 8)$$

Nazwijmy M' i M'' momenty na podporach belki poziomo utwierdzonej o tej samej rozpiętości i tak samo obciążonej, to tu $s=0$, $a=\beta=0$, więc $\tau_1 = \tau_2 = 0$, a zatem według równ. 8) będzie

^{Momenty podporowe belki poziomo utwierdzonej} $\left. \begin{aligned} M'l^2 &= 2\int_0^l X(3x-2l)dx \\ M''l^2 &= 2\int_0^l X(l-3x)dx \end{aligned} \right\} \dots 9)$

Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} M' &= M + 2\epsilon l \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2} \\ M'' &= M'' - 2\epsilon l \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10)$$

Z tych dwóch równań możemy wyznaczyć τ_1 i τ_2 , mianowicie otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{Styczne kąt uchy.} \quad \tau_1 &= + \frac{1}{6\epsilon l} (2M' + M'' - M) + \frac{s}{l} \\ \text{Linia linii wzniesia.} \quad \tau_2 &= - \frac{1}{6\epsilon l} (M' + 2M'' - M'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 11)$$

na podporach.

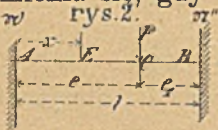
jeżeli dla skrócenia nazwiemy

$$\left. \begin{aligned} M' &= 2M' + M'' \\ M'' &= M' + 2M'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 12)$$

§. 4. Belka poziomo utwierdzona.

Momenty M' i M'' dla belki poziomo utwierdzonej możemy dla danego obciążenia obliczyć według równania 9). Zbadamy tu kilka przypadków.

a) Obciążenie jednym ciężarem skupionym. Tu musimy rozdzielić całą naznaczoną w równ. 9), bo $X=f(x)$ zmienia się, gdy E (rys. 2.) przekracza punkt C , a mianowicie



dla $0 < x < e$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l}$,
 a dla $e < x < l$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l} - P(x - e)^*$,

a więc pierwszy wyraz całkować będziemy od 0 do l , a drugi od e do l .

Zatem będzie na podstawie równania 9)

$$M'l^2 = 2P \int_0^e \frac{e_1 x}{l} (3x - 2l) dx - 2P \int_e^l (x - e) (3x - 2l) dx.$$

Pierwszy wyraz jest między granicami 0 i l równy zeru, drugi zaś upraszcza się bardzo i otrzymujemy:

$$M'l^2 = -Pe(l^2 + e^2 - 2el) = -Pee_1^2.$$

Podobnie otrzymamy $M''l^2 = -Pe^2e_1$, więc,

$$\left. \text{Moment podporowy.} \quad M' = -\frac{Pee_1^2}{l^2} \right\} \dots \dots \dots 13)$$

*) p. Podr. Statyki budowl. wyd. II. str. 20.

Moment podporowy $\mathfrak{M}'' = -\frac{Pe^2e_1}{l^2}$ } 13)

Teraz możemy obliczyć wyrazy \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' z równania 12), a mianowicie będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{Pee_1(2l-e)}{l^2} = -\frac{Pe_1(l^2-e_1^2)}{l^2} \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{Pee_1(1+e)}{l^2} = -\frac{Pe(l^2-e^2)}{l^2} \end{aligned} \right\} 14)$$

Równanie 13) otrzymaliśmy w inny sposób w Podręczniku Statyki budowli*). — Tam też rozważaliśmy wypadek, gdy belka jest ciężarem q

b) całkowicie obciążona i otrzymaliśmy

Moment podporowy $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{12}ql^2$ *) 15)

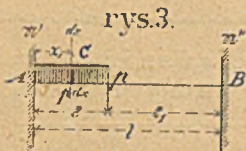
a na podstawie równania 12)

$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{12}ql^2$ 16)

c) Częściowe obciążenie jednostajne.

a) Obciążenie z lewej strony.

W punkcie C działa na długości dx (rys. 3.) ciężar pdx . Możemy uważać go jako ciężar skupiony, otrzymamy więc moment, wywołany tym ciężarem, według 13)



$$d\mathfrak{M}' = -\frac{pdx x_1(l-x_1)^2}{l^2},$$

a zatem moment w A

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= + \int_0^e d\mathfrak{M}' = -\frac{p}{l^2} \int_0^e x_1(l-x_1)^2 dx = \\ &= -\frac{p}{l^2} \int_0^e (x_1 l^2 - 2lx_1^2 + x_1^3) dx = -\frac{pe^2}{12l^2} (6l^2 - 8el + 3e^2), \text{ wręście} \end{aligned}$$

Moment podporowy $\mathfrak{M}' = -\frac{pe^2}{12l^2} (l^2 + 2e_1l + 3e_1^2).$

Podobnie otrzymamy $\mathfrak{M}'' = \int_0^e d\mathfrak{M}'' = -\frac{p}{l^2} \int_0^e x_1^2(l-x_1) dx =$

$-\frac{pe^3}{12l^2} (4l - 3e) = -\frac{pe^3}{12l^2} (l + 3e_1)$. *Moment podporowy* 17)

*) Podręcznik Statyki budowli 2 wyd. str. 258. równ. 427).

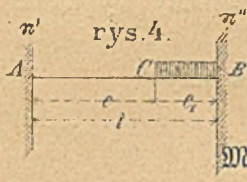
**) " " " " " 260. " 441.).

stąd

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{pe^2}{12l^2}(2l^2 + 4e_1l + 6e_1^2 + le + 3e_1e) = -\frac{pe^2}{4l^2}(1 + e_1)^2 \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{pe}{12l^2}(2le + 6ee_1 + l^2 + 2le + 3e_1^2) = -\frac{pe^2}{4l^2}(2l^2 - e^2) \end{aligned} \right\} \dots 18)$$

β) Obciążenie z prawej strony.

Dla obciążenia jednostajnego z prawej strony punktu C (rys. 4.) aż do prawej podpory otrzymamy momenty podporowe, wstawiając w równanie 17) e_1 zamiast e i na odwrót i \mathfrak{M}'' zamiast \mathfrak{M}' . A więc



$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{pe_1^3}{12l^2}(l + 3e) \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{pe_1^2}{12l^2}(l^2 + 2el + 3e^2) \end{aligned} \right\} \dots \text{Momenta podporowe} \dots 19)$$

Stąd otrzymamy dalej:

$$\mathfrak{M}' = -\frac{pe_1^2}{4l^2}(2l^2 - e_1^2), \quad \mathfrak{M}'' = -\frac{P}{4l^2}(l^2 - e^2)^2 \dots 20)$$

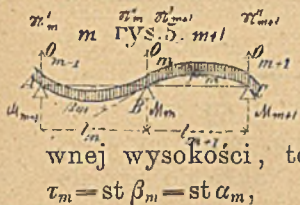
Winkler podaje dla ułatwienia następną tabliczkę dla \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' , obliczoną z równań 18) i 20) dla rozmaitych wartości e :

e	obciążenie z lewej strony (rys. 3)		obciążenie z prawej strony (rys. 4.)	
	\mathfrak{M}'	\mathfrak{M}''	\mathfrak{M}'	\mathfrak{M}''
0	0	0	0·25000	0·25000
0·1	0·00903	0·00497	0·24097	0·24503
0·2	0·03240	0·01960	0·21760	0·23040
0·3	0·06503	0·04298	0·18497	0·20703
0·4	0·10240	0·07360	0·14760	0·17640
0·5	0·14063	0·10938	0·10938	0·14063
0·6	0·17640	0·14760	0·07360	0·10240
0·7	0·20703	0·18497	0·04298	0·06503
0·8	0·23040	0·21760	0·01960	0·03240
0·9	0·24503	0·24097	0·00497	0·00903
1·0	0·25000	0·25000	0	0
l	pl^2	pl^2	pl^2	pl^2

§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach.

u przecięciach obciążonych.

Jeżeli belkę ciągłą (rys. 6.) obciążymy, to ugnie się wskutek tego. Na podporach styczne do linii ugięcia będą, ogólnie biorąc, nachylone do poziomu. Każde przesłone tej belki uważać tedy możemy jako belkę ukośnie utwierdzoną i zastosować doń równanie 11). Przypuśćmy, przytem, że podpory wszystkie są w równej wysokości, to $s=0$, więc dla m go przesłona będzie, jeśli



$\tau_m = st \beta_m = st \alpha_m,$

$$\tau_m = - \frac{l_m}{6\epsilon I} (M_{m-1} + 2M_m - \mathcal{R}''_m),$$

jeśli momenty na podporze A oznaczymy znaczkim $(m-1)$, a na podporze B znaczkim m , zaś \mathcal{R} i l oznaczymy znaczkim przesłona. Dla $(m+1)$ go przesłona otrzymamy także z równania 11)

$$\tau_m = + \frac{l_{m+1}}{6\epsilon I} (2M_m + M_{m+1} - \mathcal{R}'_{m+1}),$$

jeśli ϵ i I mają te same wartości, co w poprzednim przesłone. — Z porównania tych równań otrzymamy

$$l_{m+1}(2M_m + M_{m+1} - \mathcal{R}'_{m+1}) = -l_m(M_{m-1} + 2M_m - \mathcal{R}''_m)$$

albo

$$M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_{m+1} = \mathcal{R}''_m l_m + \mathcal{R}'_{m+1} l_{m+1} \quad (21)$$

Ważne to równanie posłuży nam do wyznaczenia momentów podporowych (rys. 6.).

Zastosujmy równanie 21) do wszystkich przesłone belki ciągłej i zważmy, że $M_0 = M_n = 0$, jeśli belka jest w tych punktach wolno podparta. Mianowicie podstawmy w równaniu 21)

$$m = 1, 2, 3, \dots (n-1),$$

a otrzymamy:

dla $m=1$ $2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = \mathcal{R}''_1 l_1 + \mathcal{R}'_2 l_2$
 „ $m=2$ $M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = \mathcal{R}''_2 l_2 + \mathcal{R}'_3 l_3$
 „ $m=n-2$ $M_{n-3}l_{n-2} + 2M_{n-2}(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1}l_{n-1} = \mathcal{R}''_{n-2} l_{n-2} + \mathcal{R}'_{n-1} l_{n-1}$
 „ $m=n-1$ $M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) = \mathcal{R}''_{n-1} l_{n-1} + \mathcal{R}'_n l_n$ } (22)

* Metoda ta polega na wprowadzeniu w rachunek jako niewiadomych momentów podporowych.

Handwritten notes on the right margin:
 Kwieć belka ugięta...
 ma w podporach, a nie...
 pod przęslon, więc...
 styczny wyznaczone...
 n-1 wsi...
 ugięciu belki...
 tępym...
 tego równania...
 obciążeni...
 przęslon...
 to jest...
 przęslon, a więc...
 dla m=1, styczny...
 nie to przęslon...
 przęslon...
 a więc dla m=2...
 itd. aż do...
 styczny przęslon...
 a więc to m=n-1

Widzimy więc, że otrzymujemy $(n-1)$ równań, które wystarczą nam do wyznaczenia $(n-1)$ momentów podporowych. Równania te nazywamy równaniami momentów podporowych (n. Normalmomentgleichungen). *Risolviamo algebricamente.*

Jeżeli belka na pierwszej podporze jest poziomo utwierdzona, to M_0 nie jest $=0$. Aby M_0 wyznaczyć, pomyślmy sobie, że przed l_1 jest jeszcze jedno przęsło o długości $l_0=0$, wtedy dwa punkty podparcia tego przęsła wyznaczają dwa punkty linii ugięcia, a zatem styczną poziomą. Widzimy więc, że potrzebujemy tylko zastosować równ. 21) także do przęsła zerowego, czyli wstawić wartość $m=0$.

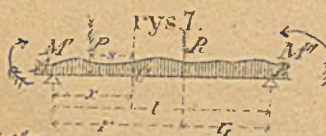
Otrzymamy więc $2M_0l_1 + M_1l_1 = \mathfrak{N}_1'l_1$, *wstawiamy $l_0=0$*
 czyli $2M_0 + M_1 = \mathfrak{N}_1'$ 23)

Otrzymujemy zatem jedno równanie więcej, wystarczające do wyznaczenia jeszcze jednej niewiadomej M_0 .

Tak samo, jeżeli belka jest poziomo utwierdzona na n tej podporze, otrzymamy: $M_{n-1}l_n + 2M_nl_n = \mathfrak{N}_n''l_n$, $l_{n+1}=0$.
 czyli $M_{n-1} + 2M_n = \mathfrak{N}_n''$ 24)

§. 6. Momenty, siły, poprzeczne i oddziaływania.

Niech przęsło AB (rys. 7.) belki ciągłej będzie dowolnie obciążone, wypadkowa wszystkich ciężarów na długości AB działających niech będzie R , a r_1 jej odstęp od B . — Nazwijmy dalej momenty podporowe w A i B M' i M'' , siłę poprzeczną Q' przy podporze A , Q'' przy podporze B , (obidwie wewnątrz przęsła), to otrzymamy z równ. 6)



$M'' = M' + Q'l - Rr_1$, a

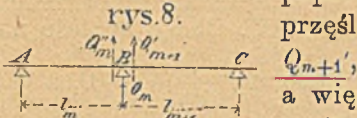
$Q'' = Q' - R$, stąd wynika $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l}$ i $Q'' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{Rr}{l}$ 25)

Chcąc wyznaczyć siłę poprzeczną Q w dowolnym punkcie C , nazwijmy P wypadkową ciężarów, działających na długości $AC=x$, a s jej odstęp od C , to $Q = Q' - P$.

$M = M' + Q'x - Ps$ 27)

Przez B, jeżeli obciążenie belki przesyła poprzeczne i reakcja podporowa B
 równanie 25 możemy napisać:
 $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l}$
 $Q'' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{Rr}{l}$
 Dla dowolnego punktu C będzie siła poprzeczna i siła przez P wypadkową wypadkową w C, nazwijmy P wypadkową ciężarów, działających na długości $AC=x$, a s jej odstęp od C, to $Q = Q' - P$
 $Q = Q' - P = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l} - P$
 Wzrost $Q = P$ jest to jednak siła poprzeczna belki przed, jak to siła poprzeczna na belki angaż; będzie
 $Q = Q_0 + \frac{M'' - M'}{l}$ 27a)
 Według równania 27a) siły poprzeczne belki angaż, mającej wartość w dowolnym odcinku, może znaleźć. Przebiegamy na krzywej przęsła powierzchniowy się poprzecznych na belki, przesyła i siły, przy z uwzględnieniem, wartości na krzywej przęsła i innych bez stały wyraz $\frac{M'' - M'}{l}$

Nazwijmy dalej O_m oddziaływanie w punkcie B , to siła poprzeczna przy B (rys. 8.) w m tem przęśle jest Q_m'' , a w $(m+1)$ em przęśle



Q_{m+1}' ,
a więc $Q_{m+1}' = Q_m'' + O_m$,
czyli $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$. . . 28)

a stąd dla $m=0$ $O_0 = Q_1'$, a dla $m=n$ $O_n = -Q_n''$.

§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone.

Dla ciężaru stałego jednostajnie ciągłego g mamy według równania 16) $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = -\frac{1}{2}gl^2$, więc

$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{2}gl_1^2$
 $\mathfrak{N}_2' = -\frac{1}{2}gl_2^2$.

Ustawmy teraz równania momentów podporowych według 22), a otrzymamy*)

sta poprzeczna m=1
 $2M_1(l_1+l_2) + M_2l_2 = -\frac{1}{2}g(l_1^3+l_2^3)$
m=2 $M_1l_2 + 2M_2(l_2+l_3) + M_3l_3 = -\frac{1}{2}g(l_2^3+l_3^3)$ 29)
m=n-1 $M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1}+l_n) = -\frac{1}{2}g(l_{n-1}^3+l_n^3)$

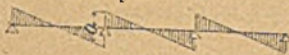
Dla wyznaczenia sił poprzecznych wstawmy w równanie 25) i 26) $R = gl$, $r = r_1 = \frac{1}{2}l$, a otrzymamy

sta poprzeczna w st. $Q' = \frac{1}{2}gl - \frac{M' - M''}{l}$, $Q'' = -\frac{1}{2}gl - \frac{M' - M''}{l}$ 30) *sta poprzeczna w B*

sta poprzeczna w dowolnym punkcie $Q = Q' - gx$ 31)

Otrzymujemy więc równanie linii prostej dla zmiennej x i widzimy, że linie sił poprzecznych w każdym przęśle będą proste (rys. 9.).

linia sił poprzecznych
rys. 9.



Jeżeli ciężar jednostkowy jest ten sam we wszystkich przęślach, to linie we wszystkich przęślach będą równoległe. Oddziaływania wyznaczamy z równania 28).

Momenty otrzymamy z równań 27)

$M = M' + Q'x - \frac{1}{2}gx^2$,

a wstawimy za Q' wartość z równ. 30)

$M = \frac{1}{2}gx(1-x) + M'(1 - \frac{x}{l}) + \frac{M''x}{l}$ 32)

Momenty w dowolnym punkcie

*) porów. Podręcznik Statyki budowlnej 2 wyd. str. 270.

sta poprzeczna $M = gx(1-x) + M'(1 - \frac{x}{l}) + \frac{M''x}{l}$ oznacza moment w dowolnym punkcie belki prostej sta obciążenia jednostkowego zupełnego. Wartość można wyznaczyć

$M = gx(1-x) + M'(1 - \frac{x}{l}) + \frac{M''x}{l}$ *przez momenty*
każdy bieżący punkt

To równanie przedstawia parabolę o osi pionowej. — Jeżeli ciężar jednostkowy jest ten sam, to parabole mają ten sam parametr (rys. 10.). Chcąc znaleźć naj-

linia momentów.

rys. 10.



żemy napisać

większe M , zróbmy $\frac{dM}{dx} = Q = 0$, a więc wedle równania 31) $Q' - gx = 0$. Nazywawszy x_1 odcinek dla najw M , możemy napisać

$$x_1 = \frac{Q'}{g} = \frac{1}{2}l - \frac{(M' - M'')}{ql} \dots \dots \dots 33)$$

Tę wartość wstawmy w równanie 32), a otrzymamy

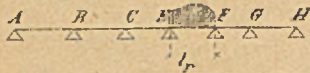
$$\text{najw } M = \frac{1}{8}gl^2 + \frac{1}{2}(M' + M'') + \frac{M' - M''}{2ql^2} \dots \dots \dots 34)$$

Jeżeli $M' = M''$, to $x_1 = \frac{1}{2}l$, a zatem najw M jest w środku przęsła, w innym razie wychyla się trochę ze środku.

13) §. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych.

Niechaj rite przęsła belki ciągłej będzie obciążone (rys. 11.), a inne przęsła nieobciążone, wtedy otrzymamy następujące równania momentów podporowych

rys. 11.



$$\left. \begin{aligned} 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 &= 0 & m=1 \\ M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 &= 0 & m=2 \\ \dots \dots \dots \\ M_{r-2}l_{r-1} + 2M_{r-1}(l_{r-1} + l_r) + M_r l_r &= \mathfrak{R}_r l_r & m=r-1 \\ M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} &= \mathfrak{R}_r l_r & m=r \\ \dots \dots \dots \\ M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) &= 0 & m=n-1 \end{aligned} \right\} \dots 35)$$

Z pierwszego równania mamy:

$$M_2 = -\frac{2M_1}{l_2}(l_1 + l_2) = -M_1 \left(2 + \frac{2l_1}{l_2} \right),$$

a więc M_2 i M_1 mają przeciwne znaki, a bez względu na znak $M_2 > 2M_1$. Dalej otrzymamy

$$M_3 = -M_2 \left(2 + \frac{2l_2}{l_3} \right) - M_1 \frac{l_2}{l_3} = -M_2 \left[2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 + \frac{M_1}{M_2} \right) \right],$$

M_2 jest ujemnym i $< \frac{1}{2}$, więc $\left(2 + \frac{M_1}{M_3} \right) > \frac{3}{2}$, a zatem bez względu na znak

$M_3 > M_2 \left(2 + \frac{3 l_2}{2 l_3}\right)$; M_3 znów ma znak przeciwny, niż M_2 . Ogólnie możemy napisać $M_{m+1} > M_m \left(2 + \frac{3 l_m}{2 l_{m+1}}\right)$ 36)

A zatem momenty podporowe przęseł nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i każdy następny jest więcej, niż 2 razy, większy od poprzedniego.

Nazwijmy $M_2 = -\mu_2 M_1$, a $M_3 = -\mu_3 M_2$, to wtedy $\mu_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$, zaś $\mu_3 = \frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} - \frac{l_2}{l_3 \mu_2}$. Jeżeli będziemy liczyli od drugiego końca belki H , to otrzymamy podobnie

$$v_{n-1} = \frac{2(l_n + l_{n-1})}{l_{n-1}}, \quad v_{n-2} = \frac{2(l_{n-1} + l_{n-2})}{l_{n-2}} - \frac{l_{n-1}}{v_{n-1}} \dots 37)$$

Ogólnie możemy napisać na podstawie równania 36)

$$\mu_m > 2 + \frac{3 l_{m-1}}{2 l_m} \dots 38)$$

Spółczynniki μ i v zależne są tylko od rozpiętości przęseł i dla danej belki dadzą się łatwo obliczyć.

Dla używanych stosunków $\frac{l_m}{l_{m+1}} = 0.9$ do 1.3 waha się μ i v między granicami 3.5 a 4.2 . *Stosunek więc momentu podporowego to następny wynosi około 4:1.* *

§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych.

Jeżeli przęśło jest nieobciążone, to $R=0$, więc dla m go przęsła otrzymamy z równ. 25)

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \dots 39)$$

Ponieważ tu M_m i M_{m-1} mają znaki przeciwny, więc Q_m będzie miało ten sam znak, co M_m , a więc naprzemian będzie raz dodatniem, drugi raz ujemnem. W $(m+1)$ przęśle będzie

$$Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}$$

Podzielnmy to równanie przez równ. 39), otrzymamy

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{M_{m+1} - M_m}{M_m - M_{m-1}} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{1 + \mu_{m+1}}{1 - \mu_{m+1}} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{-\mu_m(1 + \mu_{m+1})}{\mu_m + 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} \dots 40)$$

* Wpływ obciążenia rozciąga się na wszystkie przęsła aż do najbliższego, jaki jest nad w brzoście lub swartem przęśle jest taki mały, że praktycznie nie wliczamy go do rachuby.

μ_m i μ_{m+1} są dodatnie, więc cały wyraz jest ujemnym. Ponieważ $1 + \mu_{m+1} > 3$, a $1 + \frac{1}{\mu} < \frac{3}{2}$, więc

$$-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}} \dots \dots \dots 41)$$

Z tego wynika, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu, jeżeli, jak zwykle, $2l_m > l_{m+1}$.

Według równ. 28) jest $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$; ponieważ Q mają znaki przeciwne, więc z tego wynika, że O_m będzie miało ten sam znak, co Q_{m+1}' , a więc także będzie naprzemian dodatnie i ujemne. — Podobnie możemy napisać

$$O_{m+1} = -Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'.$$

Podzieliwszy to drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy

$$\frac{O_{m+1}}{O_m} = \frac{-Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'}{-Q_m'' + Q_{m+1}'} = \frac{-\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}} + 1}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1},$$

przyczem opuściliśmy

śmę znaczki, bo w przęsle nieobciążonem $Q' = Q'' = Q$.

Licznik jest tu dodatni i większy, niż $1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$, zaś mianownik ujemny i mniejszy, niż $1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}$, więc

$$-\frac{O_{m+1}}{O_m} > \frac{1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}} \dots \dots \dots 42)$$

Z równania 42) widzimy, że oddziaływania są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (jeżeli $4l_m$ nie jest $< l_{m+2}$). Momenty obliczymy z równania 27), mianowicie będzie $M = M_{m-1} + Q_m'x$.

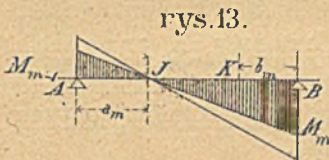
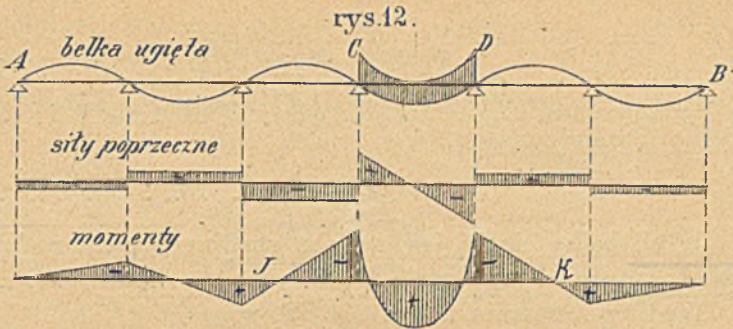
Wstawmy wartość za Q_m , to otrzymamy

$$M = M_{m-1} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m}x, \text{ czyli}$$

$$M = M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l_m}\right) + \frac{M_m x}{l_m} \dots \dots \dots 43)$$

Ze względu na x jest to równanie 1go stopnia, linia momentów będzie więc prosta. Wyniki te przedstawiliśmy na rysunku 12.

d'axe neutrale, voir page 12.



Jeżeli w każdym przęśle są momenty dodatnie i ujemne, to musi być w każdym przęśle punkt, w którym $M=0$. Nazwijmy a_m odnośnie x (rys. 13.), to z równania 43) otrzymamy

$$0 = M_{m-1} \left(1 - \frac{a_m}{l_m}\right) + \frac{M_m a_m}{l_m}, \text{ a stąd } a_m = \frac{M_{m-1} l_m}{M_{m-1} - M_m}, \text{ czyli } a_m = \frac{l_m}{1 - \frac{M_m}{M_{m-1}}}. \text{ A gdy } \frac{M_m}{M_{m-1}} = -\mu_m, \text{ będzie } a_m = \frac{l_m}{1 + \mu_m} \dots 44)$$

$$\mu_m = \frac{l_m}{a} - 1$$

Stąd widzimy, że ponieważ μ_m zależy tylko od rozpiętości, a nie zależy od obciążenia, a_m pozostaje niezmiennem, którekolwiek przęśło z prawej strony danego przęśła dowolnie jest obciążonem. Zawsze wtedy linia momentów przechodzi przez I , więc I jest punktem stałym (n. Fixpunkt, f. foyer, point fixe, a. inflexion point). Gdy jest obciążone przęśło z lewej strony danego przęśła, wtedy otrzymujemy punkt stały K , możemy wtedy podobnie napisać

$$b_m = \frac{l_m}{1 + \nu_m} \dots 45)$$

Moment w lewym punkcie stałym jest niezależnym od obciążenia z prawej strony, zaś moment w prawym punkcie stałym jest niezależnym od obciążenia z lewej strony.

Jeżeli belka jest na zerowej podporze poziomo utwierdzona, wtedy $l_0 = 0$,

$$\mu_1 = \frac{2l_1}{l_1} = 2 \text{ więc}$$

Festpunkt
 Wendepunkt
 Stützpunkt

Festpunkt nennt man die Hebelstützpunkte, die sich ergeben, wenn das rechte oder das linke Auflager des sonst gewichtlos belasteten Balkens infolge irgendwelcher Ursaache getrennt wird. Die Lage dieses Punktes ist von der Größe der Drehung des Auflagers unabhängig. Die Festpunktabstände sind von Umpassungswinkel des Balkens abhängig. Sie sind im allgemeinen um so größer, je fester die Umpassung

Wiemy, że współczynniki μ i ν są większe, niż 2, więc mianowniki równania 54) są dodatnie.

Według równania 12) jest $\mathfrak{N}_r' = 2\mathfrak{M}_r' + \mathfrak{M}_r''$,

$$\mathfrak{N}_r'' = 2\mathfrak{M}_r'' + \mathfrak{M}_r',$$

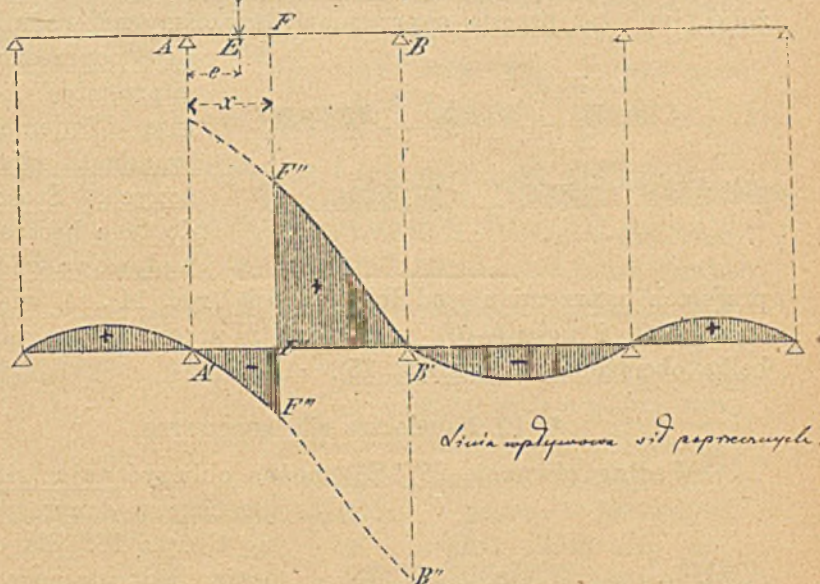
więc
$$\begin{aligned} \nu_r \mathfrak{N}_r' - \mathfrak{N}_r'' &= 2\nu_r \mathfrak{M}_r' + \nu_r \mathfrak{M}_r'' - 2\mathfrak{M}_r'' - \mathfrak{M}_r' = \\ &= \mathfrak{M}_r' (2\nu_r - 1) + \mathfrak{M}_r'' (\nu_r - 2). \end{aligned}$$

Ponieważ momenty \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' są zawsze ujemne (według rów. 13), a $2\nu_r - 1$ i $\nu_r - 2$ zawsze dodatnie, więc licznik jest ujemny, a mianownik dodatni; a zatem M_{r-1} jest ujemnem. To samo możemy udowodnić dla M_r . A zatem momenty podporowe przęsła obciążonego są zawsze ujemne.

6) §. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych.

a) Obciążenie odnośnego przęsła.

Niechaj będzie tylko jedno przęsło AB (rys. 14.) belki ciągłej obciążone, i to niech działa w punkcie E siła P , to



siła poprzeczna Q w punkcie F będzie według 25) i 26), gdy $x > e > 0$,

$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} - P, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots 55)$$

a gdy $l > e > x$

$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l}$$

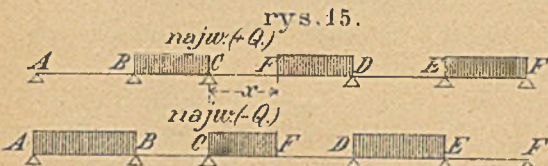
Z równań powyższych widzimy, że linia wpływowa będzie funkcją e wyższego stopnia, niż pierwszego (bo M' i M'' są $f(e)$), a więc będzie to linia krzywa. Wiemy jednak, że dla $e=0$ i $e=l$ jest $Q=0$ i że różnica rzędnych w F wynosi $P = -F''F'''$. Linie $A'F'''$ i $F''B'$ będą się mało co różniły od prostych, bo wyraz pierwszy jest stosunkowo mały. Z kształtu linii wpływowej widzimy, że dla najw Q musi być obciążona długość FB , a dla najmn Q długość AF , a więc tak samo, jak dla belki jednoprzęsłowej. Tak samo musi też dla ciężarów skupionych jeden ciężar, zwykle pierwszy, stać w F , największe i najgęstsze ciężary blisko F .

b) Obciążenie reszty przęsła.

Przypuśćmy teraz, że odnośne przęsło nie jest obciążone, wtedy $Q=Q'$. Z rys. 12. widzimy, że, aby to Q było dodatniem, musi być lewe sąsiednie przęsło obciążone, a prawe nieobciążone, inne zaś przęsła naprzemian, gdyżśmy udowodnili, że

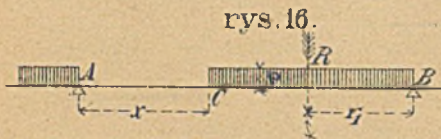
siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne w przęsłach nieobciążonych. Stosownie do tego będzie linia wpływowa w innych

przęsłach naprzemian pod lub nad osią (rys. 14). A więc dla najw $(+Q)$ i najw $(-Q)$ w punkcie F przęsła CD musi być belka obciążona według rys. 15).



§. 12. Największe siły poprzeczne.

Według równania 25) i 26) można obliczyć najw. siły poprzeczne w danym punkcie C (rys. 16.) dla obciążenia jednostajnego ciągłego. Wiemy, że przytem musi być długość BC obciążona.



ciężona.

Podstawmy w tych równaniach

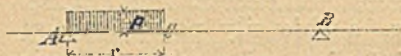
$$R = p(l-x), \quad r_1 = \frac{1}{2}(l-x), \quad P = 0,$$

to

$$\text{najw } (+Q) = \frac{M'' - M'}{1} + \frac{p(l-x)^2}{1} \dots \dots \dots 56)$$

Dla najmniejszości sił poprzecznych musi być obciążona długość AC (rys. 17), więc

rys. 17.



$$R = px, \quad r_1 = l - \frac{x}{2}, \quad P = px.$$

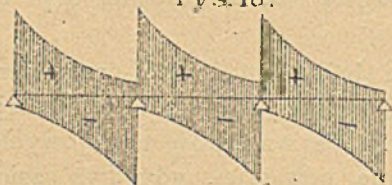
Wstawmy te wartości w równania 25) i 26), a otrzymamy

$$\text{najw } (-Q) = \frac{M'' - M'}{1} - \frac{\frac{1}{2}px^2}{1} \dots \dots \dots 57)$$

Według rys. 15 widzimy, że obciążenia, wywołujące najw $(+Q)$ i najw $(-Q)$, dopełniają się do obciążenia zupełnego, zatem

$$\text{najw } (-Q) = Q_z - \text{najw } (+Q) \dots \dots \dots 58)$$

rys. 18.



linie najw. i najmn. sił poprzecznych.

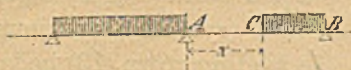
Linie największych i najmniejszych sił poprzecznych, będą prawie paraboliczne, wyraz pierwszy bowiem jest wprawdzie funkcją x , ale jest zazwyczaj bardzo małym (rys. 18).

§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne.

i wartości sił, obciążeniach.

Z rys. 18. i z poprzednich równań widzimy, że największe siły poprzeczne są na podporach i to na lewych każdego

rys. 19.



przesła dodatnie, na prawych ujemne. W rys. 19. oznaczyliśmy obciążenie dla najw $(+Q)$ w C . Bezwzględnie największe $(+Q)$ jest dla $x=0$, więc oba przesła, między którymi leży

punkt A , muszą być wtedy obciążone. W rys. 20. oznaczyliśmy

rys. 20.



znów obciążenie dla najmn Q w C . Bezwzględnie największe $(-Q)$ jest dla $x=l$, więc oba przesła, między którymi leży podpora B , muszą



być wtedy obciążone, reszta przęseł ma być naprzemian obciążoną. Z równ. 56) i 57) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } x=0 \text{ bezwzględnie } \textit{najw} (+Q) &= \frac{M'' - M'}{l} \\ \text{„ } x=l \text{ „ } \textit{najw} (-Q) &= \frac{M'' - M'}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 59)$$

☞ Ponieważ oddziaływanie równa się różnicy sił poprzecznych po obu stronach podpory, a obie siły poprzeczne są największe dla tego samego obciążenia, więc oddziaływanie będzie największe także dla tego samego obciążenia, t. j. gdy oba przęśla sąsiadnie są obciążone.

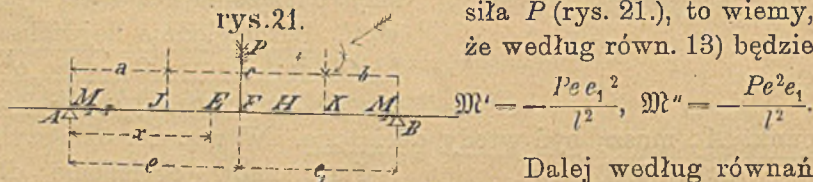
Najmniejsze oddziaływanie, powstające z powodu ciężaru ruchomego, jest ujemnem. Jeżeli oddziaływanie dodatnie, wywołane ciężarem własnym, jest większe od oddziaływania ujemnego z powodu ciężaru ruchomego, to oddziaływanie dla ciężaru własnego i ruchomego jest ostatecznie dodatnie, w przeciwnym razie ujemne.

W tym ostatnim wypadku belka musi być przytwierdzoną do podpory, gdyż inaczej podniosłaby się w tem miejscu, czego dopuścić nie możemy ze względów ustrojowych. Największe oddziaływanie ujemne powstaje, gdy dwa sąsiadnie przęśla są nieobciążone, a dalsze naprzemian obciążone i nieobciążone.

c) §. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów.

a) Obciążenie przęśla badanego.

Niechaj w punkcie F r tego przęśla belki ciąglej działa siła P (rys. 21.), to wiemy, że według równ. 13) będzie



Dalej według równań 54) mamy po opuszczeniu znaczka r

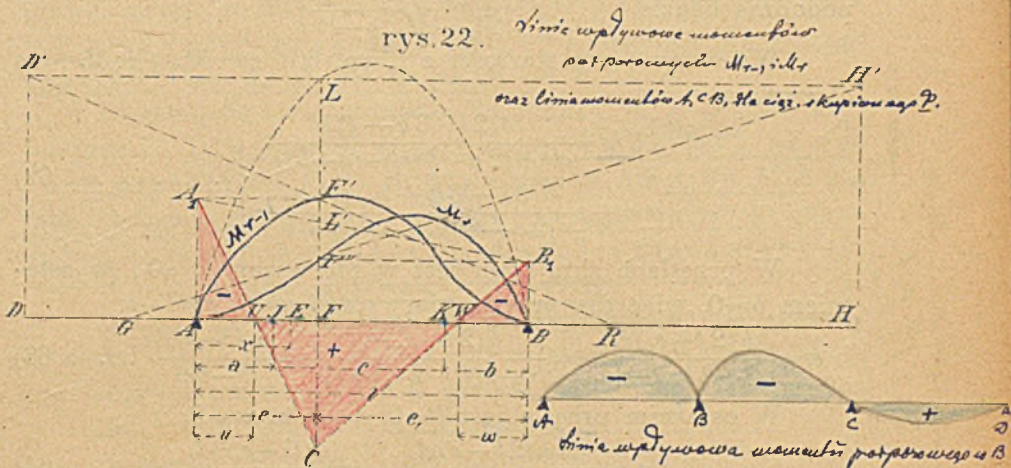
$$M_{r-1} = \frac{\nu \mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{\mu \nu - 1}, \quad M_r = \frac{\mu \mathfrak{N}'' - \mathfrak{N}'}{\mu \nu - 1}.$$

Podstawmy w tych równaniach wartości z równań 44) i 45) $\mu = \frac{l}{a} - 1$ i $\nu = \frac{l}{b} - 1$, z rys. 21. $c = l - a - b$ i wartości za \mathfrak{R}' i \mathfrak{R}'' z równ. 14), to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{Pae e_1}{cl^2} (2l - 3b - e) \\ M_r &= -\frac{Pbe e_1}{cl^2} (l - 3a + e) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 60)$$

Na podstawie równ. 60) dadzą się linie wpływowe dla momentów podporowych M_{r-1} i M_r według Śolina w następujący sposób wykreślić (rys. 22.). Zróbmy $BR = l - 3b = AB - 3BK$, $RD = \frac{c}{a} = AB \frac{IK}{AI}$, FL momentowi dla belki w dwu punktach podpartej $= \frac{Pe e_1}{l}$, $DD' = FL$ i wykreślmy $D'R$, to

$$FF' = \frac{DD' \cdot RF}{RD} = \frac{Pe e_1}{l} \cdot \frac{(l - 3b + e_1)}{\frac{c}{a}} = \frac{Pae_1 e}{cl^2} (2l - 3b - e) = M_{r-1}.$$



Podobnie otrzymamy $FF'' = M_r$. W ten sam sposób możemy otrzymać momenty M_{r-1} i M_r dla innego położenia siły P , a połączywszy końce rzędnych, przedstawiających momenty, otrzymamy linie wpływowe $AF'B$ i $AF''B$. Zróbmy teraz $AA_1 = FF'$, i $BB_1 = FF''$, połączmy A_1 z B_1 i zróbmy $L'C = FL$, to A_1CB_1 będzie przedstawiać linię momentów w prześle AB , jeżeli siła P działa w F . Ponieważ L' leży zawsze niżej L ,

więc C będzie zawsze poniżej AB , a zatem moment w punkcie zaczepienia siły jest zawsze dodatni. / Z rysunku widzimy, że jeżeli siła P leży w F , w punktach U i W jest moment równy zero. Wyznaczymy położenie tych punktów obojętnych.

Bewegliche Auflagerpunkte.

Z rysunku wynika, że $AA, U \sim UFC$, więc $u : (e - u) = = (-M_{r-1}) : M_1$, gdy $M_1 = FC$, zatem

$$u : e = (-M_{r-1}) : (M_1 - M_{r-1}), \text{ więc}$$

$$u = \frac{M_{r-1} e}{M_{r-1} - M_1}.$$

Z rysunku dalej wynika:

$$M_1 = CL' - FL' = \frac{Pe e_1}{l} + \left\{ M_r + (M_{r-1} - M_r) \frac{e_1}{l} \right\}.$$

W równaniu tem dajemy znak (+), bo M_r i M_{r-1} są ujemne.

Wstawivszy wartość za M_1 w poprzednie równanie, otrzymamy po skróceniu

$$u = \frac{M_{r-1} l}{M_{r-1} - M_r - Pe_1} \left. \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots 61)$$

podobnie będzie

$$w = \frac{M_r l}{M_r - M_{r-1} - Pe}$$

Wstawmy teraz wartości z równ. 60) za M_{r-1} i M_r , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2} \\ w &= \frac{b(2l - 3a - e_1)e_1l}{cl^2 + (2b - a)e_1l - (a + b)e_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 62)$$

W przęsłach skrajnych jest w pierwszym $a=0$, w ostatnim $b=0$, więc dla przęsła pierwszego $u=0$, $c=l-b$,

$$w = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{cl^2 + 2be_1l - be_1^2} = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{l^3 - b(l^2 - 2e_1l + e_1^2)} = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - be^2} \dots \dots 63)$$

W ostatnim przęsle jest $b=0$, $c=l-a$, $w=0$,

$$u = \frac{a(2l - e)el}{(l - a)l^2 + 2ael - ae^2} = \frac{a(l^2 - e_1^2)l}{l^3 - ae_1^2} \dots \dots 64)$$

Z rysunku 22. widzimy więc, że, jeżeli siła P stoi w F , momenty na długościach u i w sa ujemne, zaś na długości UW dodatnie.

Zbadajmy najprzód, jak wielkie może być u i w .

Z równ. 62) wynika, że dla $e=0$ jest $u=0$,

zaś dla $e=l$ jest $u=a$.

W równaniach 62, 63, 64 ujemny obrot =
rotacja. M.
 $c = l \left[\frac{l-w}{b} \right]$

Podobnie dla $e_1=0$ jest $w=0$,
dla $e_1=l$ jest $w=b$.

A zatem widzimy, że ~~gdzie~~ u może być najwięcej $=a$, a najw $w=b$, a zatem na długości IK między punktami stałymi moment jest zawsze dodatni, zaś na długościach AI i KB może być moment ujemnym lub dodatnim. Rozróżniamy z tego powodu trzy części w każdym przęśle, część pierwszą AI ,^{z ujemnym momentem} część drugą, średnią IK i trzecią KB . Rozumie się, że w przęśle ^{z dodatnim momentem} pierwszym część pierwsza $AI=0$, a w przęśle ostatnim $KB=0$.

A zatem możemy powiedzieć: W części średniej przęśla belki ciągłej każdy ciężar, gdziekolwiek na tem przęśle działający, sprawia moment dodatni, a więc dla największego M musi być to całe przęsło obciążone, dla najmniejszości wcale nieobciążone.

Dla punktu U , leżącego w części pierwszej, jest moment równy zeru, jeżeli P stoi w punkcie F . Jeżeli siła P posunie się na lewo, moment w punkcie U jest dodatnim, jeżeli na prawo, ujemnym. A zatem dla najw M w punkcie U w części pierwszej przęśla musi być to przęsło obciążone od A aż do F , dla najmn M od F do B .

To samo da się zastosować do punktu W , w trzeciej części przęśla. Dla najw M w punkcie W musi być obciążone przęsło od F do B , dla najmn M od A do F . A zatem badany przekrój jest zawsze dla większości obciążony, a dla najmniejszości nieobciążony.

b) Obciążenie reszty przęseł.

Z rys. 12. widzimy, że obciążenie przęśla CD sprawia w części I i II przęśla sąsiedniego na prawo momenty ujemne, a w części III dodatnie, dla przęśla sąsiedniego lewego zaś w części I dodatnie, w II i III ujemne.

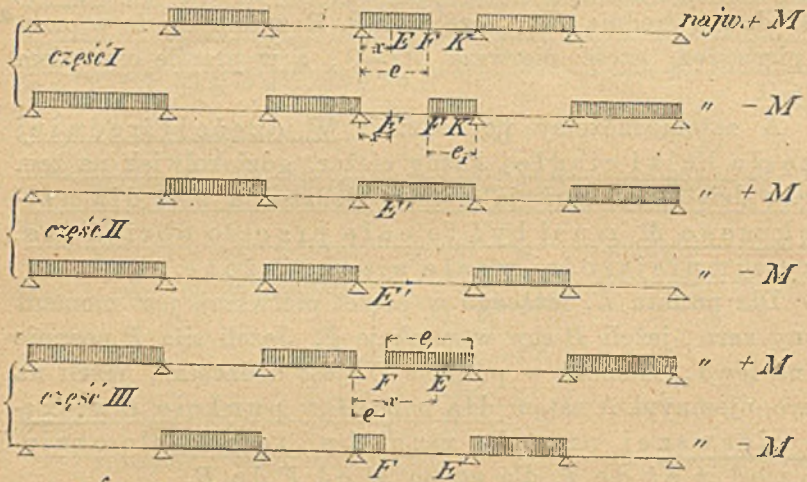
A zatem dla części I dla większości musi być sąsiednie prawe przęsło obciążone, sąsiednie lewe nieobciążone, a reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla części średniej muszą być sąsiednie oba przęśla nieobciążone, a inne naprzemian, dla części III zaś musi być sąsiednie prawe przęsło nieobciążone, a lewe obciążone, inne zaś naprzemian.

Ogólnie więc możemy powiedzieć dla wszystkich trzech części: Do części obciążonej danego przęśla przy-

tyka przeszło nieobciążone, do części nieobciążonej obciążone przeszło. Inne przeszła mają być naprzemian obciążone.

W rys. 23. wykreśliłmy schemat najniekorzystniejszych obciążeń ciężarem jednostajnie rozłożonym. Jeżeli mamy belkę

rys. 23.



Schemat najniekorzystniejszych obciążeń ciężarem jednostajnym.

obciążać układem ciężarów skupionych, to ponieważ tu otrzymamy linie wpływowe krzywe, nie uzyskujemy tak prostych prawideł dla najniekorzystniejszego położenia, jak dla belki jednoprzęsłowej. Linia wpływowa będzie miała jednak w danym przęśle także kształt trójkąta, lecz o bokach krzywych, z wierzchołkiem w punkcie badanym tak, że w przybliżeniu możemy zastosować dla najniekorzystniejszego obciążenia prawidła dla momentów belki w dwu punktach podpartej.

Co do obciążenia reszty przęseł kształt linii wpływowych, które otrzymamy później wykreślnie, da nam pewne wskazówki co do ustawienia ciężarów skupionych w rozmaitych przęslach. Zwrócić jednak musimy uwagę, że obciążenie tego rodzaju, jak na rys. 23., jest w praktyce nieprawdopodobnem, a przy mostach kolejowych wprost niemożliwem. Przy mostach drogowych, gdzie obciążenie takie jest możliwe, przypuszczamy przy obliczeniu rzeczywiście ciężar ruchomy podzie-

lony na kilka części, przy kolejowych możnaby albo przypuszczając jeden pociąg przyjąć na długości, któraby nie powinna być obciążoną, wozy próżne ważące 9 t dla kolei normalnotorowych i wąskotorowych z jazdą na podwoziach, zaś 6 ton dla kolei wąskotorowych bez jazdy na podwoziach, a zresztą parowozy i wozy ładowne, albo też przyjmujemy tylko dane przeszło obciążone. Przyjmowanie niemożliwych obciążeń dla obliczenia belki wydaje nam się nieusprawiedliwionem.

Rozporządzenie austr. minist. kolejow. z d. 1. września 1904. §. 7. ust. 18. Przy dźwigarach, spoczywających na więcej, niż dwu podporach, tudzież przy dźwigarach łukowych należy przyjąć kilka pociągów w najniekorzystniejszym położeniu celem obliczenia największych możliwych sił zewnętrznych.

§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego.

a) Średnia część przeszła. Dla największych momentów musi być dane przeszło całe obciążone, dla najmniejszości zaś całe nieobciążone, reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla *najw* ($-M$) otrzymamy z równ. 25) i 27), gdy $P=R=0$,

$$\underline{\text{najw}} (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} \dots \dots \dots 65)$$

Jestto równanie linii prostej.

Jeżeli $M' = M''$, to *najw* ($-M$) = M' ; $\dots \dots \dots 66)$

jestto równanie linii poziomej.

Podobnie otrzymamy z równ. 25) i 27)

$$\underline{\text{najw}} (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} px(1-x) \dots \dots 67)$$

b) Pierwsza część przeszła. Dla *najw* ($-M$) musi być przeszło dane AB obciążone od F do B (rys. 22.). Według równ. 25) otrzymamy więc $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe_1^2}{2l}$.

