ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: AUTOMATYKA z. 19 Nr kol. 317

JAN PIECHA

Katedra Automatyzacji
Procesów Przemysłowych

O DEKOMPOZYCJI FUNKCJI PRZEŁĄCZAJĄCYCH

Streszczenie. W artykule omówiono trzy modele dekompozycji funkcji przełączających. Przedstawiono sposób podejścia do problemu minimalizacji funkcji przełączających podlegających dekompozycji według zdefiniowanych schematów.

1. Terminologia, oznaczenia

Niech funkcja f będzie funkcją przełączającą opisaną na zbiorze zmiennych X o mocy n, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. "Podziałem" λ na zbiorze X jest rodzina niepustych, rozłącznych podzbiorów tworzących zbiór X

$$\lambda: A \cup B \cup C \cup \ldots = X$$

oraz

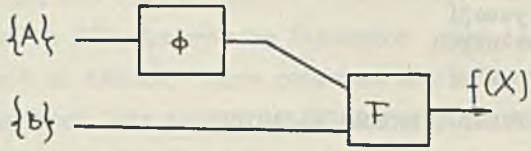
$$\lambda: A \cap B \cap C \cap \ldots = \emptyset$$

Niech $\{A,B\}$ będzie podziałem na zbiorze X.

Określenie: O funkcji $f(X)$ mówimy, że podlega dekompozycji lub zbiór X jest funkcyjnie rozdzielny, ze zbiorem ograniczonym (związanym) A i zbiorem wolnym B, wtedy gdy istnieją funkcje F i ϕ takie, że:

$$f(X) = F\left[\phi(A), B\right] \ldots \qquad (1)$$

Jeśli funkcja przełączająca jest dekomponowalna wg schematu przedstawionego wyrażeniem (1) to mówimy, że funkcja podlega dekompozycji prostej. Wyrażenie (1) można zilustrować schematem przedstawionym na rys. 1.1.



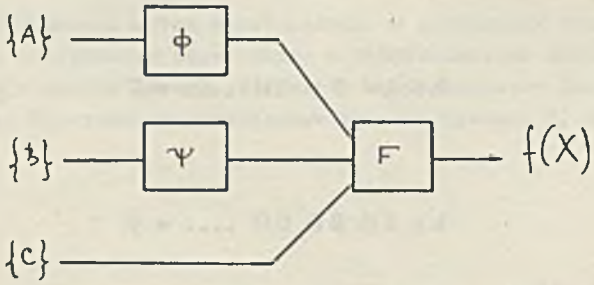
Rys. 1.1

Istnieją również bardziej złożone modele dekompozycji jak:

dekompozycja wielokrotna

$$f(X) = F\left[\Phi(A),\ \Psi(B),\ \ldots,\ C\right] \tag{2}$$

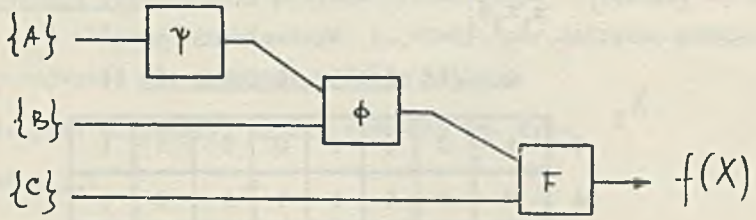
co można zilustrować schematem przedstawionym na rys. 1.2.



Rys. 1.2

dekompozycja iteracyjna

$$f(X) = F\left[\Phi\left[\Psi(A),\ B\right], C\right] \tag{3}$$



Rys. 1.3

gdzie:

$\varphi, \psi, \ldots$ to funkcje ograniczenia podzbiorów.

Rozpatrzmy kolejno przedstawione modele dekompozycji.

2. Prosta alternatywna dekompozycja

Dyskusję metody rozpocznijmy od prostego przykładu. Niech będzie dana funkcja

$$f(X) = \sum(0,5,6,7,10,11,12,13).$$

Okazuje się, że można znaleźć funkcję

$$\varphi(A) = \sum(1,2,3,4,5), \quad X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

gdzie:

$$A = \{x_1, x_3, x_4\}, \quad X \setminus A = B = \{x_2\}$$

oraz

$$f(X) = F[\varphi(A), B] = \sum(0,3)$$

Znajdowanie tych zależności "metodą rebusową" jest bardzo trudne i dla większej liczby zmiennych niemal niemożliwe.

Rozpatrzmy następującą siatkę Karnaugha (zwaną matrycą podziału): rys. 2.1

χ_2 \ $x_1x_3x_4$	0	1	2	3	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	1	0	0

f(X)

Rys. 2.1

Jak widać jeden wiersz jest negacją drugiego. Przyjmijmy, jeden z wierszy np. drugi, opisuje pewną funkcję χ na zbiorze $\{x_1, x_3, x_4\} = A$, czyli wiersz pierwszy odpowiada stanowi $\bar{\chi}$. Można łatwo wykazać słuszność relacji:

$$\phi(A) \Longleftrightarrow \chi(A)$$

Wprowadzenie dodatkowych wierszy składających się z samych jedynek lub samych zer nie zmieni wyrażenia $\phi(A)$.