Wedle równ. 27) $M = M' + Q'x$, więc

$$\underline{\text{najw}} (-M) = M' - \frac{M' - M''}{l} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \dots \dots \dots 68)$$

Dla *najw* ($+M$) musi być przeszło AB obciążone od A do F . Tu jest $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe(2l-e)}{2l}$, a $M = M' + Q'x - \frac{1}{2} px^2$, więc

$$\underline{\text{najw}} (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{px}{2l} (2el - e^2 - lx) \dots \dots 69)$$

c) Trzecia część belki. Podobnie otrzymamy dla trzeciej części

$$\underline{\text{najw } (-M)} = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{pe^2(1-x)}{2l} \dots 70$$

$$\underline{\text{najw } (+M)} = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p(1-x)(lx - e^3)}{2l} \dots 71$$

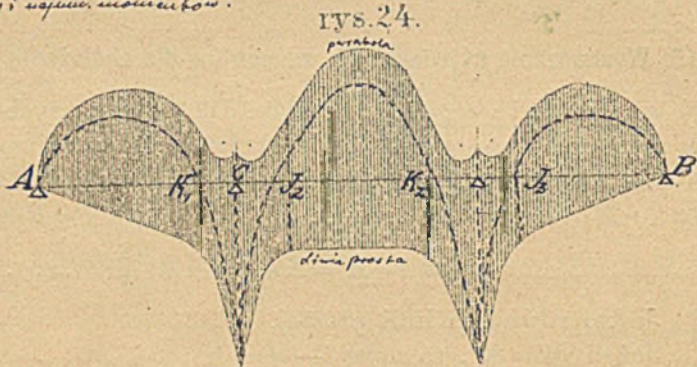
~ We wszystkich częściach przęśła jest

$$\underline{\text{najw } (+M) + \text{najw } (-M)} = M_2, \dots 72$$

jeżeli M_2 oznacza moment dla obciążenia zupełnego.

Jeżeli wykreślnie przedstawimy linie największych i najmniejszych momentów, to otrzymamy rysunek 24. Dla ujem-

linie najw i najm. momentów.



nych największych momentów otrzymujemy w środkowej części każdego przęśła linie proste, dla dodatnich parabole.

§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego.

W poprzednich paragrafach przypuszczaliśmy, że ciężar jednostkowy p jest w danym przęśle jednostajny. Dla mostów drogowych jest ciężar ruchomy p dla wszystkich przęseł jednostajny, jeśli liczymy na podstawie obciążenia tłumem ludzi. Jeżeli rozpiętości są nierówne, może się wszelako ciężar własny g poszczególnych przęseł różnić. Przy mostach kolejowych jednak, jeżeli rozpiętość przęseł jest nierówna, przyjąć należy dla rozmaitych przęseł różne wartości nie tylko dla ciężaru własnego g , ale też i dla ciężaru zastępczego p , jeżeli wogóle używamy ciężaru zastępczego. Dla ciężaru zastępczego dla sił poprzecznych należy przyjmować zmienne p nie według długości przęseł, lecz według długości obciążonej.

Rozporządzenie austriackie z r. 1904 nie zna ciężarów zastępczych, liczyć więc należy największe siły zewnętrzne, obciążając belki ciągle kilku pociągami normalnymi.

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

a) §. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej.

Jeżeli rozpiętości pierwszego i drugiego przęsła belki dwuprzęsłowej nazwiemy l_1 i l_2 (rys. 25.), to otrzymamy według równ. 22.), zważywszy, że

rys. 25.

$$M_0 = 0 \text{ i } M_2 = 0,$$

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = \mathfrak{R}_1'' l_1 + \mathfrak{R}_2' l_2,$$

więc moment podporowy na środkowej podporze B

$$M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1'' l_1 + \mathfrak{R}_2' l_2}{2(l_1 + l_2)} \dots \dots \dots 73)$$

Jeżeli oba przęsła są równe, to $l_1 = l_2 = l$, więc

$$M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1'' + \mathfrak{R}_2'}{4} \dots \dots \dots 74)$$

Przypuśćmy, że p oznacza ciężar jednostkowy ruchomy. Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 26.), to

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{1}{4} p l_1^2, \quad \mathfrak{R}_2' = 0.$$

rys. 26. Wstawivszy to w równ. 73),

otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p l_1^3}{8(l_1 + l_2)} \dots \dots \dots 75)$$

Załóżmy, że $l_1 = \vartheta l$, $l_2 = l$, to

$$M_1 = -\frac{\vartheta}{1 + \vartheta} \frac{p l_1^2}{8} = -\frac{\vartheta^3}{1 + \vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 76)$$

rys. 27. Jeżeli drugie przęsło jest ob-

ciążone (rys. 27.), to otrzymamy odnośne wzory, jeżeli zamienimy l_1 na l_2 i l_2 na l_1 , zatem

$$M_1 = -\frac{p l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{1}{1 + \vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 77)$$

Jeżeli teraz oba przęsła są obciążone, to otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p l_1^3 + p l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(1 + \vartheta^3) p l^2}{8(1 + \vartheta)} \dots \dots \dots 78)$$

Wyrazy $\frac{\vartheta^3}{1+\vartheta}$ i $\frac{1}{1+\vartheta}$ obliczył Leber dla rozmaitych używanych stosunków ϑ . $\frac{1+\vartheta^3}{1+\vartheta}$ otrzymamy, dodawszy oba powyższe współczynniki.

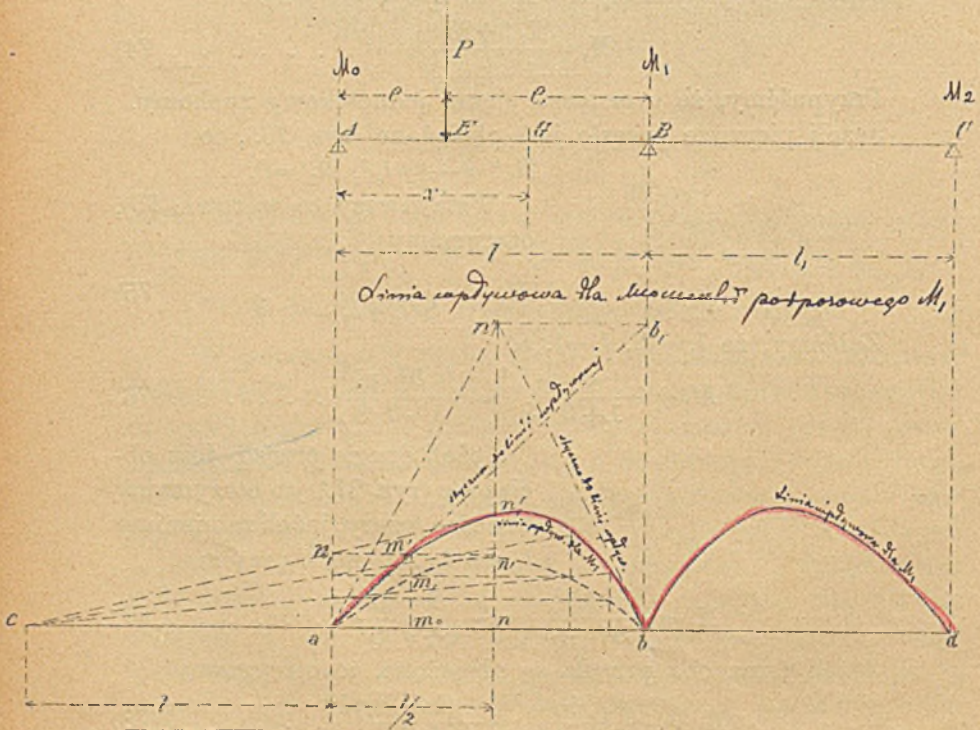
Podajemy tu niektóre wartości:

$\vartheta=0.5$	0.6	0.7	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$\frac{\vartheta^3}{1+\vartheta}$	0.0833	0.1350	0.2018	0.2411	0.2844	0.3320	0.3837	0.4397
$\frac{1}{1+\vartheta}$	0.6667	0.6250	0.5882	0.5714	0.5556	0.5405	0.5263	0.5128
$\frac{1+\vartheta^3}{1+\vartheta}$	0.7500	0.7600	0.7900	0.8125	0.8400	0.8725	0.9100	0.9525
								1.0

§. 18. Linie wpływowo.

Przypuśćmy, że $l_1=l_2=l$ i wykreślmy najprzód linie wpływo dla M_1 , idąc za wywodami Kecka*). Wedle równ. 74)

rys. 28.



*) Vorträge über Elastizitätslehre str. 100.

mamy $M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1'' + \mathfrak{R}_2'}{4}$. Jeżeli siła $P=1$ działa w E w odstępnie e od A (rys. 28.), to wedle 14)

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{l^2}$$

$\mathfrak{R}_2' = 0$, więc

$$M_1 = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{4l^2} = -\frac{Pe(l+e)(l-e)}{4l^2} = -Pl \frac{e(l+e)l-e}{4l^2 l}$$

Dla $P=1$ $\frac{M_1}{l} = \frac{e(l-e)}{4l^2} \cdot \frac{l+e}{l} = u \cdot v \dots \dots \dots 79)$

gdy $u = \frac{e(l-e)}{4l^2}$, $v = \frac{l+e}{l}$.

Wyraz ten da się skonstruować, $u = \frac{e(l-e)}{4l^2}$ przedstawia parabolę. Dla $e = \frac{l}{2}$ $u = \frac{1}{16} = nn'$. Przez a n' i b wykreślmy parabolę. Rzędnię tej paraboli musimy powiększyć w stosunku $\frac{l+e}{l}$, więc n. p. dla punktu n kreślimy nn_1 poziomą, łączymy cn_1 aż do n' . To samo robimy z innymi punktami, a zupełnie taką samą linię kreślimy w drugim prześle.

Wyznamy styczną kąta nachylenia stycznej do linii wpływowej z równ. 79), a otrzymamy

$$\text{st } \varphi = \frac{l^2 - 3e^2}{4l^3} \dots \dots \dots 80)$$

więc dla $e=0$ $\text{st } \varphi = \frac{1}{4l}$

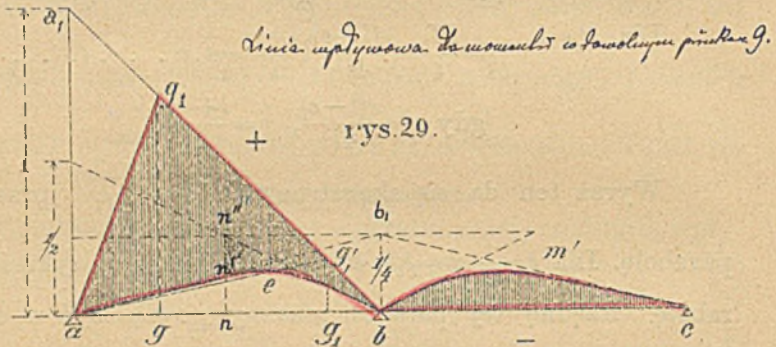
dla $e=l$ $\text{st } \varphi = -\frac{1}{2l}$

Jeżeli więc zrobimy $nn'' = \frac{1}{4}l = bb_1$, to ab_1 i $n''b$ są stycznymi do linii wpływowej. (rys. 29)

☞ Dla dowolnego punktu G w odstępnie x od A jest wedle równ. 79), ponieważ $M' = 0$, $M'' = M_1$, $M = \frac{M_1 x}{l} + X$, albo gdy M_1 oznacza wartość bez względu na znak, to ponieważ M_1 jest ujemne, $M = X - \frac{M_1 x}{l} = x \left(\frac{X}{x} - \frac{M_1}{l} \right)$, $\dots \dots \dots 81)$

przyczem X oznacza moment belki zwykłej w dwu punktach podpartej.

W rysunku 29. wyznaczyliśmy wedle poprzedniego linie wpływowe dla $\frac{M_1}{l}$. Rzędne tych linii mamy według 81) odciągnąć od rzędnych linii $\frac{X}{x}$, które, jak wiadomo, otrzymamy, zrobiwszy $aa_1=1$, wykreśliwszy w g pionową gg_1 i połączywszy a z g_1 . Wtedy powierzchnia wpływowa dodatnia jest ag_1bn' ,



ujemna $bm'c$. Jeżeli punkt g jednak zbliżać się będzie do b , to linia ag_1 będzie się obracać około a , otrzymamy położenie jej stycznej do linii $an'b$, a w dalszym ciągu posuwania się przecinać ona będzie $an'b$. Wtedy otrzymamy punkt obojętny e .

☞ Dla siły poprzecznej w punkcie G (rys. 28.) jest wedle 25) i 26) ze względu, że $M'=0$, $M''=M_1$, $Q=\frac{M_1}{l} + \frac{Rr_1}{l} - P$, albo gdy $[Q]=\frac{Rr_1}{l} - P$ jest siłą poprzeczną dla belki w dwu punktach podpartej, to gdy uwzględnimy, że M_1 ujemne,

$$Q=[Q]-\frac{M_1}{l}.$$

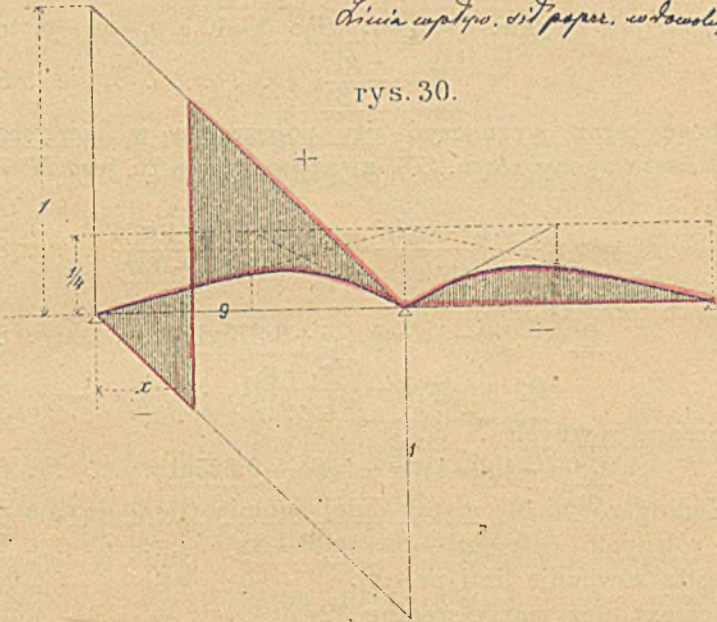
Wedle tego równania wykreślono na rys. 30. linią wpływową dla dowolnego punktu G .

☞ Griot obliczył rzędne linii wpływowych i ułożył wyniki w tablicach*). Podajemy tu tablicę dla $l_1=l_2=l$, przyczem wszystkie cyfry w danym razie pomnożyć należy przez l (rys. 31.).

*) por. Griot Gustaw. Interpolierbare Tabellen zum raschen Antragen der Einflusslinien für Momente und Scheerkräfte. Zürich 1904.

Linia eptydowa. 117 papier. wstawolym punktow 9.

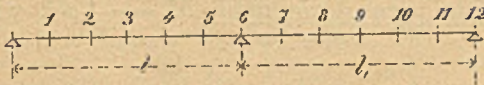
rys. 30.



Momenty w *tm.*

Punkty	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.1323	0.0988	0.0677	0.0402	0.0172	0	-0.0106	-0.0154	-0.0156	-0.0123	-0.0068	0
2	0.0976	0.1976	0.1354	0.0803	0.0348	0	-0.0212	-0.0309	-0.0313	-0.0247	-0.0135	0
3	0.0632	0.1298	0.2031	0.1205	0.0516	0	-0.0318	-0.0463	-0.0469	-0.0370	-0.0203	0
4	0.0285	0.0619	0.1041	0.1606	0.0687	0	-0.0424	-0.0617	-0.0626	-0.0494	-0.0270	0
5	-0.0060	-0.0061	0.0051	0.0340	0.0860	0	-0.0530	-0.0772	-0.0782	-0.0617	-0.0338	0
6	-0.0405	-0.0740	-0.0938	-0.0926	-0.0636							

rys. 31.



Siły poprzeczne w tonach.

Punkty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1.0000	0.7928	0.5927	0.4062	0.2407	0.1031	0	-0.0636	-0.0926	-0.0938	-0.0740	-0.405	0

§. 19. Ciężar własny.

Dla ciężaru własnego otrzymamy M_1 , moment podporowy w B , z wzoru 78), jeśli tylko zamiast p wstawimy g_1 i g_2 , więc

$$M_1 = -\frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(\vartheta^3 g_1 + g_2) l^2}{8(1 + \vartheta)} \dots \dots \dots 82)$$

Jeżeli, jak zwykle, $l_1 = l_2 = l$, więc $\vartheta = 1$, a $g_1 = g_2 = g$, to

$$M_1 = -\frac{g l^2}{8} \dots \dots \dots 83)$$

Chcąc teraz wyznaczyć siły poprzeczne w pierwszym przęśle, zastosujemy równ. 30), zważywszy, że tu jest $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$Q' = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1} = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{(\vartheta^3 g_1 + g_2) l}{8(1 + \vartheta) \vartheta} \dots \dots 84)$$

a dla $\vartheta = 1$ i $g_1 = g_2 = g$,

$$Q' = -\frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l = \frac{3}{8} g l = +0.375 g l; \dots \dots \dots 85)$$

zaś

$$Q'' = -\frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{\vartheta^3 g_1 + g_2}{8(1 + \vartheta) \vartheta} l, \dots \dots \dots 86)$$

a dla przęseł równych

$$Q'' = -\frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l = -\frac{5}{8} g l = -0.625 g l \dots \dots \dots 87)$$

Według równ. 31) mamy dalej ogólnie $Q = Q' - g x$, a dla przęseł równych $Q = \frac{3}{8} g l - g x = \frac{1}{8} g (3l - 8x) \dots \dots \dots 88)$

Jestto równanie linii prostej.

Moment otrzymamy według 32)

$$M = \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) + \frac{M_1 x}{l_1}, \dots \dots \dots 89)$$

a dla przęseł równych będzie

$$M = \frac{1}{2} g x (l - x) - \frac{1}{8} g l^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{8} g x (3l - 4x) \dots \dots \dots 90)$$

Jestto równanie paraboli.

Dla najw M niech będzie $x = x_1$, to znajdziemy x_1 , różniczkując równanie 89), więc $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} g_1 (l_1 - 2x_1) + \frac{M_1}{l_1} = 0$, zatem

$$x_1 = \frac{1}{2} l_1 + \frac{M_1}{g_1 l_1}. \text{ Dla przęseł równych } M_1 = -\frac{1}{8} g l^2, \text{ więc } x_1 = \frac{3}{8} l = 0.375 l.$$

Wstawmy tę wartość w równ. 90), to będziemy mieli

$$\text{najw } M = \frac{1}{8} g \cdot \frac{3}{8} l (3l - \frac{3}{2} l) = \frac{9}{128} g l^2 = 0.0703175 g l^2 \dots \dots 91)$$

Z równ. 90) widzimy, że $M = 0$ dla $3l = 4x'$, więc dla

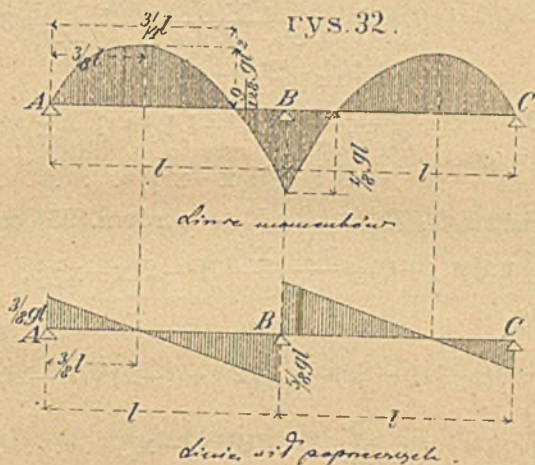
$$x' = \frac{3}{4} l = 0.75 l.$$

Wyniki te zestawiliśmy na rys. 32., z którego jeszcze widzimy, że oddziaływanie w B jest

$$0_1 = \frac{5}{8} g l + \frac{5}{8} g l = \frac{5}{4} g l \dots \dots \dots 92)$$

Ogólnie jest

$$O_1 = \frac{1}{8l_1l_2} [g_1l_1^2(4l_2 + l_1) + g_2l_2^2(4l_1 + l_2)] \dots 93)$$

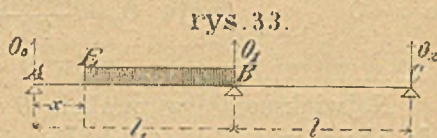


B1 §. 20. Ciężar ruchomy.

Teraz obliczymy siły zewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym.

a) Siły poprzeczne.

Dla najw (+Q) w p. E (rys. 33.) musi być obciążona długość EB, a drugie przęsło nieobciążone.



Otrzymamy więc z równ. 20)

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{R}_2' = 0.$$

Moment w B będzie według równ. 73)

$$M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1'' l_1}{2(l_1 + l_2)} = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{8l_1(l_1 + l_2)} \dots 94)$$

Dalej otrzymamy wedle równ. 56), wstawivszy $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$\text{najw } (+Q) = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} + \frac{1}{2} \frac{p(l_1 - x)^2}{l_1}$$

czyli najw (+Q) = $\frac{p(l_1 - x)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} \{3l_1^2 + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2\}$. . . 95)

Ponieważ dla obciążenia zupełnego według równ. 84) i 31)

$Q_2 = \frac{1}{2} p l_1 - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - px$, więc otrzymamy najw. ujemną siłę poprzeczną, odciągawszy najw (+Q) od Q₂, zatem

$$\text{najw}(-Q) = \frac{1}{2} p(l_1 - 2x) - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{p(l_1 - x)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} (3l_1^2 + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2)$$

$$\text{najw}(-Q) = \frac{1}{2} p(l_1 - 2x) - \frac{P}{8l_1^2(l_1 + l_2)} \{l_1^4 + l_1l_2^3 + (l_1 - x)^2(3l_1^2 + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2)\} \dots \dots \dots 96)$$

Jeżeli $l_1 = l_2 = l$, zatem $\vartheta = 1$, to z równ. 95) otrzymamy

$$\text{najw} (+Q) = \frac{p(1-x)^2}{16l^3} \{7l^2 - 2lx - x^2\}, \dots \dots \dots 97)$$

a z równ. 96)

$$\text{najw}(-Q) = \frac{1}{2} p(l - 2x) - \frac{p}{16l^3} (2l^4 + (l-x)^2(7l^2 - 2lx - x^2))$$

$$\text{najw}(-Q) = -\frac{P}{16l^3} (l^4 + 10l^2x^2 - x^4) \dots \dots \dots 98)$$

b) Ciśnienia na podpory. O_0 , ciśnienie na podporę A, jest największe, gdy pierwsze przęsło jest obciążone, a drugie nie. Otrzymamy więc z równ. 95)

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } x=0 \quad \text{najw } O_0 &= \frac{pl_1(3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} \\ \text{a dla } l_1=l_2=l \quad \text{najw } O_0 &= \frac{7}{16} pl \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 99)$$

Największe O_1 w punkcie B otrzymamy, gdy oba przęsła będą obciążone, a więc jak dla ciężaru własnego według 93)

$$\text{najw } O_1 = \frac{P}{8l_1l_2} [l_1^2(4l_2 + l_1) + l_2^2(4l_1 + l_2)] \dots \dots \dots 100)$$

a dla równych przeseł $\text{najw } O_1 = \frac{5}{4} pl$

Najw (-O₀) powstaje, gdy drugie przęsło jest obciążone, a pierwsze nie. Wtedy otrzymamy z równ. 84) i 99), odciągawszy O_0 dla obciążenia zupełnego od najw O₀

$$\left. \begin{aligned} \text{najw}(-O_0)_p &= \frac{1}{2} pl_1 - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{pl_1(3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} \\ \text{najw}(-\vartheta) &= -\frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 101)$$

Dla przeseł równych jest najw (-O)_p = - $\frac{1}{16} pl$

Równocześnie działa jednak ciężar własny, więc

$$\begin{aligned} \text{najw } (-O_0) &= \frac{1}{2}g_1l_1 - \frac{g_1l_1^3 + g_2l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1}, \\ \text{najw } (-O_0) &= \frac{4g_1(l_1 + l_2)l_1^2 - (g_1l_1^3 + g_2l_2^3 + pl_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1}. \end{aligned} \quad . . . \quad 102)$$

A więc $\text{najw } (-O_0)$ jest ujemnem, jeżeli

$$g_1l_1^3 + (g_2 + p)l_2^3 > 4g_1(l_1 + l_2)l_1^2,$$

czyli jeżeli
$$p > \left(3\frac{l_1^3}{l_2^3} + 4\frac{l_1^2}{l_2} \right) g_1 - g_2. \quad \quad 103)$$

Jeżeli rozpiętości są równe, oddziaływanie O_0 jest ujemne, gdy $p > 6g$.

Możliwem zatem jest oddziaływanie ujemne tylko, jeśli p w stosunku do g_1 i g_2 jest wielkiem i jeżeli l_2 , a zatem i g_2 jest znacznie większe, niż l_1 , względnie g_1 . Przy równych długościach przęsł mogłoby to nastąpić tylko przy bardzo małych rozpiętościach około $l = 10 \text{ m}$. O_1 nie może być wcale ujemnem.

c) Momenty. Przęsło pierwsze, część druga.

W przęśle skrajnem, jak wiemy, niema części pierwszej, tu punkt stały wpada na punkt A (rys. 34.). Według równ. 37) mamy

$$v_1 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1},$$

więc według 45)

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + v_1} = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2}. \quad \quad 104)$$

a dla $l_1 = l_2 = l$

$$b = \frac{1}{5}l = 0.2l \quad \quad 105)$$

Dla $\text{najw } (-M)$ musi być pierwsze przęsło nieobciążone

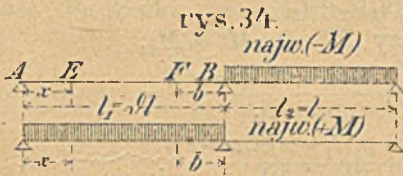
a drugie obciążone, więc według 77. $M_1 = \frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)}$.

Wstawivszy w równ. 65) $M' = 0$, $M'' = M_1$, otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = M_1 \frac{x}{l_1} = \frac{pl_2^3 x}{8l_1(l_1 + l_2)} \quad \quad 106)$$

$\text{Najw } (+M)$ jest dla obciążenia uzupełniającego, więc uwzględniając równ. 89),

$$\text{najw } (+M) = \frac{1}{2}px(l_1 - x) - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)x}{8(l_1 + l_2)l_1} + \frac{pl_2^3 x}{8l_1(l_1 + l_2)},$$



$$\text{najw } (+M) = \frac{px}{3(l_1 + l_2)} [3l_1 + 4l_2]l_1 - 4(l_1 + l_2)x] \dots 107)$$

Dla pręseł równych otrzymamy z równ. 106)

$$\text{najw } M = -\frac{1}{16}plx \dots 108)$$

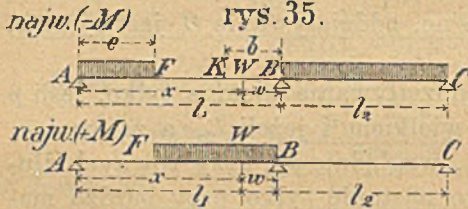
a z równ. 107) $\text{najw } (+M) = \frac{1}{16}px(7l - 8x) \dots 109)$

Pręseło pierwsze, część trzecia.

Najw (+M) (rys. 35)

będzie w punkcie *W* części trzeciej, jeśli obciążymy długość *FB*, a drugiego pręseła nie będziemy wcale obciążać.

Wtedy wedle 20)



$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p(l_1^2 - e^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{N}_2' = 0,$$

a zatem wedle równ. 73)

$$M_1 = -\frac{p(l_1^2 - e^2)^2}{8l_1(l_1 + l_2)},$$

a wedle równ. 71), wstawiając $M' = 0, M'' = M_1,$

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{p(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1} = \\ &= -\frac{p(l_1^2 - e^2)^2 x}{8l_1^2(l_1 + l_2)} + \frac{p(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1}, \end{aligned}$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{P}{8l_1^2(l_1 + l_2)} [(4l_1 l_2 (l_1^2 + e^2) + 3l_1^2 (l_1^2 + 2e^2) - e^4)x + -4l_1^2 (l_1 + l_2)(x^2 + e^2)] \dots 110)$$

Długość zaś *e* znajdziemy z równ. 63)

$$w = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - be^2} \quad \text{dla } b = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2}$$

$$e = l \sqrt{\frac{(b-w)l}{b(l-w)}}, \dots 111)$$

przyczem

$$w = l - x \dots 112)$$

Możnaby teraz wartość tę dla *e* wstawić w równanie 110) i otrzymalibyśmy *najw* (+M) jako funkcję *x*. Odciągnąwszy tę wartość od wartości dla obciążenia zupełnego, otrzymalibyśmy *najw* (-M). Ale ponieważ wzory te byłyby za zawile, więc zaniechamy ich wyprowadzenia. Wskazanym jednak po-

wyżej sposobem możemy w każdym danym przypadku wyznaczyć *najw* (+*M*) i *najw* (−*M*).

Jeśli $l_1 = l_2 = l$, to otrzymamy z równ. 110)

$$\underline{najw (+M) = \frac{p}{16l^3}(7l^4x + 10l^2ex - e^4x - 8l^2e^2 - 8l^3x^2)} \quad . \quad 113)$$

Z równ. 111) otrzymamy dla $b = \frac{1}{5}l$

$$e = l \sqrt{\frac{l(\frac{1}{5}l - l + x)}{\frac{1}{5}lx}} - l \sqrt{5 - 4\frac{l}{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114)$$

Wstawivszy tę wartość za *e* w 113), otrzymamy

$$\underline{najw (+M) = \frac{1}{8}p(4lx - x^2 - 5l^2 + 2\frac{l^3}{x})} \quad . \quad . \quad . \quad 115)$$

*M*_z dla obciążenia zupełnego jest według równ. 90)

$$M_z = -\frac{1}{8}px(4x - 3l), \text{ więc}$$

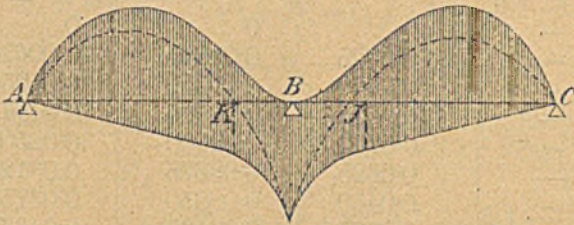
$$najw (-M) = -\frac{1}{8}px(4x - 3l) - najw(+M), \text{ zatem}$$

$$\underline{najw (-M) = -\frac{1}{8}pl^2(13\frac{x}{l} - 20 + 8\frac{l}{x})} \quad . \quad . \quad . \quad 116)$$

Na podstawie tych równań wykresiliśmy linie *najw*. momentów dla belki dwuprzęsłowej o równych przęsłach (rys.

Linie najw. i najm. momentów.

rys. 36.



36.). Dla takiejże belki obliczył Winkler tablice według poprzednich wzorów, które tu podajemy.

Ciśnienie na podpory.

$$najw (+O_0) = 0.3750 gl + 0.4375 pl$$

$$najw (-O_0) = 0.3750 gl - 0.0625 pl$$

$$najw (+O_1) = 1.25 (g + p) l$$

$$najm (+O_1) = 1.25 gl.$$

Siły poprzeczne.

<i>x</i>	Siły poprzeczne		
	ciężar własny	ciężar ruchomy	
	<i>Q</i>	<i>najw (+Q)</i>	<i>najw (-Q)</i>
0	+0.375	+ 0.4375	- 0.0625
0.1	+0.275	0.3437	0.0687
0.2	+0.175	0.2624	0.0874
0.3	+0.075	0.1932	0.1182
0.375	0	0.1491	0.1491
0.4	-0.025	0.1359	0.1609
0.5	-0.125	0.0898	0.2148
0.6	-0.225	0.0544	0.2794
0.7	-0.325	0.0287	0.3537
0.8	-0.425	0.0119	0.4369
0.9	-0.525	0.0027	0.5277
1.0	-0.625	0	0.6250
<i>l</i>	<i>gl</i>	<i>pl</i>	<i>pl</i>

M o m e n t y.

<i>x</i>	<i>e</i>	m o m e n t		
		ciężar własny	ciężar ruchomy	
		<i>M</i>	<i>najw (+M)</i>	<i>najw (-M)</i>
0	—	0	+	-
0.1	—	+0.0325	0.03875	0.00620
0.2	—	0.0550	0.06750	0.01250
0.3	—	0.0675	0.08625	0.01875
0.4	—	0.0700	0.09500	0.02500
0.5	—	0.0625	0.09375	0.03125
0.6	—	0.0450	0.08250	0.03750
0.7	—	0.0175	0.06125	0.04375
0.75	—	0	0.04688	0.04688
0.8	0	-0.0200	0.03000	0.05000
0.85	0.5423	-0.0425	0.01523	0.05773
0.9	0.7454	-0.0675	0.00611	0.07361
0.95	0.8885	-0.0950	0.00138	0.09638
1.00	1.00	-0.1250	0	0.12500
<i>l</i>	<i>l</i>	<i>gl</i> ²	<i>pl</i> ²	<i>pl</i> ²

$najw (+M_g) = +0.07031 gl^2$, dla $x=0.3750 l$.

$n (+M_p) = +0.09566 pl^2$, $n x=0.4374 l$.

6) §. 21. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej.

Tu przypuścimy, że przęsła skrajne są równe i że ich rozpiętość $l_1 = \vartheta l$, zaś rozpiętość przęsła średniego l .

Otrzymamy wtedy według 22)

$$2M_1(l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1 "l_1 + \mathfrak{N}_2 "l$$

$$M_1 l + 2M_2(l + l_1) = \mathfrak{N}_2 "l + \mathfrak{N}_3 "l_1,$$

albo

$$2M_1(1 + \vartheta) + M_2 = \mathfrak{N}_1 " \vartheta + \mathfrak{N}_2 "$$

$$M_1 + 2M_2(1 + \vartheta) = \mathfrak{N}_2 " + \mathfrak{N}_3 " \vartheta,$$

a stąd otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{2(1 + \vartheta)(\mathfrak{N}_1 " \vartheta + \mathfrak{N}_2 ") - (\mathfrak{N}_2 " + \mathfrak{N}_3 " \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \\ M_2 &= \frac{2(1 + \vartheta)(\mathfrak{N}_2 " + \mathfrak{N}_3 " \vartheta) - (\mathfrak{N}_1 " \vartheta + \mathfrak{N}_2 ") }{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots 117)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe pierwsze przęsło ciężarem jednostkowym p , to

$$\mathfrak{N}_1 " = -\frac{1}{4}pl^2 \quad \mathfrak{N}_3 " = \mathfrak{N}_2 " = \mathfrak{N}_2 " = 0, \text{ więc}$$

$$M_1 = \frac{4\vartheta(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8} = \frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8} \dots \dots 118)$$

$$M_2 = \frac{2\vartheta}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8} = \frac{2\vartheta^3}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8} \dots \dots 119)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe drugie przęsło ciężarem jednostkowym p , to

$$\mathfrak{N}_1 " = \mathfrak{N}_3 " = 0, \quad \mathfrak{N}_2 " = \mathfrak{N}_2 " = -\frac{1}{4}pl^2, \text{ więc}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(1 + \vartheta)\frac{1}{4}pl^2 - \frac{1}{4}pl^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = \frac{2(1 + 2\vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8}, \text{ albo}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{2}{3 + 2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 120)$$

Jeśli wszystkie przęsła są całkowicie obciążone, otrzymamy $M_1 = M_2 = -\frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta) - 2\vartheta^3 + 2(1 + 2\vartheta)pl^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8}$,

$$M_1 = M_2 = \frac{(1 + 2\vartheta)2\vartheta^3 + 2(1 + 2\vartheta)pl^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8} = \frac{2(1 + \vartheta^3)pl^2}{3 + 2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \dots \dots 121)$$

Leber obliczył dla rozmaitych wartości współczynniki rów. 118), 119), 120) i 121). Podajemy tu z nich niektóre:

dla $\vartheta = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.00$

$$\frac{4\vartheta(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = 0.375 \quad 0.416 \quad 0.451 \quad 0.482 \quad 0.496 \quad 0.509 \quad 0.521 \quad 0.533$$

$$\frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = 0.094 \quad 0.150 \quad 0.221 \quad 0.308 \quad 0.358 \quad 0.412 \quad 0.471 \quad 0.533$$

dla $\vartheta=0.5,$	$0.6,$	0.7	$0.8,$	$0.85,$	$0.9,$	$0.95,$	1.00
$\frac{2}{3+2\vartheta}$	$=0.500$	0.476	0.455	0.435	0.426	0.417	0.408
$\frac{2(1+\vartheta^3)}{3+2\vartheta}$	$=0.563$	0.579	0.610	0.657	0.687	0.720	0.758
$\frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1}$	$=0.125$	0.130	0.133	0.134	0.134	0.134	0.134
$\frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1}$	$=0.031$	0.047	0.065	0.086	0.097	0.108	0.121

*) **§. 22. Ciężar własny.**

a) Momenty podporowe otrzymamy analogicznie do

121)
$$M_1 = M_2 = -\frac{2(\vartheta^3 g_1 + g) l^2}{3 + 2\vartheta} \cdot 8 \dots \dots \dots 122)$$

a dla $g = g_1$
$$M_1 = M_2 = -\frac{2(1 + \vartheta^3) g l^2}{3 + 2\vartheta} \cdot 8 \dots \dots \dots 123)$$

b) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle jest $M' = 0, M'' = M_1$, więc według

30)
$$Q_1' = \frac{1}{2} g l_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{2} g l_1 - \frac{2(\vartheta^3 g_1 + g) l_1}{3 + 2\vartheta} \cdot \frac{1}{8 \vartheta^2}$$

$$Q_1' = \{3g_1 \vartheta^2 (\vartheta + 2) - g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)}, \dots \dots \dots 124)$$

a
$$Q_1'' = Q_1' - g_1 l_1 = -\{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} \dots \dots 125)$$

a dla dowolnego punktu $Q = Q_1' - g_1 x \dots \dots \dots 126)$

W drugim przęśle otrzymamy $M' = M'' = M_1$, więc

$$Q_2' = \frac{1}{2} g l, Q_2'' = -\frac{1}{2} g l, \dots \dots \dots 127)$$

a dla dowolnego punktu $Q = Q_2' - g x = \frac{1}{2} g (1 - 2x) \dots \dots \dots 128)$

jak dla belki jednoprzęsłowej.

c) Oddziaływanie O_0 na podporze skrajnej równe jest Q_1' , na drugiej według 28)

$$O_1 = Q_2' - Q_1'' = \frac{1}{2} g l + \frac{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} l_1,$$

$$O_1 = \frac{g(6\vartheta + 4\vartheta^2 + 1) + g_1(5\vartheta^3 + 6\vartheta^2)}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} l_1 \dots \dots \dots 129)$$

d) Moment otrzymamy w dowolnym punkcie na podstawie rów. 32)

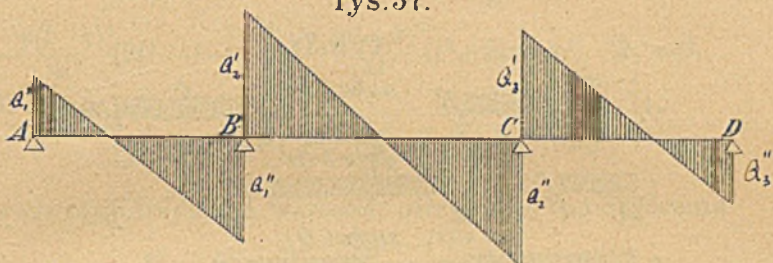
W pierwszym przęśle jest $M' = 0, M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) \dots \dots \dots 130)$$

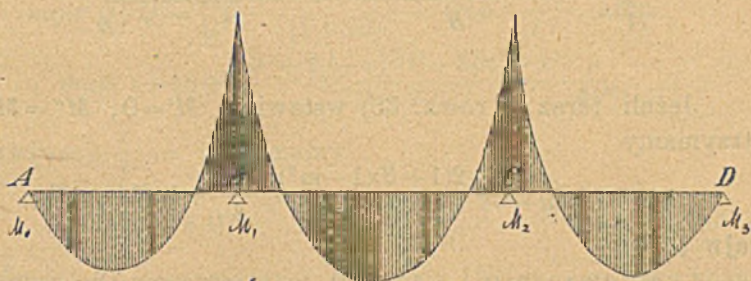
W drugim przęśle jest $M' = M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) \dots \dots \dots 131)$$

rys. 37.



linie sił poprzecznych



linie momentów

Wykreślił przedstawił siły poprzeczne i momenty na rys. 37. dla $\vartheta = 0.77$, $g_1 = 0.891 g$.

§. 23. Największe siły poprzeczne.

a) Ciężar ruchomy.

a) W pierwszym przęśle otrzymamy *najw* (+Q), obciążając pierwsze przęśło od E do B i całe trzecie przęśło (rys. 38).

Wtedy otrzymamy z równ. 16) i 20)

$$\mathfrak{R}_1'' = \frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = 0, \quad \mathfrak{R}_3' = -\frac{1}{4}pl_1^2,$$

więc według 117)

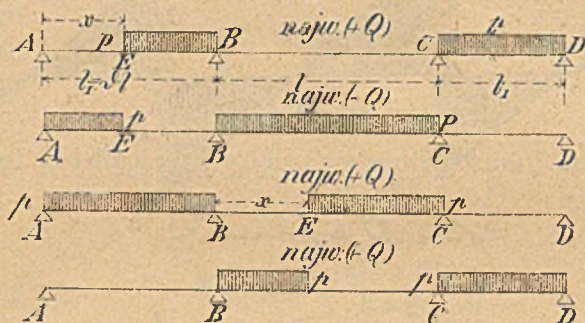
$$M_1 = \frac{2(1 + \vartheta)p(l_1^2 - x^2)^2\vartheta - pl_1^4\vartheta}{4l_1^2[4(1 + \vartheta)^2 - 1]},$$

a nazwawszy $\frac{x}{l_1} = m$,

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta)(1-m^2)^2 - 1}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{pl_1^2 \vartheta}{4},$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3(1-m^2)^2 - 2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 132)$$

rys. 38.



Jeżeli teraz w równ. 56) wstawimy $M' = 0$, $M'' = M_1$, to otrzymamy

$$\text{najw } (+Q) = \frac{1 - 2(1+\vartheta)(1-m^2)^2 pl_1 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} + \frac{1}{2} p(1-m)^2 l_1,$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{1 - 2\vartheta(1+\vartheta)(1-m^2)^2 + 2(1-m)^2(4(1+\vartheta)^2 - 1) pl_1}{4(1+\vartheta^2) - 1} \dots \dots \dots 133)$$

Dla najw (-Q) musi być przeszło pierwsze obciążone od A do E i drugie całe przeszło. A więc wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{px^2}{4l_1^2}(2l_1^2 - x^2), \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2, \quad \mathfrak{N}_3' = 0,$$

więc według 117)

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) \left[\frac{px^2(2l_1^2 - x^2)\vartheta}{4l_1^2} + \frac{1}{4}pl^2 \right] - \frac{1}{4}pl^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1}, \quad \text{a dla } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$\underline{M_1} = - \left[\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3 m^2(2-m^2) + 2(1+2\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 134)$$

Jeżeli teraz w równanie 57) wstawimy $M' = 0$, $M'' = M_1$, otrzymamy

$$\underline{\text{najw } (-Q)} = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} \frac{pX}{l_1} \dots \dots \dots 135)$$

6) Dla najw. sił poprzecznych w punkcie E drugiego przęśła musimy obciążyć całe pierwsze przęśło, a drugie od E do C . A więc będzie wedle 16) i 20)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4}pl_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -p \frac{(l^2 - x^2)^2}{4l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l-x)^2}{4l^2} [2l^2 - (l-x)^2] = -\frac{p(l-x)^2}{4l^2} (l^2 + 2lx - x^2). \quad \mathfrak{N}_3' = 0.$$

Według 117) jest

$$M_1 - M_2 = \frac{\mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2'' - \mathfrak{N}_3' \vartheta}{1 + 2\vartheta},$$

a wstawwszy otrzymane wartości, otrzymamy po skróceniu

$$M_1 - M_2 = \frac{2(l-x)^2 x^2 - l^4 \vartheta^3}{1 + 2\vartheta} \frac{p}{4l^2},$$

a więc według 56) i zważywszy, że $M' = M_1$, $M'' = M_3$,

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p}{4l^3} \frac{l^4 \vartheta^3 - 2(l-x)^2 x^2}{(1 + 2\vartheta)} + \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}, \text{ albo}$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{l^4 \vartheta^3 + 2(l-x)^2 (l^2 + 2\vartheta l^2 - x^2)}{(1 + 2\vartheta)} \frac{p}{4l^3},$$

a wstawwszy $\frac{x}{l} = n$, otrzymamy

$$\text{najw } (+Q) = \frac{\vartheta^3 + 2(1-n)^2(1+2\vartheta-n^2)}{4(1+2\vartheta)} pl \dots 136)$$

$\text{Najw } (-Q)$ otrzymamy z równania 136), zmieniawszy znak i x na $(l-x)$, lub n na $(1-n)$, więc

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{l^4 \vartheta^3 + 2x^2(2\vartheta l^2 + 2lx - x^2)}{(1 + 2\vartheta)} \frac{p}{4l^3} \text{ lub}$$

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{\vartheta^3 + 2n^2(2\vartheta + 2n - n^2)}{4(1 + 2\vartheta)} pl \dots 137)$$

§. 24. Największe oddziaływania.

Największe oddziaływanie ujemne w A otrzymamy wstawwszy w równ. 134) i 135) $x=0$ i $m=0$. Otrzymamy więc

z rów. 134) $M_1 = \frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}$, zatem

$$\text{najw } (-O_0) = -\frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} \dots \dots \dots 138)$$

$\text{Najw } (+O_0)$ otrzymamy, odciągając $\text{najw } (-O_0)$ z rów. 138) od O_0 dla obciążenia zupełnego z rów. 124), zmieniawszy w niem g , i g na p . Więc

$$\underline{\text{najw } (+O_0)} = \frac{3\vartheta^2(\vartheta+2)-1}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} pl_1 + \frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} = \frac{3\vartheta(\vartheta+2)}{4(3+2\vartheta)} pl \quad . \quad 139,$$

Najw $(-O_1)$ otrzymamy, wstawivszy w równ. 137) $x=0$ i $n=0$, a mianowicie

$$\underline{\text{najw } (-O_1)} = -\frac{pl\vartheta^3}{4(1+2\vartheta)} \dots \dots \dots 140)$$

Najw $(+O_1)$ otrzymamy, odciagnawszy wartość równania 140) od wartości równania 129) dla obciążenia zupełnego i zamieniwszy g_1 i g na p

$$\text{najw } (+O_1) = \frac{1+6\vartheta+10\vartheta^2+5\vartheta^3}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} pl_1 + \frac{pl\vartheta^3}{4(1+2\vartheta)},$$

$$\underline{\text{najw } (+O_1)} = \frac{(1+2\vartheta)(6\vartheta+10\vartheta^2+5\vartheta^3)+\vartheta^4(3+2\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl}{4\vartheta} \dots \dots 141)$$

§. 25. Największe momenty.

I. przeszło, część średnia. Największy ujemny moment w części średniej otrzymamy przy obciążeniu średniego przęsła, największy dodatni przy obciążeniu obu skrajnych przęsł. Dla najw $(-M)$ otrzymamy więc $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = 0$, $\mathfrak{R}_2 = +\frac{1}{4}pl^2$, więc według 117)

$$M_1 = \frac{(1+2\vartheta)pl^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = \frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}$$

A więc według 65), wstawivszy $M'=0$ i $M''=M_1$, otrzymamy

$$\underline{\text{najw } (-M)} = -\frac{pl_1^2}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} = -\frac{pl_1 x}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} \quad 142)$$

Najw $(+M)$ otrzymamy, jeśli pierwsze i trzecie przęsło są obciążone, więc $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = -\frac{1}{4}pl_1^2$, $\mathfrak{R}_2 = 0$.

A zatem według 117)

$$M_1 = -\frac{\vartheta(1+2\vartheta)pl_1^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = -\frac{\vartheta pl_1^2}{4(3+2\vartheta)} = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8},$$

a więc według 67)

$$\text{najw } (+M) = -\frac{\vartheta pl_1 x}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2} px(l_1 - x) =$$

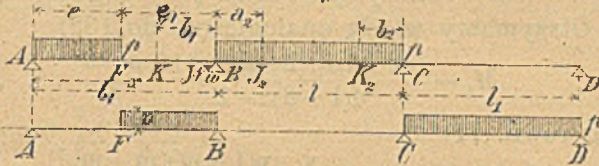
$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+\vartheta)l_1 - 2(3+2\vartheta)x}{4(3+2\vartheta)} px$$

$$\underline{\text{najw } (+M)} = \frac{3(2+\vartheta) - 2(3+2\vartheta)m}{4(3+2\vartheta)} p_1 l_1^2 m \dots \dots \dots 143)$$

jeśli $m = \frac{x}{l_1}$.

Trzecia część. *Najw* ($--M$) otrzymamy w punkcie *W*, gdy pierwsze przęsło obciążone jest od *A* do *F* i całe drugie przęsło (rys. 39.).

rys. 39.



Według 63) jest

$$w = \frac{b_1(2l_1 - e_1)e_1 l_1}{l_1^3 - b_1(l_1^2 - 2e_1 l_1 + e_1^2)}, \text{ a stąd}$$

$$e_1 = l_1 \left(1 - \sqrt{\frac{(b_1 - w)l_1}{b_1(l_1 - w)}} \right), \dots \dots \dots 144)$$

czyli
$$e = l_1 \sqrt{\frac{l_1(b_1 - w)}{b_1(l_1 - w)}} \dots \dots \dots 145)$$

Odstęp b_2 punktu stałego K_1 od C w drugim przęśle jest według 45) $b_2 = \frac{l}{1 + \nu_2}$, zaś według 37) $\nu_2 = \frac{2(l_1 + l)}{l} = \underline{2(1 + \vartheta)}$,

więc
$$b_2 = \frac{l}{3 + 2\vartheta} = \underline{a_2} \dots \dots \dots 146)$$

Dalej
$$\nu_1 = \frac{2(l + l_1) - \frac{l}{\nu_2}}{l_1} = \frac{2(1 + \vartheta)}{\vartheta} \frac{1}{2\vartheta(1 + \vartheta)},$$

$$\nu_1 = \frac{(3 + 2\vartheta)(1 + 2\vartheta)}{2\vartheta(1 + \vartheta)}, \text{ więc, ponieważ } b_1 = \frac{l_1}{1 + \nu_1},$$

$$\underline{b_1} = \frac{2\vartheta(1 + \vartheta)}{3 + 10\vartheta + 6\vartheta^2} l_1 \dots \dots \dots 147)$$

Dla obciążenia pierwszego przęsła od *A* do *F* i całego drugiego przęsła jest wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{pe^2}{4l_1^2}(2l_1^2 - e^2), \quad \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2, \quad \mathfrak{R}_3' = 0,$$

więc według rów. 134), wstawivszy e zamiast x , gdy $\frac{e}{l_1} = m_1$,

$$\underline{M_1} = -\frac{4(1 + \vartheta)\vartheta^3 m_1^2(2 - m_1^2) + 2(1 + 2\vartheta)pl^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{pl^2}{8}$$

$$= -\left[\frac{4(1 + \vartheta)\vartheta^3}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} m_1^2(2 - m_1^2) + \frac{2}{3 + 2\vartheta} \right] \frac{pl^2}{8}.$$

Teraz otrzymamy wedle 70)

$$\text{najw } (-M) = \frac{M_1 x}{1} + \frac{pe^2(1-x)}{2l_1} \dots \dots \dots 148)$$

Najw (+M) obliczymy, obciążając długość FB i trzecie przęsło. Otrzymamy wtedy analogicznie do 132)

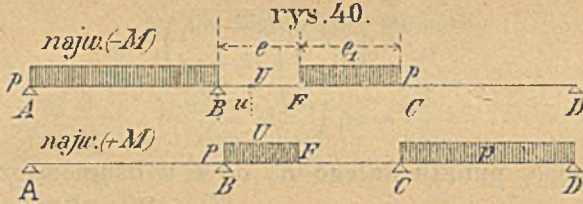
$$M_1 = \frac{-2(1+\vartheta)(1-m_1^2)^2 + 1 pl_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{1}{4} \dots \dots \dots 149)$$

a według równ. 71)

$$\text{najw } (+M) = M_1 \frac{x}{1} + \frac{p(1-m)(m-m_1^2)}{2} l_1^2 \dots \dots 150)$$

II. przęsło, część pierwsza.

Tu dla najw (-M) w punkcie U (rys. 40.) musi być obciążone całe pierwsze przęsło i drugie od F do C. Dla najw (+M)



musi być przeciwnie obciążone drugie przęsło od B do F i trzecie przęsło. Według 62)

$$u = \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2}$$

a ponieważ $a_2 = b_2$, więc $c = l - 2b_2$,

$$u = \frac{h_2(2l - 3b_2 - e)el}{l^3 - 2b_2 l^2 + b_2 el - 2b_2 e^2}$$

a ze względu na 146)

$$u = \frac{(3 + 4\vartheta)l - (3 + 2\vartheta)e}{(1 + 2\vartheta)l^2 + el - 2e^2} \frac{el}{3 + 2\vartheta} \dots \dots \dots 151)$$

albo, rozwiązawszy to równanie ze względu na e,

$$e^2 - el \frac{l(3 + 4\vartheta) - u(3 + 2\vartheta)}{(3 + 2\vartheta)(l - 2u)} + \frac{(1 + 2\vartheta)ul^2}{l = 2u} = 0 \dots \dots 152)$$

Przy obciążeniu, dla którego otrzymamy najw (-M) jest wedle równania 16) i 20)

$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{1}{4} pl_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -\frac{p(l^2 - e^2)^2}{4l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l - e)^2}{4l^2} (l^2 + 2le - e^2),$$

a więc według 117)

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) \left[\frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta + \frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 - 2le - e^3) \right] - p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2}}{4(1+\vartheta)^2 - 1}$$

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) [p l_1^2 l^2 \vartheta + p(l-e)^2 (l^2 + 2el - e^2)] - p(l^2 - e^2)^2}{4l^2 [4(1+\vartheta)^2 - 1]}$$

a wstawivszy $\frac{e}{l} = n_1$,

$$\underline{M_1} = \left[-\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} - \frac{4(1+\vartheta)(1-n_1)^2(1+2n_1-n_1^2)}{4(1+\vartheta)^2 - 1} + \frac{2(1-n_1^2)^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 153)$$

$$a) \quad \underline{M_1 - M_2} = \frac{2p(l-e)^2 e^3 - pl^4 \vartheta^3}{4l^2(1+2\vartheta)} = - \left(\frac{4}{1+2\vartheta^3} (1-n_1)^2 n_1^2 + \frac{2\vartheta^3}{1+2\vartheta} \right) \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 154)$$

Teraz otrzymamy według rów. 68)

$$\underline{\text{najw } (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{1} x + \frac{pe_1^2 x}{2l}} \dots \dots \dots 155)$$

Najw (+M) otrzymamy, obciążivwszy drugie przęsło od B do F, i całe trzecie przęsło, a zatem wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{R}_1 = 0, \quad \mathfrak{R}_2' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e^2),$$

$$\mathfrak{R}_2'' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2), \quad \mathfrak{R}_3 = -\frac{1}{4} p l_1^2.$$

Wedle 117) otrzymamy

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) \frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 - \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) - \frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1},$$

$$\underline{M_1} = - \left[\frac{2n_1^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} (2(1+\vartheta)(2-n_1)^2 - (2-n_1^2)) + \frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 156)$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \frac{-\frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 + \frac{pe^2}{4l^3} (2l^2 - e^2) + \frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta}{1 + 2\vartheta}$$

$$M_1 - M_2 = \left(-\frac{4}{1+2\vartheta} n_1^2 (1-n_1)^2 + \frac{2\vartheta^3}{1+2\vartheta} \right) \frac{pl^2}{8} \quad \dots 157)$$

$$\underline{\text{najw (+M) = } M_1 - (M_1 - M_2)n + \frac{pn}{2}(2n_1 - n_1^2 - n)l^2} \quad \dots 158)$$

jeśli $n = \frac{x}{l}$.

Średnia część.

Dla średniej części otrzymamy najw (-M), obciążwszy pierwsze i trzecie przęsło, zaś najw (+M), obciążwszy drugie przęsło. Jeśli pierwsze i trzecie przęsło jest obciążone, otrzymamy z rów. 132, robiąc m=0,

$$M_1 = M_2 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \quad \dots \dots \dots 159)$$

Wstawivszy w rów. 65) $M' = M_1 = M_2 = M''$, otrzymamy

$$\underline{\text{najw (-M) = } M' = M_1 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8}} \quad \dots \dots \dots 160)$$

Jestto równanie linii poziomej.

Dla najw (+M) należy obciążyć drugie przęsło, więc

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = 0, \quad \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2,$$

zatem
$$M_1 = M_2 = \frac{2(1+\vartheta)\mathfrak{R}_2' - \mathfrak{R}_2''}{4(1+\vartheta)^2 - 1} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)},$$

a według 67)
$$\underline{\text{najw (+M) = } -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2}px(1-x)} \quad \dots \dots 161)$$

Na podstawie tych równań wyliczono na rys. 24 linie najw i najm. momentów.

§. 26. Przykład.

Dane: Most drogowy drewniany leżajowy dla drogi III. kl. 500 m szeroki bez chodników. — Dajemy 5 belek głównych. — Rozpiętość przęsła skrajnych przyjmijmy 1000 m a średniego przęsła 1300 m, a więc stosunek 1:13:1.

Obliczyć należy największe siły poprzeczne i momenty, przyjmując ciężar tłumu ludzi, przepisany dla dróg III. kl. 340 kg/m², gdyż ciężar tłumu ludzi będzie tu niekorzystniejszy od ciężaru wozów.

Jako ciężar stały przyjmijmy dla przęsła skrajnych

$$g = 8 \cdot 25 l + 230 \text{ kg/m} \quad *)$$

$$g = 8 \cdot 25 \times 10 + 230 = 82 \cdot 5 + 230 = 312 \cdot 5 \text{ kg/m, więc}$$

$g = 0 \cdot 3125 \text{ t/m}$ dla przęsła skrajnych. — Zaś dla przęsła średniego

$$g_1 = 8 \cdot 25 \times 13 + 230 \text{ kg/m} = 337 \cdot 25 \text{ kg/m,}$$

$$g_1 = 0 \cdot 33725 \text{ t/m}$$

*) Patrz Podręcznik Teorii mostów wyd. II. tom I. str. 9.

$g' = 0.0625 \text{ t/m}$ na jedną belkę przęsła skrajnego (g.)
 $g_1' = 0.06745 \text{ t/m}$ na jedną belkę przęsła średniego. (g.) *podług znakowania przyjętego we wzorach.*

Ciężar staly.

Spółczynnik $\gamma = \frac{l}{l_1} = \frac{13}{18} = 0.77$, więc według 122) *momentu podporowe*

$$M_1 = M_2 = - \frac{2[0.77^3 \times 0.0625 + 0.06745] \cdot 13^2}{3 + 2 \times 0.77} \cdot \frac{13^2}{8} = - 0.89317 \text{ tm}$$

Sily poprzeczne według 124) *w przęśle pierwszym i trzecim*

$$Q_1' = (3 \times 0.0625 \times 0.77^2 (2 + 0.77) - \frac{0.06745}{4 \times 0.77^2 (3 + 2 \times 0.77)}) \cdot 10 =$$

$$= Q_1'' = + 0.3515 \text{ ton}$$

$$Q_1'' = - 0.3515 - 0.0625 \times 10 = - 0.9765 \text{ ton}$$

W drugim przęśle

$$Q_2' = + \frac{1}{2} 0.06745 \times 13 = 0.448 \text{ ton}$$

$$Q_2'' = - \frac{1}{2} 0.06745 \times 13 = - 0.448 \text{ ton}$$

Obciążenia

$$O_1 = Q_1' = 0.3515 \text{ ton} \quad \text{na podporach skrajnych.}$$

$$O_2 = + 0.9765 + 0.448425 = + 1.425 \text{ ton} \quad \text{na podporze środkowej.}$$

Momenty.

W pierwszym przęśle otrzymamy według 130)

$$M = M_1 \cdot \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x)$$

$$M = - 0.89317 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} 0.0625 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) l_1^2$$

$$M = - 0.89317 \frac{x}{l_1} + 3.125 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)$$

Dla $\frac{x}{l_1} = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$M = 0$	0.191	0.321	0.388	0.393	0.335
$\frac{x}{l_1} = 0.6$	0.7	0.8	0.9	1.0	
$M = 0.214$	0.031	-0.214	-0.524	-0.893	tm

W drugim przęśle otrzymamy według 131)

$$M = - 0.893 + \frac{1}{2} 0.06745 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) l_1^2 =$$

$$M = - 0.893 + 5.6995 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) =$$

Dla $\frac{x}{l_1} = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4
$M = - 0.893$	-0.380	+0.019	+0.304	+0.475
$\frac{x}{l_1} = 0.5$	0.6	0.7	0.8	0.9
$M = + 0.532$	+0.475	+0.304	+0.019	-0.38

$$\frac{x}{l} = 1$$

$$M = -0.893 \text{ tm.}$$

b) Ciężar ruchomy.

a) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle otrzymamy największe dodatnie siły poprzeczne, obciążając pierwsze przęsło od E do B (rys. 38.) i całe trzecie przęsło. Otrzymamy według 133)

$$\text{najw (+ Q)} = - \frac{2(1+0.77)p(1-m^2)^2 + 3.073}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot \frac{10.077}{4} + \frac{1}{2} p(1-m^2) 10$$

$$\text{najw (+ Q)} = - \frac{3.54 p(1-m^2)^2 + 3.073}{11.53} \cdot 1.925 + 5 p(1-m^2) =$$

$$= - \frac{6.81 p(1-m^2)^2 + 5.91}{11.53} + 5 p(1-m^2)$$

p ciężar tłumy ludzi dla dróg III. klasy wynosi 340 kg/m^2 , a ponieważ belki główne są w odstępach 1 m , także na m b, gdy $m=0$ i $p=0.34 \text{ t/m}$

$$\text{najw + Q} = - \frac{6.81 \times 0.34 + 5.91}{11.53} + 5 \times 0.34 = 2.02 \text{ t}$$

Wstawiając dla innych m wartości, otrzymamy

dla $m=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
+ Q = -0.31	0.012	0.13	0.30	0.487	0.646	0.769
$m=0.8$	0.9	1.0				
+ Q = 0.814	0.74	0.5 t				

Największe ($-Q$) otrzymamy z równania 134) i 135

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+S)S^3}{4(1+S)^2 - 1} p m^2 (2-m^2) + \frac{2}{3+2.5p} \right] \frac{l^2}{8}$$

$$\text{najw (- Q)} = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p \frac{x}{l_1}, \text{ a że } S = 0.77$$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} 0.34 m^2 (2-m^2) + \frac{2}{(3+2 \times 0.77)} 0.34 \right] \frac{13^2}{8}$$

$$M_1 = - [0.096 m^2 (2-m^2) + 0.16] \frac{13^2}{8}$$

$$M_1 = - [0.096 m^2 (2-m^2) + 0.16] 21.125$$

$$M_1 = - 2.03 m^2 (2-m^2) - 3.38$$

$$\text{najw (- Q)} = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p m^2 l_1. \text{ A że } l_1 = 10$$

$$\text{najw (- Q)} = - 0.203 m^2 (2-m^2) - 0.338 - \frac{1}{2} 0.34 m^2 \cdot 10$$

$$\text{najw (- Q)} = - 0.203 m^2 (2-m^2) - 0.338 - 1.7 m^2.$$

Wstawiając wartości za $m = \frac{x}{l_1}$ i za $p = 0.34$ otrzymamy dla

$m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	
najw (-Q) = -0.338	-0.360	-0.422	-0.53	-0.616	
$m=0.5$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
najw (-Q) = -0.852	-1.07	-1.32	-1.61	-1.91	-2.24 ton

W drugim prześle otrzymamy najw Q z równania 186)

$$\text{najw } (+Q) = \frac{5^3 + 2(1-n)^2(1+2.5-n^2)}{4(1-2.5)} p l$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{0.73^3 + 2(1-n)^2(1+2 \times 0.77-n^2)}{4(1+2 \times 0.77)} l p$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{0.457 + 2(1-n)^2(2.44-n^2)}{9.76} 13 \times 0.84$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{2.02 + 8.84(1-n)^2(2.44-n^2)}{9.76}$$

Wstawivszy wartość za $n = \frac{x}{l}$, otrzymamy dla

$n=0$	0.1	0.2	0.3	0.4
$+Q=2.41$	1.99	1.60	1.25	0.95
$n=0.6$	0.7	0.8	0.9	1.0
$+Q=0.51$	0.36	0.27	0.22	0.20

Ponieważ belka jest symetryczną, więc najw $(+Q)$ dla n jest zarazem równe $- \text{najw } (-Q)$ dla $(1-n)$. Powyższe wartości dają nam więc zarazem najw $(-Q)$.

β) Momenty. Pierwsze prześle część średnia

Według 87) jest $v_2 = 2(1+5) = 2(1+0.77) = 3.54$

$$\text{zas } b_2 = \frac{l}{1+v_2} = \frac{l}{1+3.54} = \frac{l}{4.54} = 0.22 l = 0.22 \times 13 = 2.86 \text{ m.}$$

$$v_1 = \frac{2(1+5)}{5} - \frac{1}{5v_2} = \frac{2(1+0.77)}{0.77} - \frac{1}{0.77 \times 3.54} = 4.231$$

$$b_1 = \frac{l_1}{1+4.231} = \frac{l_1}{5.231} = 0.1912 l_1 = 1.912 \text{ m}$$

Wprost możemy otrzymać b_1 z rów. 147)

$$b_1 = \frac{2 \times 0.77(1+0.77)}{3 + 10 \times 0.77 + 6 \times 0.77^2} \cdot 10 = 1.912 \text{ m}$$

Według równania 142) i 143) otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = - \frac{pl^2}{4(3+2.5)} \cdot \frac{x}{l_1} = - \frac{0.34 \times 13^2}{4(3+2 \times 0.77)} \frac{x}{l_1}$$

$$\text{najw } (-M) = - \frac{57.46}{18.16} \frac{x}{l_1} = - 3.16 \frac{x}{l_1}$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+5) - 2(3+2.5)m}{4(3+2.5)} p l_1^2 m$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+0.77) - 2(3+2 \times 0.77)m}{4(3+2 \times 0.77)} 0.34 \times 10^2 m =$$

$$\text{najw } (+M) = 15.908 m - 17 m^2.$$

Dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\text{najw } (+M)=0$	1.421	2.502	3.242	3.643	3.704 tm
$\text{najw } (-M)=0$	-0.316	-0.632	-0.948	-1.264	-1.580 „
$m=0.6$	0.7	0.8 m			
$\text{najw } (+M)=3.425$	2.806	1.846 tm			
$\text{najw } (-M)=-1.896$	-2.212	-2.528 „			

Pierwsze przeszło część trzecia.

Tu wyznaczymy *najw* (+ *M*) i *najw* (− *M*) tylko jeszcze dla punktów, dla których $m = 0.9$ i 1.0 czyli dla $w = 0.1$ i $w = 0$.

Z równania 145) otrzymamy dla

$$w = 0.1 \quad e_1 = l_1 \sqrt{\frac{l_1 \cdot b_1 - w}{b_1 \cdot l_1 - w}} = 10 \sqrt{\frac{10 \cdot 1.912 - 1}{1.912 \cdot 10 - 1}} = 7.82 \text{ m},$$

$$w = 0 \quad e_1 = l_1$$

Dalej mamy dla $w = 0.1$ $p = 0.34$,

$$m_1 = \frac{7.82}{10} = 0.782, \text{ więc według 148)}$$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+0.77) \cdot 0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot 0.732^2 (2 - 0.732^2) + \frac{2}{3+2 \times 0.77} \right] \frac{0.34 \cdot 13}{8}$$

$$M_1 = - (0.28 \times 0.536 \times 1.464 + 0.45) 7.183 = - 4.813 \text{ tm}$$

$$\text{Najw} (-M) = - \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{p e^3 (l_1 - x)}{2 l}$$

$$\text{najw} (-M) = - 4.813 \times 0.9 + \frac{0.34 \times 7.32^2 \times (1 - 0.9)}{2}$$

$$\text{najw} (-M) = - 4.332 + 0.912 = - 3.42 \text{ tm}$$

Dla $w = 0$, $p = 0.34$, $m_1 = 1$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+0.77) \cdot 0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot 0.34 + \frac{2}{3+2 \times 0.77} \cdot 0.34 \right] \frac{13^2}{8} = - 5.239 \text{ tm}.$$

Dalej otrzymamy według 149) dla *najw* (+ *M*)

$$M_1 = - \frac{[2(1+S)(1-m_1^2)^2 + 1] p l_1^2 S}{4(1+S)^2 - 1} \cdot \frac{1}{4},$$

$$M_1 = - \frac{2(1+0.77)(1-0.732^2)^2 + 1}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot \frac{0.34 \times 10^2 \cdot 0.77}{4}$$

$$= \frac{0.239}{11.53} \cdot \frac{26.18}{4} = \frac{6.257}{46.12} = + 0.135 \text{ tm},$$

a według równania 150)

$$\text{najw} (+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{p(1-m)(m-m_1^2)}{2} l^2$$

$$\text{najw} (+M) = 0.135 \times 0.9 + \frac{0.34 \times 0.1(0.9 - 0.732^2)}{2} 13^2$$

$$\text{najw} (+M) = 0.1215 + 1.048 = 1.1695 \text{ tm}.$$

Dla $w = 0$, $p = 0$, otrzymamy więc z rów. 149)

$$M_1 = \frac{0.34 \times 13^2 \cdot 0.77}{4(4(1+0.77)^2 - 1)} = \frac{44.244}{46.13} = 965 \text{ tm}$$

a więc otrzymamy dla

$m =$	0.9	1.0
$\text{najw} (+M) =$	1.170	0.965 tm
$\text{najw} (-M) =$	-3.42	-5.239 tm

Drugie przeszło, część pierwsza.

Otrzymaliśmy pierwiej $b_2 = 0.22 l = a_2$, a więc wyznaczymy największe i najmniejsze momenty dla $u = 0.1 l$ i $u = 0.2 l$, bo dla $w = 0$ czyli dla średniej podpory, jużesmy otrzymali *najw* (+*M*) i *najw* (−*M*).

Z równ. 152) otrzymamy, wstawiając $v = \frac{u}{l}$

$$e^2 - e l \frac{l(3+4.5) - u(3+2.5)}{(3+2.5)(l-2u)} + \frac{(1+2.5)u l^2}{l-2u} = 0$$

$$e^2 - e \cdot 13 \frac{(3+4 \times 0.77) - v(3+2 \times 0.77)}{(3+2 \times 0.77)(1-2v)} + \frac{(1+2 \times 0.77)v}{1-2v} \cdot 13^2 = 0$$

$$e^2 - 13e \frac{6.08 - 4.54v}{4.54(1-2v)} + \frac{2.54 \times v}{(1-2v)} \cdot 169 = 0$$

$$e^2 - 2.86e \frac{6.08 - 4.54v}{1-2v} + \frac{2.54v}{1-2v} \cdot 169 = 0.$$

Stąd otrzymamy dla $v = 0.1$

$$e^2 - 20.10e + 54.08 = 0$$

$$e = 10.05 - \sqrt{10.05^2 - 54.08} = 3.28 \text{ m}$$

dla $v = 0.2$

$$e^2 - 24.65e + 143.65 = 0$$

$$e = 12.33 - \sqrt{12.33^2 - 143.65} = 9.44 \text{ m.}$$

Ujając M_1 otrzymamy, M_1 wyznaczmy z równania 153);

z równ. 153, 154, 155. zatem dla $v = \frac{u}{l} = 0.1$, $m_1 = \frac{3.28}{13} = 0.252$, $p = 0.34 \text{ t/m.}$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2-1} - \frac{4(1+5)(1-n_1)^2(1+2n_1-n_1^2)}{4(1+5)^2-1} + \frac{2(1+n_1^2)-1}{4(1-5)^2} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2-1} - \frac{4(1+0.77)(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+0.77)^2-1} + \frac{2(1-m_1^2)}{4(1+0.77^2)-1} \right] \frac{0.34 \cdot 13^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{7.08 \times 0.559 \times 1.44}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{5.70}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183 = [-0.23 - 0.495 + 0.152] 7.183$$

$$M_1 = -4.475 \text{ tm.}$$

Dalej

$$M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e^2)e^2 - pl^2s^3}{4l^2(1+2.5)}$$

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \times 0.34(1-0.252)^2 0.252^2 - 0.34 \times 0.77^3}{4(1+2 \times 0.77)} 13^2 =$$

$$M_1 - M_2 = \frac{0.0245 - 0.155}{10.16} \times 169 = -2.178 \text{ tm}$$

$$\text{Według 155) } najw(-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} x + \frac{p e_1^2 x}{2l},$$

$$najw(-M) = -4.475 + 2.178 \times 0.1 + \frac{0.34 \times 9.72^2 \times 0.1}{2} =$$

$$najw(-M) = -2.644 \text{ tm.}$$

$$\text{Dla } v = \frac{u}{l} = 0.2, m_1 = \frac{9.44}{13} = 0.727, p = 0.3, s = 0.77$$

otrzymamy według 153)

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2-1} - \frac{4(1+5)(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+5)^2-1} + \frac{2(1-m_1^2)}{4(1+5)^2-1} \right] \times \frac{pl^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-0.28 - \frac{7.08(1 - 0.727)^2(1 + 2 \times 0.727 - 0.727^2)}{11.58} + \frac{2(1 - 0.727^2)^2}{11.58} \right] \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = [-0.28 - 0.76 + 0.038] \cdot \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = -2.2842 \text{ tm.}$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \left(\frac{4}{1 + 2.9^2} (1 - m_1)^2 m_1^2 - \frac{2.9^3}{1 + 2.9} \right) \frac{p l^2}{8},$$

$$M_1 - M_2 = \left(\frac{4}{1 + 2 \times 0.77^2} (1 - 0.727)^2 \cdot 0.727^2 + \frac{2 \times 0.77^3}{1 \times 2 \times 0.77} \right) \cdot \frac{0.34}{8} \cdot 169$$

$$M_1 - M_2 = (0.0620 - 0.36) \cdot 7.18,$$

$$M_1 - M_2 = -2.1396 \text{ tm, więc według 154)}$$

$$\text{najw } (-M) = -2.2842 + 2.1396 \times 0.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.34 \times 3.56^2 \times 0.2 =$$

$$\text{najw } (-M) = -1.954 \text{ tm.}$$

Najw (+M) otrzymamy według rów. 156), 157), 158), a mianowicie dla $v = 0.1$ wstawimy $e = 3.28$, $p = 0.34$.

$$M_1 = - \left[\frac{2 n_1^2}{4(1 + 9)^2 - 1} (2(1 + 9)(2 - n_1)^2 - (2 - n_1^2)) + \frac{2.9^3}{4 \cdot (1 + 9)^2 - 1} \right] \frac{p l^2}{8},$$

$$M_1 = - \left[\frac{2 \times 0.252^2}{4(1 + 0.77)^2 - 1} (2(1 + 0.77)(2 - 0.252)^2 - (2 - 0.252^2)) + \frac{2 \times 0.77^3}{4(1 + 0.77)^2 - 1} \right] \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = - [0.011 \times 3.48 + 0.078] 7.18 = +0.8348 \text{ tm}$$

Dalej otrzymamy

$$M_1 - M_2 = \left[-\frac{4}{1 + 2.9} n_1^2 (1 - n_1^2) + \frac{2.9^3}{1 + 2.9} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 - M_2 = \left[-\frac{4}{1 + 2 \cdot 0.77} 0.252^2 (1 - 0.252^2) + \frac{2 \times 0.77^3}{1 + 2 \times 0.77} \right] \frac{0.34 \cdot 169}{8}$$

$$M_1 - M_2 = [-0.93415 + 0.36] 7.18 = -4.1224 \text{ tm}$$

$$\text{najw } (+M) = M_1 - (M_1 - M_2) \cdot 0.1 + \frac{p n}{2} (2 n_1 - n_1^2 - n) l^2,$$

$$\text{najw } (+M) = -0.8348 + 0.41224 + \frac{0.34}{2} \cdot 0.1 (2 \times 0.252 - 0.252^2 - 0.1) 169,$$

$$\text{najw } (+M) = +0.5576.$$

Dla $v = 0.2$ jest $e = 9.44$ $p = 0.34$ t/m^2

$$m_1 = \frac{9.44}{13} = 0.727$$

$$\text{więc } M_1 = \left[-\frac{2 m_1^2}{4(1 + 9^3) - 1} (2(1 + 9)(2 - m_1)^2 - (2 - m_1)) + \frac{2.9^3}{4(1 + 9)^2 - 1} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{2 \times 0.727^2}{11.53} (2 \times 1.77 \times (2 - 0.727)^2 - (2 - 0.727^2)) + \frac{2 \times 0.77^3}{11.53} \right] 7.18 = -0.243 \times 7.18 = -1.745 \text{ tm}$$

$$\begin{aligned} \text{Dalej mamy } M_1 - M_2 &= \left(-\frac{4}{1+2.5} n_1^2 (1-n_1)^2 + \frac{2.5^3}{1+2.5} \right) \frac{p l^2}{8} = \\ &= \left(-\frac{4}{1+2 \times 0.77} 0.727^2 (1-0.727)^2 + \frac{2 \times 0.77^3}{1+2 \times 0.77} \right) \frac{0.34 \times 13^2}{8} = (-0.062 + \\ &\quad + 0.36) \times 17.18 = 2.1396 \text{ tm} \end{aligned}$$

Zatem najw (+ M) =

$$\begin{aligned} \text{najw (+ M)} &= M_1 - (M_1 - M_2) n + \frac{p n}{2} (2 n_1 - n_1^2 - n) l^2 \\ (+ M) &= -1.745 - 2.1396 \times 0.2 + \frac{0.34 \times 0.2}{2} (2 \times 0.727 - 0.727^2 - 0.2) 169 \\ &= -1.317 + 4.225 = +2.908 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Przesło drugie część druga.

$$\begin{aligned} \text{Najw (- M)} &= -\frac{2.5^3}{3+2.5} 0.34 \frac{10^2}{8} \\ \text{najw (- M)} &= -1.052 \text{ tm} \end{aligned}$$

Najw (+ M) otrzymamy z rów. 161), mianowicie

$$\begin{aligned} \text{najw (+ M)} &= -\frac{p l^2}{4(3+2.5)} + \frac{1}{2} p x (l-x) \\ &= -\frac{0.34 \times 13^2}{4(3+2 \times 0.77)} + \frac{1}{2} 0.34 n (1-n) 13^2 \\ &= -3.16 + 28.73 n (1-n) \end{aligned}$$

$$\text{a więc dla } n = \frac{x}{l} = 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

$$\text{najw (+ N)} = 2.878 \quad 3.735 \quad 4.023 \text{ tm.}$$

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

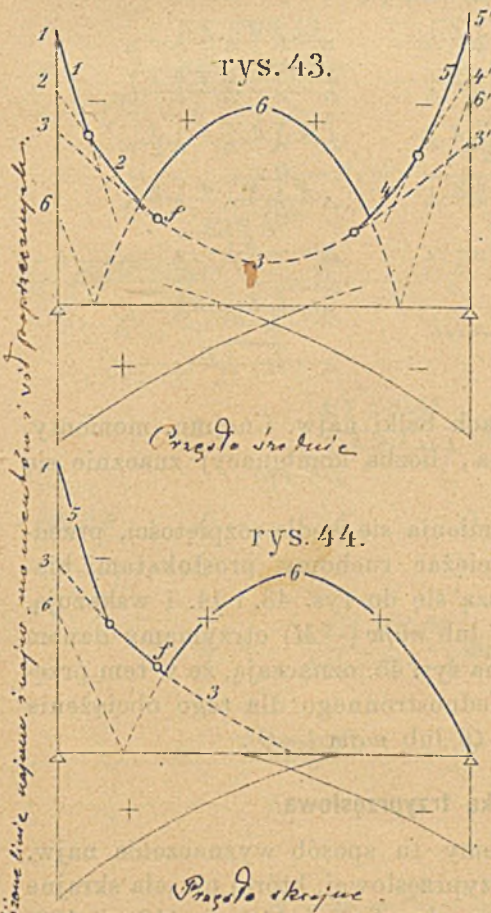
§. 27. Zasada.

Widzieliśmy na przykładzie, jak żmudne jest obliczenie sił zewnętrznych belki ciągłej trójprzęsłowej. Jeżeli belka ma więcej przęseł, obliczenie staje się jeszcze żmudniejszem. Znacznie uprościć da się jednak rachunek, jeżeli według Lebera przyjmować będziemy dla momentów tylko całkowite obciążenie przęseł. Wiemy z poprzedniego rozdziału, że każde przęsło średnie da się podzielić na trzy części. W części środkowej otrzymamy największe lub najmniejsze momenty, gdy dane przęsło jest całe obciążone lub całe nieobciążone, a inne przęsła na-

jednak wykreślenie ich jako paraboli wedle poprzedniego nie podlega najmniejszej trudności, a daje wyniki znacznie więcej zbliżone do dokładnych.

Ponieważ dla obliczenia przekroju chodzi zwykle głównie o bezwzględnie największe wartości, więc, jeśli chcemy je otrzymać, obrócimy najw ($-M$) około osi poziomej. Przelóżmy je na górę, wtedy punkt L przypadnie na L' . Widzimy stąd, że bezwzględnie największe momenty możemy łatwo wyznaczyć w przybliżeniu, przyjmując obciążenie całkowite przeszł.

Metoda Lebera polega na tem, że obliczamy momenty podporowe dla obciążenia całkowitego każdego przeszła z osobna. Obciążenia te i momenty kombinujemy w ten sposób, aby otrzymać przybliżoną linię momentów. Leber uwzględnia zarazem ciężar własny, inny dla każdego przeszła; można jednak łatwo obliczyć osobno momenty podporowe w skutek ciężaru własnego, a osobno w skutek ciężaru ruchomego. Znając momenty podporowe, łatwo obliczymy albo wykreślimy zapomocą szablonu parabolicznego momenty w drugim przeszle całkowicie obciążonem lub nieobciążonem. Dla sił poprzecznych musi być w danem przeszle obciążenie jednostronne. Dla tego obciążenia oblicza się momenty podporowe i dodaje do nich momenty, powstałe z obciążenia

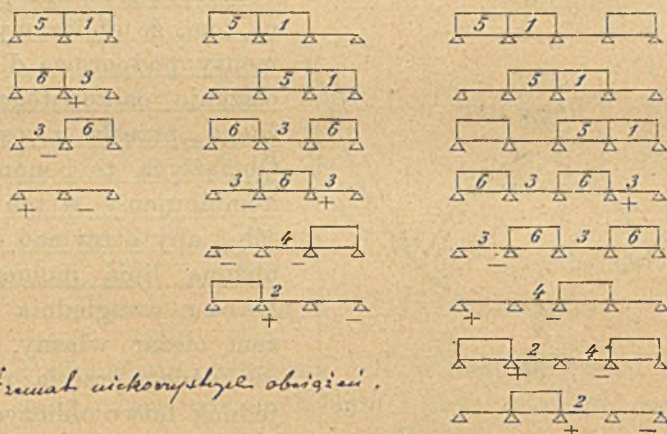


żenia całkowitego innych przęseł. Na tej podstawie oblicza się największe siły poprzeczne w kilku punktach przęśla.

§. 28. Najniekorzystniejsze obciążenia.

Na rysunku 43. i 44. są wykreślone linie największych i najmniejszych momentów i sił poprzecznych dla sumy ciężarów stałego i ruchomego dla przęśla średniego i skrajnego. Na rys. 45. podajemy wedle Lebera schemat obciążeń, które

rys. 45.



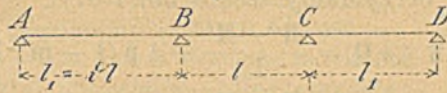
sprawiają w różnych częściach belki najw. i najmn. momenty. Jeśli belka jest symetryczna, liczba kombinacyj znacznie się zmniejsza.

Ciężar własny, który zmienia się wedle rozpiętości, przedstawiliśmy czarną kreską, ciężar ruchomy prostokątami białymi. Liczby wpisane odnoszą się do rys. 43. i 44. i wskazują, którą część linii najw (+M) lub najw (-M) otrzymamy danem obciążeniem. Znaki + i - na rys. 45. oznaczają, że w tem przęśle po dodaniu obciążenia jednostronnego dla tego obciążenia przęseł otrzymamy najw (+Q) lub najw (-Q).

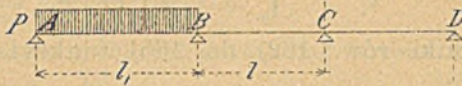
§. 29. Belka trzyprzęsłowa.

Jako przykład wskażemy tu sposób wyznaczenia najw. sił zewnętrznych dla belki trzyprzęsłowej, której przęśla skrajne są równe (rys. 46.). Na podstawie równań 118) i 119) i 120) otrzymamy, jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 47.)

rys. 46.

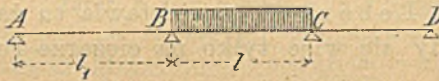


rys. 47.



$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{4\vartheta(1+\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl^2_1}{8} \\ M_2 &= -\frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 162)$$

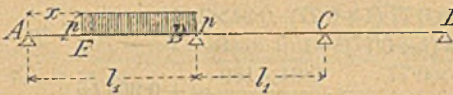
rys. 48.



Jeżeli drugie przęśło jest całkowicie obciążone (rys. 48), otrzymamy

$$M_1 = M_2 = -\frac{2}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 163)$$

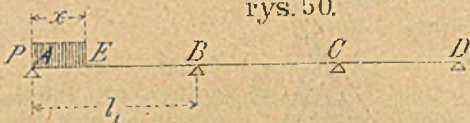
rys. 49.



Jeżeli pierwsze przęśło jest obciążone od E do B (rys. 49.), to otrzymamy z 132), gdy $m = \frac{x}{l_1}$,

$$M_1 = -\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} (1-m^2)^2 \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 164)$$

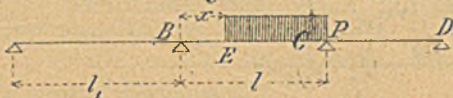
rys. 50.



Jeżeli pierwsze przęśło (rys. 50.) jest obciążone od A do E, to według 134)

$$M_1 = -\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} m^2 (2-m^2) \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 165)$$

rys. 51.



Jeżeli drugie przęśło jest obciążone od E do C (rys. 51.), to według 136), jeżeli $\frac{x}{l} = n$,

$$M_1 - M_2 = \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2\vartheta} p \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots 166)$$

$$M_1 = -2.057 + 0.965 = 1.092 \text{ tm}$$

Wykreślnie moglibyśmy zrobić $B_6 = 1.092 \text{ tm}$ i wykreślić szabloną paraboliczną dla $p = 0.34$ linie 6. Szablonę tę możemy wyciąć z papieru, wykreśliwszy parabolę momentów według równania:

$$M = \frac{p}{2} x(l-x), \text{ jak dla belki zwykłej.}$$

Liczebnie możemy obliczyć punkty linii 6 wedle rów. 67);

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= -M_1 + \frac{l_1^2}{2} \cdot 0.34 m(1-m) = -1.092 m + \frac{10^2}{2} \cdot 0.34 m(1-m), \\ &= -1.092 m + 17 m - 17 m^2 = 15.908 m - 17 m^2. \end{aligned}$$

a więc zupełnie tak samo, jak w §. 26.

Z wzoru tego otrzymamy, jak poprzednio, dla

dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\text{najw. } (+M)=0$	1.421,	2.502,	3.242,	3.643,	3.704,	3.425,	2.806,	1.846

Linia 3 leży poniżej 6, nie potrzebujemy więc jej koniecznie wyznaczać, co zresztą nie przedstawia żadnej trudności. Dla najw $(-M)$ musi być przęśło średnie obciążone (rys. 45) a zatem najw $(-M) = -2.109 m$, jak w §. 26 a więc

dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\text{najw } (-M)=0$	-0.211	-0.422,	-0.633,	-0.844,	-1.055,	-1.265
		0.7	0.8			
		-1.476	-1.687	tm		

Dla wyznaczenia linii 5) obciążymy pierwsze i trzecie przęśło (rys. 45), a więc

$$M_1 = -2.057 - 3.160 = -5.217 \text{ (punkt } B_1 \text{ rys. 52). Dla } m = \frac{x}{l_1} \text{ otrzymamy:}$$

$$M = -5.217 m + \frac{l_1^2}{2} \cdot 0.34 m(1-m) = -5.217 m + 17 m - 17 m^2 = 11.783 m - 17 m^2$$

$$\begin{aligned} \text{Więc dla } m &= 0.8 & 0.9 \\ & M = -1.954 & -3.165 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Widzimy, że w §. 26 otrzymaliśmy dla $m=0.9$ $M = -3.42 \text{ tm}$. Jeżeli jednak zaokrąglimy kąt przy K łukiem parabolicznym, to zbliżymy się znacznie do wartości dokładnych. Punkt B_1 możemy także łatwo otrzymać, gdyż dla najw $+M$ musi być wtedy obciążone tylko trzecie przęśło, więc $M_1 = 0.965 \text{ tm}$, jak w §. 26.

Drugie przęśło.

Dla wyznaczenia linii 1. w drugim przęśle obciążamy pierwsze dwa przęśła, więc $M_1 = -5.217 \text{ tm}$.

$$M_2 = +0.965 - 3.16 = -2.195 \text{ tm,}$$

a według równania 67).

$$M = -5.217 - (-5.217 + 2.195) n + \frac{13^2}{2} \cdot 0.34 n(1-n),$$

$$M = -5.217 + 3.022 n + 28.73 n(1-n).$$

A zatem dla $n=$	0.1	$n=0.2$
$M =$	-2.329	-0.016
		tm

Dla wyznaczenia linii 2 obciążamy tylko pierwsze przęsło, więc

$$M_1 = -2.027, M_2 = 0.965$$

$$M = -2.057 - (-2.047 - 0.965)n = -2.057 + 3.022n$$

Stąd dla $n =$ 0.1 0.2 0.3 0.4

$$M = -1.755 \quad -1.453 \quad -1.150 \quad -0.829 \text{ tm.}$$

I tu widzimy, że linie 1, 2, dość znacznie odstępują od linii *najw* ($-M$), że jednak wrysowawszy między te dwie linie łuk paraboliczny, znacznie się zbliżymy do prawdy.

Dla wyznaczenia poziomej 3 obciążymy oba przęsła skrajne, więc

$$M_1 = M_2 = M = -2.057 + 0.965 = M = -1.092 \text{ tm.}$$

Dla wyznaczenia paraboli 6 obciążamy tylko średnie przęsło, więc

$$M_1 = -3.16 \text{ tm a } M = -3.16 + 28.73n(1-n), \text{ zatem jak w §. 26.}$$

dla $n =$ 0.2 0.3 0.4 0.5

$$M = 1.437 \quad 2.373 \quad 3.735 \quad 4.023 \text{ tm.}$$

b) Siły poprzeczne.

Pierwsze przęsło. Dla *najw* ($+Q$) w pierwszym przęsle musi być oprócz obciążenia jednostronnego w tem przęsle obciążone także trzecie przęsło według 164).

$$M_1 = -\frac{4(1+\vartheta)^3}{4(1+\vartheta)^2-1} (1-m^2)^2 \frac{pl^2}{8} + 0.965$$

$$M_1 = -0.2803(1-m^2)^2 \times \frac{0.34.13^2}{8} + 0.965 =$$

$$M_1 = -2.0125(1-m^2) + 0.965.$$

Jeżeli teraz w rów. 56) wstawimy $M''=0$ i $M''=M_1$, to *najw* ($+Q$) =

$$= -\frac{6.81p(1-m^2)^2+5.91}{11.53} + 5p(1-m^2), \text{ jak w §. 26.}$$

Dla *najw*. ($-Q$) obciążamy przęsło pierwsze z lewej strony danego punktu i drugie przęsło, więc według 165.

$$M_1 = -\frac{4 \cdot (1+\vartheta)^3}{4(1+\vartheta)^2-1} m^2(2-m^2) \frac{pl^2}{8} - 3.16,$$

$$M_1 = -2.0125 m^2(2-m^2) - 3.16.$$

Jeżeli teraz wstawimy w rów. 57) tę wartość, to

$$\textit{najw}(-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p m l^2 \vartheta = -0.203 m^2(2-m^2) - 0.338 - 1.7 m^2, \text{ jak}$$

w §. 26.

Drugie przęsło.

Dla *najw* $+Q$ obciążymy pierwsze przęsło całe a drugie po prawej stronie danego punktu, więc według 166).

$$M_1 - M_2 = -2.057 - 0.965 + \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2\vartheta} p \frac{l^2}{8} = -3.022 + 47.740(1-n^2)n^2 p$$

Więc według 167)

$$\textit{najw}(+Q) = +\frac{3.022-47.74 p(1-n^2)n^2}{18} + \frac{1}{2} p(1-n)^2 B$$

$$= 0.207 + 0.906(1-n^2)(2.44-n^2), \text{ jak w §. 26.}$$

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

§. 31. Ogólne uwagi.

Jeżeli belka ciągła ma 4 lub 5 przęseł, to możemy w praktyce obliczać siły zewnętrzne w ten sposób, jak gdyby ilość przęseł była nieskończona. Stosuje się to zwłaszcza do obliczenia szyn kolejowych i podłużnic. Z tego powodu zastanowimy się tu nad belką o nieskończonej ilości przęseł.

Przypuśćmy przytem, że wszystkie przęśla są równe, to według rów. 37)

$$\mu_2 = 4, \quad \mu_3 = \frac{4l - \frac{l}{4}}{l} = 3.75, \quad \mu_4 = 3.733$$

$$\mu_5 = \mu_3 = 3.732, \text{ więc otrzymamy z rów. 44)}$$

dla przęśla	2	3	4	5
$\frac{\alpha}{l}$	= 0.2000	0.2105	0.2113	<u>0.2113.</u>

Przy dowolnem obciążeniu możemy teraz momenty i siły poprzeczne obliczyć według rozdziału II. My tu jednak zastanowimy się bliżej nad tym wypadkiem, ¹⁾gdzie belka jest obciążona ciężarem stałym jednostajnie rozłożonym g i ²⁾gdzie jeden tylko ciężar skupiony może leżeć w jednym przęśle.

a) §. 32. Obciążenie zupełne jednostajne ciągłe.

Jeżeli belka o nieskończonej ilości równych przęseł jest obciążona całkowicie ciężarem jednostkowym g , to według rów. 29) otrzymamy następane równania. *wzajemnie podporządkowanych.*

$$2 M_1 (l + l) + M_2 l = -\frac{1}{4} g (l^3 + l^3) = -\frac{1}{2} g l^3,$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l + l) + M_3 l = -\frac{1}{2} g l^3$$

..... czyli

$$4 M_1 + M_2 = -\frac{1}{2} g l^2$$

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = -\frac{1}{2} g l^2$$

$$M_m + 4 M_{m+1} + M_{m+2} = -\frac{1}{2} g l^2$$

$$M_{n-1} + 4 M_n = -\frac{1}{2} g l^2$$

Konstanta podporządkowana 168

Jeżeli n jest nieskończenie wielkie, to możemy przyjąć $M_m = M_{m+1} = M_{m+2}$, więc $6 M_m = -\frac{1}{2} gl^2$, a stąd momenty podporowe przeszła średniego

Momenta podporowe $M_m = -\frac{1}{12} gl^2 = -0.0833 gl^2 \dots \dots \dots 169)$

Wstawivszy w pierwsze dwa równania 168) $M_3 = -\frac{1}{12} gl^2$, otrzymamy $4 M_1 + M_2 = -\frac{1}{2} gl^2$,

$M_1 + 4 M_2 + (-\frac{1}{12} gl^2) = -\frac{1}{2} gl^2$, z czego wynika

Momenta podporowe $\left. \begin{aligned} M_2 &= \frac{7}{60} gl^2 = -0.07778 gl^2 \\ M_1 &= -0.10556 gl^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 170)$

Na podstawie tych momentów podporowych możemy wyznaczyć siły poprzeczne i momenty.