<u>Twierdzenie 2.1</u>. Funkcja $f(X)$ podlega dekompozycji $F[\phi(A),B]$ ze zbiorem wolnym B i zbiorem ograniczonym A, wtedy gdy matryca podziału posiada <u>cztery lub mniej znaczące rodzaje wierszy</u>.

Dowód:

$$f(A,B) = F[\phi(A),B] = F[0,B]\,\phi(A) + F[1,B]\,\phi(A)$$

- gdy $F[0,B] = 0, F[1,B] = 0$, wiersz składa się z samych zer,
- gdy $F[0,B] = 0, F[1,B] = 1$, wiersz jest pewną kombinacją zer i jedynek, która odpowiada funkcji $\phi(A)$,
- gdy $F[0,B] = 1$, $F[1,B] = 0$, wiersz jest kombinacją zer i jedynek, która odpowiada funkcji $\phi(A)$,
- gdy $F[0,B] = 1$, $F[1,B] = 1$, wiersz składa się z samych jedynek.

Twierdzenie 2.1 jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym.

Twierdzenie 2.2. Funkcja podlega dekompozycji $F[\varphi(A),B]$ ze zbiorem wolnym B i zbiorem ograniczonym A, wtedy, gdy matryca podziału posiada co najwyżej dwa znaczące rodzaje kolumn.

Dowód: jest oczywisty, wynika z dowodu tw. 2.1.

Przykład 2.1

Dana jest

$$f(X) = \sum(0,1,2,3,8,10,17,19)$$

gdzie:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Znaleźć funkcję ograniczenia $\varphi(A)$ oraz $F(\varphi,B)$.
Należy sprawdzić $2^n - n - 2$ przypadków nietrywialnych podziałów. Może się zdarzyć, że liczba dopuszczalnych podziałów wynosi 0, 1 lub >1. 0 - oznacza, że funkcja nie podlega dekompozycji, 1 - odpowiada przypadkowi prostej, alternatywnej dekompozycji, >1 - przypadek dekompozycji wielokrotnej lub iteracyjnej. Wracając do przykładu - podział: $x_1, x_2 / x_3, x_4$, przedstawia siatka Karnaugha przedstawiona na rys.2.2

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	10	11
00	1	1	1	1
01				
10		1	1	
11	1			1

f(X)

Rys. 2.2

Zgodnie z twierdzeniem 1.2 i 1.1 funkcja podlega dekompozycji ze zbiorem ograniczonym $\{x_3, x_4\}$ i zbiorem wolnym $\{x_1, x_2\}$

$$A = \{x_3, x_4\}, \quad B = \{x_1, x_2\}$$

niech

$$\phi(A) = \bar{x}_3 x_4 + x_3 \bar{x}_4$$

$$\bar{\phi}(A) = x_3 x_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Uproszczeniem jest tu niewątpliwie możliwość wykorzystania negacji funkcji ograniczenia $\bar{\phi}(A)$, co jest szczególnie jaskrawe w przypadku, gdy wyrażenie $\bar{\phi}(A)$ jest skomplikowane. Dla zdefiniowania $\bar{\phi}(A)$ należy wybrać wiersz dający wyrażenie prostsze. Może się zdarzyć, że nieistnieje podział pozwalający na dekompozycję analizowanej funkcji. W tej sytuacji należy rozwiązania szukać według jednego ze sposobów:

1. Rozpatrujemy przypadek gdy: $x_j = 0$, $x_j = 1$ to znaczy zmniejszamy liczbę zmiennych o $j = 1 \ldots m$ [1] i rozpatrujemy możliwość dekompozycji tak uzyskanych funkcji. Metoda ta wydaje się być bardzo żmudna i wolna.

2. Znajdujemy matryce podziału podlegające dekompozycji, reprezentujące funkcje związane relacją:

$$\bigcap_{i \in \{0 \ldots k\}} F_i(X)$$

lub

$$\bigcup_{i \in \{0 \ldots k,\}} F_i(X)$$

3. Wielokrotna alternatywna dekompozycja

Przypadek ten ma miejsce gdy znajdujemy więcej niż jeden podział analizowanej funkcji. Rozpatrzmy najprostszy przypadek tzn. gdy istnieją dwa podziały funkcji.