Według rów. 30) otrzymamy dla przeszła skrajnego

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{1}{2} gl + \frac{M_1}{l} = +0.3944 gl \\ Q_1'' &= -\frac{1}{2} gl + \frac{M_1}{l} = -0.6056 gl \\ Q &= 0.3944 gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 171)$$

dla przeszła drugiego

$$\left. \begin{aligned} Q_2' &= \frac{1}{2} gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = +0.5278 gl \\ Q_2'' &= -\frac{1}{2} gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = -0.4722 gl \\ Q &= 0.5278 gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 172)$$

a dla przeszła średnich

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2} gl = +0.5 gl \\ Q'' &= -\frac{1}{2} gl = -0.5 gl \\ Q &= 0.5 gl - gx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 173)$$

Momenty zaś otrzymamy z równania 32) dla przeszła skrajnego

$$M = \frac{1}{2} gx(l-x) + \frac{M''x}{l} = \frac{1}{2} gx(1-x) - 0.1056 glx \dots \dots 174)$$

Najw (+M) jest dla x_0 , dla którego $Q=0$, więc według rów. 171) $x_0 = 0.3944l$, zatem

najw (+M) = +0.0778 gl² \dots \dots \dots 176)

Dla przeszła średnich otrzymamy z powodu, że

$M' = M''$, najw (+M) dla $x_0 = \frac{1}{2}l$, więc najw (+M) = 0.125 gl² - 0.0833 gl² = +0.0417 gl² + \frac{gl^2}{24} 176)

b) §. 33. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Jeżeli r -te przęsło jest obciążone ciężarem skupionym P , to według 14)

$$\mathfrak{R}'_r = \frac{Pe_1(l^2 - e_1^2)}{l^2}, \quad \mathfrak{R}''_r = \frac{Pe(l^2 - e^2)}{l^2},$$

zaś według 54)

$$M_{r-1} = \frac{\nu_r \mathfrak{R}'_r - \mathfrak{R}''_r}{\mu_r \nu_r - 1},$$

albo wstawivszy $\nu_r = \mu_r = 3.7321$

$$\begin{aligned} M_{r-1} &= \frac{3.7321 Pe_1(l^2 - e_1^2) - Pe(l^2 - e^2)}{12.9287 l^2} = \\ &= \frac{P}{12.9287 l^2} (3.7321 e(l - e)(2l - e) - e(l^2 - e^2)) \dots 177) \end{aligned}$$

Najw M_{r-1} , a zatem i największe wszystkie momenty podporowe po lewej stronie r -tego przęsła, otrzymamy dla e_0 , dla którego $\frac{dM_{r-1}}{de} = 0$, zatem

$$3.7321(2l^2 - 2e_0 l - 4e_0^2 + 3e_0^2) - l^2 + 3e_0^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$e_0 = 0.7886l - \sqrt{0.7887^2 l^2 - 0.4554 l^2} = 0.3804l,$$

a wstawivszy to w r. 177), otrzymamy dla obciążenia r -tego przęsła

$$\text{najw } M_{r-1} = -0.08505 Pl \dots 178)$$

Dalej otrzymamy $M_{r-2} = -\frac{1}{3.7321} M_{r-1} = +0.02279 Pl$

$$M_{r-3} = -0.268^2 \times 0.08505 Pl = -0.0061 Pl$$

$$M_{r-4} = -0.268^3 \times 0.08505 Pl = +0.00164 Pl$$

$$M_{r-5} = -0.268^4 \times 0.08505 Pl = -0.00046 Pl$$

$$M_{r-6} = +0.00012 Pl.$$

Jeżeli więc co drugie przęsło na prawo r -tej podpory jest obciążone ciężarem skupionym P , to

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_r) &= -(0.08505 + 0.00610 + 0.00046) Pl = \\ &= -0.09161 Pl \dots 179) \end{aligned}$$

Jeżeli co drugie przęsło z obu stron r -tej podpory jest najniekorzystniej obciążone, to

$$\text{najw } (-M_r) = -(0.09161 + 0.09161) Pl = -0.18322 Pl \dots 180)$$

Dla przęsła skrajnego jest

$$a = 0, \quad b = 0.21132l, \quad c = 0.78863l.$$

Wstawivszy to w rów. 60), jeżeli ciężar P znajduje się w skrajnem przeszle, otrzymamy

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -\frac{Pbee_1}{cl^2}(l+e) = -\frac{Pbe(l^2-e^2)}{cl^2},$$

a najw ($-M_1$) jest dla e_0 , dla którego $\frac{dM_1}{dx} = 0$,

$$\text{więc } \frac{Pb}{cl^2}(l^2 - 3e_0^2) = 0, \text{ stąd } e_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774l.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_1) &= -\frac{Pl0.21132 \times 0.5774(1 - 0.5774^2)}{0.78868} = \\ &= -0.10313Pl \dots \dots \dots 181) \end{aligned}$$

Dla drugiego przeszła jest

$a = 0.2l$, $b = 0.21132l$, $c = 0.58868l$, więc według 60)

$$M_1 = -\frac{Pae(l-e)}{cl^2}(2l - 3b - e),$$

$$\frac{dM_1}{de} = -\frac{Pa}{cl^2}(2l^2 - 3bl - 6le_0 + 6e_0b + 3e_0^2) = 0,$$

więc

$$e_0 = (l-b) - \sqrt{(l-b)^2 - \frac{2}{3}l^2 + bl},$$

a po wstawieniu wartości

$$e_0 = 0.78868l - 0.40827l = 0.38041l.$$

Dla tej wartości e_0 będzie zatem

$$\begin{aligned} (\text{najw} - M_1) &= -\frac{Pl0.2 \times 0.3804 \times 0.6196(2 - 3 \times 0.21132 - 0.38041)}{0.58868}, \\ (\text{najw} - M_1) &= -0.07893Pl \dots \dots \dots 182) \end{aligned}$$

A zatem, gdy obciążone przeszło 1, 2, 4 i 6,

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_1) &= -(0.10313 + 0.07893 + 0.006 + 0.00046)Pl = \\ &= -0.1886Pl \dots \dots \dots 183) \end{aligned}$$

Chcąc otrzymać najw ($+M_r$) na r -tej podporze, musimy umieścić ciężary P w przeszłach przedtem nieobciążonych, otrzymamy więc

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M_r) &= +(0.02279 + 0.00164 + 0.00012)Pl, \\ \text{najw } (+M_r) &= +0.02455Pl, \dots \dots \dots 184) \end{aligned}$$

a jeśli obciążymy w ten sposób belkę po obu stronach r -tej podpory, to

$$\text{najw } (+M_r) = 0.04910Pl \dots \dots \dots 185)$$

Aby otrzymać najw ($+M_1$) możemy zastosować wzór 180),

zmniejszwszy tylko moment w stosunku $\frac{3.732}{4.000}$, bo $\mu_2 = 4.0$,

$$\text{a zatem } \text{najw } (+M_1) = +0.02290Pl \dots \dots \dots 186)$$

§. 34. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Momenty podporowe, któreśmy wyznaczyli w poprzednim paragrafie są największymi momentami ujemnymi, dodatnie najw. momenty otrzymamy zawsze w punktach zaczepienia siły P . W tym wypadku mamy według 25)

$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Pe_1}{l},$$

a według 27) $M = M' + (M'' - M') \frac{e}{l} + \frac{Pe_1 e}{l} \dots \dots \dots 187)$

Przesło skrajne.

Jeżeli tylko przesło skrajne jest obciążone ciężarem P , to według 60) $M' = 0$,

$$M'' = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^2}, \text{ więc}$$

$$M = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^3} + \frac{Pe(l - e)}{l}.$$

Chcąc wyznaczyć najw ($+M$), zróbmy

$$\frac{dM}{de} = -\frac{Pb}{cl^3}(2e_0 l^2 - 4e_0^3) + \frac{P}{l}(l - 2e_0) = 0, \text{ zatem}$$

$$-\frac{2b}{cl}e_0 + \frac{4b}{cl^3}e_0^3 + 1 - \frac{2}{l}e_0 = 0, \text{ a stąd } e_0 = 0.427l,$$

a zatem najw ($+M$) = +0.2047 Pl.

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przesła najniekorzystniej, to otrzymamy według 186)

$$M_1 = 0.02290 Pl, \text{ a } M = 0.02290 Pl \frac{x}{l}.$$

Wstawiając $x = 0.427l$ i dodawszy ten moment do poprzedniej wartości, otrzymamy

najw ($+M$) = 0.2047 Pl + 0.0098 Pl = +0.2145 Pl . . 188)

Przesło średnie.

W przesle średnim największy moment otrzymamy, gdy $e_0 = \frac{1}{2}l$, a to z powodu, że $M' = M''$, a zatem według rów. 187),

$$M = M' + \frac{Pl}{4} \dots \dots \dots 189)$$

Wstawiając $e = \frac{l}{2}$ w rów. 177), otrzymamy wręście

najw ($+M$) = -\frac{P}{12.9287l^2}(\beta \cdot 7321 \frac{3}{8}l^3 - \frac{3}{8}l^3) + \frac{Pl}{4} = 0.17076 Pl . . 190)

Najw (+0_r) otrzymamy z równ. 193), jeżeli zważać będziemy na to, że ciężar *P* na *r*-tej podporze wywiera oddziaływanie *P* i uwzględniając rów. 28)

$$\underline{\text{najw (+0}_r\text{)}} = (1 + 0.14729 + 0.14729) = \underline{+1.2946P} \dots 197)$$

V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

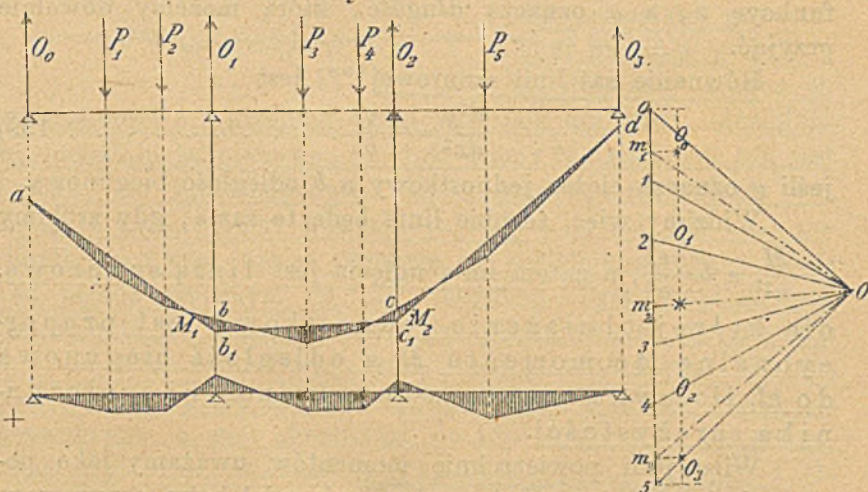
§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy.

uwaga.

Jeżeli belka ciągła jest obciążona ciężarami *P*₁, *P*₂, *P*₃, *P*₄, *P*₅ (rys. 53.), to możemy wykreślić dla tych ciężarów wielobok sił i wielobok sznurowy, zamknąć ich jednak nie możemy, bo wiemy wprawdzie, że

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = O_0 + O_1 + O_2 + O_3,$$

rys. 53.



lecz wielkości poszczególnych oddziaływań nie znamy. Gdybyśmy w jakikolwiek sposób wyznaczyli momenty podporowe, to moglibyśmy zamknąć wielobok sznurowy i wielobok sił i wszystkie siły zewnętrzne byłyby wyznaczone. Momenty *M*₀ i *M*_n są równe zero, pozostałe (*n*−1) momenty odcinawszy w pionowych podporowych, możemy teraz łatwo wykreślić zamykające *ab*₁, *b*₁*c*₁, *c*, *d* we wszystkich przęsłach, Jeżeli te

raz wykreślimy w wieloboku sił równoległe do zamykających, to otrzymamy oddziaływania O_0, O_1, O_2, O_3 .

Jeżeli mamy oddziaływania, wyznaczenie momentów i sił poprzecznych nie podlega już najmniejszej trudności *). Widzimy więc, że w celu wyznaczenia sił zewnętrznych belki ciąglej dążyć nam wypada najpierw do wyznaczenia momentów podporowych.

§. 37. Linia ugięcia. *Wyobraźcie sobie dowolną belkę ugiętą.*

Wiemy ze statyki budowli **), że równanie linii ugięcia jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\epsilon I} = \frac{\left(\frac{M}{a^2}\right)}{\left(\frac{\epsilon I}{a^2}\right)} \dots \dots \dots 198)$$

w którym moment sił zewnętrznych M wyrazić mamy jako funkcję x , a a oznacza długość, którą możemy dowolnie przyjąć. *z jest to potęgowa to zanczenia powierzechni.*

Równanie zaś linii sznurowej***) jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{b} \dots \dots \dots 199)$$

jeśli q oznacza ciężar jednostkowy a b odległość biegunową.

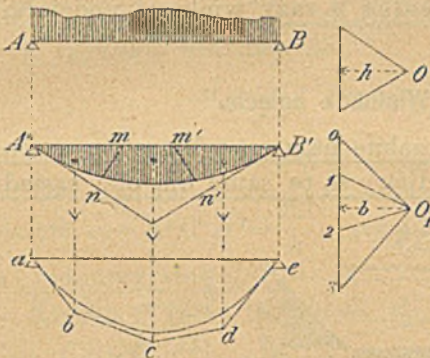
Widzimy więc, że obie linie będą te same, gdy zrobimy $q = \frac{M}{a^2}$, a $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$, a zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której obciążenie jednostkowe jest proporcjonalne do momentu M a odległość biegunowa do ϵI , iloczynu momentu bezwładności i współczynnika sprężystości.

Więc jeśli powierzchnię momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i do wykreślenia wieloboku sznurowego użyjemy odległości biegunowej $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$ (b w podziałce sił), to ten wielobok sznurowy będzie przedstawiał osił belki. Jestto twierdzenie Mohra.

*) por. Podręcznik Statyki budowli wyd. II. str. 16.
**) " " " " " " 246 rów. 379.
***) " " " " " " 262 " 447.

Jeżeli zamiast $b = \frac{\varepsilon I}{a^2}$ przyjmiemy $b = \frac{1}{n} \frac{\varepsilon I}{a^2}$, to rzędne linii ugięcia będą n razy większe. Jeżeli więc długości były wykreślone w podziałce $\frac{1}{n}$, to teraz rzędne linii ugięcia będą w naturalnej wielkości.

Jeżeli więc belka AB (rys. 54.) jest dowolnie obciążona i dla tego obciążenia wyznaczymy zapomocą odległości biegunowej h momenty, to



uważamy teraz według twierdzenia Mohra powierzchnię momentów jako powierzchnię obciążenia, dzielimy ją na części dowolnie liniami mn i $m'n'$, kreślimy wielobok sił $O_1 2 3$, używając dla przemiany powierzchni na linie podstawy a , obieramy biegun O_1

w odległości b i kreślimy drugi wielobok sznurowy. Jeżeli linie podziału są pionowe, to, jak wiemy*), wielobok ten jest styczny do linii sznurowej. W ten sposób otrzymujemy wykreślenie ugięcia belki o przekroju stałym. Jeżeli zaś linie podziału mn i $m'n'$ nie są pionowe, to wielobok sznurowy $abcde$ nie będzie stycznym do linii sznurowej. Tylko boki skrajne, równoległe do promieni skrajnych wieloboku są styczne w a i e do linii sznurowej, która według twierdzenia Mohra przedstawia ugiętą oś belki. Boki skrajne drugiego wieloboku sznurowego są więc stycznymi do linii sznurowej na podporach czyli tak zwanymi stycznymi podporowymi (n. Stütz tangente, a. tangential lines over the points of support).

Z rów. 198) i 199) wynika, że

$$\frac{q}{b} = \frac{M}{\varepsilon I}, \dots \dots \dots 200)$$

a jeśli chcemy, aby rzędne linii ugięcia były n razy większe,

*) por. Podręcznik Statyki Budowli wyd. II. str. 22.

to robimy $\frac{q}{b} = \frac{nM}{\epsilon I} = \frac{nh y}{\epsilon I}$, gdzie y oznacza rzędną linii momentów, a h pierwszą odległość biegunową. Jeżeli zrobimy teraz $aq = y \cdot 1$, to $\frac{y}{ab} = \frac{nh y}{\epsilon I}$, więc

n = Verzerrungszustand

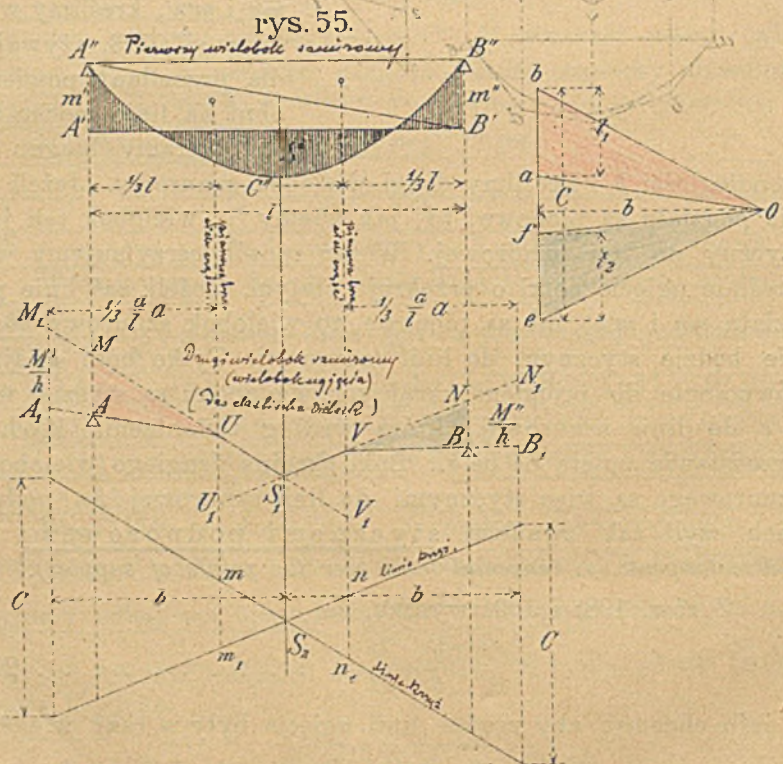
$$n = \frac{\epsilon I}{abh}, \dots \dots \dots 201).$$

przyczem b odczytać należy w podziałce sił.

Jeżeli podpory są w nierównej wysokości, to należy różnice wysokości rysować według n razy większej podziałki niż długość.

§. 38. Wielobok ugięcia.

Dla belki ciągłej potrzebne nam są tylko styczne podpory, które dla pewnej podpory są te same dla obu sąsiednich



przeszł. W takim razie powierzchnię momentów możemy po-

dzielić prostami ukośnemi, a że na podporach momenty zwykłe są ujemne, więc dzielimy powierzchnię momentów, jak to uwidoczniliśmy, na rys. 55., na trzy części prostami $A''B'$ i $A''B''$.

Powierzchnię $A''C''B''$, którąbyśmy otrzymali jako powierzchnię momentów dla belki jednoprzęsłowej, gdyby $A''B''$ była zamykającą, nazywamy zwykłą powierzchnią momentów (*einfache Momentenfläche*). Niech będzie wielkość jej ac , to

$$A''A''C''B''(B') = -A''A''B' - A''B''B' + A''C''B'' = a(-t_1 - t_2 + c).$$

Z rysunku widzimy, że

$$at_1 = A''A''B' = \frac{1}{2}m'l = \frac{M'l}{h},$$

$$at_2 = A''B''B' = \frac{1}{2}m''l = \frac{M''l}{h},$$

nareszcie $ac = A''C''B'' = \frac{Ml}{h}$, jeżeli M oznacza średni moment belki jednoprzęsłowej.

Kreślimy teraz wielobok sił $abef$, obieramy biegun O w odległości $b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}$ według poprzedniego paragrafu, więc będzie

$$t_1 = \frac{1}{2}M' \frac{l}{ah}, \quad t_2 = \frac{1}{2}M'' \frac{l}{ah}, \quad c = M \frac{l}{ah}, \quad b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n} \dots 202)$$

Długość a , służącą za podstawę przy wyrażaniu płaszczyzny przez proste, możemy przyjąć dowolnie, a więc n. p. możemy przyjąć $a =$ średniej rozpiętości albo jednej z rzeczywistych rozpiętości. Gdy wszystkie przęsła są równe, wtedy przyjmujemy $a = l$, więc mamy następujące siły:

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{M'}{h}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \frac{M''}{h}, \quad c = \frac{M}{h}.$$

Gdyby styczne podporowe były znane, to konstrukcyja drugiego wieloboku sznurowego byłaby następująca:

W odstępnie b od pionowej przez środek ciężkości S zwykłej powierzchni momentów odcinamy z obu stron długość $c = M \frac{l}{ah}$ i łączymy te punkty na krzyż, otrzymane w ten sposób proste nazywamy liniami krzyżowymi (n. *Kreuzlinien*, fr. *transversales, lignes en croix*), które pierwszy wprowadził Culmann, a które przedstawiają promienie wieloboku sił.

Jeżeli znamy styczne podporowe A_1U i B_1V , to zróbmy $UU_1=mm_1$ i $VV_1=nn_1$, połączmy U z V_1 i U_1 z V , a otrzymamy drugi wielobok sznurowy, który przedstawia linię ugięcia i który dlatego nazywamy drugim wielobokiem sznurowym lub wielobokiem ugięcia (n. *elastisches Polygon, zweites Seilpolygon, fr. le second polygon funiculaire*). Konstrukcyę powyższą podał Mohr.

§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych.

Z rys. 55. widzimy, że $AMU \sim abO$ i $BNV \sim Ofc$, a więc $AM:t_1 = \frac{1}{3}l:b$ i $BN:t_2 = \frac{1}{3}l:b$, a stąd

$$AM = \frac{t_1 l}{3b} \text{ i } BN = \frac{t_2 l}{3b}.$$

Podstawmy wartości za t_1 i t_2 , a otrzymamy

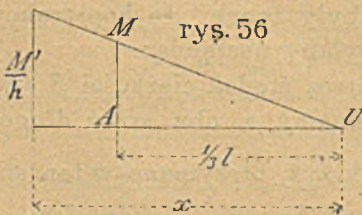
$$\underline{AM} = \frac{\frac{1}{2} M' \frac{l}{ah} l}{3b} = \frac{M' l^2}{6abh}, \quad \underline{BN} = \frac{M'' l^2}{6abh'}$$

a więc odcinki AM i BN są proporcjonalne do momentów podporowych. Jeżeli przyjmiemy $b = \frac{1}{3}a$, to

$$\left. \begin{aligned} \underline{AM} &= \frac{M'}{h} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \\ \underline{BN} &= \frac{M''}{h} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 203)$$

a jeżeli $a=l$, to

$$\left. \begin{aligned} \underline{AM} &= \frac{M'}{h} = m' \\ \underline{BN} &= \frac{M''}{h} = m'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 204)$$



rys. 56

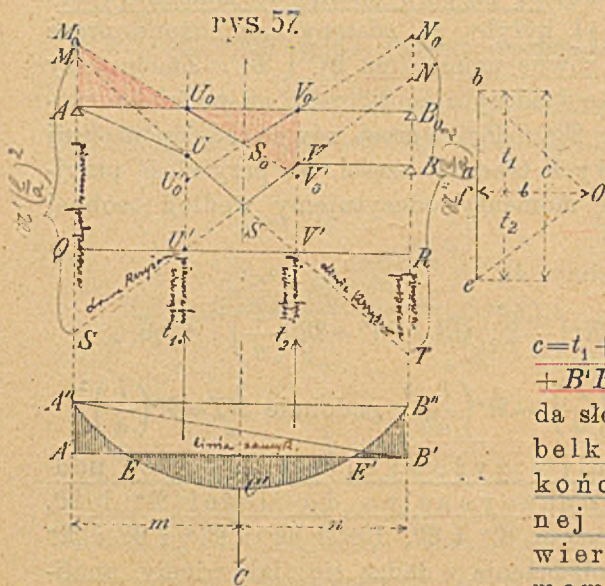
Jeżeli chcemy wyznaczyć odległość x (rys. 56.), w której pionowy odcinek między przedłużeniami pierwszego i drugiego boku drugiego wieloboku sznurowego równa się $\frac{M'}{h}$, to otrzymamy $\frac{M'}{h} : AM = x : \frac{1}{3}l$, więc

$$x = \frac{M' \frac{1}{3} l}{h \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{a}{l} x, \text{ a zatem pionowa w odległości } x = \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$$

odcina $\frac{M'}{h}$ (rys. 56.). Gdy $a=l$, to $AM = \frac{M'}{h}$.

§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną.

Poprzednia konstrukcja da się wprost zastosować do belki jednostronnie lub obustronnie poziomo utwierdzonej. Poprzednio przyjęliśmy $b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}$, przyczem b mierzymy według podziałki sił, teraz przypuszczamy $b = \frac{1}{6} a$ według podziałki długości. Jeśli więc zrobimy oba te przypuszczenia, to stosunek podziałki sił do podziałki długości jest już dany.



a) Dla belki obustronnie poziomo utwierdzonej są obie styczne podporowe poziome, więc oba odnośne promienie Oa i Of (rys. 57.) poziome; zatem punkt a wpada na f , a stąd

$$c = t_1 + t_2, \text{ albo } A'A''E + B'B''E' = EE'C', \text{ co się da słowami wyrazić: Dla belki poziomo obu końcami utwierdzonej jest suma powierzchni ujemnych momentów równa powierzchni momentów dodatnich*).$$

A zatem $M = \frac{1}{3} M' l + \frac{1}{3} M'' l$, jeżeli M' i M'' oznaczają momenty podporowe belki poziomo utwierdzonej, a więc $M = \frac{1}{3} (M' + M'')$. Dla belki poziomo utwierdzonej otrzy-

*) por. Podręcznik Statyki Budowli II. wyd. str. 267.

mamy więc drugi wielobok sznurowy $AU_0S_0V_0B_0$, a dla tak samo obciążonej belki ciągłej $AUSVB$.

Z rys. 57. widzimy, że $AU_0M_0 \cong U_0V_0V_0'$; więc $AM_0 = V_0V_0' = VV'$, odstępowi linii krzyżowych MT i NS . Dalej otrzymamy $AM_0 : \frac{1}{3}l = t_1 : b$, a zatem wstawivszy wartość za t_1 ,

$$AM_0 = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{M}' \cdot \frac{l}{ha} \cdot \frac{1}{3}l}{b} = \frac{\mathfrak{M}'l^2}{6abh'}$$

a jeżeli $b = \frac{1}{6}a$, więc

$$AM_0 = \frac{\mathfrak{M}'}{h} \left(\frac{l}{a}\right)^2 = V_0V_0' = VV',$$

a podobnie $B_0N_0 = \frac{\mathfrak{M}''}{h} \left(\frac{l}{a}\right)^2 = U_0U_0' = UU'$.

Widzimy stąd, że odstęp linii krzyżowych w pionowych trzecich części (n. *Drittelverticale*, fr. *verticale trisectrice*, *verticale au tiers*) są proporcjonalne do momentów \mathfrak{M}'' i \mathfrak{M}' . Dla $a=l$ a $b = \frac{1}{6}l$ byłyby te odstęp

0-verticlinie.

ymy pomnożone przez odległość biegunową równe momentom \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' . Zmieniwszy odpowiednio podziałkę i odczytując \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' w podziałce momentów, otrzymamy \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' wprost równe odstępom linii krzyżowych w pionowych trzecich części. Na przyszłość przyjmować będziemy, że momenty odczytujemy według osobnej podziałki momentów.

Z rysunku widzimy, że

$$QM = 2UU' = 2\mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad QS = VV' = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad \text{więc}$$

$$MS = (2\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}') \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \mathfrak{N}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad \text{podobnie } NT = \mathfrak{N}' \left(\frac{l}{a}\right)^2,$$

a więc odstęp

Pfeilerlinie.
Einflusslinie.
Einflusslinie.

ymy linii krzyżowych w pionowych podporowych są proporcjonalne do ilości \mathfrak{N}'' i \mathfrak{N}' , a dla $a=l$ równe ilościom \mathfrak{N}'' i \mathfrak{N}' . Ilości \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' i \mathfrak{N}' i \mathfrak{N}'' są zależne tylko od obciążenia i dadzą się, jak wiemy, analitycznie wyznaczyć (§. 4.). Znając je, możemy linie krzyżowe wykreślić.

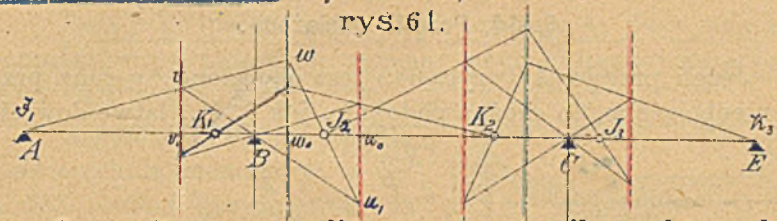
Z rysunku widzimy też, że odcinki MS i NT są to momenty statyczne siły c , działającej w S , ze względu na pionowe podporowe AS i BT^*). Mamy więc

*) por. Podręcznik Statyki Budowli II. wyd. str. 15.

Widzimy więc, że położenie punktu I_1 jest przy danych l i l_1 zależne tylko jeszcze od położenia punktu I , więc dla jakiegokolwiek wieloboku sznurowego pozostaje punkt I_1 ten sam, jeżeli punkt I się nie zmienia. Ponieważ w przeszle skrajnym punkt I , w którym moment staje się zerem, jest zawsze na podporze, więc położenie jego się nie zmienia, a zatem i w następnych przeszłach punkty I nie zmieniają swego położenia, są więc stałymi. Z tego wynika następną konstrukcją wyznaczenia punktów stałych: Z punktu stałego I (a w pierwszym przeszle z podpory A) kreśliśmy dowolną prostą IW i otrzymujemy punkty V i W , kreślimy VB aż do przecięcia się z pionową trzecich części w U_1 i łączymy U_1 z W . Punkt przecięcia się z prostą AB wyznacza punkt stały I_1 . Jeżeli A , B i C nie leżą w linii prostej, to właściwym punktem stałym dla przeszła BC jest punkt I_0 , a punkt I_1 leży w pionowej punktu stałego.

rys. 60.
Teorema Steiner
prinate.
Uscate atez
Stufelreimspinnat

Inflectionulines, Festlinie.



Z rys. 61. wyznaczyliśmy w ten sposób punkty stałe I_2 i I_3 dla podpór równo wysokich. Zaczynając z drugiego końca E , wyznaczyliśmy też drugie punkty stałe K_2 i K_1 .

Jeżeli belka jest na pierwszej podporze w A poziomo utwierdzona, to wedle poprzedniego (§. 9.) punkt stały I_1 leży nie w A , lecz w jednej trzeciej pierwszego przeszła.

Z konstrukcji tej, podanej przez Mohra, wynika bezpośrednio, że punkty stałe leżeć muszą w skrajnych trzecich częściach przeszła. *Zaczynając od drugiego końca od odległości nieodwrotności. Każde 1/3 rozpiętości.*

§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przeszłach nieobciążonych.

Rysunek 62. przedstawia pierwszy wielobok sznurowy dla belki ciągłej, której n -te przeszło jest obciążone. Linie momentów są w przeszłach nieobciążonych proste i przechodzą przez punkty stałe, stąd momenty podporowe są naprzemian

** Punkta stałe I i K leżą pod przystawami linii cięgienków, w których przecina się ona z osią, a więc tangencie cięgienków ugięcia, równy jest zero. Linia ugięcia, ma w tym miejscu punkt przegięcia.*

dotądnie i ujemne, wzrastają ku przęsłu obciążonemu i są więcej niż dwa razy większe od poprzednich. Siły poprzeczne

rys. 62.



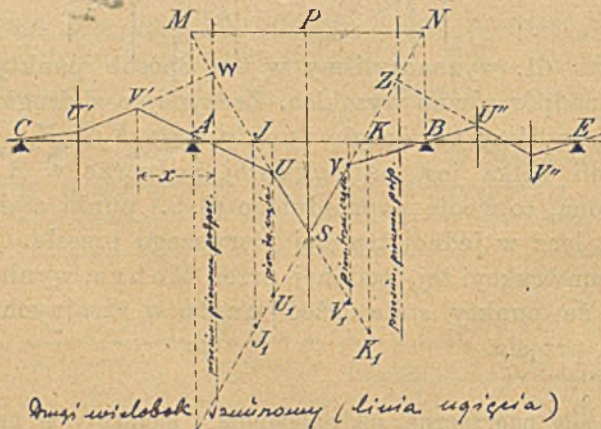
są to pochodne funkcji momentów, a więc w przęsłach nieobciążonych linie sił poprzecznych są poziome, a że $\sin \varphi$ jest naprzemian dodatnia i ujemna, więc i siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne. Oddziaływania równają się różnicy algebraicznej sił poprzecznych z prawej i lewej strony podpory, a więc, gdy siły poprzeczne zmieniają naprzemian znaki, oddziaływania są też naprzemian dodatnie i ujemne.

prz. rys. 12.

§. 44. Przęsło obciążone.

Jeżeli przęsło AB (rys. 63.) jest obciążone, a inne przęsła nieobciążone, to można podobnie, jak §. 41., łatwo dowieść,

rys. 63.



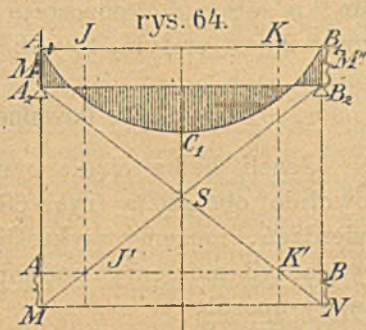
że przedłużenia boków średnich drugiego wieloboku sznurowego dwóch sąsiednich przęsł przecinają się w przesuniętej podporowej i przedłużenia boków średnich SM i SN przechodzą przez punkty stałe I i K , gdy podpory są w jednej linii prostej, inaczej zaś przez punkt przecięcia się prostej CA

względnie BE i pionowej przez punkt stały. Aby więc wykreślić drugi wielobok sznurowy pręśła obciążonego, postępujemy w następujący sposób. Jeżeli mamy dane obciążenie, wykreślamy linie krzyżowe. W §. 40. udowodniliśmy, że UU_1 i VV_1 są równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, a że odnosi się to i do innych odcinków, więc i do II_1 i KK_1 , które robimy równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, kreślimy IK_1 i KI_1 i w ten sposób otrzymujemy dwa średnie boki drugiego wieloboku sznurowego. Odcinki AM i BN , któreśmy teraz uzyskali, są proporcjonalne do momentów podporowych.

Ponieważ $AI < \frac{1}{3}l$, a $AUS < 180^\circ$, więc siła działająca w $U = \frac{1}{2}M' \frac{l}{a}$ działa do góry i jest ujemna, a stąd i M' jest ujemnem. Widzimy więc, że momenty podporowe pręśła obciążonego są ujemne.

Jeżeli podpory leżą w linii prostej, to do wyznaczenia momentów podporowych możemy użyć następującej konstrukcji (rys. 64.).

Jeżeli A, C, B_1 jest zwykłą powierzchnią momentów, a SN i MS liniami krzyżowymi, to kreślimy w punktach stałych I i K pionowe, które przecinają linie krzyżowe w I' i K' , a $I'K'$ jest wtedy linią zamykającą AB , jak w (rys. 63.), odcinki zatem AM i BN są równe (jeżeli $a_1 = l$), albo proporcjonalne do momentów M' i M'' . Robimy teraz momenty $M' = A, A_2$ i $M'' = B_1, B_2$, a A_2B_2 jest linią zamykającą dla belki ciągłej.

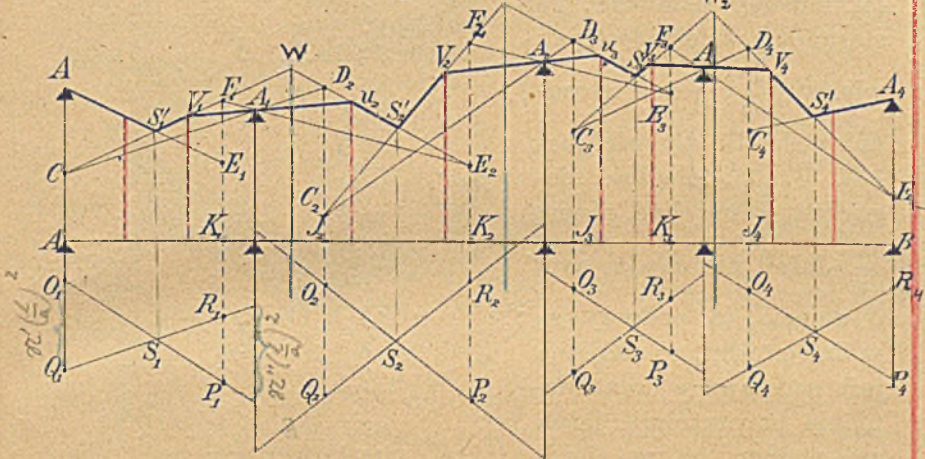


§. 45. Dwa sąsiednie pręśła obciążone.

I tu (rys. 65.) W_0W jest wypadkową sił t_2 i t_1' , leży więc w odległości $\frac{l}{3}$ od V , a zatem przedłużenia boków średnich dwóch sąsiednich pręśel przecinają się w przesuniętej podporowej. Możemy tu także udowodnić, że prosta $I'I_1'$ po-

z pionową punktu stałego w drugim przęśle, wtedy D_2 jest punktem boku średniego drugiego wieloboku sznurowego we-

rys.66. W_1



dług §. 45. Dalej robimy $D_2C_2=O_2Q_2$, kreślimy C_2A_2 aż do D_3 i t. d. Potem zaczynamy znów od A_4 , robimy $A_4E_4=R_4P_4$, kreślimy E_4A_4 aż do E_3 , robimy $E_3E_2=R_3P_3$ itd.

4. W ten sposób otrzymamy dla każdego boku średniego dwa punkty C i F_1 , C_2 i F_2 , A i E_1 itd. tak, że te boki możemy wykreślić. Pionowe trzecich części, przecinające boki średnie, wyznaczają punkty boków skrajnych, które teraz możemy wykreślić. Odcinki pionowe między przedłużeniami boków średnich a podporami są, jak wiadomo, proporcjonalne do momentów podporowych, które w ten sposób możemy wyznaczyć. Czy konstrukcja była dokładna, możemy sprawdzić w następujący sposób:

1. Boki średnie przecinają się w przesuniętych podporowych n. p. CF_1 i E_2D_2 w W .
2. Punkt przecięcia się boków średnich jednego przęsła musi leżeć w pionowej nad punktem przecięcia się linii krzyżowych n. p. S_1' nad S_1 .
3. Prosta, łącząca punkty przecięcia się boków średnich z pionowymi trzecich części w przęsłach sąsiednich, musi przechodzić przez podporę, n. p. punkty V_1 , A_1 i U_2 muszą leżeć w prostej. Jeżeli przęsło które nie jest obciążone, to obie linie

krzyżowe wpadają na siebie. Konstrukcyę tę podał pierwszy Culmann.

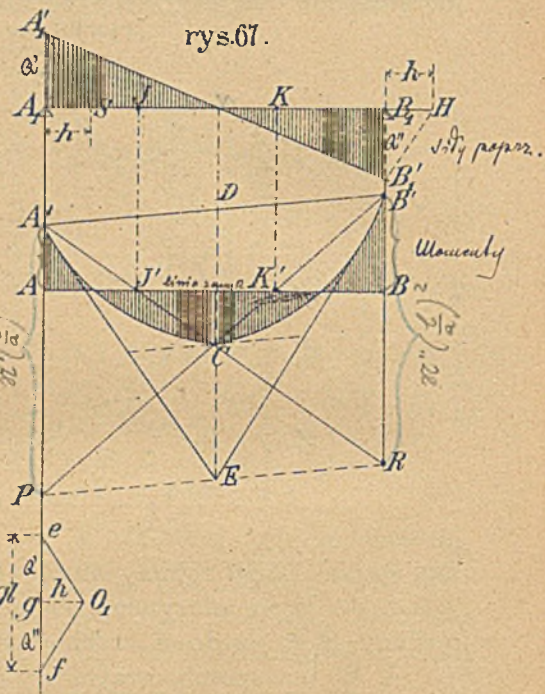
Co się tyczy podziałek musimy pamiętać, że stosunek podziałki jest, jak wiemy, $\frac{1}{hm}$, jeżeli stosunek podziałki długości jest $1/m$. Druga odległość biegunowa b ma być równą $\frac{a}{6}$. Jeżeli nie chodzi nam

o ugięcie, a podpory są w linii prostej, to obojętna jest podstawa a do zamieniania powierzchni; jeżeli zaś podpory są w nierównych wysokościach, a różnice wysokości wykreśliemy w podziałce $\frac{1}{n}$, to musimy według 202) przyjąć

$$b = \frac{nEI}{a^2m}$$

najprzód a równe rozpiętości średniej lub jednej z danych rozpiętości, przyjmujemy dalej $b = \frac{a}{6}$ w podziałce długości i obie-

ramy taką podziałkę sił, aby $b = \frac{nEI}{a^2m}$.



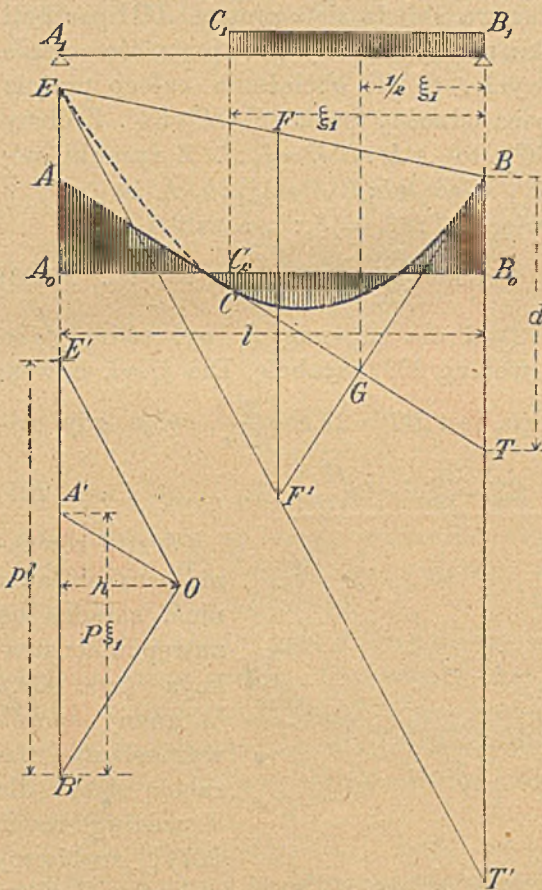
a) Obciążenie jednostajne §. 47. Obciążenie jednostajne zupełne.

Jeżeli przesła AB (rys. 67.) belki ciągłej jest jednostajnie obciążona, to linia momentów jest tu parabolą. Płosci \mathfrak{N}' i \mathfrak{N}'' wyznaczmy według równania 16), mianowicie $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = -\frac{1}{4}gl^2$, a więc według §. 40. odcinki podporowe linii krzyżowych

$$\underline{A'P = B'R = \frac{1}{4}gl^2 \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}ga^2 \left(\frac{l}{a}\right)^2}$$

Dla $l = a$ $A'P = B'R = \frac{1}{4}gl^2$, więc $DC = \frac{1}{8}gl^2$, C zatem jest wierzchołkiem paraboli, która przechodzi przez A' i B' .

Wyznaczenie momentów podporowych w ogóle odbywa się według poprzedniego paragrafu, w razie, jeśli podpory znajdują się w linii prostej według §. 44. (rys. 64.).



Z punktów stałych J i K kreślimy pionowe i łączymy punkty ich przecięcia się J' i K' z liniami krzyżowemi. Otrzymujemy wtedy prostą $J'K'$, która odcina na pionowych podporowych momenty podporowe.

Znając momenty podporowe AA' i BB' , kreślimy $A'B'$ i w połowie przesła pionową $DE = \frac{1}{4} gl^2$, wtedy $A'E$ i EB' są stycznymi paraboli a $DC = \frac{DE}{2} = \frac{1}{8} gl^2$ Si-

ły poprzeczne wyznaczamy w następujący sposób: Robimy $ef = gl$, $fO_1 \parallel EB'$ i $eO_1 \parallel A'E$, to otrzymamy biegun O_1 i pierwszą odległość biegunową h . Prowadzimy teraz $Qg \parallel AB$, jako zamykającej, a będzie $eg = Q'$, $gf = Q''$. Zróbmy teraz $A_1A_1' = Q' = eg$ i $BB_1' = Q'' = gf$, to $A_1'B_1'$ jest linią sił poprzecznych.

A_1A_1' i B_1B_1' możemy też wprost otrzymać:

Zróbmy $B_1H = A_1S = h$,

dalej $SA_1' \parallel EA'$ i $HB_1' \parallel B'E$,

to otrzymamy Q' i Q'' .

3) §. 48. Obciążenie jednostajne częściowe.

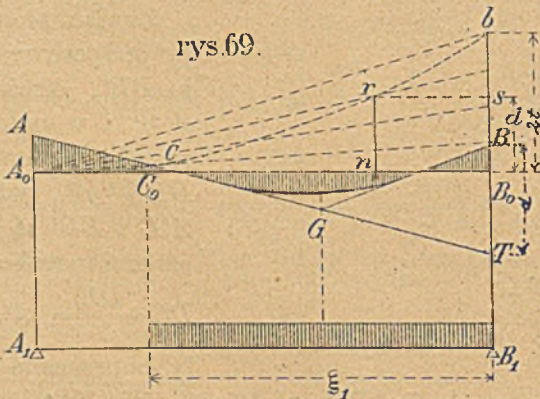
Jeżeli tylko część przęśła C_1B_1 (rys. 68.) jest jednostajnie obciążona, to linia sznurowa składa się z prostej AC i paraboli CB . Jeżeli w wieloboku sił wykreślimy promień równoległy do stycznych podporowych, to dla obciążenia całego przęśła styczna byłaby EF' , więc odnośny promień $OE' \parallel EF'$. Zróbmy też $OA' \parallel CA$ i $OB' \parallel BG$, to $A'B' : B'E' = \xi_1 : l$. Z rysunku widzimy, że $GBT \sim OA'B'$, więc $BT : B'A' = \frac{1}{2} \xi_1 : h$. A że

$A'B' = p\xi_1$, więc $BT : p\xi_1 = \frac{1}{2} \xi_1 : h$, a zatem

$$BT = \frac{p\xi_1^2}{2h} \dots \dots \dots 206)$$

Jeżeli długości $BT = d$ dla zmiennej ξ_1 wykreślimy jako rzędne, to otrzymamy według 206) parabolę. Dla $\xi_1 = l$, a więc dla obciążenia zupełnego, jest $BT' = 2FF' = \frac{pl^2}{2h}$, więc gdy na-

zwiemy $FF' = t$, to $d = BT = \frac{2t}{l^2} \xi_1^2 = 2t \left(\frac{\xi_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 207)$



rys.69.

Jeżeli równanie paraboli, a na niem zasada się następna konstrukcja (rys. 69.). W znany sposób wykreślamy parabolę $A_0c_r b$, dla d według równ. 207), zrobiwszy $B_0b = 2t$. Zróbmy $A_0n = \xi_1$, to $nr = d$, robimy więc $d = nr = BT$, łączymy

A z T , w połowie C_0B_0 kreślimy pionową, otrzymujemy G i styczną GB , poczem wykreślamy bez trudności paraboliczną linię sznurową C_0B .

4) §. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym.

Jeżeli ciężar skupiony P działa w punkcie D_0 (rys. 70.), a trójkąt ACB jest pojedynczą powierzchnią momentów, to

wszystkie linie wpływowe dla punktów od A do 2 będą miały w 2 tę samą rzędną, ^{c_2} zaś linie wpływowe dla punktów od 2 do B mają w 2 rzędną c_2' . Długość $2'2 = P$. Wyznaczenie linii wpływowych dla sił poprzecznych jest więc bardzo łatwe, bo te nakrywają się po części.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę zapomocą poprzecznic, to linie te zmieniają się wskutek tego tak, jak przy belce jednoprzęsłowej. Zamiast linii wpływowych krzywych otrzymujemy wieloboki, których wierzchołki, odpowiadające poprzecznicom, leżą na tych liniach krzywych.

§. 51. Własności linii wpływowych i tablice do ich wykreślenia.

Inż. Da u j o n udowadnia*), że linie wpływowe momentów składają się z części parabol sześciennych i określa ich własności. Jeżeli przekrój C leży w części środkowej, to niema linia wpływowa w danym przęśle punktów zwrotnych. Jeżeli zaś leży w części pierwszej, to punkt zwrotny leży w części trzeciej i na odwrót. W sąsiednich przęsłach linia wpływowa ma punkt zwrotny w pionowej punktu stałego i to w lewych punktu stałego lewego, prawych prawego. Jeżeli będziemy badali dwie linie wpływowe przęseł sąsiednich dla punktów C i C' , to rzędne ich w przęsłach na lewo leżących mają się jak odstęp C i C' od punktu stałego na prawo i na odwrót.

Linie wpływowe sił poprzecznych składają się także z parabol 3 rzędu.

Inżynierowie Dupuy i Cuënot obliczyli dla belek wieloprzęsłowych rzędne linii wpływowych dla rozmaitych stosunków rozpiętości ϑ **). W osobnem dziele p. n. „Calcul des ponts métalliques“ zestawili inżynierowie Adryan Cart i Leon Portes (1895) także takie tablice, zaś Griot w dziele: Interpolierbare Tabellen zum Eintragen der Einflusslinien (1904).

W §18. podaliśmy sposób wykreślenia linii wpływowych dla belki dwuprzęsłowej, gdy $l_1 = l_2 = l$. Tu podamy jako przykład rzędne tych linii dla tego samego wypadku według Carta i Portesa, a także rzędne linii wpływowych belki trzyprzęsłowej dla $\vartheta = 0.9$.

*) por. Annal. des ponts et chaussées 1894 I. str. 959.

***) „ „ „ „ „ „ 1897 III. str. 91.

Linie wpływowe belki dwuprzęsłowej

dla $l_1 = l_2 = l$.

u rzędna przekroju, x rzędna ciężaru ruchomego $P=1$.

A. Momenty. a. Dane przeszło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Pierwsze przeszło	0.1	+0.0875	+0.0751	+0.0626	+0.0501	+0.0376	+0.0252	+0.0127	+0.0002	-0.0123	-0.0248
	0.2	+0.0752	+0.1504	+0.1256	+0.1008	+0.0760	+0.0512	+0.0264	+0.0016	-0.0232	-0.0480
	0.3	+0.0632	+0.1264	+0.1895	+0.1527	+0.1159	+0.0790	+0.0422	+0.0054	-0.0314	-0.0683
	0.4	+0.0516	+0.1032	+0.1548	+0.2064	+0.1580	+0.1096	+0.0612	+0.0128	-0.0356	-0.0840
	0.5	+0.0406	+0.0813	+0.1219	+0.1625	+0.2031	+0.1438	+0.0844	+0.0250	-0.0344	-0.0936
	0.6	+0.0304	+0.0608	+0.0912	+0.1216	+0.1520	+0.1824	+0.1128	+0.0432	-0.0264	-0.0960
	0.7	+0.0211	+0.0422	+0.0632	+0.0843	+0.1054	+0.1265	+0.1475	+0.0686	-0.0103	-0.0893
	0.8	+0.0123	+0.0256	+0.0384	+0.0512	+0.0640	+0.0768	+0.0896	+0.1024	+0.0152	-0.0720
	0.9	+0.0057	+0.0115	+0.0172	+0.0229	+0.0286	+0.0344	+0.0401	+0.0458	+0.0515	-0.0423
	Drugie przeszło	0.1	+0.0515	+0.0458	+0.0401	+0.0344	+0.0286	+0.0229	+0.0172	+0.0115	+0.0057
0.2		+0.0152	+0.1024	+0.0896	+0.0768	+0.0640	+0.0512	+0.0384	+0.0256	+0.0128	-0.0720
0.3		-0.0103	+0.0686	+0.1475	+0.1265	+0.1054	+0.0843	+0.0632	+0.0422	+0.0211	-0.0893
0.4		-0.0264	+0.0432	+0.1128	+0.1824	+0.1520	+0.1216	+0.0912	+0.0608	+0.0304	-0.0960
0.5		-0.0344	+0.0250	+0.0844	+0.1438	+0.2031	+0.1625	+0.1219	+0.0813	+0.0406	-0.0936
0.6		-0.0356	+0.0128	+0.0612	+0.1096	+0.1580	+0.2064	+0.1548	+0.1032	+0.0516	-0.0840
0.7		-0.0314	+0.0054	+0.0422	+0.0791	+0.1159	+0.1527	+0.1895	+0.1264	+0.0632	-0.0683
0.8		-0.0232	+0.0016	+0.0264	+0.0512	+0.0760	+0.1008	+0.1256	+0.1504	+0.0752	-0.0480
0.9		-0.0123	+0.0002	+0.0127	+0.0252	+0.0376	+0.0501	+0.0626	+0.0751	+0.0875	-0.0248

6. Drugie przęsło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l} = 0.1$	0.9	U w a g a.
Przekrój w drugim przęsle	0.1	—0		Wstawiać należy według linii prostej
	0.2	—0.0228	—0.0025	
	0.3	—0.0432	—0.0048	
	0.4	—0.0756	—0.0084	
	0.5	—0.0844	—0.0094	
	0.6	—0.0864	—0.0096	
	0.7	—0.0803	—0.0089	
	0.8	—0.0648	—0.0072	
	0.9	—0.0385	—0.0043	
Przekrój w pierwszym przęsle	0.1	—0.0043	—0.0385	
	0.2	—0.0072	—0.0640	
	0.3	—0.0089	—0.0809	
	0.4	—0.0096	—0.0864	
	0.5	—0.0094	—0.0844	
	0.6	—0.0084	—0.0756	
	0.7	—0.0068	—0.0614	
	0.8	—0.0048	—0.0432	
	0.9	—0.0025	—0.0228	

B. Siły poprzeczne.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l} = 1.0$	0	Rzędne w sąsiednim przęśle
Pierwsze przęsło	0.1	—0.1248	+0.8753	Drugie przęsło +0.0248
	0.2	—0.2480	+0.7520	+0.0480
	0.3	—0.3683	+0.6318	+0.0683
	0.4	—0.4840	+0.5160	+0.0840
	0.5	—0.5938	+0.4063	+0.0937
	0.527	—0.6736	+0.3264	+0.0962
	0.6	—0.6960	+0.3040	+0.0960
	0.7	—0.7893	+0.2108	+0.0893
	0.8	—0.8720	+0.1280	+0.0720
0.9	—0.9428	+0.0573	+0.0428	
Drugie przęsło	0.1	—0.0573	+0.9428	Pierwsze przęsło —0.0428
	0.2	—0.1280	+0.8720	—0.0720
	0.3	—0.2108	+0.7893	—0.0893
	0.4	—0.3040	+0.6960	—0.0960
	0.423	—0.3264	+0.6736	—0.0962
	0.5	—0.4063	+0.5978	—0.0938
	0.6	—0.5160	+0.4840	—0.0840
	0.7	—0.6318	+0.3683	—0.0683
	0.8	—0.7520	+0.2480	—0.0480
0.9	—0.8753	+0.1248	—0.0248	

Linie wpływowe belki trzyprzęsłowej

dla $l_1 = l_3 = 0.9l$.

u rzędne przekroju, x rzędne ciężaru ruchomego $P=1$.

A. Momenty. a. Dane przęsło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Pierwsze przęsło	0.1	+0.0875	+0.0750	+0.0624	+0.0499	+0.0374	+0.0249	+0.0124	-0.0002	-0.0127	-0.0252 l_1
	0.2	+0.0751	+0.1502	+0.1253	+0.1005	+0.0756	+0.0507	+0.0258	+0.0009	-0.0240	-0.0489 l_1
	0.3	+0.0631	+0.1261	+0.1892	+0.1522	+0.1153	+0.0783	+0.0414	+0.0044	-0.0325	-0.0695 l_1
	0.4	+0.0515	+0.1029	+0.1544	+0.2058	+0.1573	+0.1087	+0.0602	+0.0116	-0.0370	-0.0855 l_1
	0.5	+0.0405	+0.0809	+0.1214	+0.1618	+0.2023	+0.1427	+0.0782	+0.0297	-0.0359	-0.0954 l_1
	0.6	+0.0302	+0.0605	+0.0907	+0.1209	+0.1511	+0.1814	+0.1116	+0.0418	-0.0279	-0.0977 l_1
	0.7	+0.0209	+0.0418	+0.0627	+0.0837	+0.1046	+0.1255	+0.1464	+0.0673	-0.0118	-0.0938 l_1
	0.8	+0.0127	+0.0253	+0.0380	+0.0507	+0.0634	+0.0760	+0.0887	+0.1014	+0.0140	-0.0733 l_1
	0.9	+0.0056	+0.0113	+0.0179	+0.0226	+0.0282	+0.0339	+0.0395	+0.0452	+0.0508	-0.0435 l_1
Drugie przęsło	0.1	+0.0516	+0.0442	+0.0367	+0.0293	+0.0219	+0.0144	+0.0070	-0.0004	-0.0078	-0.0410 l_2
	0.2	+0.0163	+0.0997	+0.0831	+0.0666	+0.0500	+0.0334	+0.0169	+0.0003	-0.0163	-0.0671 l_2
	0.3	-0.0076	+0.0654	+0.1384	+0.1114	+0.0844	+0.0574	+0.0304	+0.0034	-0.0236	-0.0806 l_2
	0.4	-0.0219	+0.0399	+0.1016	+0.1633	+0.1250	+0.0867	+0.0484	+0.0101	-0.0231	-0.0836 l_2
	0.5	-0.0281	+0.0219	+0.0719	+0.1219	+0.1719	+0.1219	+0.0719	+0.0219	-0.0281	-0.0781 l_2
	0.6	-0.0281	+0.0101	+0.0484	+0.0867	+0.1250	+0.1633	+0.1016	+0.0399	-0.0219	-0.0664 l_2
	0.7	-0.0236	+0.0034	+0.0304	+0.0574	+0.0844	+0.1114	+0.1384	+0.0654	-0.0076	-0.0506 l_2
	0.8	-0.0163	+0.0003	+0.0169	+0.0334	+0.0500	+0.0666	+0.0831	+0.0997	+0.0163	-0.0329 l_2
	0.9	-0.0078	-0.0004	+0.0070	+0.0144	+0.0219	+0.0293	+0.0367	+0.0442	+0.0516	-0.0153 l_2

b. Sąsiednie przęsło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.9	.1		$\frac{u}{l}=0.1$	0.9
Przekrój w pierwszym przęsle	0.1	-0.0041	-0.0369	-0.0410 _{l₂}	Przekrój w trzecim przęsle	-0.0137	-0.0015 _{l₂}
	0.2	-0.0067	-0.0604	-0.0671 _{l₂}		-0.0296	-0.0033 _{l₂}
	0.3	-0.0081	-0.0726	-0.0806 _{l₂}		-0.0456	-0.0051 _{l₂}
	0.4	-0.0084	-0.0752	-0.0836 _{l₂}		-0.0598	-0.0066 _{l₂}
	0.5	-0.0078	-0.0703	-0.0781 _{l₂}		-0.0703	-0.0078 _{l₂}
	0.6	-0.0066	-0.0598	-0.0664 _{l₂}		-0.0752	-0.0084 _{l₂}
	0.7	0.0051	-0.0456	-0.0506 _{l₂}		-0.0726	-0.0081 _{l₂}
	0.8	-0.0033	-0.0296	-0.0329 _{l₂}		-0.0604	-0.0067 _{l₂}
	0.9	-0.0015	-0.0137	-0.0153 _{l₂}		-0.0369	-0.0041 _{l₂}
Przekrój w drugim przęsle	0.1	-0.0220	+0.0034	+0.0066 _{l₁}			
	0.2	-0.0427	+0.0067	+0.0129 _{l₁}			
	0.3	-0.0607	+0.0095	+0.0183 _{l₁}			
	0.4	-0.0747	+0.0117	+0.0225 _{l₁}			
	0.5	-0.0834	+0.0131	+0.0251 _{l₁}			
	0.6	-0.0854	+0.0134	+0.0257 _{l₁}			
	0.7	-0.0794	+0.0124	+0.0239 _{l₁}			
	0.8	-0.0640	+0.0100	+0.0193 _{l₁}			
	0.9	-0.0380	+0.0060	+0.0115 _{l₁}			

B. Siły poprzeczne.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=1.0$	0	Rzędne w przęsle sąsiednim			
				Przęsło lewe	Przęsło prawe		
Pierwsze przęsło	0.1	-0.1252	+0.8748		Przekrój w 2 przęsle		
	0.2	-0.2489	+0.7511			+0.0286	
	0.3	-0.3695	+0.6305			+0.0555	
	0.4	-0.4850	+0.5145			+0.0790	
	0.5	-0.5954	+0.4046			+0.0972	
	0.577	-0.6753	+0.3247			+0.1085	
	0.6	-0.6977	+0.3023			+0.1113	
	0.7	-0.7908	+0.2092			+0.1111	
	0.8	-0.8733	+0.1267			+0.1033	
0.9	-0.9435	+0.0565		+0.0833			
Drugie przęsło	0.1	-0.0743	+0.9257	Przekrój w 1 przęsle	Przekrój w 3 przęsle		
	0.2	-0.1657	+0.8343			-0.0455	+0.0170
	0.3	-0.2700	+0.7300			-0.0746	+0.0365
	0.4	-0.3829	+0.6171			-0.0896	+0.0563
	0.5	-0.5000	+0.5000			0.0929	+0.0788
	0.6	-0.6171	+0.3829			-0.0868	+0.0868
	0.7	-0.7300	+0.2700			-0.0738	+0.0929
	0.8	-0.8343	+0.1657			-0.0563	+0.0896
	0.9	-0.9257	+0.0743			-0.0365	+0.0746

§. 52. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów.

Z kształtu linii wpływowych sił poprzecznych widzimy, że siła poprzeczna w danym przekroju jest największą lub najmniejszą, gdy obciążenie sięga od przekroju do prawej lub lewej podpory tegoż przęsła, a następne przęsła są naprzemian obciążone. Chcąc wyznaczyć najniekorzystniejsze położenie dla momentów, założmy, że w punkcie D przęsła AB (rys. 71.) działa ciężar P . Dla tego położenia ciężaru wyznaczyliśmy linię zamykającą $A'B'$, a więc jeśli $a=l$, AA' i BB' są równe momentom podporowym. Z rysunku widzimy, że jeżeli ciężar jest w D , w O moment jest równy zero. Jeżeli ciężar posunie się na prawo, w O moment jest ujemny, jeżeli na lewo, dodatni. Dla najw M w punkcie O musi więc być obciążona długość AD , dla najmn M długość DB . Ponieważ punkt S jest wewnątrz trójkąta ABC , więc punkty O i R leżą po za punktami stałymi. Widzimy więc, że tylko dla punktów pierwszej i trzeciej części przęsła mamy punkt obojętny, dla punktów części średniej między punktami stałymi niema takiego punktu obojętnego, moment jest zawsze dodatni, a zatem najw M jest dla zupełnego obciążenia (tabl. I, rys. 23). Inne przęsła muszą być naprzemian obciążone.

Bewegliche
Inflexions-
punkte.
p. 14. 20

§. 53. Największe siły zewnętrzne.

Siły poprzeczne i momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych najlepiej obliczymy zapomocą linii wpływowych. Sposób wyznaczenia największych sił zewnętrznych na podstawie linii wpływowych podaliśmy w Podr. Teorii Most. w tomie I. (wyd. II., str. 39.). Jeżeli belka jest obciążona ciężarem jednostajnym ciągłym, to największe siły poprzeczne i momenty wyznaczymy w następujący sposób:

1. Wyznaczamy najpierw punkty stałe znany sposobem według §. 42. (tabl. I, rys. 2a).

2. Dla wyznaczenia momentów podporowych (rys. β) postępujemy w następujący sposób:

Na pionowej przez podporę A odcinamy T_1 odległość linii krzyżowych na podporach dla obciążenia zupełnego

pierwszego przęsła. Według §. 47. jest $T_4 = \mathfrak{N}' \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 = \frac{1}{4} p l_1^2 \left(\frac{l_1}{a} \right)^2$.

Gdy przyjmiemy $a=l_1$, to $T_4 = \mathfrak{N}' = \frac{1}{4} p l_1^2$, a z konstrukcyi otrzymamy wprost moment podporowy M . T_4 możemy też otrzymać zapomocą konstrukcyi, łącząc B z wierzchołkiem paraboli wykreślonej dla belki zwykłej, T_4 będzie wtedy także $= 2 \frac{1}{8} p l_1^2 = \frac{1}{4} p l_1^2$. Dalej obliczymy T_3 , T_2 i T_1 dla obciążeń częściowych pierwszego przęsła od podpory A do punktu 3, 2 lub 1. Jeżeliśmy, jak tu, przyjęli $a=l_1$, to $T_3 = \mathfrak{N}'_3$ i t. d., zaś \mathfrak{N}' wyznaczmy według równania 18). Punkty w ten sposób wyznaczone łączymy z B , a punkty przecięcia się tych prostych z pionową punktu stałego K_1 , połączone z A , wyznaczają na podporowej B punkta 1, 2, 3, 4. Odcinki $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ są to momenty podporowe dla obciążeń długości $A1$, $A2$, $A3$ i AB .

Podobnie otrzymujemy i w drugim przęśle momenty podporowe $B5$, $B6$, $B7$, $B8$ i $C5$, $C6$, $C7$, $C8$. I tu odcinamy najpierw na obu pionowych podporowych ilości T_5 , $T_6 \dots T_5'$, $T_6' \dots$ łączymy te punkty z C , a względnie z B i przez punkty przecięcia się z pionowemi punktów stałych prowadzimy zamykające, które odcinają momenty podporowe dla odnośnych obciążeń częściowych drugiego przęsła.

3. Teraz rysujemy najmniejsze momenty i to najprzód w pierwszym przęśle. Na długości AK_1 są najmniejsze momenty, gdy jest obciążone przęsło średnie (obciążenie I., rys. γ), wtedy moment na podporze B jest $B8$. Zróbmy (rys. δ) $B'O'' = B8$ i połączmy A' z O'' , wtedy prosta ta do K_1 będzie linią najmniejszych momentów. Dla wykreślenia dalszej części tej linii najlepiej będzie wyznaczyć ją stycznymi dla obciążenia $\frac{l_1}{4}$, $\frac{2l_1}{4}$, $\frac{3l_1}{4}$ i $\frac{4l_1}{4}$ i dla równoczesnego obciążenia drugiego przęsła [II, III, IV, V, rys. γ]. Najprzód wyznaczmy według rów. 207) długość $d = 2t \left(\frac{\xi_1}{l_1} \right)^2$ dla powyższych obciążeń i otrzymamy $d_4 = 2t = A'4''$ (rys. δ), $d_3 = A'3''$, $d_2 = A'2''$, $d_1 = A'1''$. Moment podporowy dla obciążenia II jest $= B1 + B8 = B'O'' + O''1'' = B'1''$, zatem $1''1''$ jest styczną do linii sznurowej dla obciążenia II. Podobnie otrzymamy styczne $2''2''$, $3''3''$, $4''4''$ dla obciążenia III, IV i V, które wyznaczają resztę linii najmniejszych momentów w pierwszym przęśle.

W prześle średnim także najpierw wykreślimy linię najmniejszych momentów. Dla obciążenia IV (rys. γ) otrzymamy moment ujemny w C $C'O' = B4$. Połączmy O' z J_2' , a otrzymamy moment podporowy w B . Punkt K_2'' tej prostej wyznacza najmn. moment w punkcie K_2 ; jeżeli więc przez K_2'' poprowadzimy poziomą, to $J_2''K_2''$ będzie linią najmniejszych momentów. Pozostaje jeszcze krzywa 4go stopnia $K_2''S'$, którą znowu wyznaczymy stycznymi.

Dla najmniejszych momentów na trzeciej części średniego przęsła musi być obciążona pewna długość od B i trzecie przęsło (obciąż. VII do X, rys. γ). Najprzód więc wyznaczymy momenty podporowe dla każdego obciążenia. Np. dla obciążenia VII otrzymamy ujemny moment w C , dodając $C'O'$ do $C5$, otrzymamy więc $C'5'$, na podporze zaś B będzie $M = B5 - B0$. Teraz wyznaczamy według §. 48 $d_8 = 2'_8 = B'S'$, $d_7' = B7'$ itd., odciągamy od tego odnośny moment podporowy w B i otrzymujemy wtedy punkty $8''7''$ itd.; które połączone z punktami S' i $7'$ itd. dają styczne do linii najmniejszych momentów.

Resztę linii najmniejszych momentów dopełniamy, rysując symetrycznie do środka belki.

Linie największych momentów otrzymamy przez odciąganie rzędnych linii najmniejszych momentów od linii momentów dla całkowitego obciążenia. Aby zaś tę linię otrzymać, zauważymy, że dla zupełnego obciążenia otrzymamy momenty podporowe, dodając momenty, wywołane obciążeniem każdego przęsła, więc w punkcie B będzie $M = -B4 - B8 + B0$. W C będzie moment także tak wielki, a znając teraz momenty podporowe, wykreślić możemy z łatwością paraboliczne linie sznurowe.

4. Wyznaczenie sił poprzecznych jest łatwe; zważyć nam tylko trzeba, że obciążenia, w schemacie (rys. γ) uwidocznione, wywołują najmn Q dla odnośnych punktów. Jeżeli więc od punktu A , 1, 2, 3, B , 5, 6 itd. (rys. ϵ) na lewo odetniemy odległość biegunową a i wykreślimy równoległe do odnośnych stycznych $A'O''$, $1''1''$, $2''2''$ i t. d., otrzymamy punkty linii najmn. sił poprzecznych.

Dla obciążenia zupełnego linie sił poprzecznych są proste, dość więc wyznaczyć dla każdej po dwa punkty, co robimy w ten sam sposób, kreśląc n. p. $On''//A'n$ i t. d. Linie największ-

szych sił poprzecznych otrzymujemy znów przez odciąganie rzędnych *najmn* Q od linii sił poprzecznych dla obciążenia zupełnego. Ostatnie 3 rysunki (ξ , η , δ) przedstawiają wyznaczenie sił zewnętrznych, wywołanych ciężarem własnym. Tu wyznaczamy tylko momenty podporowe dla obciążenia całkowitego przęsła, a więc B_4 , B_8 i C_0 . Moment w B będzie $M = -B_4 - B_8 + C_0$; dalsza konstrukcyja jest wobec tego, cośmy wyżej powiedzieli, zupełnie jasną.

VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 54. Belka pochyło utwierdzona.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że przekrój belki ciągłej, a więc i moment bezwładności był stały, teraz zbadajmy, o ile obliczenie to się zmieni, jeśli przekrój będzie zmienny, przy czem wyłożymy rzecz według Winklera.

Dla belki pochyło utwierdzonej otrzymamy wtedy zamiast równań 2) 3) i 4), jeśli I jest zmienne,

$$\varepsilon(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l \frac{M}{I} dx \quad \dots \dots \dots 208)$$

$$\varepsilon y = \varepsilon x \frac{dy}{dx} + \int \frac{M}{I} x dx \quad \dots \dots \dots 209)$$

$$\varepsilon(s - lt_2) = \int_0^l \frac{M}{I} x dx \quad \dots \dots \dots 210)$$

Równanie 5) i 7) pozostaje niezmienione. Wstawiwszy rów. 7) w rów. 208) i 210), otrzymamy

$$\varepsilon(\tau_1 - \tau_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{(l-x) dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{X dx}{I} \quad \dots 211)$$

$$\varepsilon(s - lt_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} + \int_0^l \frac{X x dx}{I} \quad \dots 212)$$

Nazwijmy I_0 średni moment bezwładności, t. j. taki, aby

$$\frac{l}{I_0} = \int \frac{dx}{I} \quad \dots \dots \dots 213)$$

pryczem całkować mamy od początku do końca belki przez wszystkie przęsła.

Nazwijmy dalej dla pewnego przęsła

$$\frac{I_0 \int_0^l dx}{l \int_0^l I} = A, \quad \frac{2I_0 \int_0^l x dx}{l^2 \int_0^l I} = B, \quad \frac{3I_0 \int_0^l x^2 dx}{l^3 \int_0^l I} = C,$$

to, jeśli I stałe, $A=B=C=1$.

Nazwijmy jeszcze dla skrótowania

$$\frac{6I_0 \int_0^l X dx}{l^2 \int_0^l I} = \mathfrak{N}', \quad \frac{6I_0 \int_0^l X(l-x)d(l-x)}{l^2 \int_0^l I} = \mathfrak{N}'', \quad \dots \quad 214)$$

to
$$\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' = -\frac{6I_0 \int_0^l X dx}{l \int_0^l I} \dots \dots \dots 215)$$

Wstawivszy te wartości w rów. 211) i 212), otrzymamy

$$6\epsilon I_0 l (\tau_1 - \tau_2) = 3(2A - B)M'l^2 + 3BM''l^2 - (\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'')l^2,$$

$$6\epsilon I_0 (s - l\tau_2) = (3B - 2C)M'l^2 + 2CM''l^2 - \mathfrak{N}''l^2.$$

A stąd otrzymamy

Styczna do krzywej w punkcie
na linii ugięcia
na podporach

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{6\epsilon I_0} (2\alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{N}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{1}{6\epsilon I_0} (\gamma M' + 2\beta M'' - \mathfrak{N}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right. \dots \dots \dots 216)$$

jeżeli
$$\alpha = 3A - 3B + C, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C \dots \dots \dots 217)$$

Dla przekroju stałego otrzymamy znowu $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a wtedy rów. 216), przechodzi w rów. 11).

Jeżeli dla belki poziomo utwierdzonej nazwiemy, jak pierwiej, momenty podporowe \mathfrak{M}' i \mathfrak{M}'' , to według rów. 216)

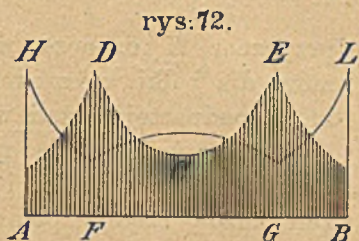
$$0 = 2\alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}', \quad 0 = \gamma \mathfrak{M}' + 2\beta \mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}'',$$

więc
$$\mathfrak{N}' = 2\alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'', \quad \mathfrak{N}'' = \gamma \mathfrak{M}' + 2\beta \mathfrak{M}'' \dots \dots \dots 218)$$

Dla przekroju stałego przechodzi rów. 218) w rów. 12).

§. 55. Wyznaczenie ilości pomocniczych.

W celu wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ wykreślmy w każdym punkcie belki rzędną proporcjonalną do odwrotności momentu bezwładności, więc $\frac{1}{I}$ (rys. 72).



Końce tych rzędnych, wyznaczają linię krzywą, a powierzchnia między tą linią a osią niech się nazywa odwrotną powierzchnią bezwładności (n. *Krümmungsfläche*).

Krümmungsfläche).

Całki $\int_0^l \frac{dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x^2 dx}{I}$ oznaczają zatem powierzchnię odwrotną bezwładności A' , moment jej statyczny S' i bezwładności I' ze względu na AH , więc

$$A = \frac{I_0 A'}{l}, \quad B = \frac{2I_0 S'}{l^2}, \quad C = \frac{3I_0 I'}{l^3}.$$

Nazwijmy moment statyczny i bezwładności ze względu na BL S'' i I'' i $B_1 = \frac{2I_0 S''}{l^2}$, $C_1 = \frac{3I_0 I''}{l^3}$, to

$$S'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l \int_0^l \frac{dx}{I} - \int_0^l \frac{x dx}{I} = A'l - S',$$

$$I'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l^2 \int_0^l \frac{dx}{I} - 2l \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = A'l^2 - 2lS' + I',$$

więc

$$B_1 = \frac{2I_0}{l^2} (A'l - S') = 2A - B,$$

$$C_1 = \frac{3I_0}{l^3} (A_1 l^2 - 2lS' + I') = 3A - 3B + C,$$

a zatem według 217)

$$\alpha = C_1, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C = 3A - \alpha - \beta \dots 219)$$

Do wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ potrzebujemy więc tylko A , B , C i C_1 , a więc powierzchnię i momenty statyczne bezwładności odwrotnej powierzchni bezwładności, co możemy wyznaczyć albo rachunkiem sposobem zwykłym lub Simpsona lub konstrukcją albo planimetrem.

§. 56. Wyznaczenie ilości \mathfrak{N}' i \mathfrak{N}'' .

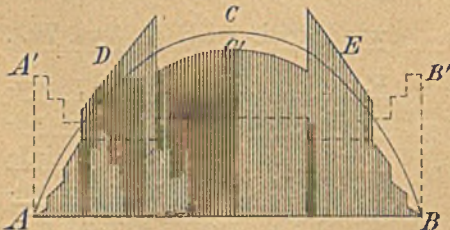
Według rów. 214)

$$\mathfrak{N}'' = -\frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{Xx dx}{I},$$

$$\mathfrak{N}' = +\frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x)d(l-x)}{I},$$

przyczem X oznacza moment dla belki w dwu punktach podpartej. Jeżeli wykreślimy zwykłą linią momentów ACB (rys. 73.) i jeżeli każdą rzędną pomnożymy przez $\frac{I_0}{I}$, to nowe rzę-

rys. 73.



dne dadzą nam powierzchnię kreskowaną $ADC'EB$, którą nazwiemy skurczona powierzchnią momentów (n. verzerrte Momentenfläche).

Nazwijmy S_1 moment statyczny tej powierzchni dla pionowej AA' a S_2 dla pionowej BB' , to

p. str. 74 ostatni wiersz.

$$\mathfrak{R}'' = -\frac{6S_1}{l^2}, \mathfrak{R}' = +\frac{6S_2}{l^2} \dots \dots \dots 220)$$

§. 57. Momenty podporowe belki ciągłej.

Jeżeli równanie 216) zastosujemy do dwóch sąsiednich przęseł belki ciągłej o równo wysokich podporach, jak w §. 5., to otrzymamy

$$6\epsilon I_0 \tau_m = -l_m(\gamma_m M_{m-1} + 2\beta_m M_m - \mathfrak{R}_m''),$$

$$6\epsilon I_0 \tau_{m+1} = +l_{m+1}(2\alpha_{m+1} M_m + \gamma_{m+1} M_{m+1} - \mathfrak{R}_{m+1}'),$$

a stąd równanie momentów podporowych.

$$\gamma_m l_m M_{m-1} + 2(\beta_m l_m + \alpha_{m+1} l_{m+1}) M_m + \gamma_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} = \\ = l_m \mathfrak{R}_m'' + l_{m+1} \mathfrak{R}_{m+1}' \dots \dots \dots 221)$$

Drugi moment zbieżny.

Równanie to posłuży nam do wyznaczenia momentów podporowych, jak dla przekroju stałego.

§. 58. Punkty stałe.

Jeżeli tylko jedno przęsło jest obciążone, to w nieobciążonych przęsłach otrzymamy momenty podporowe, podstawiając w rów. 221) $m=1, 2$, itd. i $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = 0$, więc

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 0,$$

$$\gamma_2 l_2 M_1 + 2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) M_2 + \gamma_3 l_3 M_3 = 0,$$

.....

Z pierwszego równania wynika

$$M_2 = -2 \left(\frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\beta_1 l_1}{\gamma_2 l_2} \right) M_1, \text{ z drugiego}$$

$$M_3 = - \left[2 \frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{l_2}{l_3} \left(2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{M_1}{M_2} \right) \right] M_2, \text{ a zatem}$$

$$\mu_2 = \frac{2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{\gamma_2 l_2}, \mu_3 = \frac{2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) - \frac{\gamma_2 l_2}{\mu_2}}{\gamma_3 l_3} \dots \dots 222)$$

Podobnie więc, jak dla przekroju stałego, momenty podporowe są na przemieszaniach dodatnie i wzrastają ku przęsłu obciążonemu.

zonemu; podobnie też w każdym przęśle znajdują się dwa punkty stałe, dla których, jak w 44) i 45),

$$a = \frac{1}{1+\mu}, \quad b = \frac{1}{1+\nu} \dots \dots \dots 223)$$

Dalsze obliczenie odbywa się zupełnie, jak dla przekroju stałego.

§. 59. Przykład. *Tab. II.*

Jako przykład obliczmy momenty, wywołane ciężarem własnym, dla tej samej belki trzyprzęsłowej, którą obliczyliśmy dla przekroju stałego w §. 26. A więc niech będzie $l_1=10\cdot00\text{ m}$, $l=13\cdot00\text{ m}$, $g_1=0\cdot0625$, $g=0\cdot06745$. Na rysunku 1. tabl. II. wyznaczyliśmy na podstawie poprzedniego obliczenia przybliżonego, przekrój belki. Wysokość belki drewnianej otrzymaliśmy $h=35\text{ cm}$, szerokość $b=28\text{ cm}$, wysokość siodełka 28 cm . Obliczamy teraz momenty bezwładności $J = \frac{1}{12}bh^3$ w dwu miejscach to znaczy tam, gdzie belka jest pojedynczą i tam gdzie złożoną.

$$J_1 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 28 \times 35^3 = 100036\text{ cm}^4,$$
$$J_2 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 28 \cdot 63^3 = 583443\text{ cm}^4.$$

Na rysunku 3 wykresiliśmy na tej podstawie $\frac{1}{J}$ (linie kreskowane) i wypisaliśmy $\frac{100000}{J}$. Dla połowy belki obliczyliśmy teraz powierzchnię prostokątów, odczytując długości w *mm*, wysokość według liczb na rysunku ($\frac{100000}{J}$) i otrzymaliśmy powierzchnię 140·1. Podzieliwszy tę powierzchnię przez długość 165 *mm*, otrzymaliśmy 0·849 czyli właściwie 0·00000849 jako średni odwrotny moment bezwładności $\frac{1}{J_0}$. Aby wyznaczyć $\frac{J_0}{J}$ podzieliśmy $\frac{1}{J}$ przez $\frac{1}{J_0}$ i wykresili na rysunku $\frac{J_0}{J}$ (linie pełne).

Siodełko teoretycznie powinno sięgać do tego punktu, gdzie moment ujemny przybiera wartość największego momentu dodatniego, ze względu na który został przekrój belki pojedynczej wyznaczony, a ta granica nie przekracza w naszym przypadku 1 metra na lewo i prawo od podpory, ze względu jednak na przytwierdzenie dajemy siodełko 3 m dłużej.

Jeżeli $l_3=l_1$ mierzyć będziemy w *mm*, więc $l_3=100\text{mm}$, to $A'=85\cdot278$, a że $J_0=0\cdot849$, więc $A = \frac{J_0 A'}{l}$, gdzie A' jest powierzchnią średnich odwrotnych momentów bezwładności dla przęśla 1go, J_0 średnim odwrotnym momentem bezwładności dla tegoż przęśla a l rozpiętości w *mm*, więc

$$A = \frac{0\cdot849 \times 85\cdot275}{100} = 0\cdot74325.$$

Dla pierwszego przęśla jest $J'=192\cdot312$, $J''=282207$, więc gdy $J_0=0\cdot849$.

$$C = \frac{3 \times 192\cdot319}{100^3} \times 0\cdot849 = 0\cdot4889 = \beta_1, \quad C_1 = \frac{3 \times 282207}{100^3} \cdot 0\cdot849 = 0\cdot7187 = \alpha_1$$

$$\gamma_1 = 3 \cdot 0.74325 - 0.4889 - 0.7187 = 1.02215.$$

Podobnie otrzymamy dla drugiego przęsła $A' = 102.16$, $l_2 = 130$ mm, przeto $A = \frac{102.16}{180} = 0.78585$, $J' = J'' = 620.953$, J_0 dla przęsła drugiego = 1.

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{3 \times 620.958}{180^3} = 0.8475,$$

$$\gamma_2 = 0.6627.$$

W celu wyznaczenia \mathfrak{R}' i \mathfrak{R}'' wykreślamy zwykle powierzchnie momentów rys. (2). W pierwszym przęśle otrzymamy dla $x = \frac{1}{2} l_1$

$$M = \frac{1}{8} g l^2 = \frac{1}{8} 0.0625 \times 10^2 = 0.781 \text{ tm}$$

$$M = \frac{1}{8} g l^2 = \frac{1}{8} 0.06745 \times 13^2 = 1.43613 \text{ tm}.$$

Mnożąc odnośne rzędne momentów przez $\frac{J_0}{J}$, otrzymaliśmy skurczoną powierzchnię momentów. Dalej otrzymamy moment statyczny tej powierzchni w pierwszym przęśle ze względu na oś AA' i BB'

$$S_1 = 26.62 \text{ tm}^3 \text{ zaś } S_2 = 27.71 \text{ tm}^3$$

analogicznie $\mathfrak{R}_1'' = - \frac{6 \times 26.62}{10^2} = 1.5972 \text{ tm}$

$$\mathfrak{R}_1' = + \frac{6 \times 27.71}{10^2} = 1.6626 \text{ tm}.$$

Dla drugiego przęsła otrzymamy $S_1 = S_2 = 78 \text{ tm}^3$ ze względu na podporowe osie BB' i CC' , a więc według 220)

$$\mathfrak{R}_2'' = \mathfrak{R}_2' = \frac{6 \times 78}{13^2} = 2.769 \text{ tm}.$$

Teraz ustawimy równanie momentów podporowych. Ponieważ tu z powodu symetrii $M_1 = M_2$, więc wystarczy jedno równanie, które otrzymamy z 221., wstawiając $m = 1$, a więc

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l) M_1 + \gamma_2 l M_2 = l_1 \mathfrak{R}_1'' + l \mathfrak{R}_2',$$

a po wstawieniu wartości

$$\{2(0.4889 \times 10 + 0.8475 \times 13) + 0.6627 \times 13\} M_1 = 10 \times 1.5972 + 13 \times 2.769$$

$$M_1 = M_2 = -1.1589 \text{ tm}.$$

W §. 26. otrzymaliśmy dla przekroju stałego

$$M_1 = M_2 = -0.89317 \text{ tm}.$$

Widzimy więc, że wpływ zmienności przekroju jest znaczny.

VII. Obliczenie dokładne belki ciągłej kratowej o przekroju zmiennym.

§. 60. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia.

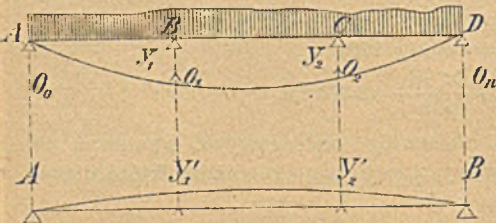
Powyżej wyłożony sposób obliczenia belki ciągłej o przekroju zmiennym jest bardzo żmudny, a pomimo tego dla belek

kratowych, o które tu często chodzi, niedokładny. Obliczając bowiem belki ciągle kratowe, według poprzedniego sposobu uwzględnimy przy wyznaczeniu momentu bezwładności tylko przekrój pasów, krzyżulców zaś wcale nie uwzględniamy. Błąd, jaki z tego powodu popełniamy w wyznaczeniu momentów podporowych, jest bardzo znaczny, tak dalece, że mniejszy błąd popełniamy, licząc według sposobu dla przekroju stałego, niż uwzględniając zmienność pasów, a nie uwzględniając krzyżulców. Dlatego, licząc sposobem przybliżonym, będziemy zawsze przyjmować przekrój stały, a licząc dokładnie, musimy uwzględnić także i krzyżulce.

§. 61. Zasada dokładnego obliczenia. *Méthode Fontviolanta.*

Zasada obliczenia dokładnego belki ciągłej polega na tem*), że uważamy belkę jako w dwu punktach na skrajnych podporach *A* i *D* (rys. 74.) podpartą i wyznaczamy ugięcie obciążonej belki liczebnie lub wykreślnie. Otrzymujemy w ten sposób ugięcia na podporach $y_1, y_2 \dots$

rys. 74.



Teraz przypuszczamy, że na podporze *B* działa do góry siła $O_1=1$ na belkę nieobciążoną (nawet ciężarem własnym) i wyznaczamy ugięcia na podporach $-y_1'$ i $-y_2'$. Tak samo wyznaczamy ugięcie, jeśli siła $O_2=1$ działa na drugiej podporze i otrzymujemy $-y_1''$, $-y_2''$ i t. d. Dla belki ciągłej ugięcia w punktach *B, C...* muszą być równe zero, więc

$$\left. \begin{aligned} y_1 - O_1 y_1' - O_2 y_1'' - \dots &= 0 \\ y_2 - O_1 y_2' - O_2 y_2'' - \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 224)$$

Otrzymamy w ten sposób $(n-1)$ równań, właśnie tyle, co mamy niewiadomych. Z równań tych wyznaczymy teraz $O_1, O_2 \dots$ dla danego obciążenia.

Ponieważ dla rozmaitych prętów belki najniekorzystniejsze obciążenia są rozmaite, więc dla każdego z nich musieliśmy powtórzyć cały żmudny rachunek.

*) p. sposób Fontviolanta. Köchlin, Statique graphique str. 338.

Preț	A		P	dl	P'	dl'	<u>P''</u>	Preț	A		P	dl	P'	dl'	<u>P''</u>
	cm ²	cm	t	mm	t	mm	t		cm ²	cm	t	mm	t	mm	t
a	35	600	+ 31.0	+ 2.7	- 20.15	-1.7	+ 11.5	a'	48	420	-43	-1.9	+28.5	+1.2	-15.8
b	90	600	+ 86.5	+ 2.9	- 60.4	-2.0	+ 26.4	a''	42	420	+42	+2.1	-28.5	-1.4	+13.5
c	60	600	+131.5	+ 6.6	-100.65	-6.0	+ 29.8	b'	18	420	-36.5	-4.3	+28.5	+3.3	- 8.0
d	75	600	+166.0	+ 6.6	-140.9	-7.5	+ 22.5	b''	18	420	+34.8	+3.8	-28.5	-3.3	+ 5.0
e	75	600	+193.5	+ 7.7	-140.9	-7.5	+ 50.5	c'	36	420	-29.5	-1.7	+28.5	+1.6	- 0.5
f	60	600	+196.6	+ 9.7	-100.65	-6.0	+ 92.7	c''	55	420	+26.8	+1.0	-28.5	-1.05	- 2.5
g	90	600	+150.0	+ 5.0	- 60.4	-2.0	+ 88	d'	75	420	-21.8	-0.6	+28.5	+0.8	+ 7.0
h	35	600	+ 57.8	+ 4.7	- 20.15	-1.7	+ 37.2	d''	90	420	+20.0	+0.5	-28.5	-0.7	- 9.5
i	55	300	- 0.45	- 0.02	0	0	- 0.45	e'	60	300	- 0.9	-0.02	0	0	- 0.9
k	88	300	0	0	0	0	- 0	e''	90	420	-18.5	-0.6	-28.5	-0.7	-48.0
l	60	600	-114.8	- 5.7	+ 40.25	+2.0	- 73.4	f'	75	420	+16.5	+0.7	+28.5	+0.8	+45.2
m	70	600	-183.5	- 7.9	+ 80.5	+3.4	-101.2	f''	55	420	+14.0	+0.5	-28.5	-1.05	-15.0
n	60	600	-205.0	-10.2	+120.75	+6.0	- 82.0	g'	36	420	-17.0	-1.0	+28.5	+1.6	+12.4
o	110	600	-180.5	- 4.9	+161.0	+8.05	- 17.0	g''	18	420	+47.2	+5.2	-28.5	-3.3	+18.8
p	60	600	-150.5	- 7.5	+120.75	+6.0	- 28.0	h'	18	420	-50.0	-5.5	+28.5	+3.3	-21.0
r	70	600	- 110.5	- 4.7	+ 80.5	+3.4	- 29.8	h''	42	420	+80.2	+4.0	-28.5	-1.4	+50.8
s	60	600	- 60.5	- 3.0	+ 40.25	+2.0	- 20.8	h''	48	420	-82.4	-3.6	+28.5	+1.2	-53.0
t	38	300	0	0	0	0	0								
u	55	300	- 0.45	- 0.01	0	0	- 0.45								

Dla wyznaczenia linii wpływowych trzebaby przyjąć $P=1$, działające po kolei we wszystkich węzłach dolnych i dla tych przypadków wyznaczyć siły wewnętrzne. Droga to dość żmudna, do wykreślenia linii wpływowych możemy dojść jeszcze innym sposobem, który poniżej podamy.

Przykład. Belka ciągła ABC (t. III. r. 1.) dwuprzęsłowa o rozpiętości 2 razy po 24 m jest obciążona tylko w drugim przęśle BC , pierwsze przęsło AB nie jest wcale obciążone. Niechaj będzie ciężar własny jednej belki 0.9 t/m, z czego wypada 0.6 t/m na pas dolny a 0.3 t/m na górny. Ciężar ruchomy niech będzie 3.16 t/m. Według tego obliczone ciężary węzłowe są oznaczone na rysunku.

Przekroje pojedynczych prętów, które należy tymczasowo wyznaczyć wedle przybliżonej zwykłej teorii, uwidoczniliśmy powyżej w tabliczce. Przyuszczając, że belka jest tylko podparta na podporach skrajnych A i C , kreślimy wielobok sznurowy i plan sił (rys. 2. i 3.), obliczamy skrócenia i przedłużenia (wszystkich prętów i wyznaczamy ugięcie belki sposobem Williota *) (rys. 4.). Otrzymaliśmy w ten sposób ugięcie punktu B $y_1 = 168$ mm.

Teraz przypuśćmy, że w B działa siła $P=40$ t do góry. Dla tego obciążenia kreślimy plan sił (rys. 5.) i otrzymujemy siły, zestawione w tabliczce w rubryce P' . Obliczywszy odpowiednie dI' , wykreślamy połowę (z powodu symetrii) ugiętej belki i otrzymujemy ugięcie punktu B 165 mm. (rys. 6.)

Zatem dla siły $P=1$ $y_1' = \frac{165}{40}$, a według 224)

$$168 - O_1 \frac{165}{40} = 0, \quad \text{stad } O_1 = 40 \cdot \frac{168}{165} = 40.7 \text{ t.}$$

W rysunku 2. otrzymaliśmy $O_0 = 31.7$, $O_2 = 58.18$, od tego odjąć należy $\frac{40.7}{2} = 20.35$, więc

$$O_0 = 11.35 \text{ t}, \quad O_1 = 40.7 \text{ t}, \quad O_2 = 37.83 \text{ t.}$$

Na tej podstawie wykreśliliśmy plan sił (rys. 7.), z którego otrzymujemy dokładne siły wewnętrzne dla danego obciążenia (P'' w tabliczce).

§. 62. Prawo pracy przygotowanej.

Jeżeli na pręt jakiś belki kratowej działają równe i wprost przeciwne siły S (rys. 75.), to praca ich, t. j. iloczyn sił przez drogi w kierunku sił, jest w czasie jakiegokolwiek ruchu pręta = 0. Ruch ten możemy bowiem rozłożyć na postępowy, podczas którego prace obu sił S są równe i wprost przeciwne i znoszą się, i na obrotowy około dowolnego punktu pręta E ,

*) patrz Podr. teorii mostów tom I. 2 wydanie str. 216.

podczas którego praca jest równa zero, bo kierunki sił przechodzą przez punkt obrotu.

rys.75.



Jeżeli długość pręta wzrośnie z jakichkolwiek przyczyn (a więc niekoniecznie wskutek sił S) o Δs , to praca sił S da się wyrazić równaniem

$$A = S \int_0^{\Delta s} d\Delta s = S\Delta s.$$

Ponieważ odnosi się ona do jakichkolwiek, byle nadzwyczaj małych możliwych przesunięć, więc nazywa się ona pracą *Verschiebungs-
możliwa, przygotowana* (n. *virtuelle Arbeit*). Dla całej belki kratowej będzie *obecna praca*

$$A = \sum Sds \dots \dots \dots 225)$$

Siły wewnętrzne, działające w prętach belki, możemy zastąpić każdą dwiema siłami S , działającymi w kierunku pręta, zaczepiającymi w węzłach. Ponieważ mają one zatem kierunek wprost przeciwny, więc praca ich jest $-\sum Sds$. Przypuśćmy, że na belkę tę działają siły zewnętrzne P , które są w równowadze między sobą i z siłami wewnętrznymi, a rzuty przesunięć się odnośnych punktów zaczepienia na kierunki tych sił nazwiemy dp , to w każdym węzle dla równowagi suma składowych pionowych i poziomych wszystkich sił jest równa zero, a na podstawie zasady momentów przygotowanych *) i praca ich jest równa zero. Zatem praca możliwa wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych musi być równa zero. Więc $\sum Pdp - \sum Sds = 0 \dots \dots \dots 226)$

Prawo powyższe zwane prawem pracy przygotowanej **) lub możliwych przesunięć (n. *Princip der virtuellen Arbeit, der virtuellen Verchiebungen*) można w ten sposób wyrazić: W stanie równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych praca przygotowana sił zewnętrznych równa się pracy odkształcenia belki kratowej (n. *Formänderungsarbeit*). *(wielkość porównawcza)*

* Praca odkształcenia jest to praca jaką wykonują siły odkształcające potęsi odkształcenia ciała.

*) p. Franke. Mechanika teoretyczna str. 163.

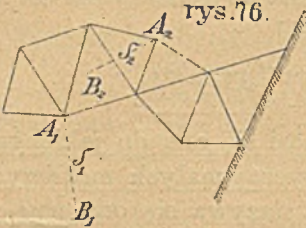
**) Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerkes Z. d. Ar. u. J. V. zu Hann. 1874. 1875.

- a) Praca przygotowana lub możliwych przesunięć (praca możliwa) virtuelle Arbeit, Verschiebungsarbeit
- b) Praca odkształcenia lub przeciwna praca odkształcenia Formänderungsarbeit, wirtuelle Formänderungsarbeit

§. 63. Prawo Maxwella.

Zasada wzajemności przeciwnie.

Przypuśćmy, że wskutek jakichkolwiek sił zewnętrznych zmieniły się długości s prętów belki kratowej A_1A_2 (rys. 76.)



o Δs , przyczem węzeł A_1 zrobił drogę $\delta_1 = A_1B_1$ a węzeł A_2 drogę $\delta_2 = A_2B_2$.

Na mocy prawa pracy przygotowanej możemy wyznaczyć δ_1 , które powstają wskutek Δs , nazwawszy S_1 siły wewnętrzne, wywołane siłą $=1$, działającą w A_1

w kierunku A_1B_1 . Mianowicie mamy wtedy $\delta_1 = \sum S_1 \Delta s$.

Podobnie wyznaczmy δ_2 , nazwawszy S_2 siły wewnętrzne, wywołane siłą $=1$, działającą w A_2 w kierunku A_2B_2 . Otrzymamy wtedy $\delta_2 = \sum S_2 \Delta s$.

Dla pewnego obciążenia jest

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{S}{\epsilon A} \quad \text{przebiegając:} \quad \Delta s = \frac{Ss^*}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 227)$$

jeżeli S oznacza siłę wewnętrzną, odpowiadającą danemu obciążeniu a A przekrój pręta. A zatem otrzymamy

$$\delta_1 = \sum \frac{S_1 S s}{\epsilon A}, \quad \delta_2 = \sum \frac{S_2 S s}{\epsilon A} \dots \dots \dots 228)$$

Załóżmy, że $S = S_2$, to $\delta_1 = \sum \frac{S_1 S_2 s}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 229)$

a gdy $S = S_1$, to $\delta_2 = \sum \frac{S_2 S_1 s}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 230)$

a ponieważ wtedy $\delta_1 = \delta_2$, zatem możemy wypowiedzieć następane twierdzenie:

Siła równa jedności, zaczepiająca w A_1 , a działająca w kierunku A_1B_1 , przesuwając punkt A_2 w kierunku A_2B_2 o długość, która jest tak wielką, jak długość A_1B_1 , a która przesuwając się A_1 , gdy w A_2 działa siła $=1$ w kierunku A_2B_2 .

Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem Maxwella. * *

(Maxwell hat das Gesetz der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.)
(Maxwell's rule of reciprocity of displacements.)

*) p. Podręcznik statyki budowli 2 wyd. str. 36.

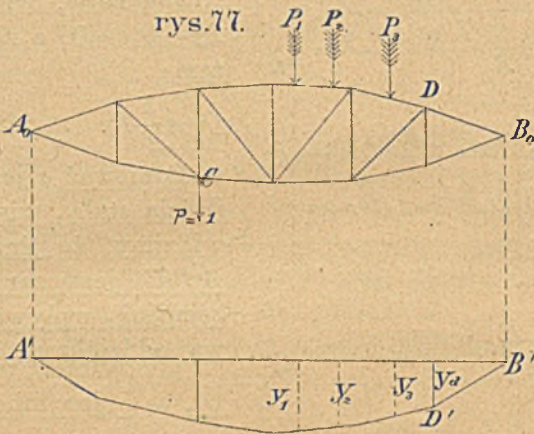
* * Twierdzenie to jest od naturycej własności ze względu na symetryczność linii wytyczonych statycznie wzajemnych wielkości.

Maxwell fasst das Faekwerk als einen Mechanismus auf, mittels welcher ein ein freibewegliches Kraft P (last) einen bestimmten S (Starkraft) überwindet.

Twierdzenie Bettiego

§. 64. Linia wpływa ugięcia.

Aby wyznaczyć linię wpływową ugięcia punktu C (rys. 77.) postąpimy według Müllera Breslaua w następujący sposób:



Zacznijmy w C siłę pionową $P=1$ i wyznaczmy w znany sposób liczebny lub wykreslny wielobok ugięcia pasu, na którym leży pomost (n. p. pasu górnego), to rzędna y_d oznacza ugięcie punktu D, gdy w C działa siła =1.

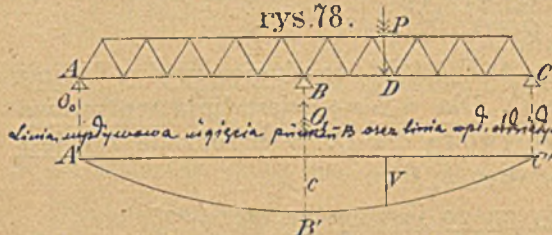
Uwzględniamy tu

jednak tylko ugięcia pionowe. Na mocy prawa Maxwella będzie jednak y_d oznaczać także ugięcie punktu C, jeżeli w punkcie D działa siła =1. To samo możemy powiedzieć o każdym innym punkcie pasu ADB, a zatem linia $A'D'B'$ jest linią wpływową ugięcia punktu C.

Jeżeli więc siły P_1, P_2 i P_3 działają na belkę, to ugięcie w punkcie C będzie $y_0 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$.

§. 65. Linia wpływa oddziaływania belki dwuprzęsłowej.