Twierdzenie 3.1. Niech:

$$f(X) = f(A,B) = F[\phi(A),B] = G[\psi(B),A]$$

wtedy:

$$f(A,B) = H[\phi(A), \psi(B)]$$

Dowód:

$$f(A,B) = F[\phi(A),B] = F[0,B]\phi(A) + F[1,B]\phi(A)$$

$$= G[\psi(B),A] = G[0,A]\bar{\psi}(B) + G[1,A]\psi(B)$$

dla

$$F[0,B] = 0,\ F[1,B] = 1 \Longrightarrow \phi(A) \quad \ldots \quad (i)$$

$$G[0,A] = 0, G[1,A] = 1 \Longrightarrow \psi(B) \quad \ldots \quad (ii)$$

dla

$$x \in X,\quad X = A \cup B,\ \bigwedge_{x \in X} x:\ f(x) \Longrightarrow f(X)$$

na podstawie (i), (ii)

$$\phi(A) \cup \psi(B) \Longrightarrow f(X)$$

analogicznie:

$$F[0,B] = 1, \quad F[1,B] = 0 \Longrightarrow \bar{\phi}(A)$$

$$G[0,A] = 1, \quad G[1,A] = 0 \Longrightarrow \bar{\psi}(B)$$

$$\phi(A) \cup \bar{\psi}(B) \Longrightarrow f(X), \quad f(X) = f(A,B) = H[\phi(A), \psi(B)]$$

Przykład 3.1

Niech będzie dana funkcja $f(X) = \sum(0,2,3,5,8,10,11,12,14,15)$. Matrycę podziału przedstawia rys. 3.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	10	11
00	1		1	1
01		1		
10	1		1	1
11	1		1	1

f(X)

Rys. 3.1

Jak widać funkcja podlega dekompozycji ze zbiorem ograniczonym $\{x_3, x_4\}$ oraz zbiorem wolnym $\{x_1, x_2\}$. Niech $\phi(x_3, x_4) = \bar{x}_3 x_4$ to $\bar{\phi} = x_3 + x_4$

$$f(X) = F[\phi(x_3, x_4), x_1, x_2] = \phi \bar{x}_1 x_2 + \bar{\phi}(x_1 + \bar{x}_2)$$

Jeśli rozpatrzymy drugi podział, gdzie: $\psi(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2$, $\bar{\psi} = x_1 + \bar{x}_2$ to funkcja

$$f(X) = \phi\psi + \bar{\phi}\bar{\psi} = H[\phi(A), \psi(B)].$$

Twierdzenie 3.2. Niech:

$$f(X) = f(A,B,C) = F[\phi(A),B,C] = G[\psi(B),A,C]$$

wtedy:

$$f(A,B,C) = H[\phi(A),\psi(B),C]$$

Uogólniając twierdzenia 3.1 i 3.2 otrzymamy:

Twierdzenie 3.3. Niech:

$$f(X) = f(A,B,\ldots,C,D) =$$

$$= F[\phi(A),B,\ldots,C,D] = F[\psi(B),A,\ldots,C,D] =$$

$$= H[\chi(C),A,B,\ldots,D)]$$

wtedy:

$$f(A,B,\ldots,C,D) = K[\phi(A),\psi(B),\ldots,\chi(C),D]$$

Twierdzenie 3.4. Niech:

$$f(X) = f(A,B,\ldots,C,D,E) =$$

$$= F[\phi(A,B,\ldots,C)D,E] = G[\psi(A,B,\ldots,D),C,E] =$$

$$= \ldots = H[\chi(A,\ldots,C,D),B,E]$$

wtedy:

$$f(A,B,\ldots,C,D,E) = K[\phi(A),\psi(B),\ldots,\chi(C),\Theta(D),E]$$

4. Iteracyjny model dekompozycji

Twierdzenie 4.1. Niech:

$$f(X) = f(A,B,C) = F\left[\Phi(A,B),C\right] = G\left[\Psi(A),B,C\right]$$

wtedy:

$$f(A,B,C) = F\left[\varrho\left[\Psi(A),B\right],C\right]$$

Słuszność twierdzenia możemy zilustrować następującym przykładem:

Przykład 4.1

Funkcja logiczna opisana na zbiorze sześciu zmiennych $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, dana jest w postaci matryc podziału, przedstawionych na rys. 4.1 i rys. 4.2.

x_2x_4 \ $x_1x_3x_5x_6$															
		1			1	1		1				1			1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1			1	1		1				1			1

f(X)

Rys. 4.1

Zbiór ograniczony $A = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$, zbiór wolny $B = \{x_2, x_4\}$

x_4x_5 \ $x_2x_3x_4x_6$															
		1	1		1	1	1								1
1		1	1	1		1	1			1				1	
1		1	1	1		1	1			1				1	
		1	1		1	1	1								1

f(X)

Rys. 4.2

Zbiór ograniczony $A' = \{x_1, x_5\}$, zbiór wolny $B' = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$
Otrzymujemy:

$$f(X) = F\left[\phi(x_1,x_3,x_5,x_6),x_2,x_4\right] = G\left[\psi(x_1,x_5),x_2,x_3,x_4,x_6\right]$$

Wyróżnić tu można trzy charakterystyczne podzbiory:

$$C = \{x_1, x_5\}, \quad D = \{x_3, x_6\}, \quad E = \{x_2, x_4\}$$

Przyjmijmy:

$$\phi(x_1,x_3,x_5,x_6) = \bar{x}_1\bar{x}_3x_5\bar{x}_6 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_5x_6 + \bar{x}_1x_3x_5\bar{x}_6 + x_1\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_6 +$$

$$+ x_1x_3\bar{x}_5\bar{x}_6 + x_1x_3x_5x_6$$

$$\psi(x_1,x_5) = \bar{x}_1x_5 + x_1\bar{x}_5$$

Rozpatrzmy funkcję $\phi(x_1,x_3,x_5,x_6)$ okazuje się, że można dokonać dekompozycji tej funkcji ze zbiorem ograniczonym $\{x_1,x_5\}$. Rys. 4.3:

x_3x_6 \ x_1x_5			
	1		1
1		1	
	1		1

$\phi(x_1,x_3,x_5,x_6)$

Rys. 4.3

$$\phi(x_1,x_3,x_5,x_6) = \varrho\left[\psi(x_1,x_5),x_3,x_6\right]$$

$$\psi(x_1,x_5) = \bar{x}_1 x_5 + x_1 \bar{x}_5$$

$$f(x_1,x_5,x_3,x_6,x_2,x_4) = F\left[\varrho\left[\psi(x_1,x_5),x_3,x_6\right],x_2,x_4\right]$$

Przypadek ten można uogólnić do sytuacji, gdy stopni kaskady jest k.

5. Zastosowania metody

Przy dużej liczbie zmiennych czas trwania procesu syntezy oraz minimalizacji metodą Mc Cluskey'a jest bardzo długi, metoda staje się mało przydatna. Algorytm minimalizacji Gimpela ze względu na rozbudowaną tablicę pokryć (CC), jest jeszcze bardziej czasochłonny. Dla klasy funkcji podlegających dekompozycji, według przedstawionych schematów, czasy syntezy i minimalizacji sieci logicznych można znacznie skrócić: Zbiór zmiennych X ulega rozbiciu na rozłączne podzbiory. Proces minimalizacji może się odbywać równolegle w poszczególnych podzbiorach. Bardzo istotny jest fakt, że przedstawiony algorytm może być stosowany dla ograniczonej liczby zmiennych, jako że oparty jest na analizie siatek Karnaugha funkcji. Ocena, czy funkcja o dowolnej liczbie zmiennych podlega dekompozycji może być dokonana przy użyciu algorytmu, który przedstawiono w zesz. Nr 20, niniejszej serii.

Innym aspektem zagadnienia jest możliwość realizacji funkcji logicznych na elementach o założonej liczbie wejść. Gdy funkcja podlega dekompozycji wielokrotnej zgodnie z twierdzeniami: 3.3 i 3.4, bierzemy pod uwagę (w-1) ograniczeń f(X), gdzie: w jest liczbą wejść elementu.

Na przykład:

$$f(X) = f(A,B,\ldots\ldots,C,\ldots,D,E) =$$

$$\left.\begin{array}{l} F[\psi(A),B,\ldots\ldots,C,\ldots,D,E] = \\ G[\psi(B),A,\ldots\ldots,C,\ldots,D,E = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H[\chi(C),A,B,\ldots\ldots,D,E] = \end{array}\right\} \text{wejścia } 1 \div (w-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} K[\Theta(D),A,B,\ldots\ldots,C,\ldots,E] = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{wejście } w$$

skąd:

$$f(A,B,\ldots\ldots,C,\ldots,D,E) = M[\varphi(A),\psi(B),\ldots,\chi(C),\ldots,D,E]$$

$\varphi(A),\psi(B),\ldots,\chi(C)$ - pokrywają wejścia od 1 do $(w-1)$

$\ldots D,E,\ldots\ldots$ - pokrywają wejście w.

6. Literatura

[1] R.L. Ashenhurst - The decomposition of Switching Functions Annals Computation Lab. vol. 29 Cambridge Mass Harvard Univ. 1957.

[2] V. Yun-Shen Shen and Archie Mc Kellar. An Algorithm for the Disjunctive Decomposition of Switching Functions. IEEE Transactions on Computers vol. C-19 No. 3 1970.

ABOUT DECOMPOSITION OF SWITCHING FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper presents three models of switching functions. The problem of minimalisation of function which can be decomposed is discused.

ОБ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В статье представлено три модели декомпозиции переключающих функции. Представлено подход к вопросу минимализации переключающих функции, подлежающих декомпозиции согласно определённым снемам.