Jeśli mamy wyznaczyć oddziaływanie O , belki ciągłej dwuprzęsłowej na środkowej podporze B (rys. 78.), przypuszczamy, że belka

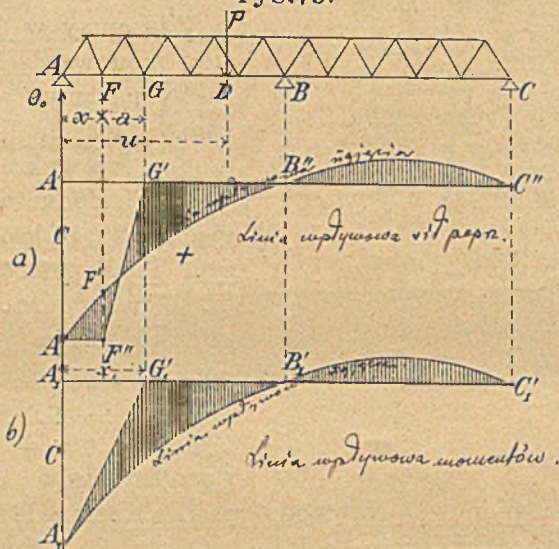


jest podparta tylko w A i C, a w B działa na dół siła pionowa =1 i kreśliśmy dla niej wielobok ugięcia pasu

dolnego $A'B'C'$. Na mocy poprzedniego paragrafu jest $A'B'C'$ zarazem linią wpływową ugięcia punktu B.

Przypuśćmy teraz, że na belkę ciągłą ABC działa w D siła P , to w B powstanie oddziaływanie nieznanе nam jeszcze O_1 . Z linii wpływowej otrzymamy ugięcie punktu B , które dla

rys. 79.



belki ciągłej jest równe zero, więc $Py - O_1 c = 0$, a zatem

$$O_1 = \frac{1}{c} Py \quad (231)$$

Ponieważ c jest ilością stałą, więc widzimy, że linia $A'B'C'$ jest zarazem linią wpływową oddziaływania O_1 , a $\frac{1}{c}$ jest mnożnikiem dla tej linii.

W podobny sposób przypuszczając, że belka podparta jest w B i C a obciążona siłą $=1$ w A , otrzymamy (rys. 79) linię wpływową $A''B''C''$ dla oddziaływania O_0 , przyczem $O_0 = \frac{1}{c} Py$.

§. 66. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów.

Wyznamy teraz linie wpływowe siły poprzecznej w przedziale FG (rys. 79a).

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } u < x & \quad Q = O_0 - P, \\ \text{„ } u > x + a & \quad Q = O_0. \end{aligned}$$

Jeśli więc zrobimy $A''F'' \parallel A'B''$, to różnica rzędnych linii $A''F''$ i $A''F'$ wyznacza Q . Dla $u > x + a$ jest linia wpływowa dla O_0 zarazem linią wpływową dla Q . W przedziale FG jest linia wpływowa prosta, więc $F''G'$.

W Dla momentu statycznego jest znowu, (rys. 79b)

$$\begin{aligned} \text{jeżeli } u > x_1, & \quad M = O_0 x_1, \\ \text{„ } u < x_1, & \quad M = O_0 x_1 - P(x_1 - u). \end{aligned}$$

Niech będzie $M' = \frac{M}{x_1}$, to dla $u > x_1$ $M' = O_0$,

a „ $u < x_1$ $M' = O_0 - P \frac{x_1 - u}{x_1}$.

A więc dla $u > x_1$ linia wpływowa dla O_0 jest zarazem linią wpływową dla M' , a więc i dla M z mnożnikiem x_1 , dla długości AG mamy od rzędnej linii O_0 odciągnąć $y_1 = P \frac{x_1 - u}{x_1}$.

Dla $u = 0$ jest $y_1 = P$, dla $u = x_1$ jest $y_1 = 0$, a więc powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową momentów.

Widzimy więc, że do wykreślenia linii wpływowych sił poprzecznych i momentów potrzebujemy jednego tylko wykresu ugiętej belki i kilku linii prostych.

W jaki sposób na podstawie linii wpływowych wyznaczamy największe siły poprzeczne i momenty i największe siły wewnętrzne, wiemy z tomu pierwszego.

VIII. Wpływ podpór.

§. 67. Ogólne uwagi.

Dotychczas przypuszczaliśmy, badając belkę analitycznie, że podpory znajdowały się w jednej linii, a właściwie, że belka jest tak podparta w kilku punktach, że przez to podparcie nie powstają żadne momenty, gdy ciężaru własnego nie uwzględnimy. Badając belkę ciąglą sposobem wykreślnym, przypuszczaliśmy już jednak także nierówno wysokie podpory, to samo musimy teraz zrobić przy użyciu sposobu liczebnego zwłaszcza, że podpory czasami umyślnie umieszczamy w nierównej wysokości, czasem zaś wskutek osiadania się filarów niektórych nierówność ta powstaje pomimo naszej woli.

Pokróćce wspomnimy też w tym rozdziale o wpływie na momenty łożysk szerokich albo podwójnych i przytwierdzenia belki stałe do filaru.

§. 68. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach.

Niechaj odstęp pionowy podpór od poziomej, przechodzącej przez pierwszą podporę będą $s_1, s_2 \dots s_n$, przyczem oznaczamy je jako dodatnie dla podpór niżej leżących, to jeśli

przypuścimy, że belka nie jest wcale obciążona, więc $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'' = 0$, otrzymamy dla m -tej podpory belki ciągłej, analogicznie jak §. 5., na podstawie rów. 11)

$$\tau_m = - \frac{l_m}{6\epsilon I} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m},$$

$$\tau_m = + \frac{l_{m+1}}{6\epsilon I} (2M_m + M_{m+1}) + \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}.$$

A stąd *równanie momentów podporowych* :

Drümmenbedingung. $M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_{m+1} =$
 $= 6\epsilon I \left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right) \dots \dots \dots 232)$

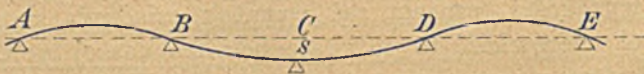
Wstawiając w tem równaniu za m wartości od 1 do $n-1$, otrzymamy $n-1$ równań momentów podporowych, z których możemy wyznaczyć $n-1$ niewiadomych momentów podporowych, wywołanych nierówną wysokością podpór.

Do tych momentów dodać należy momenty, wywołane obciążeniem, które wyznaczyliśmy w poprzednich rozdziałach. Widzimy stąd, że najniekorzystniejsze obciążenie i linie wpływowe sił poprzecznych i momentów dla obciążenia są niezależne od wysokości podpór, których wpływ zupełnie osobno obliczamy. *Zasada niezależności działania od i prawo superpozycji.*

§. 69. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory.

Jeżeli jedna podpóra się zniży o s (rys. 80.), to na tej podporze linia ugięcia jest ku dołowi wypukłą, a zatem powstaje tu moment dodatni. Przez podwyższenie podpory średniej powstaje przeciwnie moment ujemny.

rys.80.



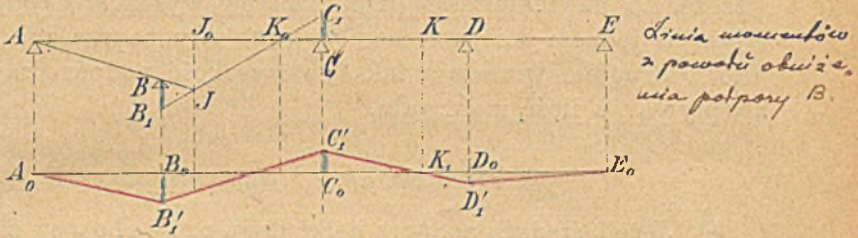
Ponieważ obciążenie belki sprawia na średnich podporach moment ujemny, zatem przez podwyższenie podpory moment ten się powiększa, przez zniżenie zmniejsza, na sąsiednich podporach przez podwyższenie podpory C moment ujemny się zmniejsza, przez zniżenie powiększa.

Przez podwyższenie podpory powstaje na prawo od niej dodatnia, na lewo ujemna siła poprzeczna.

Momenty na sąsiednich podporach zmieniają znak i stają się coraz mniejsze, co możnaby udowodnić zupełnie w ten sam sposób, co dla obciążenia jednego przęsła w §. 8.

Udowodnione w §. 9. twierdzenia co do sił poprzecznych i oddziaływań stosują się i tutaj.

rys. 81.

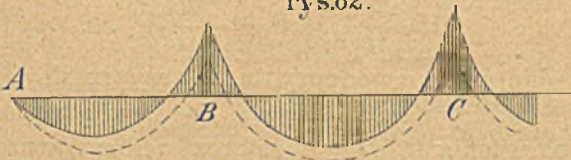


Wykreślenie możemy wyznaczyć wpływ zniżenia się jednej podpory B (rys. 81.) w sposób, wskazany przez W. Rittera. Jeżeli belka nie jest obciążona, to boki średnie wieloboku schodzą się w jedną linię. Wedle §. 42. prosta AB przecina przedłużenie boku średniego w pionowej punktu stałego J_0J . Prosta JK_0 jest bokiem średnim, więc BB_1 i CC_1 są równe momentom podporowym. Zróbmy $B_0B'_1 = BB_1$ i $C_0C'_1 = CC_1$, poprowadźmy $A_0B'_1$, $B'_1C'_1$ i C'_1K_1 , a otrzymamy linie momentów w tym wypadku. $A_0B'_1C'_1D'_1E_0$.

§. 70. Najkorzystniejsza wysokość podpór.

Przez zmianę wysokości podpór zmieniają się momenty. Zachodzi więc teraz pytanie, w jakiej wysokości muszą leżeć podpory dla najmniejszej ilości materiału.

rys. 82.



4) Jeżeli przekrój belki ciąglej jest stały, to obliczamy go według największego momentu. Bezwzględnie największe momenty są tu ujemne na podporach (rys. 82.). Jeżeli środkowe podpory zniżymy, zmniejszamy $najw (-M)$, za to wzrasta $najw (+M)$. Najkorzystniej byłoby więc zniżyć o tyle pod-

pory średnie, aby *najw* ($-M$) było bez względu na znak równe *najw* ($+M$).

6 Jeżeli przekrój belki ciągłej jest zmienny, wtedy o ilości materiału rozstrzyga powierzchnia momentów i sił poprzecznych. Tu musimy w każdym wypadku szukać, kiedy te powierzchnie będą najmniejsze. Wiele nie możemy jednak zaoszczędzić na materiale przez zmianę wysokości podpór, bo jeśli w jednym miejscu momenty lub siły poprzeczne maleją, to w drugim wzrastają tak, że wysokość podpór prawie nie wpływa na ilość materiału.

§. 71. Belka dwu- i trzyprzęsłowa.

a) Jeżeli średnia podpora belki dwuprzęsłowej zniży się o s , to z rów. 232) otrzymamy

$$2M_1(l_1 + l_2) = 6\epsilon I \left(\frac{s}{l_1} + \frac{s}{l_2} \right), \text{ zatem}$$

$$\underline{M_1 = \frac{3\epsilon I s}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \frac{3\epsilon I s}{l_1 l_2}} \dots \dots \dots 233)$$

a dla $l_1 = l_2 = l$ $\underline{M_1 = \frac{3\epsilon I s}{l^2}} \dots \dots \dots 234)$

Rozumie się, że dla podwyższenia podpory średniej o s otrzymamy równie wielki moment ujemny.

Ponieważ $M_1 = O_0 l_1$, więc

$$\underline{O_0 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3\epsilon I s}{l_1 l_2}} \dots \dots \dots 235)$$

a $\underline{O_1 = -(O_0 + O_2) = -\frac{3\epsilon I s}{l_1 l_2^2} (l_1 + l_2)} \dots \dots \dots 236)$

Dla $l_1 = l_2 = l$

$$\underline{O_0 = \frac{3\epsilon I s}{l^2}}, \quad \underline{O_1 = -\frac{6\epsilon I s}{l^3}} \dots \dots \dots 237)$$

b) Jeśli obie średnie podpory belki trzyprzęsłowej zniżą się o s , a rozpiętości jej są $l_1 = 2l = l_3$, $l_2 = l$, to otrzymamy $M_1 = M_2$, do określenia którego wystarcza jedno równanie według

232) $2M_1(l_1 + l) + M_2 l = 6\epsilon I \frac{s}{l_1}$, a zatem

$$\underline{M_1 = \frac{6\epsilon I s}{(3 + 2\sqrt{2}) 2l^2} = M_2} \dots \dots \dots 238)$$

$$\underline{O_0 = -O_1 = \frac{6\epsilon I s}{(3 + 2\sqrt{2}) 2l^3}} \dots \dots \dots 239)$$

Równ. 234) i 238) możemy ogólnie wyrazić $M_w = a \cdot \frac{Is}{l^2}$, gdzie a oznacza pewien współczynnik. Moment średni, wywołany obciążeniem, da się przedstawić w kształcie $b \cdot ql^2$, siła wewnątrz w pasie $\frac{bql^2}{h}$, przekrój pasu $\frac{bql^2}{ht}$ a moment bezwładności $I = \frac{Ah^2}{4} = \frac{bql^2h}{4t}$, zatem $M_w = a \cdot \frac{bql^2hs}{4tl^2} = \frac{abnqls}{4t} = c \cdot ls$, jeżeli przyjmiemy $h = ln$, przyczem c i n oznaczają pewne ilości stałe.

Jeżeli największy moment, wywołany obciążeniem, nazwiemy $M_c = b_1 ql^2$, to

$$\frac{M_w}{M_c} = \frac{cls}{b_1 ql^2} = c_1 \frac{s}{l} \dots \dots \dots 240)$$

Zatem stosunek momentu podporowego, wywołanego zmianą wysokości podpór do momentu, wywołanego obciążeniem, jest wprost proporcjonalny do różnicy wysokości s a odwrotnie do rozpiętości.

Winkler oblicza, że jeśli s wyrazimy w mm , a l w m , to dla belki dwuprzęsłowej $c_1 = 0.25$, dla belki trzyprzędłowej $c_1 = 0.11$, a więc jeżeli $s = 10 mm$ będzie

	dla $l = 10$	30	50	100	150 m
dla belki dwuprzęsłowej	$\frac{M_w}{M_c} = 0.25$	0.08	0.05	0.025	0.016
" " trzyprzędłowej	$\frac{M_w}{M_c} = 0.11$	0.04	0.02	0.011	0.007.

Wpływ małej zmiany względnej wysokości podpór jest więc dla belki ciągłej bardzo znaczny przy małych rozpiętościach, mały przy wielkich.

§. 72. Podwójne łożysko.

Dawniej używano często dla belek ciągłych na jednej podporze dwu łożysk tak, że właściwie powstawały oprócz

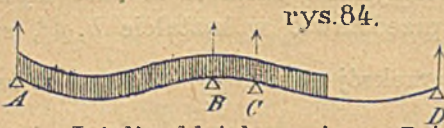
rys. 83.



wielkich przęseł, także przęśla małe między dwoma łożyskami jednej podpory. Chociaż teraz nie

używamy już nigdy dwu łożysk na jednej podporze, to także szerokie jedno łożysko działa podobnie, jak dwa łożyska.

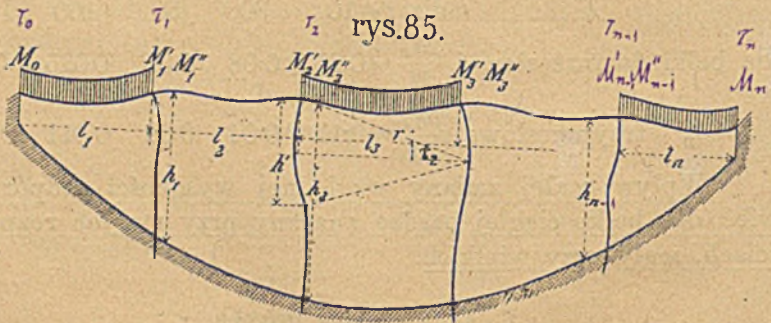
Mogą przytem zajść dwa wypadki. Jeżeli oddziaływanie w C (rys. 83.) wypada ujemne, a belka nie jest zakotwioną, to belka w tem miejscu się podnosi i przy obliczeniu przyjmując należy, że belka w C nie jest podpartą. Jeżeli oddziaływania w B i C są dodatnie (rys. 84.), to wtedy długość BC stanowi rzeczywiste przeszło, które przy obliczeniu należy uwzględnić.



Z powodu, że obecnie unikamy tak podwójnych, jak i szerokich łożysk, nie będziemy wchodzić w szczegóły obliczenia takich belek, które zresztą mało się różni od obliczenia belek o pojedynczych łożyskach, trzeba tylko dodatkowo badać, czy oddziaływania są ujemne, czy dodatnie.

§. 73. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów.

Jeżeli belki są stałe połączone z filarami, to filary muszą wziąć udział w ugięciu belek (rys. 85.), a więc pewna część



momentu podporowego ΔM zostaje zużyta na ugięciu filaru. Jeżeli moment przy podporze po lewej stronie oznaczmy jedną, a po prawej dwiema kreskami, to

$$\underline{M_1'} - M_1'' = \Delta M_1,$$

$$\underline{M_2'} - M_2'' = \Delta M_2 \text{ itd.}$$

Nazwijmy kąty nachylenia stycznej linii ugięcia na podporach $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$, to na podstawie rów. 11) otrzymamy

* Jeżeli jak poprzednio, że linia momentów (rys. 86) wykreślamy na podporach skłoni.

$$\left. \begin{aligned} 6\varepsilon I \tau_1 &= -l_1(2M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 6\varepsilon I \tau_1 &= +l_2(2M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 6\varepsilon I \tau_2 &= -l_2(M_1'' + 2M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 6\varepsilon I \tau_2 &= +l_3(2M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 241)$$

Z rysunku widzimy, że $\tau_2 = \frac{h'}{2r}$, a że $\varepsilon I_2 = \Delta M_2 r$, jeżeli I_2 oznacza moment bezwładności filaru, a możemy przyjąć:

$$\left. \begin{aligned} h' = 0.7 h_2, \text{ to } \tau_2 &= \frac{0.7 h_2 \Delta M_2}{2\varepsilon I_2} = \frac{0.35}{\varepsilon I_2} h_2 (M_2' - M_2'') \\ \text{podobnie } \tau_1 &= \frac{0.35}{\varepsilon I_1} h_1 (M_1' - M_1'') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 242)$$

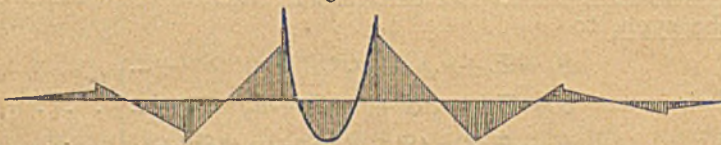
Z porównania równ. 241) i 242) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1' - M_1'') &= -l_1(2M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1' - M_1'') &= +l_2(2M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2' - M_2'') &= -l_2(M_1'' + 2M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2' - M_2'') &= +l_3(2M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 243)$$

Otrzymujemy w ten sposób 2(n-1) ^{momentów podporowych} równań, które nam służą do wyznaczenia 2(n-1) niewiadomych.

Ponieważ równania 243) mają ten sam kształt, co równania momentów podporowych 21), więc też i wszystkie twierdzenia co do najniekorzystniejszego obciążenia, co do stosunków momentów podporowych pręseł nieobciążonych, co do zmiany znaku sił poprzecznych i oddziaływań są i tu ważne.

rys.86.



Odstępy punktów stałych obliczyć można ze stosunku dwóch momentów podporowych.

Momenty po obu stronach każdej podpory mają ten sam znak (rys. 86.).

B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i nateżenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 74. Pręty nadliczbowe.

Belki kratowe mogą być, jak wiadomo*), albo statycznie wyznaczalne albo statycznie niewyznaczalne albo też chwiejne. Belek kratowych prostych ostatniego rodzaju nie powinniśmy w praktyce używać, o statycznie wyznaczalnych jużśmy mówili, teraz mówić mamy o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli ilość węzłów nazwiemy m , ilość prętów n , to otrzymamy belkę kratową statycznie niewyznaczalną, jeśli $2m - 3 < n$. Chcąc z takiej belki kratowej utworzyć belkę statycznie wyznaczalną, musimy $n - 2m + 3$ prętów opuścić, a zatem te $k = n - 2m + 3$ pręty nazywamy nadliczbowymi (n. *überzählig*), inne pręty nazywamy potrzebnymi (n. *nothwendig*).

Opuściwszy pręty nadliczbowe, możemy dla danego obciążenia wyznaczyć w pozostałych prętach siły wewnętrzne $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3 \dots$, poczem w miejsce prętów nadliczbowych przyczepiamy po kolei za każdy pręt dwie siły równe jedności i wprost przeciwne, działające w kierunku tego pręta. Nazwijmy siły wewnętrzne, wywołane siłami $= 1$ zamiast pierwszego pręta nadliczbowego, $u_1', u_2', u_3' \dots$, zamiast drugiego pręta $u_1'', u_2'', u_3'' \dots$, zamiast trzeciego $u_1''', u_2''', u_3''' \dots$, nareście nazwijmy $S_1, S_2, S_3 \dots$, rzeczywiste siły wewnętrzne prętów potrzebnych belki statycznie niewyznaczalnej, a S', S'', S''' prętów nadliczbowych, to

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + u_1''' S''' + \dots \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + u_2''' S''' + \dots \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + u_3' S' + u_3'' S'' + u_3''' S''' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 244)$$

*) por. Podręcznik statyki budowl. II. wyd. str. 824.

§. 75. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych.

Z powyższych równań widzimy, że moglibyśmy łatwo obliczyć S_1, S_2, \dots , gdybyśmy znali siły wewnętrzne prętów nadliczbowych S', S'', S''' . Siły te wyznaczymy na podstawie odkształceń. Nazwijmy odkształcenia prętów potrzebnych ds_1, ds_2, ds_3, \dots a prętów nadliczbowych ds', ds'', ds''' , to na mocy prawa pracy (§. 62.), możemy napisać

$$\Sigma P \delta p - \Sigma S \delta s = 0, \dots \dots \dots 245)$$

a wstawiwszy wartość za S

$$\Sigma P \delta p - \Sigma \xi \delta s - S' \delta s \Sigma u' - S'' \delta s \Sigma u'' - \dots = 0 \dots \dots 246)$$

Równanie to jest ważne ogólnie dla jakichkolwiek sił w równowadze zostających i dla jakichkolwiek przesunięć możliwych wskutek zmiany długości prętów. Założmy, że wszystkie P są równe zeru, $S' = 1, S'' = S''' = 0$, to

$$\Sigma \delta s u' = 0, \text{ czyli}$$

$$u_1' \delta s_1 + u_2' \delta s_2 + u_3' \delta s_3 + \dots \delta s' = 0$$

Podobnie możemy napisać

$$u_1'' \delta s_1' + u_2'' \delta s_2 + u_3'' \delta s_3 + \dots \delta s'' = 0$$

$$u_1''' \delta s_1 + u_2''' \delta s_2 + u_3''' \delta s_3 + \dots \delta s''' = 0$$

} k równań 247)

Jeżeli ciepłota prętów potrzebnych jest τ_0 , to dla tej ciepłoty są długości prętów, a zatem i położenie wszystkich węzłów oznaczone. Jeśli przy tej ciepłocie wstawimy pręty nadliczbowe tak, że przez to nie nastąpi zmiana kształtu belki, to przy każdej innej ciepłocie odstępów węzłów są inne i wstawienie prętów nadliczbowych wywołuje nateżenia.

Dla innej ciepłoty τ i dla obciążenia innego zmieniają się siły wewnętrzne, a zatem i długości prętów, przyczem możemy napisać ogólnie

$$\delta s = \alpha (\tau - \tau_0) s + \frac{S s}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 248)$$

jeżeli α oznacza współczynnik rozszerzalności, s długość pręta, a A przekrój.

Nazwijmy $\rho = \frac{s}{\epsilon A} \dots \dots \dots 249)$

i $U = \alpha (\tau - \tau_0) \epsilon A \dots \dots \dots 250)$

to $\delta s = \rho (U + S) \dots \dots \dots 251)$

Widzimy zatem, że wpływ zmiany ciepłoty możemy uwzględnić jako zmianę siły wewnętrznej i że podwyższenie ciepłoty o $(\tau - \tau_0)$ odpowiada ciągnięciu $\alpha (\tau - \tau_0) \epsilon$.

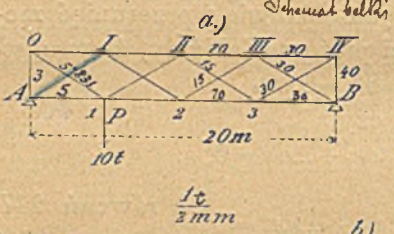
Przyjąć możemy dla żelaza $\alpha=0.000012$, $\varepsilon=2000000 \text{ kg/cm}^2$
 dla stali $\alpha=0.000011$, $\varepsilon=2150000 \text{ kg/cm}^2$, więc w przybliżeniu
 dla obydwóch $\varepsilon\alpha=24 \text{ kg/cm}^2$.

~ Równanie 247) możemy więc teraz napisać:

$$\left. \begin{aligned} u_1' \varrho_1 (U_1 + S_1) + u_2' \varrho_2 (U_2 + S_2) + \dots + \varrho' (U' + S') &= 0 \\ u_1'' \varrho_1 (U_1 + S_1) + u_2'' \varrho_2 (U_2 + S_2) + \dots + \varrho'' (U'' + S'') &= 0 \\ u_1''' \varrho_1 (U_1 + S_1) + u_2''' \varrho_3 (U_3 + S_3) + \dots + \varrho''' (U''' + S''') &= 0 \end{aligned} \right\} k \text{ równań 252)}$$

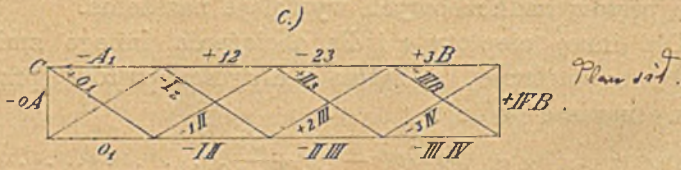
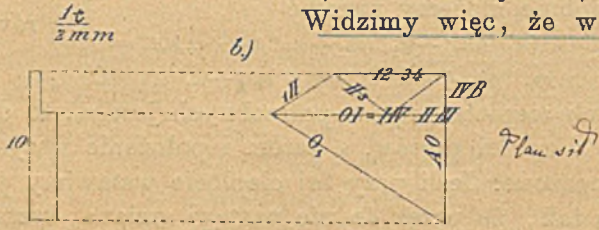
Jeżeli mamy dane przekroje prętów, względnie jeśli je po obliczeniu belki w sposób przybliżony przyjmiemy, jeśli

rys. 87.



znana nam jest ciepłota τ_0 , przy której belkę zestawiono i ciepłota w danej chwili τ , to możemy obliczyć dla każdego pręta ϱ i U . Siły S są funkcjami sił znanych nam \mathcal{S} , u i nieznanymi S' , S'' , S''' . Widzimy więc, że w równ.

pręta nadliczbowy.



252) mamy tylko k niewiadomych S' , S'' , S''' ..., dla których wyznaczenia mamy k równań. W ten sposób wyznaczymy siły zewnętrzne prętów nadliczbowych.

Jeśli ciepłota się nie zmieniła, czyli $\tau=\tau_0$, to $U=0$, więc rów. 252) nieco się upraszczają i możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} u_1' \varrho_1 S_1 + u_2' \varrho_2 S_2 + u_3' \varrho_3 S_3 + \dots + \varrho' S' &= 0 \\ u_1'' \varrho_1 S_1 + u_2'' \varrho_2 S_2 + u_3'' \varrho_3 S_3 + \dots + \varrho'' S'' &= 0 \\ u_1''' \varrho_1 S_1 + u_2''' \varrho_2 S_2 + u_3''' \varrho_3 S_3 + \dots + \varrho''' S''' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 253)$$

Jeżeli w rów. 252) i 253) wszystkie ilości ρ pomnożymy przez dowolną stałą liczbę, to przez to wartości S' , S'' , S''' się nie zmieniają. Widzimy więc, że aby otrzymać w rachunku liczby wygodniejsze, możemy wszystkie ρ przez stosowną liczbę stałą pomnożyć, cę zupełnie na wynik rachunku nie wpływa.

Specjalnie dla przykładu wyznaczania sił wewnątrz prętów w belce obciążonej w wyznaczalnej pozycji; wypiszmy następująco:

a) **Przykład.** Belka równoległa o kracie równoramiennej podwójnej (rys. 87.) obciążona jest w punkcie 1 ciężarem 10 t. Belka ta jest statycznie niewyznaczalna, bo $m = 10$, $n = 18$, więc

$$k = n + 3 - 2m = 18 + 3 - 20 = 1,$$

a zatem jestto belka statycznie niewyznaczalna pierwszego rzędu, która ma jeden pręt nadliczbowy. Niech zastrzał AI będzie prętem nadliczbowym.

Na rys. 87 a) z lewej strony wypisaliśmy długości prętów, z prawej przekroje w cm^2 . Wyznamy za pomocą planu sił siły S dla danego obciążenia (rys. 87b).

Nazwa pręta	S	u	s	A	1000000 ρ	$u\rho$	$u\rho S$	$u^2\rho$	S
	t	t	m	cm^2	$\frac{cm}{kg}$				t
A 0	- 7.5	- 0.50	3.0	40	3.75	- 1.875	+ 14.06	0.937	- 7.64
0 I	- 12.5	- 0.87	5.0	30	8.33	- 7.247	+ 90.59	6.305	- 12.75
I II	- 12.5	+ 0.87	5.0	70	3.57	+ 3.106	- 38.82	2.702	- 12.25
II III	- 4.2	- 0.87	5.0	70	3.57	- 3.106	+ 13.05	2.702	- 4.45
III IV	- 4.2	+ 0.87	5.0	30	8.33	+ 7.247	- 30.44	6.305	- 3.95
A 1	0	- 0.87	5.0	30	8.33	- 7.247	0	6.305	- 0.25
1 2	+ 8.5	+ 0.87	5.0	70	3.57	+ 3.106	+ 26.40	2.702	+ 8.75
2 3	+ 8.5	- 0.87	5.0	70	3.57	- 3.106	- 26.40	2.702	+ 8.25
3 B	0	+ 0.87	5.0	30	8.33	+ 7.247	0	6.305	+ 0.25
0 1	+ 14.9	+ 1.00	5.831	30	9.72	+ 9.72	+ 144.83	9.72	+ 15.19
I 2	0	- 1.00	5.831	15	19.44	- 19.44	0	19.44	- 0.29
II 3	- 4.8	+ 1.00	5.831	15	19.44	+ 19.44	- 93.31	19.44	- 4.51
III B	0	- 1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	0	9.72	- 0.29
1 II	+ 4.8	- 1.00	5.831	15	19.44	- 19.44	- 93.31	19.44	+ 4.51
2 III	0	+ 1.00	5.831	15	19.44	+ 19.44	0	19.44	+ 0.29
3 IV	+ 4.8	- 1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	- 46.66	9.72	+ 4.51
IV B	- 2.5	+ 0.50	3.0	40	3.75	+ 1.875	- 4.44	0.937	- 2.36
A I	-	-	5.831	30	9.72	-	-	-	+ 0.29
							- 44.55	144.822	

Przypuśmy teraz, że zamiast AI działają na belkę 2 siły $= 1$ w A i I wprost przeciwnie. Siły, powstające wtedy we wszystkich prętach potrzebnych, znajdziemy również zapomożą planu sił (87 c). Są to siły u , których wielkość i znak, jakoteż i wielkość sił S zestawiliśmy w tabliczce. W tabliczce tej zestawiliśmy też długości prętów s , przekroje A i obliczyliśmy 100000 ρ .

Ponieważ tu jest jeden pręt nadliczbowy, czyli $k=1$, więc otrzymamy z rów. 244)

$$S_1 = \mathcal{E}_1 + u_1 S', \quad S_2 = \mathcal{E}_2 + u_2 S', \quad \text{itd.} \dots \dots \dots 244 a)$$

Zatem rów. 253) przedstawi się w następnym kształcie

$$u_1 \rho_1 (\mathcal{E}_1 + u_1 S') + u_2 \rho_2 (\mathcal{E}_2 + u_2 S') + \dots + \rho' S' = 0,$$

czyli

$$\sum u \rho \mathcal{E} + (\sum u^2 \rho + \rho') S' = 0,$$

zatem

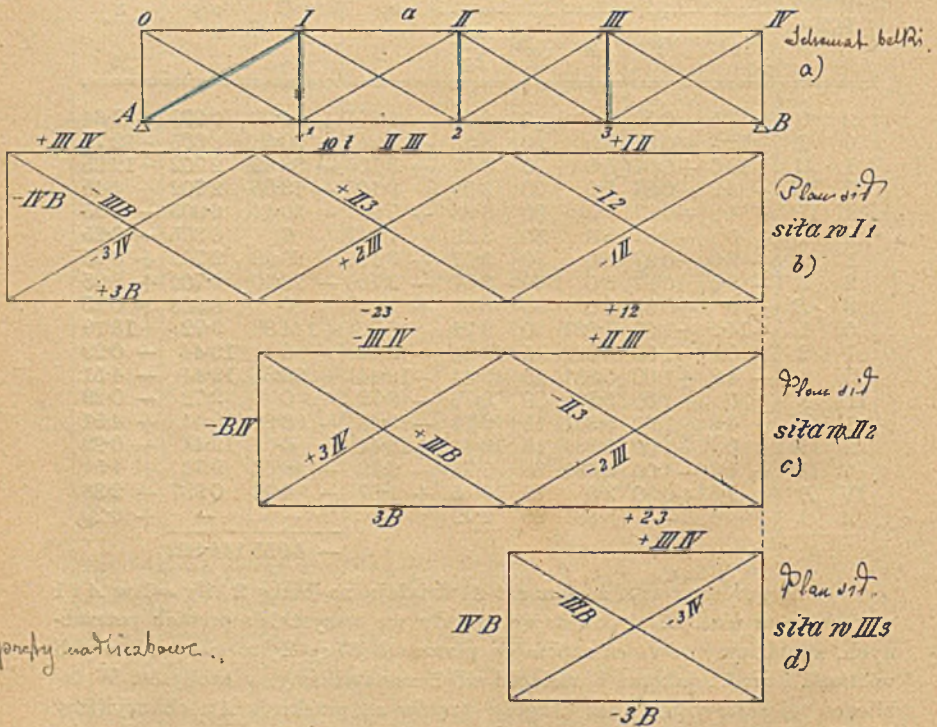
$$S' = - \frac{\sum u \rho \mathcal{E}}{\sum u^2 \rho + \rho'} \dots \dots \dots 253 a)$$

Wstawivszy wartości, otrzymamy

$$S' = - \frac{-44 \cdot 55}{144 \cdot 822 + 9 \cdot 72} = 0 \cdot 288 t. \quad \text{Gdy tę wartość za } S' \text{ wstawimy w 254), otrzymamy } S_1, S_2 \text{ i t. d., któreto wartości uwidoczniliśmy w ostatnim rzędzie tabliczki.}$$

Z porównania rubryk \mathcal{E} i S widzimy, o ile się różnią wyniki dokładne od przybliżonych. Ze znaków sił u widzimy

rys. 88.



pony matricabow...

też, że gdyby siła 10 t działała w 3, otrzymalibyśmy u , a zatem i uS' równe, lecz ze znakiem przeciwnym. Jeżeliby więc

Nazwa pręta		u^2p	uu^2p	$uu''p$	$uu'''p$	$u'p$	$u'p\ominus$	u^2p
A	0	0.937	0	0	0	0	0	0
0	I	6.305	0	0	0	0	0	0
1	II	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	- 71.88	+ 9.26
II	III	2.702	+ 5.001	- 5.001	0	- 5.75	+ 24.15	9.26
III	IV	6.305	+11.668	- 11.668	+11.668	+13.49	- 49.00	21.71
A	I	6.305	0	0	0	0	0	0
1	2	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	+ 48.88	9.26
2	3	2.702	+ 5.001	- 5.001	0	- 5.75	- 48.88	9.26
3	B	6.305	+11.668	- 11.618	+11.668	+13.49	0	21.71
0	1	9.72	0	0	0	0	0	0
I	2	19.44	+36.936	0	0	- 36.94	0	70.19
II	3	19.44	+36.936	- 36.936	0	+36.94	-177.31	70.19
III	B	9.72	+18.468	- 18.468	+18.468	-18.47	0	35.10
1	II	19.44	+36.936	0	0	- 36.94	- 177.31	70.19
2	III	19.44	+36.936	- 36.936	0	+36.94	0	70.19
3	IV	9.72	+18.468	- 18.468	+18.468	-18.47	- 88.65	35.10
IV	B	0.937	- 1.875	+ 1.875	- 1.875	- 3.75	+ 9.38	3.75
A	I	—	—	—	—	—	—	—
1	I	—	—	—	—	—	—	—
2	II	—	—	—	—	—	—	—
3	III	—	—	—	—	—	—	—
		<u>144.82</u>	<u>226.15</u>	<u>-142.27</u>	<u>+58.39</u>		<u>-530.62</u>	<u>+435.17</u>

Nazwa pręta		$u'u''p$	$u'u'''p$	u''^2p	$u''u'''p$	$u''p\ominus$	$u'''p\ominus$	u'''^2p	<u>S</u>
A	0	0	0	0	0	0	0	0	- 4.66
0	I	0	0	0	0	0	0	0	- 7.55
1	II	0	0	0	0	0	0	0	-10.97
II	III	- 9.26	0	9.26	0	- 24.15	0	0	- 6.08
III	IV	- 21.71	21.71	21.71	- 21.71	+ 49.00	- 49.00	21.71	- 2.54
A	1	0	0	0	0	0	0	0	+ 4.95
1	2	0	0	0	0	0	0	0	+10.03
2	3	- 9.96	0	9.26	0	+ 48.88	0	0	+ 6.62
3	B	- 21.71	21.71	21.71	- 21.71	0	0	21.71	+ 1.40
0	1	0	0	0	0	0	0	0	+ 9.21
I	2	0	0	0	0	0	0	0	- 1.96
II	3	- 70.19	0	70.19	0	+177.31	0	0	- 2.42
III	B	- 35.10	35.10	35.10	- 35.10	0	0	35.10	- 1.61
1	II	0	0	0	0	0	0	0	+ 2.841
2	III	- 70.19	0	70.19	0	0	0	0	+ 2.38
3	IV	- 35.10	35.10	35.10	- 35.10	+ 88.65	- 88.65	35.10	+ 3.19
IV	B	- 3.75	3.75	3.75	- 3.75	- 9.38	+ 9.38	3.75	- 7.80
A	I	—	—	—	—	—	—	—	- 5.69
1	I	—	—	—	—	—	—	—	+ 4.03
2	II	—	—	—	—	—	—	—	- 0.22
3	III	—	—	—	—	—	—	—	- 0.30
		<u>-276.27</u>	<u>117.37</u>	<u>276.27</u>	<u>-117.37</u>	<u>+330.31</u>	<u>-128.27</u>	<u>117.37</u>	

Siły \mathcal{E} i u zostają te same, co w poprzednim paragrafie. Rys. 88b przedstawia plan sił, jeżeli zamiast II działają w I i 1 siły równe jedności i wprost przeciwne, rys. 88c, jeśli w II i 2 działają siły równe jedności, a 88d, jeśli w III i 3 działają siły równe jedności. Siły wewnętrzne w pierwszym wypadku nazwijmy u' , w drugim u'' , w trzecim u''' . Wyniki zestawiliśmy w tabliczce.

Według rów. 244) mamy

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathcal{E}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV} \\ S_2 &= \mathcal{E}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV} \\ S_3 &= \mathcal{E}_3 + u_3 S' + u_3' S'' + u_3'' S''' + u_3''' S^{IV} \end{aligned} \right\} \dots \dots 256)$$

Gdy wstawimy wartości za S_1 w rów. 253), otrzymamy $u_1 \rho_1 (\mathcal{E}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV}) + u_2 \rho_2 (\mathcal{E}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV}) + \dots + \rho' S' = 0$, czyli

$$\left. \begin{aligned} \Sigma u \rho \mathcal{E} + (\Sigma u^2 \rho + \rho') S' + S'' \Sigma u u' \rho + S''' \Sigma u u'' \rho + S^{IV} \Sigma u u''' \rho &= 0 \\ \Sigma u' \rho \mathcal{E} + S' \Sigma u' u \rho + S'' (\Sigma u^2 \rho + \rho'') + S''' \Sigma u' u'' \rho + S^{IV} \Sigma u' u''' \rho &= 0 \\ \Sigma u'' \rho \mathcal{E} + S' \Sigma u'' u \rho + S'' \Sigma u'' u' \rho + S''' (\Sigma u''^2 \rho + \rho''') + & \\ &+ S^{IV} \Sigma u'' u''' \rho = 0 \\ \Sigma u''' \rho \mathcal{E} + S' \Sigma u''' u \rho + S'' \Sigma u''' u' \rho + S''' \Sigma u''' u'' \rho + S^{IV} (\Sigma u'''^2 \rho + & \\ &+ \rho^{IV}) = 0 \end{aligned} \right\} 257)$$

Wstawivszy wartości otrzymamy

$$\begin{aligned} -44 \cdot 55 + (144 \cdot 82 + 9 \cdot 72) S' + 226 \cdot 15 S'' - 142 \cdot 27 S''' + 58 \cdot 39 S^{IV} &= 0, \\ -530 \cdot 62 + 226 \cdot 15 S' + (435 \cdot 17 + 10) S'' - 276 \cdot 27 S''' + 117 \cdot 37 S^{IV} &= 0, \\ + 330 \cdot 31 - 142 \cdot 27 S' - 276 \cdot 27 S'' + (276 \cdot 27 + 10) S''' - 117 \cdot 37 S^{IV} &= 0, \\ -128 \cdot 27 + 58 \cdot 39 S' + 117 \cdot 37 S'' - 117 \cdot 37 S''' + (117 \cdot 37 + 10) S^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

A stąd po rozwiązaniu równań mamy

$$S' = -5 \cdot 694, \quad S'' = +4 \cdot 026, \quad S''' = -0 \cdot 220, \quad S^{IV} = -0 \cdot 296.$$

Na podstawie tych wartości i wartości u możemy nareście obliczyć według 256) dokładne wartości sił wewnętrznych S , które znajdują się w ostatnim rządku tabliczki.

~ Z porównania tych sił ze siłami wewnętrznymi, któreśmy otrzymali w poprzednim paragrafie widzimy, że przez dodanie słupów zmieniliśmy zupełnie siły wewnętrzne i to nietylko w krzyżulcach, ale i w pasach. N. p. otrzymujemy w 12. zamiast $+8 \cdot 75 + 10 \cdot 03$. A zatem obliczenie kraty złożonej o krzyżulcach tęgich przez nieuwzględnienie słupów i rozłożenia na dwa układy daje wyniki zupełnie niezgodne z rzeczywistością,

choć przewaźnie większe, dodanie słupów wzmaga jednak w niektórych prętach siły wewnętrzne. A że obliczenie dokładne jest nadzwyczaj żmudne, więc lepiej nie używać takiej kraty.

§. 77. Belka wieloboczna.

Sposób obliczenia belki wielobocznej statycznie niewyznaczalnej jest taki sam, jak belki równoległej; nie potrzebujemy się więc powtarzać. Wyniki jednak obliczenia są tu inne, niż w poprzednich paragrafach. Winkler oblicza jako przykład belkę paraboliczną zbieżną o kracie równoramiennej dwukrotnej i dwóch słupach*) i otrzymuje wprawdzie dla pasów wyniki dokładne, mało co się różniące od przybliżonych, dla krzyżulców zaś zupełnie odmiennie.

Jeżeli krata jest więcej, niż dwukrotną, to liczba prętów nadliczbowych jest większa, niż 1. Dla belki równoległej rozkładanie na pojedyncze układy jest dozwolone, gdyż błąd jest bardzo mały, dla belki wielobocznej daje sposób ten przybliżony tylko dla pasów dość dokładne wyniki, dla kraty zaś nie.

To samo stosuje się także do belek o kracie prostokątnej i podwójnych gibkich krzyżulcach. Belki takie równoległe możemy snadnie obliczać według sposobu przybliżonego.

§. 78. Belka Howe'a.

Belka Howe'a ma kratę złożoną ze sztucznem nateżeniem. W celu obliczenia jej dokładnego należy obliczyć ją naprzód bez względu na sztuczne nateżenie, a więc według §. 76., uwzględniając tę okoliczność, że drzewo ma inny współczynnik sprężystości, niż żelazo, a potem uwzględnić wpływ sztucznego nateżenia**).

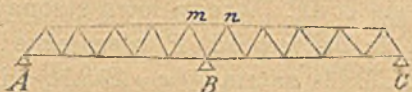
Wprawdzie obliczenie przybliżone kraty złożonej daje wyniki bardzo niedokładne, jednak z powodu, że nateżenia sztuczne nie dadzą się dokładnie wyznaczyć, więc dokładniejsze wyznaczenie sił wewnętrznych już z tej przyczyny nie jest możliwe. W praktyce wystarcza więc wyznaczenie przybliżone.

*) p. Winkler. Theorie der gegliederten Balkenträger, str. 252.

***) p. Podr. t. most. tom I. wyd. II. str. 108.

§. 79. Belka ciągła.

Sposób ten wyznaczenia sił wewnętrznych da się zastosować także do belki wieloprzęsłowej. Jeżeli w belce dwuprzęsłowej (rys. 89.), opuścimy pręt mn , to otrzymamy dwie belki statycznie wyznaczalne. Pręt mn jest więc tu prętem nadliczbowym. W belce trzyprzęsłowej mamy dwa takie pręty nadliczbowe, w czteroprzęsłowej trzy. Jeżeli przytem krata jest podwójna lub potrójna, liczba prętów nadliczbowych wzrasta. Dalsze obliczenie jest takie samo, jak w poprzednich paragrafach.



rys. 89.

W belce trzyprzęsłowej mamy dwa takie pręty nadliczbowe, w czteroprzęsłowej trzy. Jeżeli przytem krata jest podwójna lub potrójna, liczba prętów nadliczbowych wzrasta. Dalsze obliczenie jest takie samo, jak w poprzednich paragrafach.

§. 80. Wpływ zmiany ciepłoty.

Jeżeli ciepłota τ_0 belki statycznie niewyznaczalnej się zmieni o $(\tau - \tau_0)$, to zamiast rów. 253) musimy użyć pierwotnych rów. 252) i wprowadzić w rachunek ilości $U = \alpha(\tau - \tau_0)\epsilon A$ według rów. 250).

Jeżeli belka składa się z części drewnianych i żelaznych, musimy uwzględnić tę okoliczność, że α i ϵ są inne dla części drewnianych a inne dla żelaznych.

X. Zastosowanie prawa pracy odkształcenia.

§. 81. Pochodne pracy odkształcenia belki kratowej.

Przypuśćmy, że na belkę działają ciężary $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, które są między sobą w równowadze. Niechaj siła wewnętrzna w pewnym pręcie nazywa się S , przekrój jego A , długość s . Pręty przyjmijmy na razie niesprężyste, ale przypuśćmy, że z jakichkolwiek powodów stają się dłuższe o Δs , wtedy punkty zaczepienia ciężarów w kierunku ciężarów przesuną się o $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.

Na podstawie prawa pracy przygotowanej (§. 62.) możemy napisać

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n = \Sigma S \Delta s \dots \dots \dots 258)$$

Jeżeli chcemy między siłami zewnętrznymi rozróżnić oddziaływanie, to napiszemy to równanie

$$\Sigma Pv + \Sigma \Delta c = \Sigma S \Delta s \dots \dots \dots 259)$$

Przesunięcia podpór Δc zwykle nie dają się przewidzieć. Jeżeli grunt jest dobry, przyjmujemy zwykle $\Delta c = 0$.

Dotychczas Δs były zupełnie dowolne. Teraz przypuścimy, że jedna z sił P zmienia się o dP . Wtedy lewa strona równ. 258) zmieni się o dPv . A że Δs jest od P niezależne, więc prawa strona zmieni się o $\Sigma \partial S \Delta s$ zatem $dPv = \Sigma \partial S \Delta s$, więc

v przebiegi zmniejszenia siły P w kierunku
siły tej siły:

$$v = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P} \Delta s \dots \dots \dots 260)$$

Jeżeli teraz zamiast dowolnych Δs wprowadzimy przedłużenie sprężyste wskutek sił S , to wedle 227) $\Delta s = \frac{Ss}{\epsilon A}$, więc

$$v = \Sigma \frac{Ss}{\epsilon A} \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial \Sigma \frac{S^2 s}{2\epsilon A}}{\partial P}, \dots \dots \dots 261)$$

bo wykonawszy częściowe różniczkowanie prawej strony, otrzymamy lewą.

Wyraz $\Sigma \frac{S^2 s}{2\epsilon A}$ jestto praca odkształcenia całej belki kratowej od stanu bez nateżenia do nateżenia S . Praca ta bowiem

równa się dla każdego pręta $\frac{1}{2} S \Delta s = \frac{1}{2} S \frac{Ss}{\epsilon A} = \frac{S^2 s}{2\epsilon A}$, dla całej więc

belki

$$\Sigma \frac{S^2 s}{2\epsilon A} = L \text{ praca odkształcenia. \dots \dots \dots 262)$$

Wstawiwszy tę wartość w 261) otrzymamy

$$v = \frac{\partial L}{\partial P} \dots \dots \dots 263)$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie. Jeżeli belka była pierwotnie bez nateżenia i ciepłota się nie zmieniła, to przesunięcie punktu zaczepienia siły P w kierunku tej siły równa się częściowej pochodnej wedle P pracy odkształcenia belki.

Uwaga. Jesliby pręty były mimośrodkowo połączone, to powstałyby w prętach oprócz ciągnięcia i ciśnienia także momenty, które należałoby uwzględnić.

Przykład. Wyznaczyć należy ugięcie f punktu C belki trójkątnej (rys. 90.).

Jeżeli w punkcie C działa siła P , to z trójkąta sił widzimy, że jeżeli nazwiemy a siłę wewnętrzną w AC , A_1 przekrój, s długość

b " " " AB , A_2 " " l "

to: $a = \frac{P}{2\varepsilon A_1} = \frac{Ps}{2h}$, $b = \frac{P}{2\varepsilon A_2} = \frac{Pl}{4h}$

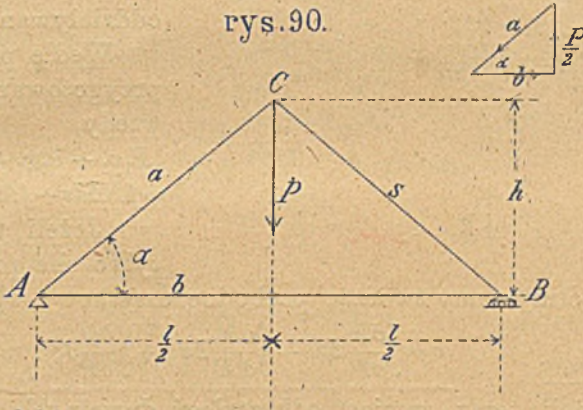
Praca odkształcenia będzie więc

$$L = \sum \frac{S^2 s}{2\varepsilon A} = 2 \cdot \frac{a^2 s}{2\varepsilon A_1} + \frac{b^2 l}{2\varepsilon A_2}$$

Z rów. 263) otrzymamy

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{2as}{\varepsilon A_1} \frac{\partial a}{\partial P} + \frac{bl}{\varepsilon A_2} \frac{\partial b}{\partial P} \dots \dots \dots 264)$$

rys. 90.



Mamy dalej

$$\frac{\partial a}{\partial P} = \frac{s}{2h}, \quad \frac{\partial b}{\partial P} = \frac{l}{4h}$$

Wstawiając to w 264) i wartości za a i b, otrzymamy

$$f = \frac{2 \cdot \frac{Ps}{\varepsilon A_1} \cdot s}{2h} + \frac{Pl}{4h} \frac{l}{\varepsilon A_2} \frac{l}{4h} = \frac{Ps^3}{2\varepsilon A_1 h^2} + \frac{Pl^3}{16\varepsilon A_2 h^2}$$

$$f = \frac{P}{2\varepsilon h^2} \left(\frac{s^3}{A_1} + \frac{l^3}{8A_2} \right) \dots \dots \dots 265)$$

Jeśli przekroje obliczone zostały dla równych natężeń, to

$$A_1 = \frac{a}{\tau} = \frac{Ps}{2h\tau}, \quad A_2 = \frac{b}{\tau} = \frac{Pl}{4h\tau}$$

Wstawiając to w rów. 265) otrzymamy

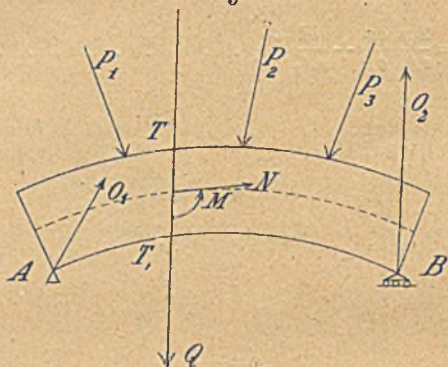
$$f = \frac{\tau}{\varepsilon h} \left(s^2 + \frac{l^2}{4} \right) \dots \dots \dots 266)$$

§. 82. Pochodna pracy odkształcenia dźwigaru o przekroju pełnym.

Mamy dany dźwigar AB (rys. 91.) o przekroju pełnym. W A jest łożysko stałe, w B przesuwowe bez tarcia. Na belkę działają siły P_1, P_2, P_3 i oddziaływania O_1 i O_2 . W przekroju TT_1 niech działa moment M , siła podłużna N i poprzeczna Q .

Przypuśćmy najprzód, że przedłużenie osi wynosi Δds , obrót przekroju $\Delta d\varphi$, przesunięcie Δq i przypuśćmy, że te wartości są dowolne i od sił niezależne.

rys. 91.



Wskutek tego nastąpi przesunięcie v punktów zaczepienia sił P (pod P rozumiemy także oddziaływania).

Wedle prawa pracy przygotowanej mamy wtedy

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n = \int N \Delta ds + \int M \Delta d\varphi + \int Q \Delta q.$$

Jeżeli teraz jedna tylko siła przesunie się

o v , to otrzymamy tworząc pochodne cząstkowe wedle tego P

Opisuje odkształcenie pręty:

$$v = \int \frac{\partial N}{\partial P} \Delta ds + \int \frac{\partial M}{\partial P} \Delta d\varphi + \int \frac{\partial Q}{\partial P} \Delta q \dots \dots \dots 267)$$

Jeżeli teraz zamiast odkształceń dowolnych przyjmiemy odkształcenie wskutek sił P , to otrzymamy*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta ds &= \frac{N ds}{\epsilon A} \\ \Delta d\varphi &= \frac{M ds}{\epsilon J} \\ dq &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 268)$$

Wstawiawszy te wartości w rów. 267) otrzymamy

$$v = \int \frac{\partial N}{\partial P} \frac{N}{\epsilon A} ds + \int \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M}{\epsilon J} ds, \quad 268a)$$

zamiast czego możemy napisać

$$v = \frac{\partial \left\{ \int \frac{N^2}{2\epsilon A} ds + \int \frac{M^2}{2\epsilon J} ds \right\}}{\partial P} \dots \dots \dots 269)$$

Wyraz w klamrze jest to praca odkształcenia dźwigaru, bo napięcie $v = \frac{N}{A} + \frac{Mv}{J}$, odkształcenie zaś $\frac{v ds}{\epsilon}$, więc praca $\frac{v^2}{2\epsilon} ds dA$, a dla całego przekroju

*) por. Podr. Stat. Budowli. 2. wyd. str. 410. (równ. 728 i 730)

xx Dla warunku byu v po prawej stronie oznacza odległość wzdłuż osi ciężkości.

xxx Praca przygotowania sił zewnętrznych jest równa pracy przygotowania sił wewnętrznych.

$$dL = \frac{ds}{2\epsilon} \int v^2 dA = \frac{ds}{2\epsilon} \int_{-e}^e \left(\frac{N}{A} + \frac{Mv}{J} \right)^2 dA,$$

$$dL = \frac{ds}{2\epsilon} \left\{ \frac{N^2}{A^2} \int dA + 2 \frac{MN}{AJ} \int v dA + \frac{M^2}{J^2} \int v^2 dA \right\}.$$

Jeżeli naznaczone całkowanie w całym przekroju wykonamy, otrzymamy, zważywszy, że $\int v dA = 0$, $\int v^2 dA = J$, $\int dA = A$,

$$dL = \frac{N^2 ds}{2\epsilon A} + \frac{M^2 ds}{2\epsilon J}.$$

Zatem praca odkształcenia całego dźwigaru wynosi

$$L = \int \frac{N^2 ds}{2\epsilon A} + \int \frac{M^2 ds}{2\epsilon J}, \quad \dots \dots \dots 270)$$

a wstawiwszy tę wartość w 269), otrzymamy

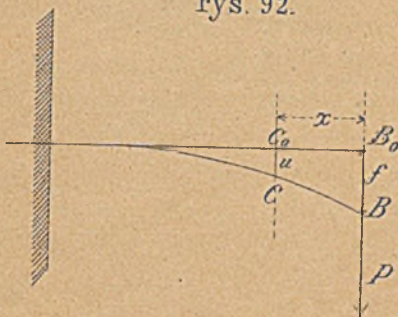
$$v = \frac{\partial L}{\partial P} \dots \dots \dots 271)$$

zupełnie, jak rów. 263).

Zatem twierdzenie wypowiedziane w poprzednim paragrafie, dotyczące się belki kratowej, jest ważne także dla dźwigaru o przekroju pełnym.

Zauważyć musimy, że praca odkształcenia jest niezależna od znaku N i M , a tak samo od znaku S (rów. 261.), bo mamy tu tylko kwadraty tych ilości.

rys. 92.



1. Przykład. Wyznaczyć strzałkę ugięcia f belki jednym końcem utwierdzonej (rys. 92.), obciążonej na drugim końcu ciężarem P .

W przybliżeniu możemy tu przyjąć $N=0$, $ds = dx$, więc wedle 270)

$$L = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2\epsilon J}, \quad \text{zatem wedle 271)} \quad f = \int_0^l \frac{M}{\epsilon J} \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Z rysunku widzimy, że w punkcie C

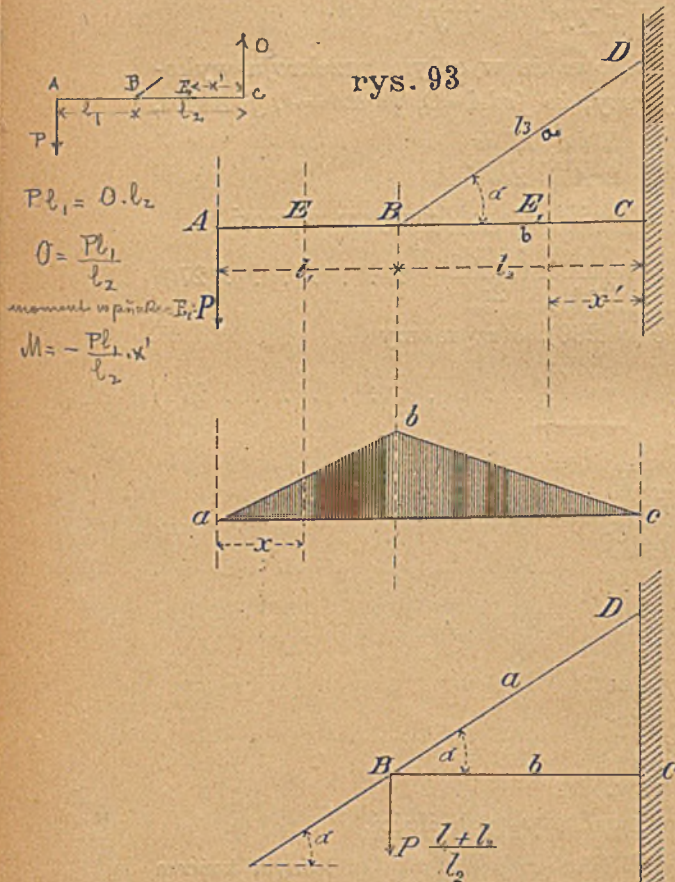
$$M = Px, \quad \text{więc} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x, \quad \text{zatem}$$

$$f = \int_0^l \frac{M}{\epsilon J} x dx = \int_0^l \frac{Px^2}{\epsilon J} dx = \frac{Pl^3}{3\epsilon J} \dots \dots \dots 272)$$

2. Przykład. Belka AC (rys. 93.) podparta jest w C i zawieszona w B zapomocą pręta BD . W A działa siła P , należy wyznaczyć ugięcie w punkcie A .

* Praca odkształcenia jest sumą potawic jej odpowiadających prac przygotowania.
 Praca odkształcenia = Formänderungsarbeit.
 Praca przygotowania = Verformungsarbeit.

Powierzchnia momentów w AC przedstawia się jako trójkąt. Moment w B wynosi $M = -Pl_1$, w punkcie E: $M = -Px$ w punkcie E_1 $M = -\frac{Pl_1 x'}{l_2}$.



rys. 93

$Pl_1 = 0 \cdot l_2$
 $Q = \frac{Pl_1}{l_2}$
 moment w punkcie E: P
 $M = -\frac{Pl_1 \cdot x'}{l_2}$

Ciągnienie w BD

$a = P \frac{l_1 + l_2}{l_2}$ siecz α ,

ciśnienie w BC

$b = -P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \dot{\alpha}$

Mamy więc:

1) dla AB $N=0, M=-Px,$
 $\frac{\partial M}{\partial P} = -x,$ 2) dla BC

$N = -P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \dot{\alpha}$,

$M = -P \frac{l_1}{l_2} x', \frac{\partial N}{\partial P} = 0,$

$\frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{l_1}{l_2} x',$ 3) dla BD

$N = +P \frac{l_1 + l_2}{l_2}$ siecz α ,

$M = 0, \frac{\partial N}{\partial P} = \frac{l_1 + l_2}{l_2}$ siecz α .

Jeżeli przekrój belki AC stały A, pręta BD A1, to otrzymamy wedle 263) i 271) $f = \frac{\partial L}{\partial P}$.

4) Pochodne pracy dla AB otrzymamy

$$\int_0^{l_1} \frac{M \partial M}{\epsilon J \partial P} dx = - \int_0^{l_1} \frac{M}{\epsilon J} x dx = + \int_0^{l_1} \frac{Px^2}{\epsilon J} dx = \frac{Pl_1^3}{3\epsilon J}$$

2) Pochodna pracy dla BD będzie

$$\int_{\epsilon_1 A_1}^{l_2} \frac{N dx \partial N}{\partial P} = \int_0^{l_2} \frac{P(l_1 + l_2)^2}{\epsilon_1 A_1 l_2^2} \text{siecz}^2 \alpha dx = \frac{P(l_1 + l_2)^2}{\epsilon_1 A_1 l_2^2} l_2 \text{siecz}^2 \alpha$$

3) Pochodna pracy dla BC będzie

$$\int_0^{l_2} \frac{N dx \partial N}{\epsilon A} + \int_0^{l_2} \frac{M \partial M}{\epsilon J \partial P} dx = + \int_0^{l_2} \frac{P \frac{l_1}{l_2} x'}{\epsilon J} \frac{l_1}{l_2} x' dx = \frac{Pl_1^2 l_2^3}{3 \epsilon J l_2^2} = \frac{Pl_1^2 l_2}{3 \epsilon J}$$

Zatem pochodne pracy całego dźwigaru

$$f = \frac{Pl_1^3}{3\epsilon J} + \frac{Pl_1^2 l_2}{3\epsilon J} + \frac{P(l_1 + l_2)^2 l_2}{\epsilon_1 A_1 l_2^2} \text{siecz}^2 \alpha \dots \dots \dots 273)$$

§. 83. Prawo najmniejszości pracy odkształcenia. *Primo Castigliana*

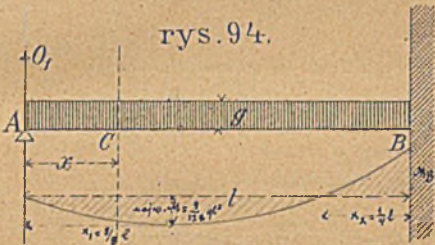
Jeżeli dźwigar posiada punkty podparcia stałe w kierunku oddziaływań, to dla nich $v=0$. Nazwijmy te oddziaływania statycznie niewyznaczalne X , to wedle 263)

$$v = \frac{\partial L}{\partial X} = 0. \dots \dots \dots 274)$$

Więc siły X muszą być takie, aby praca odkształcenia zależna od X była najmniejszą lub największą. Ponieważ tu druga pochodna jest dodatnia, więc praca L musi być najmniejszością.

Pod powyższymi warunkami brzmi to prawo, które nazywamy też prawem Castigliana*), jak następuje:

Pracą najmniejszą jest praca odkształcenia.
Pracą najmniejszą jest praca odkształcenia.



Oddziaływania podpór statycznie niewyznaczalne mają wedle prawideł sprężystości takie wartości, jakie odpowiadają najmniejszości pracy odkształcenia.

1. Przykład. Znaleźć oddziaływanie O_1 belki jednym końcem utwierdzonej, drugim podpartej, obciążonej zupełnie ciężarem jednostkowym g (rys. 94.).

Tu $N=0$, więc wedle 274) i 270)

$$\int_0^l \frac{\partial M}{\partial O_1} \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0, \text{ a gdy przekrój stały } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0.$$

Dalej mamy $M = O_1 x - \frac{gx^2}{2}$, więc $\frac{\partial M}{\partial O_1} = x$, zatem

$$\int_0^l M x dx = 0 = \int_0^l \left(O_1 x - \frac{gx^2}{2} \right) x dx = \frac{O_1 l^3}{3} - \frac{gl^4}{8}, = 0$$

stad $O_1 = \frac{8}{3} gl$ **). $\dots \dots \dots 275)$

a moment w C $M = \frac{8}{3} glx - \frac{gx^2}{2}$.

Dla $x = \frac{2}{3} l$ jest $\left. \begin{array}{l} \text{najw } M = \frac{9}{128} gl^2 \\ M_B = -\frac{1}{8} gl^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 276)$

*) p. Castigliano Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Paryż 1879.

***) por. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 255. rów. 415.

2. Przykład. Wyznaczyć oddziaływania i momenty belki obu końcami poziomo utwierdzonej, obciążonej ciężarem, wzrastającym od 0 do p (r. 95.).

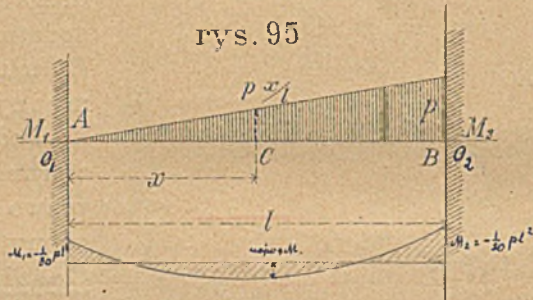
Tu w punkcie C $M = O_1 x - p \frac{x}{l} \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + M_1$, jeżeli M_1 oznacza moment podporowy lewy.

Tu znowu $N = 0$, więc na mocy 274) i 270)

$$\frac{\partial L}{\partial O_1} = \int_0^l \frac{M}{\varepsilon J} \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0, \text{ a gdy } \varepsilon J \text{ stałe,}$$

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0 \text{ i } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_1} dx = 0 \dots \dots \dots 277)$$

rys. 95



Dalej mamy $\frac{\partial M}{\partial O_1} = x, \frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$, więc

$$O = \int_0^l M x dx = \int_0^l \left(O_1 x^2 - \frac{p x^3}{6l} + M_1 x \right) dx = \frac{O_1 l^3}{3} - \frac{p l^4}{90} + \frac{M_1 l^2}{2} \dots \dots 278)$$

Dalej mamy $\int_0^l M \cdot 1 dx = 0$, zatem

$$O = \int_0^l \left(O_1 x - \frac{p x^2}{6l} + M_1 \right) dx = \frac{O_1 l^2}{2} - \frac{p l^3}{24} + M_1 l \dots \dots 279)$$

Z równań 278) i 279) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= \frac{3}{20} \frac{p l}{l} \\ M_1 &= -\frac{p l^2}{30} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 280)$$

A więc w punkcie C $M = \frac{3}{20} p l x - \frac{p x^3}{6l} - \frac{1}{30} p l^2$

$$M = \frac{p}{2} \left(\frac{3}{10} l x - \frac{x^3}{3l} - \frac{l^2}{15} \right), \text{ a dla } x = l \sqrt{0.3} \text{ tj. Ma } \frac{dM}{dx} = 0.$$

zaś dla $x = l$

$$\left. \begin{aligned} \text{najw (+ M)} &= + 0.02144 p l^2 \\ M_2 &= -\frac{1}{20} p l^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 281)$$

§. 84. Zastosowanie tego prawa do belek statycznie niewyznaczalnych.

Długości prętów belki kratowej s niech się zmienia o Δs , przytem niech będzie Δc przesunięcie podpory w kierunku oddziaływania a δ przesunięcie jakiegokolwiek siły P w kierunku P .

Prawo pracy przygotowanej brzmi wtedy wedle 226)

$$\Sigma P\bar{\delta} + \Sigma S\Delta c = \Sigma S\Delta s \dots \dots \dots 282)$$

Jeżeli nazwiemy S' , S'' , S''' siły w prętach nadliczbowych, to wedle 244) możemy napisać

$$\Sigma P\bar{\delta} + \Sigma (S' + c'S' + c''S'' + \dots)\bar{\Delta}c = \Sigma (S' + u'S' + u''S'' + \dots)\bar{\Delta}s \quad 283)$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $S' = 1$, $S'' = S''' = \dots = 0$, to

$$\left. \begin{aligned} \Sigma c'\bar{\Delta}c &= \Sigma S'\bar{\Delta}s, \text{ a podobnie} \\ \Sigma c''\bar{\Delta}c &= \Sigma S''\bar{\Delta}s \\ \Sigma c'''\bar{\Delta}c &= \Sigma S'''\bar{\Delta}s \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots \dots 284)$$

Jeżeli teraz zamiast dowolnych przesunięć $\bar{\Delta}s$ i $\bar{\Delta}c$ przyjmiemy rzeczywiste sprężyste przedłużenia prętów Δc i Δs , to otrzymamy równanie Maxwella

$$\left. \begin{aligned} \Sigma c'\Delta c &= \Sigma S'\Delta s \\ \Sigma c''\Delta c &= \Sigma S''\Delta s \\ \Sigma c'''\Delta c &= \Sigma S'''\Delta s \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots \dots 285)$$

Ponieważ $\frac{\partial c}{\partial S'} = c'$, $\frac{\partial c}{\partial S''} = c'' \dots \frac{\partial S}{\partial S'} = u'$, $\frac{\partial S}{\partial S''} = u''$, zatem możemy to równanie napisać

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial c}{\partial S'} \Delta c &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \Delta s \\ \Sigma \frac{\partial c}{\partial S''} \Delta c &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \Delta s \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots \dots 286)$$

Równania 286) możemy otrzymać wprost z rów. 282) przez częściowe różniczkowanie według wszystkich niewiadomych z wyjątkiem dowolnych przesunięć δ .

W razie, jeżeli przyjmiemy stałe lub przesuwowe podpory, $\Delta c = 0$, a zatem otrzymamy z 286)

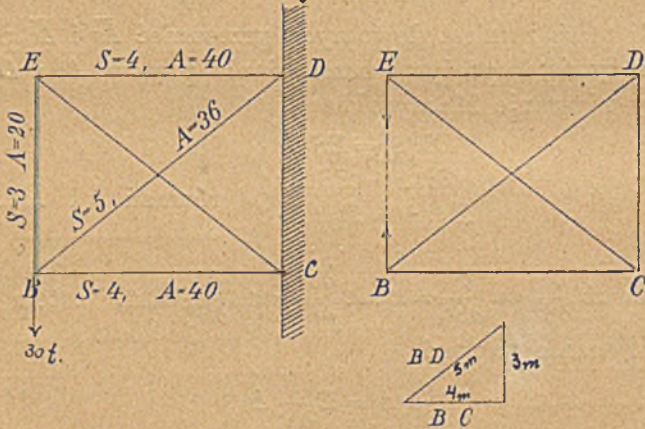
$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \Delta s &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \frac{S_s}{\epsilon A} = 0 \\ \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \Delta s &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \frac{S_s}{\epsilon A} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 287)$$

Ponieważ praca odkształcenia $A = \Sigma \frac{S's}{2\epsilon A}$, więc równanie to możemy inaczej wyrazić.

Sily prętów nadliczbowych S' , S'' ... muszą być tak wielkie, aby praca odkształcenia była najmniejszą.

Widzimy więc, że prawo najmniejszości pracy odkształcenia, które przedtem udowodniliśmy dla oddziaływań, ważne jest także dla sił wewnętrznych prętów nadliczbowych, a dałoby się udowodnić ogólnie, że jeżeli siły wewnętrzne S belki kratowej statycznie niewyznaczalnej wyrazimy jako funkcje niezależnie zmiennych x' , x'' ..., to x muszą mieć takie wartości, aby praca odkształcenia A była najmniejszą.

rys. 96



1. Przykład (według Ostenfelda). Wspornik $EBCD$ (rys. 96.) ma stałe łożysko w C i D . W B obciążony jest 30 tonami. Wyznaczyć siły wewnętrzne. Belka jest statycznie niewyznaczalną pierwszego stopnia, uważamy pręt BE jako nadliczbowy. Opuściwszy ten pręt, otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{siłę wewnętrzną w } BD & 30 \cdot \frac{3}{5} = +50 \text{ t} \\ \text{„ „ „ } BC & 30 \cdot \frac{4}{5} = -40 \text{ t}. \end{aligned}$$

Siły u otrzymamy, zaczepiając w E i B siły równe jedności. Wtedy otrzymamy siły u' w ED $1 \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot 33$

$$\begin{aligned} \text{w } EC & 1 \cdot \frac{4}{5} = -1 \cdot 67 \\ \text{w } BD & 1 \cdot \frac{3}{5} = +1 \cdot 67 \\ \text{w } BC & 1 \cdot \frac{4}{5} = -1 \cdot 33. \end{aligned}$$

Z rów. 287) otrzymamy tu, zważywszy, że $S = S_0 + u_1 S'$,

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = u_1, \quad \sum_{\varepsilon A} u_1 S_s = 0 = \sum_{\varepsilon A} u_1 s S_0 + \sum_{\varepsilon A} u_1^2 s S' \quad \dots \dots \dots 288)$$

a stąd

$$S' = - \frac{\sum u_1 s S_0}{\sum u_1^2 s} \quad \dots \dots \dots 289)$$

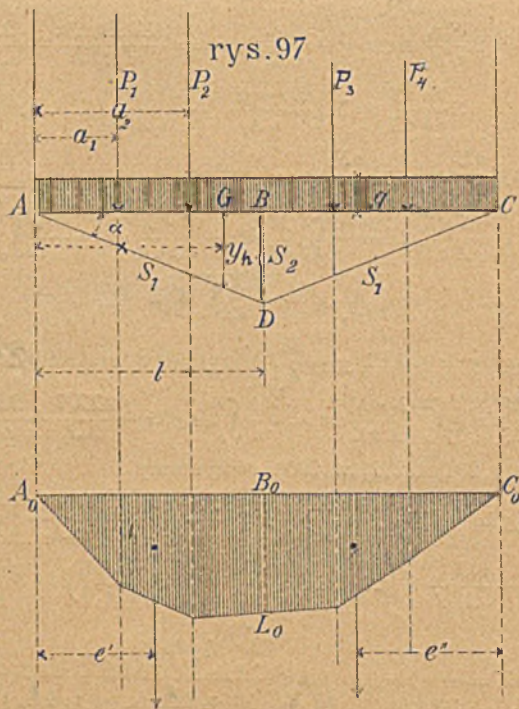
Ustawmy następną tabliczkę

Pręt	\mathcal{E}_0	u_1	s	A	$\frac{u_1 s \mathcal{E}_0}{A}$	$\frac{u_1^2 s}{A}$	S
ED	0	1.33	400	40	0	17.7	-19.1
EC	0	-1.67	500	48	0	28.9	+23.9
BD	+50	+1.67	500	36	1157	38.6	+26.1
BC	-40	-1.33	400	40	533	17.7	-20.9
EB	0	1	300	20	0	15.0	-14.3
					1690	117.9	

$$S' = -\frac{1690}{117.9} = -14.33.$$

Teraz możemy obliczyć rzeczywiste natężenie S według wzoru $S = \mathcal{E}_0 + u_1 S'$. Wypisaliśmy je w ostatniej rubryce.

Z powyższego widzimy, że sposób ten prowadzi do tych samych wzorów i wyników, jakie otrzymaliśmy w §. 75.



2. Przykład podajemy tu wedle Müllera Breslau.*

Belka wzmocniona ABC leży na podporach A i C (rys. 97).

Niewiadoma niechaj będzie tu X składowa pozioma siły wewnętrznej w ścięgnach AD i DC .

* Die meisten Methoden der Festigkeitslehre 3. Aufl. S. 103.

Wtedy $S_1 = X \text{ siecz } \alpha,$
 $S_2 = -2X \text{ st } \alpha$

Zróbmy przekrój pionowy w G . to dla belki

poziomej. $N = -S_1 \text{ dost } \alpha = -X,$
 moment $M = M_0 - S_1 y \text{ dost } \alpha = M_0 - Xy,$

jeżeli M_0 oznacza moment belki zwykłej AC dla tego samego obciążenia a $A_0 L_0 C_0$ zwykłą powierzchnię momentów.

Tu mamy belkę o przekroju pełnym połączoną z kratową, więc

(z dow. 261; 263a) $\int \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx + \Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} = 0 \dots 290$

Niech będzie dla: współczynnik sprężystości, moment bezwładności, przekrój, belki AC ε J A
 ścięgien AD i DC ε_1 A_1
 słupa BD ε_2 A_2

to $\frac{\partial S_1}{\partial X} = \text{siecz } \alpha, \frac{\partial S_2}{\partial X} = -2 \text{ st } \alpha,$

więc $\Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} = 2 \frac{S_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} \text{ siecz } \alpha - \frac{S_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} 2 \text{ st } \alpha = \frac{2Xl \text{ siecz}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{2Xl}{\varepsilon_2 A_2} 2 \text{ st}^3 \alpha$
 $\Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} = X \left[\frac{2l \text{ siecz}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{4l \text{ st}^3 \alpha}{\varepsilon_2 A_2} \right] \dots 291$

2) Dalej mamy $\frac{\partial M}{\partial X} = -y, \frac{\partial N}{\partial X} = -1,$ więc

$\int_0^{2l} \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx = - \int_0^{2l} \frac{M}{\varepsilon J} y dx - \int_0^{2l} \frac{N}{\varepsilon A} dx = - \frac{1}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M y dx +$
 $+ \frac{X}{\varepsilon J} \int_0^{2l} y^2 dx + \frac{X}{\varepsilon A} \int_0^{2l} dx$

Wstawimy $y: x = h:l, y = \frac{xh}{l},$ otrzymamy wreszcie

$\int_0^{2l} \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx = - \frac{1}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M_0 y dx + \frac{2Xh^2 l}{3\varepsilon J} + \frac{2Xl}{\varepsilon A} \dots 292$

Wstawimy 291) i 292) w 290), otrzymamy

$- \frac{1}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M_0 y dx + \frac{2Xh^2 l}{3\varepsilon J} + \frac{2Xl}{\varepsilon A} + X \left[\frac{2l \text{ siecz}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{4l \text{ st}^3 \alpha}{\varepsilon_2 A_2} \right] = 0$

stąd $X \left(2h^2 l + \frac{6lJ}{A} + 3 \left[2l \text{ siecz}^3 \alpha \frac{\varepsilon J}{\varepsilon_1 A_1} + 4l \text{ st}^3 \alpha \frac{\varepsilon J}{\varepsilon_2 A_2} \right] \right) = 3 \int_0^{2l} M_0 y dx$
 $3 \int_0^{2l} M_0 y dx$

więc $X = \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y dx}{2h^2 l \left(1 + \frac{3J}{Ah^2} \left(1 + \text{siecz}^3 \alpha \frac{\varepsilon A}{\varepsilon_1 A_1} + 2 \text{st}^3 \alpha \frac{\varepsilon A}{\varepsilon_2 A_2} \right) \right)}$

lub $X = \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y dx}{2h^2 l \mu} \dots 293$

jeżeli $\mu = 1 + \frac{3J}{Ah^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{A}{A_1} \text{ siecz}^3 \alpha + 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \frac{A}{A_2} \text{ st}^3 \alpha \right) \dots 294$

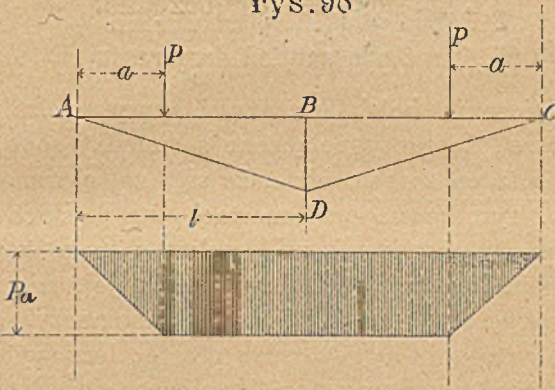
Spółczynnik μ zależny jest tylko od wymiarów belki i dla tej samej belki stały.

Jeżeli powierzchnię zwykłą momentów podzielimy pionową B_0L_0 na dwie części, a odstęp środków ciężkości obu części od podpór A_0 i C_0 nazwiemy e' i e'' , to $\int_0^l M_0 y dx = \frac{h}{l} \int_0^l M_0 x dx = \frac{h}{l} A'e'$,

$A' =$ pow. momentów po lewej stronie B_0L_0
 $A'' =$ pow. momentów po prawej stronie B_0L_0

dla całej belki $\int_0^{2l} M_0 y dx = \frac{h}{l} (A'e' + A''e'')$

rys. 98



Wstawiając tę wartość w 293) otrzymamy

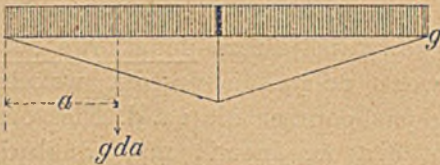
$$X = \frac{3(A'e' + A''e'')}{2\mu hl^2} \dots \dots \dots 294)$$

*) Dla dwu sił równych i w równych odstępach (rys. 98.) jest

$$A'e' = A''e'' = Pal \cdot \frac{l}{2} - Pa \frac{a}{2} \frac{a}{3} = \frac{Pa}{6} (3l^2 - a^2)$$

więc $X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2\mu hl^2}$.

rys. 99



Ponieważ każda ze sił P przyczynia się tak samo do X , więc dla jednej siły P

$$X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{4\mu hl^2} \dots \dots 295)$$

*) Dla ciężaru jednostajnie rozdzielonego otrzymamy X , jeżeli gda , działająca w odstępnie a (rys. 99.) będziemy uważać za siłę skupioną, wyrazim X wedle 295) i scał-

kujemy, otrzymamy wtedy $X = 2 \int_0^l \frac{ga(3l^2 - a^2)}{4\mu hl^2} da$

$$X = \frac{2g}{4\mu hl^2} \int_0^l (3l^2 a - a^3) da = \frac{g}{2\mu hl^2} \left(\frac{3}{2} l^4 - \frac{l^4}{4} \right) = \frac{5gl^2}{8\mu h} \dots \dots 295)$$

f) Jeżeli więc belka obciążona jest ciężarem własnym g i układem ciężarów skupionych P , to $X = \frac{5gl^4 + 2\Sigma Pa(3l^2 - a^2)}{8\rho hl^2} \dots \dots \dots 297)$

Znając X możemy teraz obliczyć siły wewnętrzne we wszystkich prętach.



W dla pojedynczego wierzchołka warunek ugięcia wzdłuż wyprostowanej. He belki wznoszą się, który jest ona dwustronnie (zys. 98) ugięciu. by PRo ugięcie war. s i t s.

XI. Natężenia drugorzędne.

§. 85. Określenie natężeń drugorzędnych.

Przy obliczeniu belek kratowych przypuszczaliśmy dotychczas zawsze, że pręty połączone są między sobą przegibnie, bez tarcia, a co za tem idzie, że siły zewnętrzne działają w osi prętów. Tymczasem przy mostach europejskich łączymy pojedyncze pręty zawsze nitami, wskutek czego kąty, jakie tworzą pręty belki kratowej przy ugięciu jej, nie mogą się zmieniać, a więc w węzłach powstają momenty, zginające pręty, których osie nie są już teraz proste, lecz wyginają się w jednym kierunku lub esowato. A nawet, jeżeli połączenie prętów jest przegibnem (w mostach amerykańskich), to występuje zawsze tarcie, w skutek czego siły wewnętrzne przyjmują położenie mniej lub więcej mimośrodkowe.

Natężenia, wywołane siłami wewnętrznymi w przypuszczeniu połączenia przegibnego beztarciowego nazywamy natężeniami pierwszorzędnymi (n. *Grundspannung, primäre Spannung*), natężenia, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych (a. *rigidity of joints*), nazywamy natężeniami drugorzędnymi (n. *Secundärspannung, fr. effort secondaire, a. secondary stress, cz. sekundarne napjeti. (Uebenspannung)*)

Oprócz tych natężeń powstają jeszcze dodatkowe natężenia wskutek mimośrodkowego połączenia prętów, wskutek nagłej zmiany przekroju, ugięcia poprzecznic i t. d. Niektórzy nazywają te natężenia także drugorzędnymi, my jednak dla odróżnienia od natężeń, powstałych z powodu stałych połączeń węzłowych będziemy je nazywać dodatkowymi (n. *Zusatzspannung*). W tym rozdziale mówić będziemy tylko o natężeniach drugorzędnych i wyłożymy rzecz tę według Rittera*).

*) Ritter W. Anwendungen der graphischen Statik. 1890. II. Teil. Nr. 171

§. 86. Zasada obliczenia nateżeń drugorzędnych.

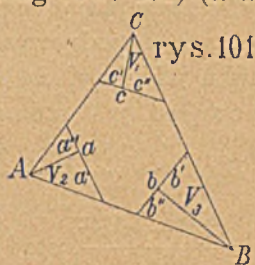
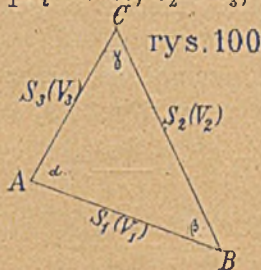
Według Manderli*), który rozwiązał pierwszy trudne zadanie wyznaczenia nateżeń drugorzędnych, postępujemy w następujący sposób:

Obliczamy najprzód siły wewnętrzne pierwszorzędne w przypuszczeniu połączeń beztarciowych przegibnych, z tych nateżenia pierwszorzędne i zmianę kątów przy ugięciu, któreby powstały przy połączeniach przegibnych beztarciowych. Momenty, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, uważamy jako niewiadome, które wyznaczamy w ten sposób, aby przez ugięcie prętów wskutek tych momentów, kąty te odzyskały pierwotną wielkość. Z momentów węzłowych wyznaczamy wreszcie w zwykły sposób nateżenia drugorzędne.

Dla obliczenia nateżeń drugorzędnych potrzeba według poprzedniego wyznaczenia nateżeń pierwszorzędnych i znajomości przekrojów. A zatem musimy zawsze najprzód wyznaczyć w zwykły sposób siły wewnętrzne i obliczyć przekroje, a potem dopiero możemy obliczać nateżenia drugorzędne.

§. 87. Zmiana kątów w trójkącie.

Zmianę kątów trójkąta wskutek zmiany długości jego boków wyznaczyliśmy już w tomie I**). Nazwijmy zmianę kąta przy A (rys. 100.) δ_a , przy B δ_b , przy C δ_c , v_1 , v_2 i v_3 nateżenia prętów s_1 , s_2 i s_3 , to według rów. 292) (t. I., str. 214)



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_a &= (v_2 - v_1) \text{ dot } B + (v_2 - v_3) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_b &= (v_3 - v_1) \text{ dot } A + (v_3 - v_2) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_c &= (v_1 - v_2) \text{ dot } B + (v_1 - v_3) \text{ dot } A \end{aligned} \right\} \dots \dots 298)$$

*) p. Allgemeine Bauzeitung 1880.

**) p. Podręcznik Teorii Mostów tom I., wyd. II. str. 213.

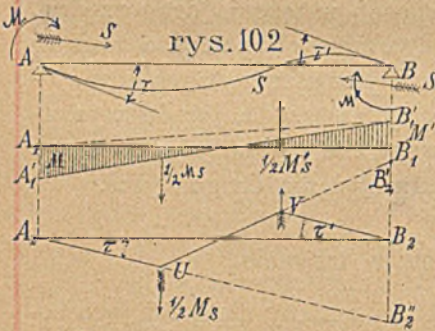
Równanie 298) da się wykreślić też przedstawić. Spuśćmy z A, B i C (rys. 101.) prostopadłe na przeciwległe boki i odetnijmy na nich nateżenia v przeciwległych boków, poczem wykreślimy do nich równoległe, a otrzymamy

$v_2 \text{ dot } B = a', v_2 \text{ dot } C = a'', v_1 \text{ dot } B = c', v_1 \text{ dot } C = b'$, więc

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_a &= a - b' - c'' \\ \varepsilon \delta_b &= b - c' - a'' \\ \varepsilon \delta_c &= c - a' - b'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 299)$$

§. 88. Kąt odchylenia osi od prętów. *Abweichungswinkel der Stäbe etc.*

Teraz będziemy się starali wyznaczyć styczne kątów odchylenia osi prętów (n. *Stabdrehwinkel*) w węzłach.



Powiedzieliśmy wyżej, że siła wewnętrzna S nie działa w osi pręta i wywołuje momenty węzłowe M i M' (rys. 102.), wskutek czego pręt się wygina. Nazwijmy styczne kątów nachylenia linii ugięcia w A i B τ i τ' , to otrzymamy je, wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, jak dla belki ciągłej. Powierzchnię

momentów dzielimy na dwa trójkąty, których powierzchnie $\frac{1}{2}Ms$ i $-\frac{1}{2}M's$ zaczepiają w pionowych trzecich części. A_2U i VB_2 są to styczne podporowe.

Z rysunku widzimy, że $B_2'B_2''$, pomnożone przez odległość biegunową εJ , jest moment statyczny siły $\frac{1}{2}Ms$, a więc

$$B_2'B_2'' = \frac{\frac{1}{2}Ms \cdot \frac{2}{3}s}{\varepsilon J} = \frac{2Ms^2}{6\varepsilon J}, \quad B_2B_2' = \frac{M's^2}{6\varepsilon J},$$

więc $B_2B_2'' = \frac{(2M - M')s^2}{6\varepsilon J}$, stąd $\tau = \frac{B_2B_2''}{s} = \frac{(2M - M')s}{6\varepsilon J}$
 a podobnie $\tau' = \frac{(2M' - M)s}{6\varepsilon J}$. . . 300)

§. 89. Równania momentów węzłowych.

Przypuśćmy, że rys. 103. przedstawia nam ugiętą belkę, przyczem wykreśliliśmy pełno cięciwy prętów, a wykreskowa-

Z obidwu stron równania ma τ i τ' ułożona, przez wyregulowanie momentów, M' otrzymujemy równanie

$$M = \frac{2EJ}{s} (2\tau + \tau')$$

liśmy ugięte pręty, schodzące się w węźle 4. Kąt zawarty między ugiętymi prętami 24 i 34 byłby taki sam, jaki był przed

rys. 103



ugięciem z powodu połączenia stałego nitami, lecz z powodu obciążenia i odkształcenia (§. 87.) zmienił się i jest obecnie

większy od tego kąta, zatem $\delta_{2,3} = \tau_2 - \tau_3$, a ze względu na

$$\text{rów. 300)} \quad \varepsilon \delta_{2,3} = \frac{s_2(2M_2 - M_2')}{6J_2} - \frac{s_3(2M_3 - M_3')}{6J_3}, \dots \dots \dots 301)$$

przyczem M_2 i M_3 oznaczają momenty węzłowe przy danym węźle M_2' i M_3' w przeciwległym końcu prętów.

Podobne równania otrzymamy dla $\delta_{3,5}$ i $\delta_{5,6}$.

Ponieważ wszystkie momenty węzłowe w węźle 4 muszą być w równowadze, więc

$$M_2 + M_3 + M_5 + M_6 = 0 \dots \dots \dots 302)$$

Otrzymamy więc dla węzła 4 cztery równania, które możemy także inaczej napisać, nazwawszy

$$\frac{sM}{6J} = \mu \dots \dots \dots 203)$$

Otrzymamy mianowicie dla węzła 4

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_{2,3} &= (2\mu_2 - \mu_2') - (2\mu_3 - \mu_3') \\ \varepsilon \delta_{3,5} &= (2\mu_3 - \mu_3') - (2\mu_5 - \mu_5') \\ \varepsilon \delta_{5,6} &= (2\mu_5 - \mu_5') - (2\mu_6 - \mu_6') \\ \frac{J_2}{s_2} \mu_2 + \frac{J_3}{s_3} \mu_3 + \frac{J_5}{s_5} \mu_5 + \frac{J_6}{s_6} \mu_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 304)$$

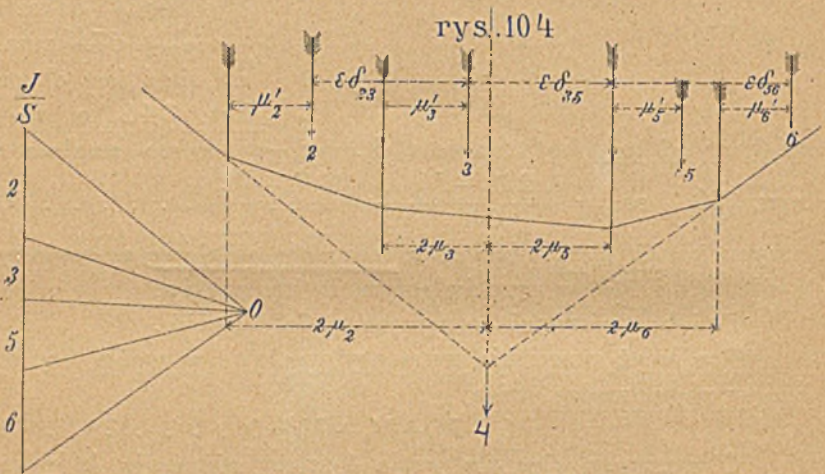
Podobne równania dadzą się ustawić dla każdego węzła, a otrzymamy ich tyle, ile jest momentów węzłowych; możemy je zatem obliczyć, rozwiązawszy równania wedle μ .

§. 90. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych.

Rozwiązanie $2n$ równań byłoby rzeczą bardzo żmudną, prędzej, chociaż próbowaniem, dojdziemy do celu drogą wykreślną, podaną przez Rittera. (*Annuaire des graph. Statik* II Teil st. 143.)

Przypuśćmy, że znamy μ' dla węzła 4., a staramy się wyznaczyć μ .

Wykreślmy wielobok sił (rys. 104.), odcinając siły $\frac{J}{s}$, potem wykreślmy kierunki tych sił w odstępach $\varepsilon\delta$ i przesuniemy te siły o μ' . Złożymy teraz te siły, a otrzymamy wypadkową 4. Odstępy przesuniętych sił od wypadkowej są równe 2μ .



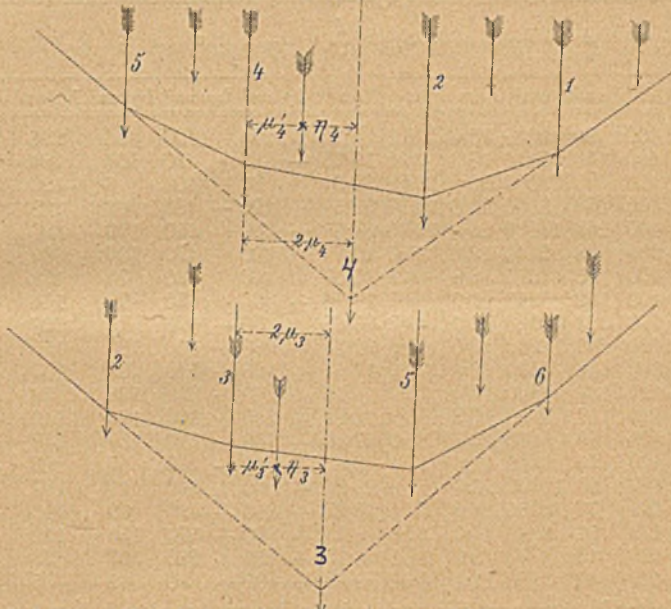
Konstrukcja ta czyni zadość wszystkim równ. 304). Odstępy sił nieprzesuniętych od wypadkowej są $2\mu - \mu'$, a różnica tych odstępów równa się $\varepsilon\delta$, przezco wypełniają się pierwsze trzy równania. Ostatnie równ. 304) orzeka, że suma momentów dotyczących sił $\frac{J}{s}$ ze względu na wypadkową jest równą zeru, co wedle konstrukcji się sprawdza.

Zachodzi tylko ta okoliczność, że nie znamy wielkości μ' . Nie pozostaje nam nic innego, jak w pierwszym przybliżeniu przyjąć $\mu' = 0$. Otrzymamy przybliżone wartości μ , które dla sąsiednich węzłów dadzą nam μ' , możemy więc tam już dokładniej wyznaczyć μ , które znów są dla sąsiednich węzłów μ' . Na podstawie tych μ' obliczamy po raz drugi, a jeśli potrzeba i trzeci, μ tak długo, aż nie okażą się już więcej znaczniejsze różnice.

Przy tej konstrukcji trzeba, rozumie się, uwzględniać znak $\varepsilon\delta$ i μ' . Kreślimy więc w każdym węźle pręty w porządku, jak wskazówka posuwa się na zegarze, i odcinamy dodatnie δ na prawo; na prawo od wypadkowej leżące μ uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne.

Na rys. 105. widzimy dwa wieloboki sznurowe dla węzła 3 i 4 (rys. 103.). Nazwijmy odstęp nieprzesuniętej siły od wypadkowej η , to $2\mu_4 = \mu_4' + \eta_4$ i $2\mu_3 = \mu_3' + \eta_3$.

rys. 105



Ponieważ dalej $\mu_4 = \mu_3'$ i $\mu_3 = \mu_4'$, więc

$$\mu_3' = \frac{\eta_3 + 2\eta_4}{3}, \quad \mu_4 = \frac{\eta_4 + 2\eta_3}{3} \dots \dots \dots 305)$$

Gdybyśmy znali położenie wypadkowych, tobyśmy mogli wprost obliczyć μ' , tymczasem ponieważ zwykle wypadkowe niewiele się przesuwają, więc na podstawie tych równań możemy w przybliżeniu wyznaczyć μ' . Podwajamy cyrklem η_4 , dodajemy do tego η_3 i dzielimy przez 3, o tę długość μ_3' przesuwamy siłę 3 na lewo.

Wyznaczywszy w ten sposób μ , możemy łatwo obliczyć natężenie v' . Mamy bowiem $v'I = Me$, a że według 303)

$$M = \frac{6I\mu}{s}, \quad \text{więc } v' = \frac{6e}{s}\mu \dots \dots \dots 306)$$

Przykład. Jako przykład wyznaczmy natężenia drugorzędne mostu nad Pegnicą kolei Norymbergia — Neuhaus o rozpiętości 36 m (tabl. IV.), dla którego Steiner wyznaczył te natężenia innym sposobem (liczebnym*).

*) p. Handbuch der Ingenieurwissenschaften t. II. str. 362.

Pomost leży u góry, ciężar własny wynosi dla pasu dolnego 0·29 t/m, dla górnego 0·71 t/m, ciężar ruchomy 2·94 t/m jednej belki. Belka jest całkowicie obciążona. Siły wewnętrzne pierwszorzędne S , przekroje prętów A , momenty bezwładności I , odstęp włókna skrajnego od osi obojętnej e i długości prętów s podane są w poniższej tablicy.

Pręt	s	A	I	e	S	$\frac{I}{s}$	μ_2	μ_1	ν_1	ν_1'	ν
	cm	cm ²	cm ⁴	cm	t	cm ³	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²
1 3	400	86	2040	13·6	35·3	5·1	-1270	-1400	254	286	-410
3 5	400	166	7110	18·0	93·0	17·75	- 360	- 690	104	186	-560
5 7	400	226	13000	20·0	134·8	32·5	- 20	- 460	6	120	-506
7 9	400	253	13000	20·0	159·7	32·5	+ 220	- 460	66	138	-621
9 11	400	253	15100	20·0	168·0	37·75	+ 400	- 400	120	120	-664
0 2	200	48	2140	13·8	15·0	10·7	-1200	-1470	497	609	+312
2 4	400	95	4270	13·8	66·4	10·67	- 360	- 860	75	178	+699
4 6	400	182	5960	16·0	116·7	14·90	- 300	- 650	72	156	+642
6 8	400	224	12260	20·0	149·3	30·65	- 50	- 690	15	207	+667
8 10	400	239	13000	20·0	165·9	32·5	+ 600	+ 500	180	150	+694
0 1	390	143	4410	12·6	70·9	11·61	+1120	+ 540	223	107	-496
2 3	429	136	6920	18·0	70·6	16·13	+ 740	+ 390	186	98	-527
4 5	429	117	5690	17·8	52·8	13·26	+ 730	+ 600	132	149	-451
6 7	429	89	3200	14·8	35·0	7·45	+ 760	+ 710	157	147	-393
8 9	429	55	1640	12·6	17·2	3·82	+ 340	+ 140	57	25	-313
1 2	429	96	12800	20·0	71·9	29·84	+ 60	+ 360	17	107	+749
3 4	429	77	6550	16·0	54·1	15·27	+ 310	+ 490	69	110	+703
5 6	429	56	3660	14·0	36·3	8·53	+ 800	+ 570	159	112	+648
7 8	429	40	740	9·6	18·5	1·73	+ 750	+ 280	107	38	+462
9 10	429	48	1130	11·1	0·66	2·63	+ 400	+ 30	62	5	+ 14

Najprzód wyznacziliśmy natężenia pierwszorzędne i dotychczasowe kąty i oznaczyli je na rys. 1. Na podstawie rów. 298) obliczyliśmy potem zmianę kątów $\varepsilon \delta$ i z uwzględnieniem znaku oznaczyliśmy wartości te w rys. 2., poczem przystępujemy do wyznaczenia μ i μ' według §. 90. (rys. 3. do 13). W każdym z tych rysunków wykreśliśmy dla danego węzła wielobok sił n. p. w rys. 4. dla węzła 1 siły $\frac{I}{s}$ dla prętów 13, 12, 10 zawsze w porządku tym, w jakim natrafiamy pręty, posuwając się, jak wskazówka na zegarze.

Dalej kreślimy kierunki tych sił w odstępach $\varepsilon \delta$ w podziałce $\frac{1mm}{100kg/cm^2}$, licząc dodatnie $\varepsilon \delta$ na prawo, ujemne na lewo; kierunki te wyciągnąć należy od razu tuszem. Siły te składamy teraz zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy tymczasowe położenie wypadkowej. Teraz przesuwamy kierunki o μ' , które nam jednak jeszcze nie jest znane, przyjmujemy więc μ w przybliżeniu, korzystając z rów. 305), μ i μ' , leżące na prawo od wypadkowej, uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne i przesuwamy odpowiednio kierunki sił w pierwszym wypadku na lewo, w drugim na prawo. Dla przesuniętych sił kreślimy znów wielobok sznurowy i otrzymujemy poprawiony kierunek wypadkowej. Teraz sprawdzamy, czy dla jednego pręta μ otrzymane z jednego rysunku równa się μ' w drugim, n. p. czy odstęp wypadkowej 1 w rys. 4. (węzeł 1) od siły 3, więc $2\mu_3$ równa

się podwójnemu odstępowi wypadkowej 3 (rys. 6.) i poprawiamy rysunki te dopóty, aż tę zgodność osiągniemy; wtedy odczytujemy μ z rysunków według podziałki $\epsilon \delta$ (tu $\frac{1 \text{ mm}}{100 \text{ kg/cm}^2}$). Wpisaliśmy wartości te w tabliczkę w rubrykach μ i μ' . Na podstawie rów. 305 obliczamy stąd wręście v_1 i v_1' , natężenia drugorzędne na obu końcach pręta.

§. 91. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów.

Jeśli niektóre pręty są mimośrodkowo utwierdzone, to powstają wskutek tego dotatkowe natężenia, a oprócz tego zmieniają się natężenia drugorzędne.

Nazwijmy odstęp osi pręta od węzła c , dodatnie lub ujemne wedle tego, czy wskutek tego koniec pręta zgina się na prawo lub lewo, to odnośne momenty są $M=Sc$ i $M'=Sc'$, a według 300)

$$\tau_c = \frac{(2M - M')s}{6\epsilon I} = \frac{(2c - c')Ss}{6\epsilon I} \dots \dots \dots 307)$$

Kąty zmieniają się więc nie tylko wskutek odkształcenia prętów, ale i mimośrodkowego utwierdzenia. Konstrukcyja, wskazana w poprzednim paragrafie, mało się zmienia, mianowicie każde poprzednie δ powiększa się o τ_c , każde następne pomniejsza się o tę ilość, a więc w rys. 104 i 105, posuwamy kierunki siły o τ_c na prawo. Zresztą konstrukcyja się nie zmienia. W ten sposób otrzymujemy natężenia drugorzędne, oprócz tego obliczamy wprost natężenia, powstałe wskutek mimośrodkowego utwierdzenia; mają one zwykle znak przeciwny tak, że natężenia tę po części się znoszą.

§. 92. Wpływ przekroju prętów.

Aby zbadać wpływ przekroju prętów na natężenia drugorzędne, pomyślny, że momenty bezwładności I wszystkich prętów stały się n razy większe, a przekrój ich A i odstęp skrajnej warstwy od osi pozostał niezmienny, to przez to μ się nie zmniejsza, natężenia drugorzędne pozostaną te same. Przypuśćmy teraz, że także wszystkie A stały się n razy większe, e pozostały te same, wtedy natężenia stały się n razy mniejsze, a więc i δ i μ n razy mniejsze, zatem natężenia zmniejszyły się n razy. Jeżeli zaś A nie zmienimy, lecz e stanie n razy większem, to natężenia n razy wzrosną.

Z powyższego widzimy, że natężenia drugorzędne są w prostym stosunku proporcjonalne do szerokości prętów i na-

teżeń pierwszorzędnych, a w odwrotnym do przekroju prętów. A zatem chcąc uniknąć wielkich nateżeń drugorzędnych, należy robić pręty tak wąskie, jak to pozwala dokładne połączenie nitami i wzgląd na wyboczenie prętów ciśnionych.

Ponieważ w mostach dla małych rozpiętości, szerokości prętów są w stosunku do ich długości największe, więc też przy takich mostach powstają największe nateżenia drugorzędne.

§. 93. Wpływ obciążenia.

Jeżeli na belkę działa ciężar ruchomy, to powstaje pytanie, dla jakiego obciążenia powstają największe nateżenia drugorzędne. Najprędzej wyznaczyć je możemy zapomocą linii wpływowych. Wprawdzie tu metoda linii wpływowych nie da się ściśle zastosować, bo tu zmiany ramion momentów wskutek odkształceń sprężystych nie są w stosunku do wymiaru prętów nadzwyczaj małe, ale i cała powyższa teoria jest tylko przybliżoną, możemy więc równem prawem używać linii wpływowych. W tym celu należałoby badać wpływ ciężaru $P=1$, zaczepionego w pojedynczych węzłach; badanie takie byłoby jednak za żmudne. Winkler doszedł przytem do wyniku, że w ogóle można przyjąć, że nateżenia drugorzędne są największe dla tego samego obciążenia, co pierwszorzędne.

§. 94. Wpływ ustroju belki.

Winkler badał nateżenia drugorzędne dla rozmaitych belek kratowych; my tu podamy tylko wyniki, do jakich on doszedł.

W belce kratowej równoległej o kracie prostokątnej powstają nateżenia drugorzędne, wynoszące w pasach 10 do 24%, w kracie równoramiennej 5—14% pierwszorzędnych. Nateżenia drugorzędne w kracie są również w pierwszym przypadku większe, niż w drugim.

Jeśli belki kratowe o kracie wielokrotnej obciążymy tak, że tylko jeden układ jest obciążony, powstają bardzo znaczne nateżenia drugorzędne w pasach. Winkler otrzymał w pewnym wypadku nateżenia drugorzędne, sięgające do 88% pierwszorzędnych, średnio 45%. Przy obciążeniu wszystkich węzłów otrzymał on tylko nateżenia, wynoszące 12%.

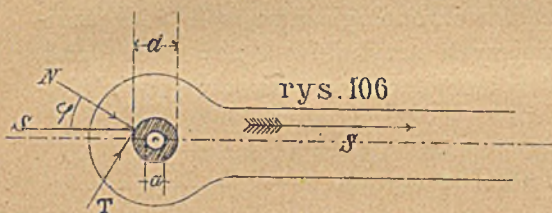
Jeżeli przytem krzyżulce są połączone, natężenia drugorzędne wzrastają jeszcze bardziej. Winkler otrzymał w pasach natężenia drugorzędne, wynoszące 27 do 113%, przeciętnie 65%, w krzyżulcach przeciętnie 51%.

Na średniej podporze belek ciągłych powstają znaczne natężenia drugorzędne w pasie zwłaszcza dolnym, natężenia te mogą być dwa razy większe, niż w innych częściach belki.

§. 95. Połączenia przegibne.

Jeżeli pręty belki kratowej połączone są przegibnie, to jednak obrót pręta około sworznia nastąpi dopiero wtedy, gdy

moment M_r , wywołany tarcie, mniejszy jest niż moment węzłowy M , obliczony poprzednim sposobem. Siła S (rys. 106.) rozkłada się na $N = S \times \text{dost} \varphi$ i $T = S \text{wst} \varphi$



$= N \text{st} \varphi$, przyczem φ jest kąt tarcia, więc $\text{st} \varphi = f$. Jeżeli wykreślimy promieniem a koło, to dopóki kierunek siły S przecina koło, nie może ruch nastąpić, a zatem największy mimośród możliwy jest $a = \frac{d}{2} \text{wst} \varphi$ 308)

Mimowśród ten największy możemy odrazu obliczyć.

Wyznaczenie więc natężeń drugorzędnych pozostaje takie samo, jak wprzódy, tylko baczycь musimy, że *najw* $M_r = Sa$.

Z powyższego wynika, że aby natężenia były jak najmniejsze, powinny być jak najcieńsze sworznie, o ile tylko wytrzymałość materiału na to pozwala. Tam więc, gdzie natężenia drugorzędne są wielkie, dadzą się urządzeniem połączeń przegibnych zmniejszyć natężenia drugorzędne, ale tylko do pewnej granicy, zależnej od wielkości średnicy sworznia. Na każdy sposób widzimy, że nawet przy użyciu połączeń przegibnych nie dadzą się natężenia drugorzędne zupełnie usunąć.

DODATEK.

LITERATURA.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.

1. Ogólne dzieła.

- Rebhann: *Theorie der Holz- und Eisenconstructionen*. Wien 1856.
- Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.
- Laisle i Schübler: *Der Bau der Brückenträger*. Stuttgart 1857. 4 wyd. 1876.
- Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część. Paryż 1862.
- Scheffler: *Ueber Gitter und Bogenträger*. Brunswik 1862.
- Culmann: *Die graphische Statik*. Zurych 1866. 2 wyd. 1875.
- Winkler: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Praga 1867.
- Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.
- Ott: *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. Praga 1870. 4 wyd. 1885.
- Ritter W.: *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1871. 2 wyd. 1883.
- Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1872. 2 wyd. 1878—1891.
- Weyrauch: *Allgemeine Theorie der continuirlichen und einfachen Träger*. Lipsk 1873.

- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874. 2 wyd.
- Winkler: *Vorträge über Brückenbau I. Heft Aeussere Kräfte gerader Träger*. 1875. 3 wyd. 1886.
- Ritter: *Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik*. Hannover 1876.
- Jay du Bois: *The elements of graphical statics and their application to framed structures*. Nowy York 1875. 2 wyd. 1877.
- Winkler: *Vorträge über Brückenbau. II. H. Innere Kräfte gerader Träger*. 2 wyd. 1881.
- Eddy: *Researches in graphical statics*. Nowy York 1878., tłóm. niem. 1880.
- Castigliano: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turyn 1879.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses*. Nowy York 1880.
- Chalmers: *Graphical determination of forces in engineering structures*. Londyn 1881.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaft II. B. Der Brückenbau*. Lipsk 1882. 2 wyd. 1886—1890.
- Stelzel: *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den kontinuierlichen Träger*. Gradziec 1882.
- Weyrauch: *Theorie elastischer Körper*. Lipsk 1884.
- Résal: *Ponts métalliques*. Paryż 1885—1889.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*. Lipsk 1886. 3 wyd. Lipsk 1904.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen*. Berlin 1879. 2 wyd. 1887—1891. 3 wyd. Stuttgart 1905.
- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée*. Paryż 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung der österr. Handelsministeriums*. Wiedeń 1886.
- Koehlin: *Applications de la statique graphique*. Paryż 1889.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik II. Th. Das Fachwerk*. Zurych 1890. *III. Th. Der Kontinuirliche Balken*. Zurych 1900.
- Keck W.: *Die Vorträge über die Elasticitätslehre*. Hanower 1893.

- Johnson: *The theory and practice of modern framed structures*. Nowy York 1894.
Ostenfeld: *Die Technische Statik*. Lipsk 1904.

2. Belka ciągła.

- Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement exposés*. *Comptes rendus*. 1857.
Winkler: *Beiträge zur Theorie der continuirlichen Brückenträger*. *Civilingenieur*. 1862.
Schmidt: *Ueber die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte*. *Allg. Bauz.* 1866.
Lippich: *Theorie des continuirlichen Trägers konstanten Querschnittes*. *Allg. Bauz.* 1871.
Šolin: *Geometrische Theorie der continuirlichen Träger*. *Mittheil. d. Arch. u. Ing. Ver. in Böhmen*. 1873., 1874.
Greene: *Graphical method for the analysis of bridge trusses extended to continuous girders and draw spans*. Nowy York 1875.
Meriman: *On the theory and calculation of continuous bridges*. Nowy York 1876.
Schäffer: *Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper*. *Zeit. f. Bauw.* 1876.
Kleitz: *Note sur les calculs de stabilité des poutres continues, ayantes des moments d'inertie variables*. *An. d. ponts et chaus.* 1876., 1877.
Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych*. *Pam. tow. nauk ścisłych*. Paryż 1876., to samo po franc. *Ann. d. pon. et cha.* 1882.
Krohn: *Berechnung continuirlicher Fachwerksträger auf Grund der Deformationen der einzelnen Fachwerkstäbe*. *Civilingenieur*. 1880.
Landsberg: *Beitrag zur graphischen Berechnung continuirlicher Träger*. *Centr. der Beuver.* 1881.
Rytiř: *Der continuirliche Balken*. *Allg. Bauzeit.* 1882.
Müller Breslau: *Infuenzlinien für den continuirlichen Träger auf drei Stützen*. *Wochenb. f. Arch. u. Ing.* 1883.
Thullie: *Graphische Bestimmung der im continuirlichen Gitterträger mit 2 Feldern wirkenden Kräfte auf Grund der*

- Durchbiegung.* (Woch. der Arch. u. Ing. 1884. i po polsku Przegl. Techn. 1887).
- Šolin: *Zur Theorie des kontinuierlichen Trägers veränderlichen Querschnittes.* Civilingenieur. 1885.
- Šolin: *Theorie zevnitřnich sil trámu přímých,* Praga 1885.
- Steiner: *Über den Einfluss einer Erwärmung der Gurte auf den kontinuierlichen Träger.* 1887., 1888.
- Müller-Peterwitz: *Einflusslinien für kontinuierliche Träger.* Deutsche Bauz. 1888.
- Thullie: *Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte des kontinuierlichen Trägers mit drei Stützpunkten.* Woch. d. österr. Ing. u. Arch. 1891.
- Cart et Portes: *Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence.* Paryż 1895.
- Griot G.: *Interpolierbare Tabellen zum raschen Auftragen der Einflusslinien für Momente und Scheerkräfte.* Zurych 1904.
- Ritter Dr. W.: *Anwendungen der graphische Statik. III. Th. Der kontinuierliche Balken.* Zurych 1900.
- Vierendeel: *Cours de stabilité des constructions, t. 3. Ponts continus* Leodyum. 1901.
- Francke Adolf: *Der kontinuierliche Balken mit veränderlichem Querschnitte.* Zeitsch. f. Architektur. 1903.

3. Belki kratowe statycznie niewyznaczone.

- Fränkel: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme* Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1882.
- Müller Breslau: *Über die Anwendung des Principes der Arbeit in der Festigkeitslehre* Woch. f. Arch. und Ing. 1883.
- Mohr: *Über das sogen. Princip der kleinsten Deformationsarbeit* Woch. f. Arch. u. Ing. 1883.
- Weyrauch: *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Körper.* Woch. f. Ar. und Ing. 1884.
- Krohn: *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen,* Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1884.
- Melan: *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1884.
- Steiner: *Theorie statisch unbestimmter Systeme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1886.

Müller Breslau: *Theorie statisch unbestimmter Systeme. Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1887.*

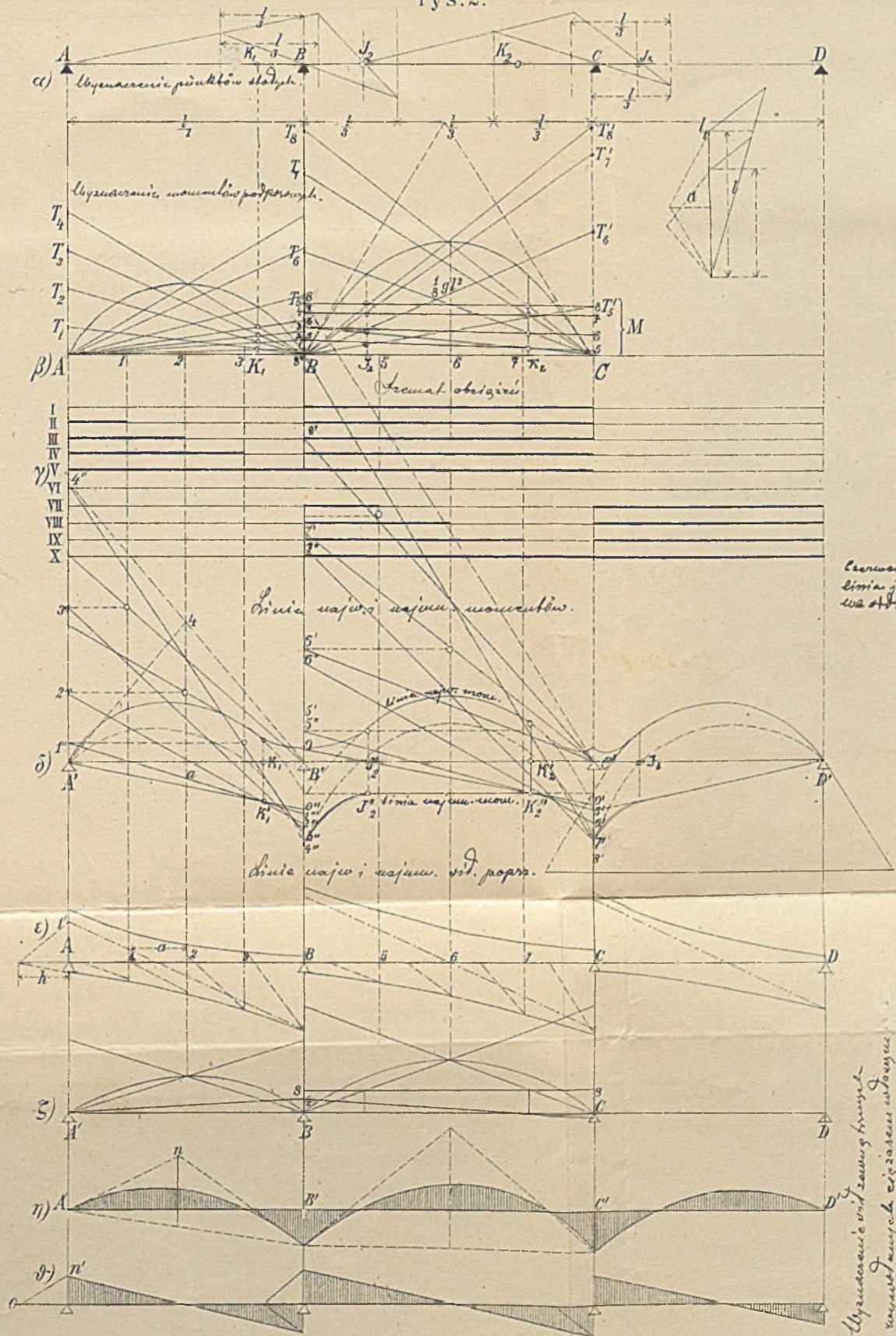
4. Natężenia drugorzędne.

- Manderla: *Die Berechnung der Secundärspannungen. Allg. Bauz. 1880.*
- Landsberg: *Beitrag zur Theorie der Fachwerke. Zeit. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1885., 1886.*
- Müller Breslau: *Zur Theorie der Biegungsspannungen im Fachwerksträger. Allg. Bauz. 1885., 1886.*
- Ritter W.: *Die secundären Spannungen in Fachwerken. Schw. Bauz. 1885.*
- Manderla: *Uiber die Wirkungsweise gelenkförmiger Knotenverbindungen. Allg. Bauz. 1886.*
- Engesser: *Uiber die Biegungsspannungen der Fachwerken. Zeit. d. Ver. deutsch. Ingen. 1888.*
- Mohr: *Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenpunkten. Civilingenieur. 1892. str. 578.*
- Engesser: *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. I. Zusatzkräfte. Berlin 1892. II. die Nebenspannungen. Berlin 1893.*



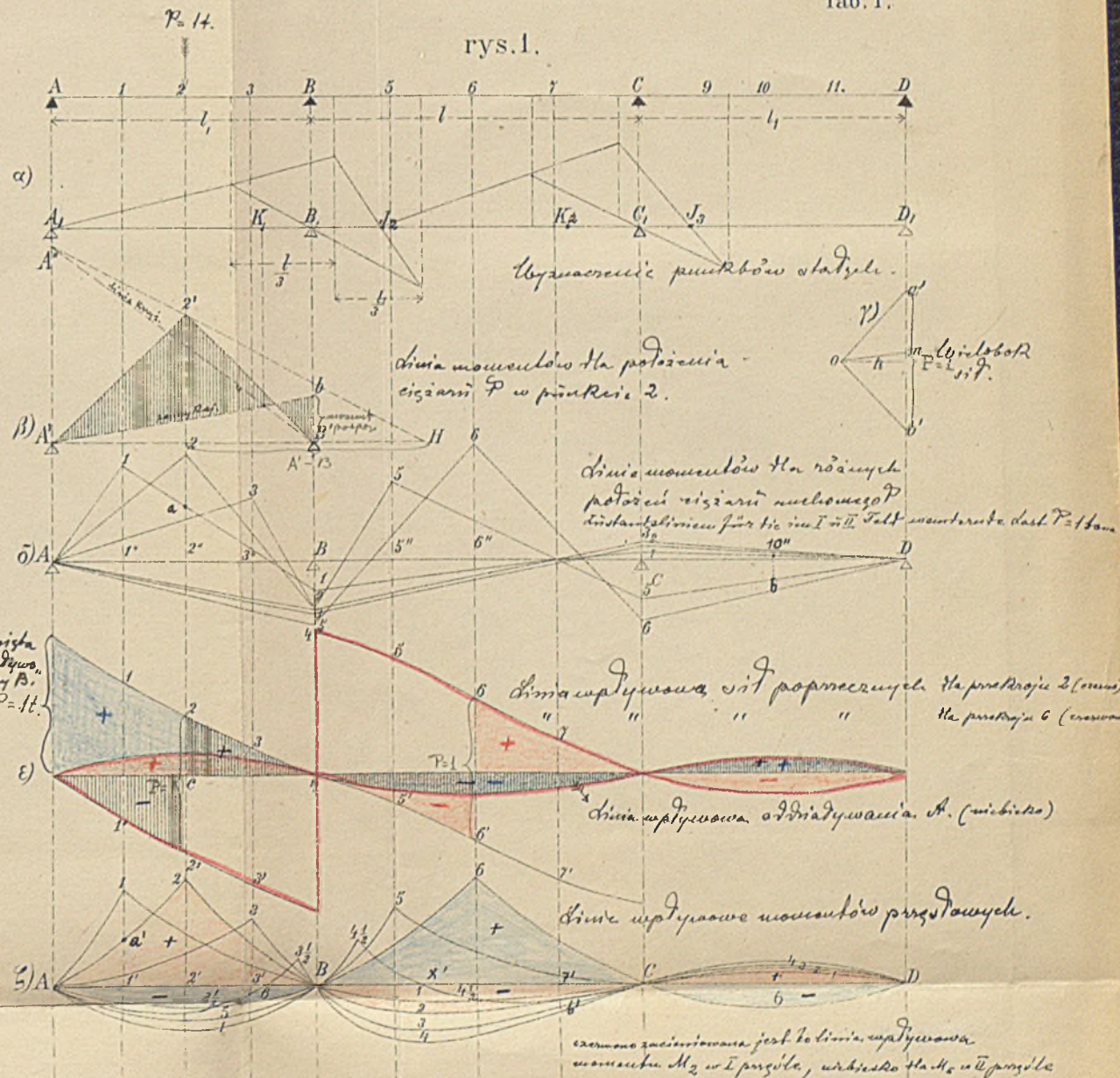
Wyznaczenie najw. i najm. sił zewnętrżnych

rys. 2.

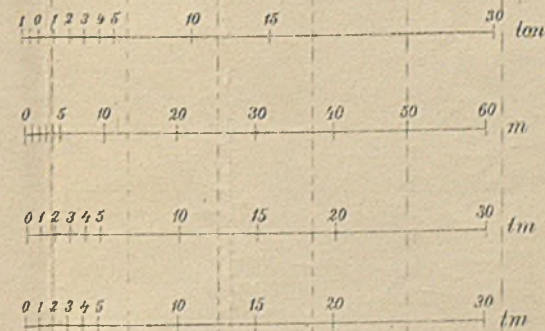


Wyznaczenie linii wpływowej

Tab. I.



Belka ciągła trzyprzęsłowa o przekroju stałym



Linia wpływowa na momentu podporowego w B.



Belka ciągła o przekroju zmiennym o trzech przęsłach.

rys. 1

Najw. momenty na
podstawie § 26

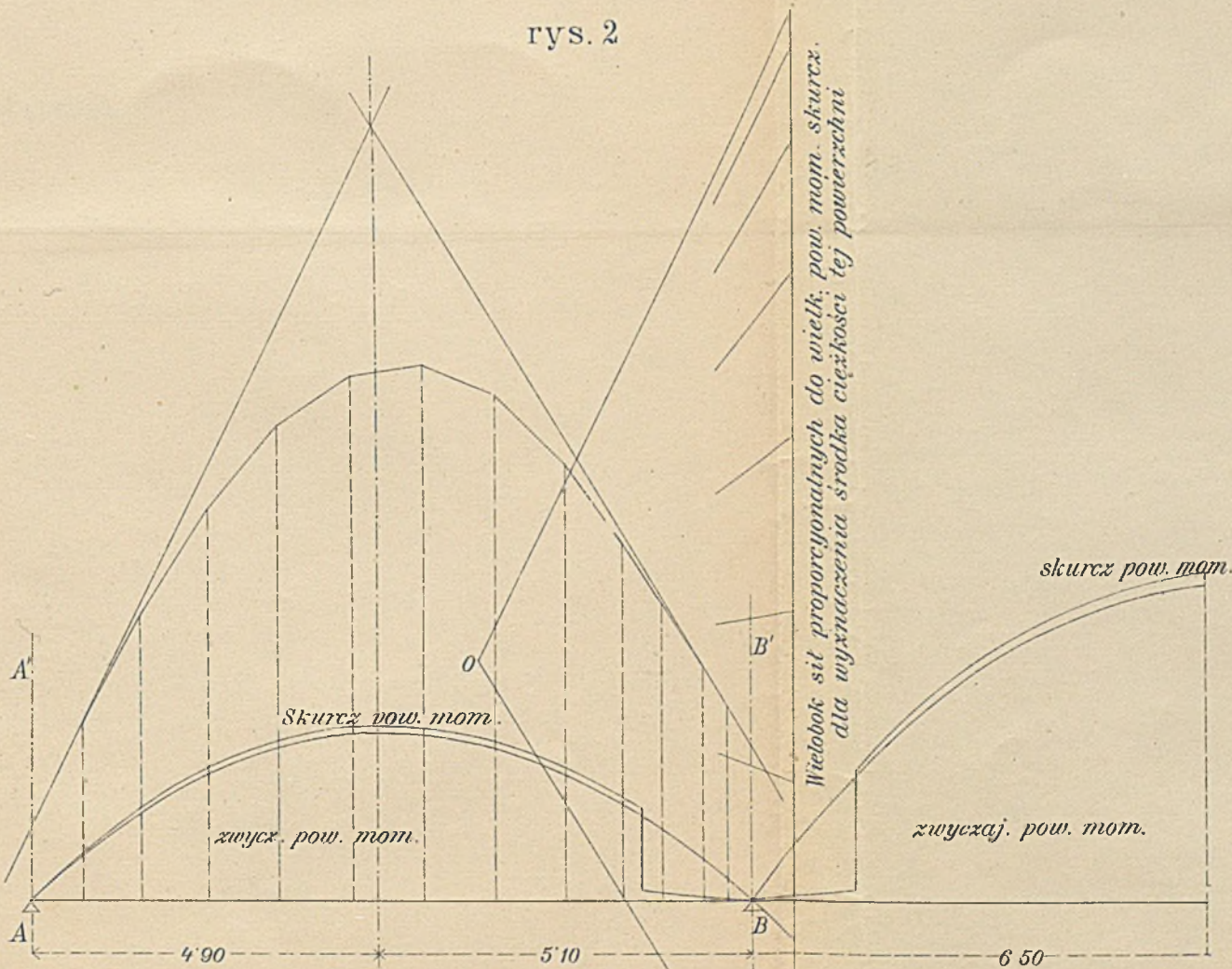
Najw. mom. dodat. z powodu
ciąż. ruchomego

momenty z powodu
ciąż. stat.

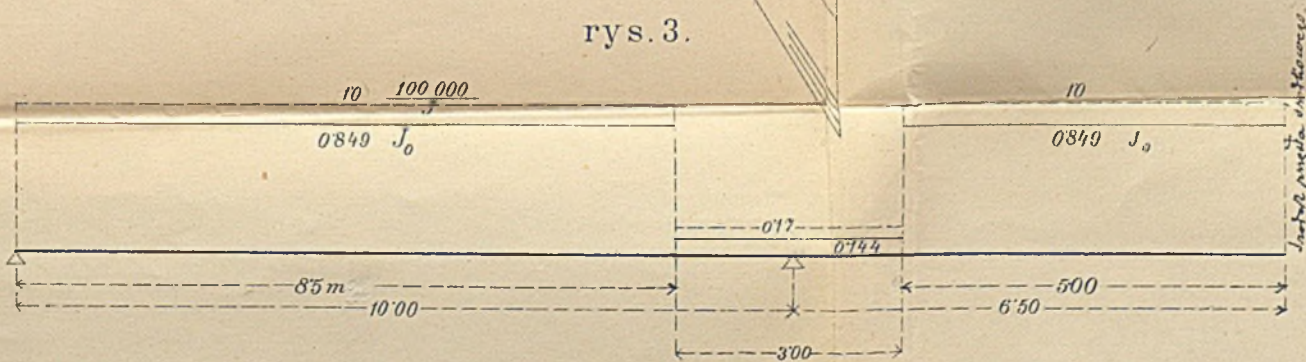
momenty
dokładne

Najw. momenty ujemne
z powodu cięż. ruch

rys. 2

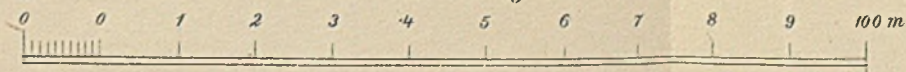


rys. 3.

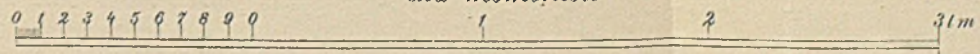


Podziałki :

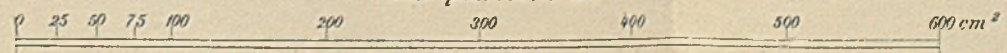
dla długości



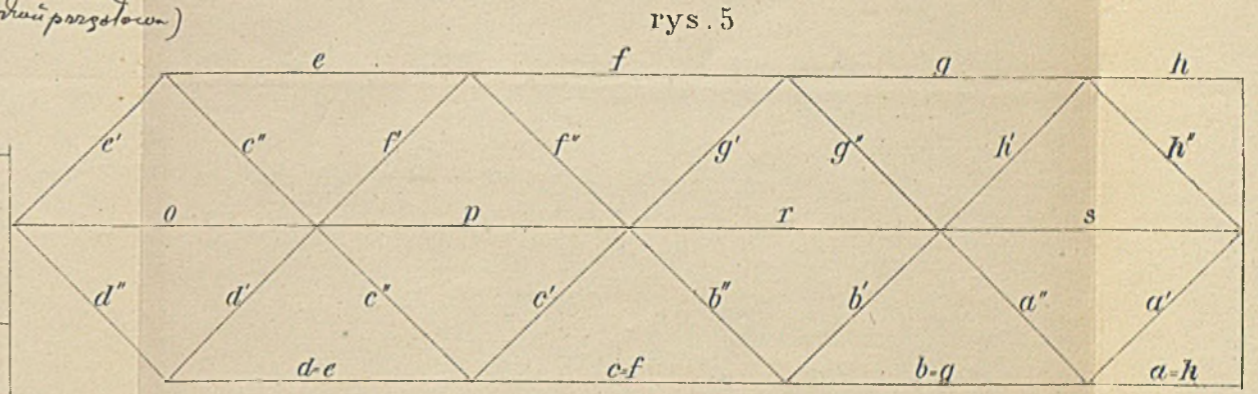
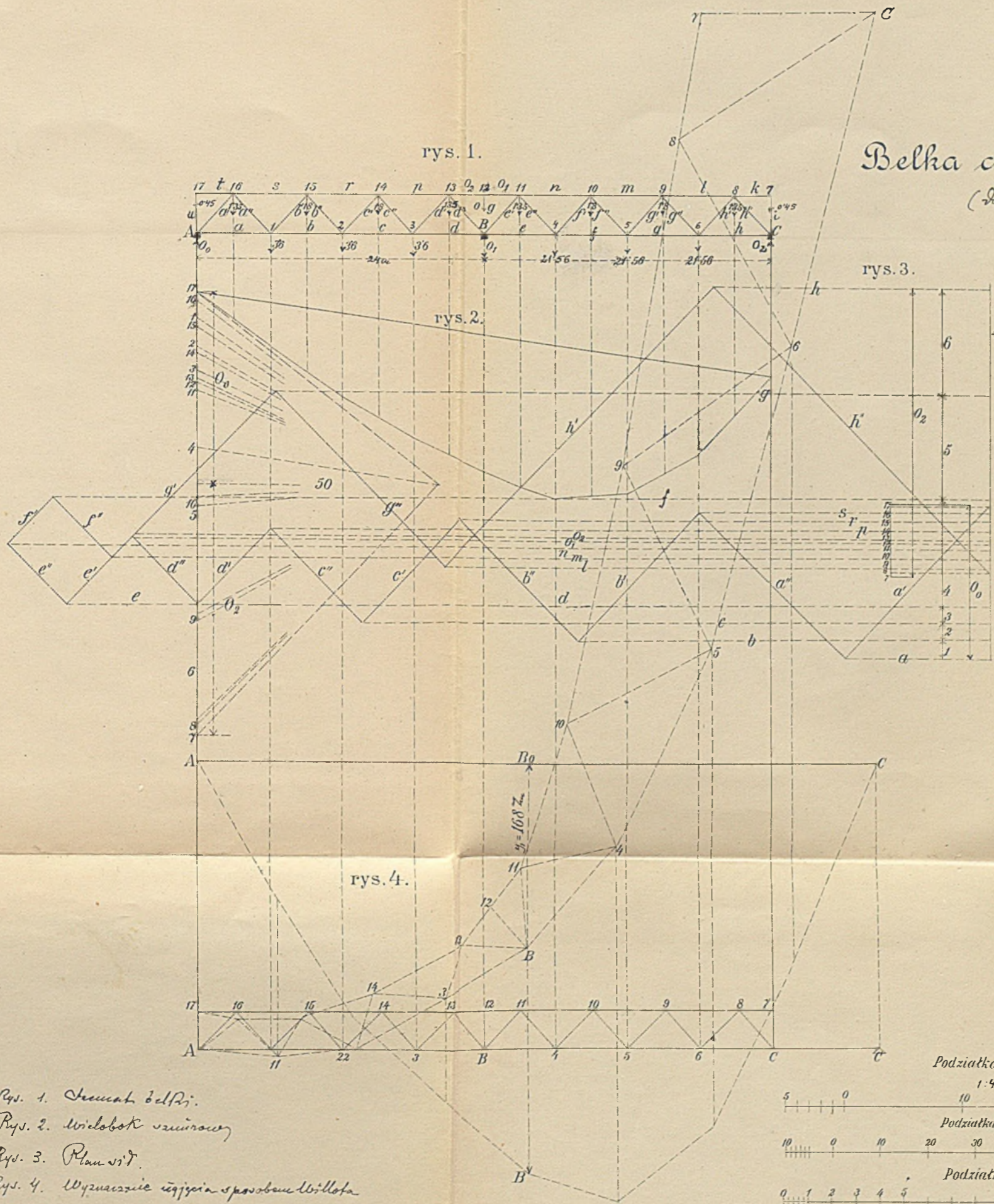
dla momentów



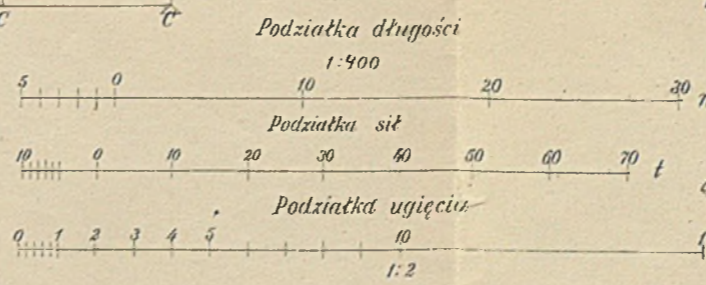
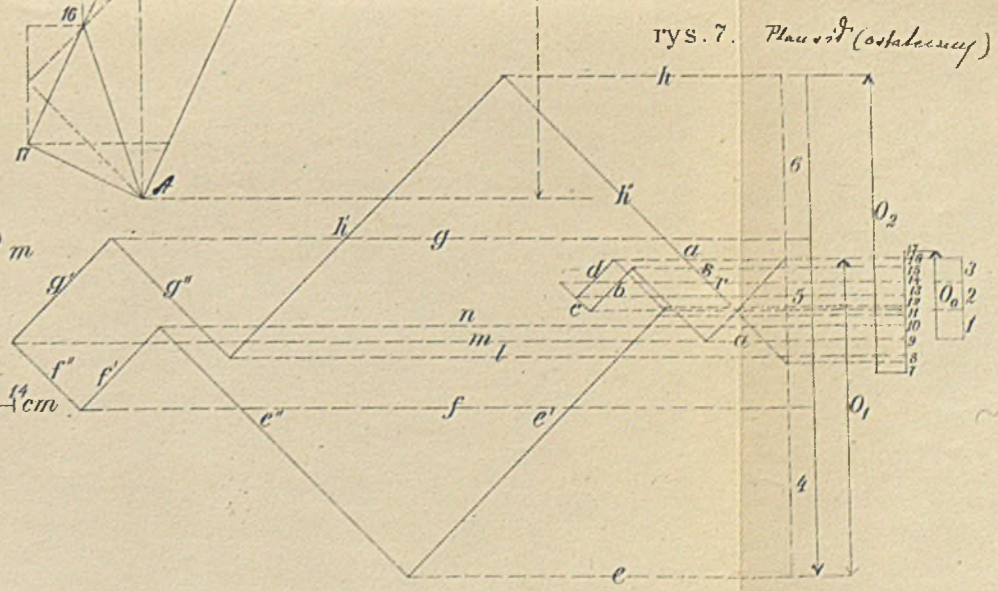
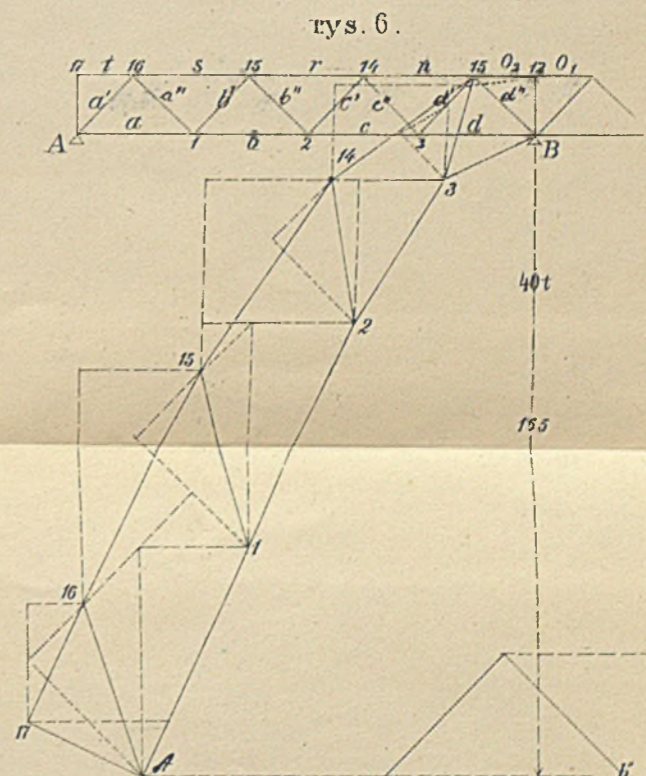
dla powierzchni



Belka ciągła kratowa (dwuprzeglona)



rys. 5. Plan wid.
rys. 6. Wyznaczenie ugięcia sposobem Willota
Na przypuszczeniu że w B brata widza $O_1 = 40t$ do góry



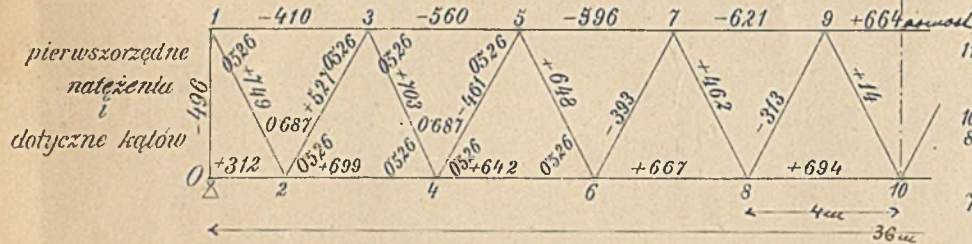
rys. 1. Szczyt belki.
rys. 2. Wielobok wzmacniający
rys. 3. Plan wid.
rys. 4. Wyznaczenie ugięcia sposobem Willota
Na przypuszczeniu, że belka jest tylko opartą w dwóch podporach skrajnych A i C.



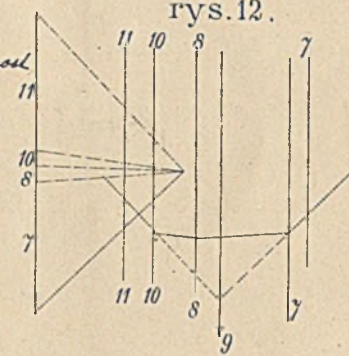
Natężenia i przemieszczenia

Tab. IV.

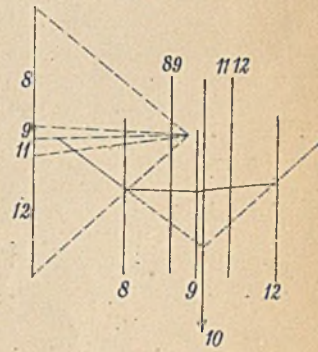
rys. 1.



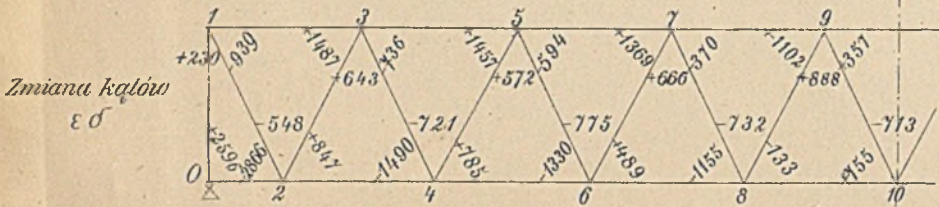
rys. 12.



rys. 13.

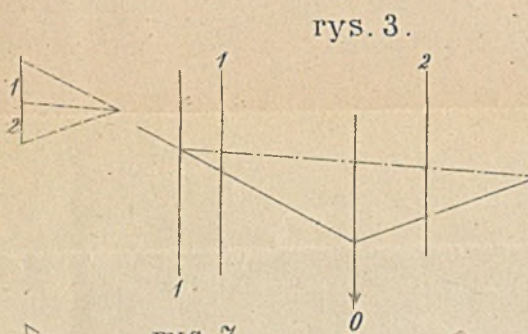


rys. 2.

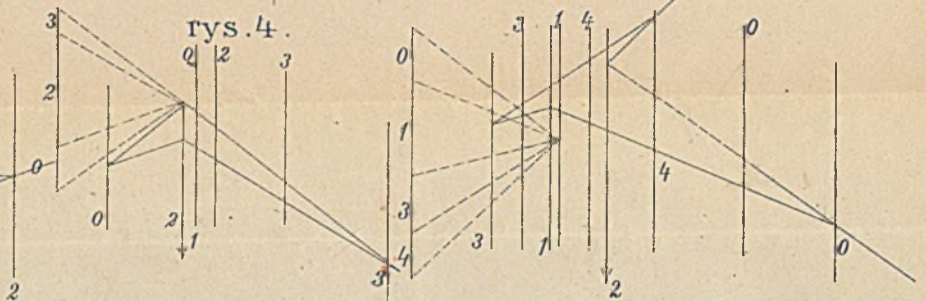


rys. 5.

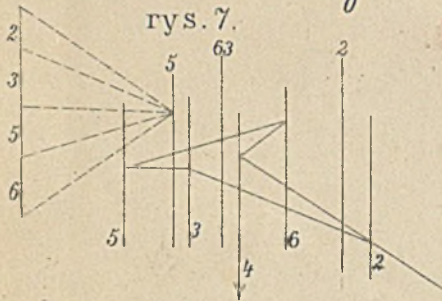
rys. 3.



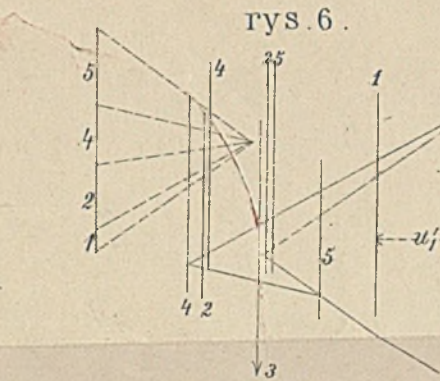
rys. 4.



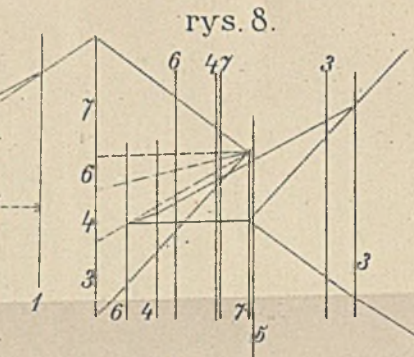
rys. 7.



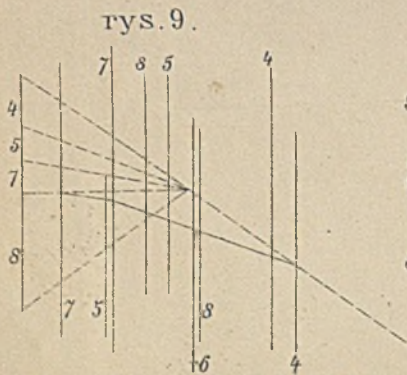
rys. 6.



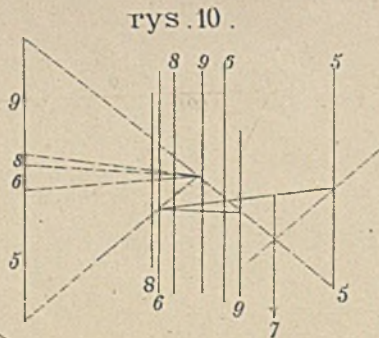
rys. 8.



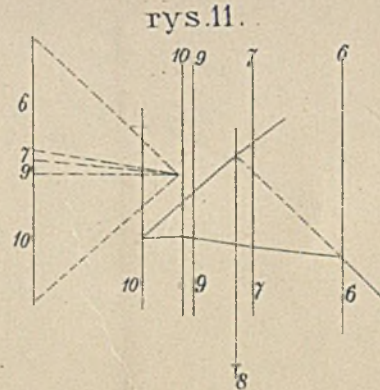
rys. 9.



rys. 10.

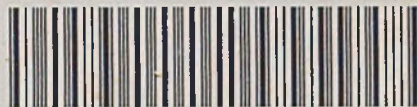


rys. 11.



Podziałki: dla $\frac{J}{J} \frac{1cm^2}{\frac{1}{2}mm}$; dla $\epsilon \sigma: \frac{100}{1mm}$

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 11 - 13097



Dyr.1 16295/I/2